逻辑与推理

主讲：王亚星、刘夏雷、郭春乐
南开大学计算机学院

https://mmcheng.net/xliu/

致谢：本课件主要内容来自浙江大学吴飞教授、
南开大学程明明教授

课程信息

O'REILLY®
オライリー・ジャパン
TURING 图灵程序设计丛书
深度学习入门
基于Python的理论与实现
Deep Learning from Scratch
[日] 斋藤康毅 著
陆宇杰 译
中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

课程回顾

- 二十世纪初涌现的可计算思想的提出推动了原始递归函数、λ－演算和图灵机等“计算载体”的出现，由于图灵机以机械方式进行“计算”，因此成为了现代计算机理论模型，宣示着自动计算时代的到来，也成为人工智能的“机器载体”。

人工智能概述 →

1.1 可计算思想起源与发展
1.2 人工智能的发展简史
1.3人工智能研究的基本内容

提纲

- 命题逻辑
- 谓词逻辑
- 知识图谱推理
- 因果推理

逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 人类思维活动一个重要功能是逻辑推理，即通过演绎和归纳等手段对现有观测现象进行分析，得出判断。在人工智能发展初期，脱胎于逻辑推理的符号主义人工智能(symbolic AI)是人工智能研究的一种主流学派。

逻辑与推理是人工智能的核心问题

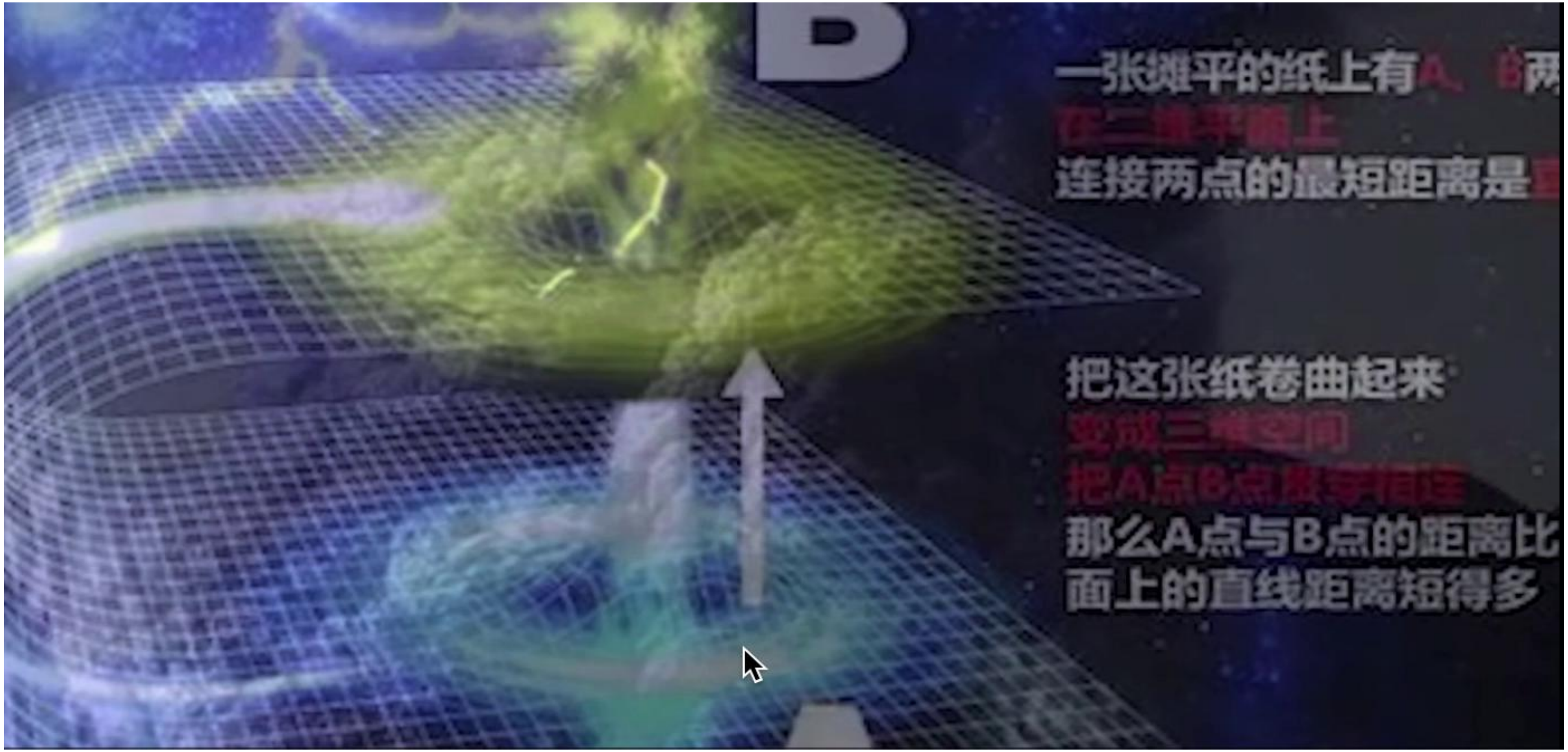
- 符号主义人工智能方法基于如下假设：可通过逻辑方法来对符号及其关系进行计算，实现逻辑推理，辨析符号所描述内容是否正确。

逻辑与推理是人工智能的核心问题

- **在符号主义人工智能中，所有概念均可通过人类可理解的“符号”及符号之间的关系来表示。**
  - 例如：如果使用符号A来表示对象概念、IsCar（）来表示某个对象是否为“汽车”，那么IsCar(A)表示“A是一辆轿车”这样的概念。
  - 注意IsCar(A)由对象A和IsCar（）两部分所构成。
  - 如果A是轿车，则IsCar(A)为正确描述、否则为错误描述。

逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 在符号主义人工智能中，所有概念均可通过人类可理解的“**符号**”及符号之间的**关系**来表示。



命题逻辑

命题逻辑 (Propositional Logic)

- **命题逻辑是应用一套形式化规则对以符号表示的描述性陈述进行推理的系统。**
- **在命题逻辑中，一个或真或假的描述性陈述被称为原子命题，对原子命题的内部结构不做任何解析。**
  - 任何一个命题或为真、或为假
- **若干原子命题可通过逻辑运算符来构成复合命题。**

设置

下面五个陈述，那个是“**假命题**”

A 北京是中国的首都

B 13能被6整除

C x<8

D 存在最大的素数

E $m^2 \geq 0$且$m \in \mathbb{R}$

提交

命题逻辑

- **可通过命题联结词对已有命题进行组合，得到新命题。**
  - 这些通过命题联结词(connectives)得到的命题被称为复合命题(compound proposition)。

命题逻辑

- **可通过命题联结词对已有命题进行组合，得到新命题。**
  - 假设存在命题p和q，下面介绍五种主要的命题联结词：

命题连接符号	表示形式	意义
与(and)	$p \wedge q$	命题合取(conjunction), 即“p且q”
或(or)	$p \vee q$	命题析取(disjunction), 即“p或 q”
非（not）	$\neg p$	命题否定(negation), 即“非p”
条件(conditional)	$p \rightarrow q$	命题蕴含(implication), 即“如果p 则 q”
双向条件 (bi-conditional)	$p \leftrightarrow q$	命题双向蕴含(bi-implication), 即“p 当且仅当 q”

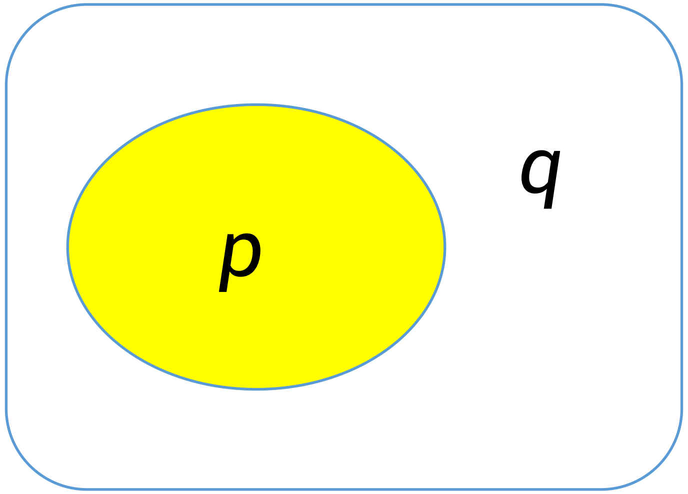
命题逻辑

- 通过真值表来计算复合命题的真假。

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
False	False	True	False	False	True	True
False	True	True	False	True	True	False
True	False	False	False	True	False	False
True	True	False	True	True	True	True

命题逻辑

- “条件”命题联结词中前提为假时命题真假取值
  - “如果p那么q，($p \longrightarrow q$)”定义的是一种蕴涵关系(即充分条件)，也就是命题q包含着命题p（p是q的子集）
  - p不成立相当于p是一个空集，空集可被其他所有集合所包含，因此当p不成立时，“如果p那么q”永远为真。



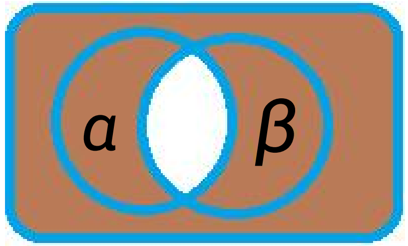
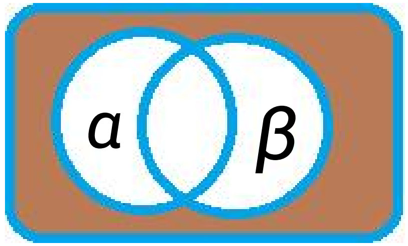
命题逻辑

- **逻辑等价的例子**

$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ ($\wedge$的交互律)
$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ ($\vee$的交互律)
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ ($\wedge$的结合律)
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ ($\vee$的结合律)
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$ (双重否定)
$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (逆否命题)

$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ ($\wedge$ 对 $\vee$的分配律)
$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ ($\vee$ 对 $\wedge$的分配律)
$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (蕴涵消除)
$(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$(双向消除)
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (De Morgan)
$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (De Morgan)

命题逻辑：若干逻辑等价命题的解释

$(\alpha \longrightarrow \beta) \equiv \neg\beta \longrightarrow \neg\alpha$ (逆否命题)	秋天天气变凉→大雁南飞越冬≡大雁没有南飞越冬→秋天天气没有变凉
	$x \geq 0 \longrightarrow x^2 \geq 0 \equiv x^2 < 0 \longrightarrow x < 0$
$(\alpha \longrightarrow \beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (蕴涵消除)	α为假、则命题恒为真；α为真、则β须为真
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (De Morgan)	
$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (De Morgan)	

命题逻辑中的推理规则

假言推理 (Modus Ponens)	$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$
与消解 (And-Elimination)	$\dfrac{\alpha_1 \land \alpha_2 \land \ldots \land \alpha_n}{\alpha_i\,(1 \leq i \leq n)}$
与导入 (And-Introduction)	$\dfrac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\alpha_1 \land \alpha_2 \land \ldots \land \alpha_n}$

命题逻辑中的推理规则

双重否定 (Double-Negation Elimination)	$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$
单项消解或单项归结 (Unit Resolution)	$\dfrac{\alpha \vee \beta, \neg\beta}{\alpha}$
消解或归结 (Resolution)	$\dfrac{\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_m, \neg\beta}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_{k-1} \vee \alpha_{k+1} \vee \ldots \vee \alpha_m}(\alpha_k = \beta)$

应用归结法进行证明（2）

1	$\alpha \vee \beta$
2	$\neg\alpha \vee \beta$
3	$\alpha \vee \neg\beta$
4	$\neg\alpha \vee \neg\beta$

证明如上命题集是不可满足的

5	β	1和2进行归结
6	$\neg\beta$	3和4进行归结
从该命题集中同时推出命题β和命题$\neg\beta$，因此原命题集是不可满足的		

应用归结法进行证明（3）

1	$\alpha \vee \gamma$
2	$\neg\beta \vee \gamma$
3	$\neg\gamma \vee \alpha$
4	$\neg\alpha \vee \beta$
5	$\neg\alpha \vee \neg\gamma$

证明如上命题集是不可满足的

6	α	1和3进行归结
7	β	4和6进行归结
8	γ	2和7进行归结
9	$\neg\alpha$	5和8进行归结
从该命题集合中可同时推出α和$\neg\alpha$两个命题，因此原命题集合是不可满足的		

应用归结法进行证明（1）

①	$\alpha \vee \beta$
②	$\alpha \rightarrow \gamma$
③	$\beta \rightarrow \gamma$

已知如上命题成立，请证明命题γ是成立的

1	$\alpha \vee \beta$	已知
2	$\neg\alpha \vee \gamma$	②进行蕴涵消除
3	$\neg\beta \vee \gamma$	③进行蕴涵消除
4	$\neg\gamma$	假设命题γ不成立
5	$\beta \vee \gamma$	1和2进行归结
6	$\neg\beta$	3和4进行归结
7	γ	5和6进行归结
8	假设不成立，命题γ成立	

命题范式

- 有限个简单合取式构成的析取式称为**析取范式**
- 由有限个简单析取式构成的合取式称为**合取范式**
- 析取范式与合取范式统称为**范式 (normal form)**

◆假设a_i为简单的合取式，则$a = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$为析取范式

- 例如：$(\neg a_1 \wedge a_2) \vee a_3, \neg a_1 \vee a_3 \vee a_2$ 等

◆假设a_i为简单的析取式，则$a = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k$为合取范式

- 例如：$(a_1 \vee a_2) \wedge \neg a_3, \neg a_1 \wedge a_3 \wedge (\neg a_2 \vee a_4)$等

命题范式

- **一个析取范式是不成立的，当且仅当它的每个简单合取式都不成立。**
- **一个合取范式是成立的，当且仅当它的每个简单析取式都是成立的。**
- **任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式**
  - 注意：命题公式的析取范式与合取范式都不是唯一的

命题范式

- **任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式**
  - 注意：命题公式的析取范式与合取范式都不是唯一的
- **问题：求$\neg(\alpha \to \beta) \vee \neg\gamma$的析取范式与合取范式**

$$\neg(\alpha \to \beta) \vee \neg\gamma$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg\gamma$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\gamma \text{ (析取范式)}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma) \text{ (合取范式)}$$

提纲

- 命题逻辑
- 谓词逻辑
- 知识图谱推理
- 因果推理

从命题逻辑到谓词逻辑

- 命题逻辑的局限性：在命题逻辑中，每个陈述句是最基本的单位(即原子命题)，无法对原子命题进行分解。
  - 因此在命题逻辑中，不能表达局部与整体、一般与个别的关系。
- **例如，对于苏格拉底论断，虽知其正确的，但无法通过命题逻辑来进行推理判断：**
  - α: 所有的人总是要死的
  - β: 苏格拉底是人
  - γ: 所以苏格拉底是要死的

$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ （不是命题逻辑的有效推理）

无法在命题逻辑基础上完成这样的推导

从命题逻辑到谓词逻辑

- **α 大象是哺乳动物**

个体的性质（**<u>是</u>**）、
个体和个体之间的关系（**<u>最大</u>**）

- **β 大象是一种最大的哺乳动物**
- **解决思路：**
  - 不同原子命题蕴含个体、群体和关系等内在丰富语义，命题逻辑无法表现内在丰富语义。因此，需要分析原子命题，分离其主语（个体或群体）和谓语（关系）

需要引入更加强大的逻辑表示方法，这就是谓词逻辑

谓词逻辑

- 在谓词逻辑中，将原子命题进一步细化，分解出个体、谓词和量词，来表达个体与总体的内在联系和数量关系，这就是谓词逻辑研究内容。

- 谓词逻辑中三个核心概念：
  - 个体、谓词（predicate）和量词（quantifier）

谓词逻辑：谓词与个体

- $P(x)$ **表示：** $x < x^2$
- **P是谓词， x是个体词，x被称为变量。x的具体取值叫个体常项。**
  - 比如，$P(0.1)$ 和$P(0.02)$使得谓词为假。个体的取值范围为个体域。
- **一般用大写字母P, Q, R等来表示谓词。**
  - 上述$P(x)$描述了是否存在一个数，这个数小于自身平方这种关系。
- **谓词中可以有若干个个体变量，如$father(x, y)$ 表示x是y父亲。**
- **$P(x)$是一元谓词（包含一个个体）， $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 被称为n元谓词（包含若干个体）。**

谓词逻辑：量词

- **全称量词(universal quantifier, ∀)**
  - 全称量词用符号∀表示，表示一切的、凡是的、所有的、每一个等。$\forall x$表示定义域中的所有个体，$\forall x P(x)$表示定义域中的所有个体具有性质P
- **存在量词(existential quantifier, ∃)**
  - 存在量词用符号∃表示，表示存在、有一个、某些等。$\exists x$表示定义域中存在一个或若干个个体，$\exists x P(x)$表示定义域中存在一个个体或若干个体具有性质P
- **全称量词和存在量词统称为量词。**

谓词逻辑：量词

- **全称量词**
  - 谓词$P(x)$：x能够制造工具。$\forall x P(x)$表示定义域中的所有个体能够制造工具。P(小王)表示小王能够制造工具。

- **存在量词**
  - 谓词$P(x)$：x能够制造工具。$\exists x P(x)$表示定义域中的存在某个/某些个体能够制造工具。P(小王)表示小王能够制造工具（该命题或者为真、或者为假）。

谓词逻辑：量词

- **全称量词与存在量词之间的组合**
  - $\forall x \neg P(x) \equiv \neg \exists x P(x)$
  - $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
  - $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$
  - $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

谓词逻辑：函数与谓词的区别

- **函词中个体变元用个体常量（来自定义域）代入后结果仍是个体（值域）**

之前是个体变量，现在是个体变元

  - 如定义函数$f(x)=x+10$，则$f(2)=12$
- **谓词中个体变元用个体常量带入后就变成了命题**
  - 如$car(x)$这个谓词中x用吉普车代替，则car(吉普车)是命题。
- **函数是从定义域到值域的映射；**
- **谓词是从定义域到$\{True, False\}$的映射**

谓词逻辑：谓词演算的合式公式

- 命题常项、命题变项、原子谓词（不存在任何量词与联结词）是合式公式。
- 如果A和B是合式公式，那么$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$都是合式公式
- 如果A是合式公式， x是个体变元，则$\exists x A(x)$ 和$\forall x A(x)$也是合式公式
- 有限次地使用上述规则求得公式是合式公式

若干谓词逻辑的推理规则

- **全称量词消去:** $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$
  - Universal Instantiation, UI
- **全称量词引入:** $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$
  - Universal Generalization, UG
- **存在量词消去:** $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$
  - Existential Instantiation, EI
- **存在量词引入:** $A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$
  - Existential Generalization, EG

谓词逻辑的推理例子

已知：

- $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
- $(\forall x)(Q(x) \to R(x))$

试证明：$(\forall x)(P(x) \to R(x))$

证明过程：

- $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
- $P(x) \to Q(x)$ (消去全称量词)
- $(\forall x)(Q(x) \to R(x))$
- $Q(x) \to R(x)$ (消去全称量词)
- $P(x) \to R(x)$(假言三段论)
- $(\forall x)(P(x) \to R(x))$ (引入x)

谓词逻辑的推理例子

已知：

1. $(\forall x)(F(x) \to (G(x) \land H(x))$
2. $(\exists x)(F(x) \land P(x))$

试证明： $(\exists x)\ (P(x) \land H(x))$

证明过程：

$3.\ \ F(a) \land P(a)$ (2的EI) （注：先消除存在）

$4. F(a) \to (G(a) \land H(a))$ (1的UI)

$5. F(a)$ (由3知)

$6. G(a) \land H(a)$ (4和5的假言推理)

$7. P(a)$ (由3知)

$8. H(a)$ (由6知)

$9. P(a) \land H(a)$(7和8的合取)

自然语言的形式化

- **每一个奇数均存在一个大于它的奇数**
  - odd(x): x是奇数
  - Great(x, y): x 大于y

自然语言的形式化

- **前提：1) 每驾飞机或者停在地面或者飞在天空；2) 并非每驾飞机都飞在天空**
- **结论：有些飞机停在地面**
- **形式化：**$plane(x)$**:** x**是飞机；**$in\_ground(x)$**:** x**停在地面；** $on\_fly(x)$**:** x**飞在天空**
- **已知：**$(\forall x)(plane(x) \rightarrow in_{ground(x)} \vee on_{fly(x)})$,

$$(\neg\forall x)(plane(x) \rightarrow on\_fly(x))$$

- **请证明：**$(\exists x)(plane(x) \wedge in\_ground(x))$

自然语言的形式化

1. $(\neg\forall x)(plane(x) \rightarrow on\_fly(x))$
2. $(\exists x)\neg(plane(x) \rightarrow on\_fly(x))$
3. $(\exists x)\neg(\neg plane(x) \vee on\_fly(x))$
4. $(\exists x)(plane(x) \wedge \neg on\_fly(x))$
5. $plane(a) \wedge \neg on\_fly(a)$
6. $plane(a)$
7. $\neg on\_fly(a)$
8. $(\forall x)(plane(x) \rightarrow in\_ground(x) \vee on\_fly(x))$
9. $plane(a) \rightarrow in\_ground(a) \vee on\_fly(a)$
10. $in\_ground(a) \vee on\_fly(a)$
11. $in\_ground(a)$ **(7，10消解)**
12. $plane(a) \wedge in\_ground(a)$
13. $(\exists x)(plane(x) \wedge in\_ground(x))$

- **已知：** $(\forall x)(plane(x) \rightarrow in_{ground(x)} \vee on_{fly(x)})$，$(\neg\forall x)(plane(x) \rightarrow on\_fly(x))$

专家系统的构成

答案输出

问题逻辑化（机器可理解）

推理机（专家系统）

对某个领域的自然语言、文本语句等信息进行逻辑化

服务

知识

数据

谢谢!