수학으로부터 **인류**를 **자유**롭게 하라

Free Humankind from Mathematics

Basic Algebra

Chap.1 Algebraic Properties

Algebraic Properties

Commutative Property (Law)

$$a \,☺\, b = b \,☺\, a$$

Associative Property

$$(a \,☺\, b) \,☺\, c = a \,☺\, (b \,☺\, c)$$

Distributive Property

$$a \,☺\, (b \,😍\, c) = (a \,☺\, b) \,😍\, (a \,☺\, c)$$

$$(b \,😍\, c) \,☺\, a = (b \,☺\, a) \,😍\, (c \,☺\, a)$$

Commutative Property

$$a \,☺\, b = b \,☺\, a$$

commutative, commutativity, noncommutative, anti-associativity

addition: commutative $a + b = b + a$

subtraction: anticommutative $a - b \neq b - a$

multiplication: commutative $a \cdot b = b \cdot a$

division: anticommutative $a \div b \neq \div a$

Distributive Property

$$a \,☺\, (b \,😍\, c) = (a \,☺\, b) \,😍\, (a \,☺\, c)$$

distributive, distributivity, nondistributive, anti-distributivity

multiplication-addition: distributive $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

addition-multiplication: nondistributive $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$

1.1 Algebraic Properties

Associative Property

$$(a \,☺\, b) \,☺\, c = a \,☺\, (b \,☺\, c)$$

associative, associativity, nonassociative, anti-associativity

addition: associative $(a + b) + c = a + (b + c)$

subtraction: nonassociative $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

multiplication: associative $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

division: nonassociative $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$

Identities and Inverses

- Identities(항등원): 어떤 값(a)과 연산(☺)이 있을 때, 이 값에 연산을 진행한 결과가 원래의 값과 동일하게 만드는 값

$$a \,☺\, e = a$$

☺ : e는 ☺ 에 대한 identity

- Inverses(역원): 어떤 값(a)과 연산(☺)이 있을 때, 이 값에 연산을 진행한 결과 identity가 되게 만드는 값

$$a \,☺\, x = e$$

☺ : x는 ☺ 에 대한 inverse

Additive Identities

Additive Identities(덧셈에 대한 항등원)

$$a + e = a \longrightarrow (a + e) - a = a - a$$
$$\longrightarrow (e + a) - a = 0 \quad \text{by commutativity}$$
$$\longrightarrow e + (a - a) = 0 \quad \text{by associativity}$$
$$\longrightarrow e = 0$$

0은 임의의 a의 additive identity

ex.1) $2 + 0 = 2$
$\longrightarrow 0$은 2의 additive identity

ex.2) $-2 + 0 = -2$
$\longrightarrow 0$은 -2의 additive identity

ex.3) $\pi + 0 = \pi$
$\longrightarrow 0$은 π의 additive identity

Additive Inverses

Additive Inverses(덧셈에 대한 역원)

$$a + x = e \longrightarrow a + x = 0 \quad \text{by additive identity}$$
$$\longrightarrow (a + x) - a = 0 - a$$
$$\longrightarrow (x + a) - a = -a \quad \text{by commutativity}$$
$$\longrightarrow x + (a - a) = -a \quad \text{by associativity}$$
$$\longrightarrow x = -a$$

$-a$은 임의의 a의 additive inverse

ex.1) $2 + x = 0$
$\longrightarrow x = -2 \longrightarrow -2$는 2의 additive inverse

ex.2) $-2 + x = 0$
$\longrightarrow x = 2 \longrightarrow 2$는 -2의 additive inverse

ex.3) $\pi + x = 0$
$\longrightarrow x = -\pi \longrightarrow -\pi$는 π의 additive inverse

Multiplicative Identities

Multiplicative Identities(곱셈에 대한 항등원)

$$a \cdot e = a \longrightarrow (a \cdot e) \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$$
$$\longrightarrow (e \cdot a) \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{by commutativity}$$
$$\longrightarrow e \cdot (a \cdot a^{-1}) = 1 \quad \text{by associativity}$$
$$\longrightarrow e = 1$$

1은 임의의 a의 multiplicative identity

ex.1) $2 \cdot 1 = 2$
$\longrightarrow$ 1은 2의 multiplicative identity

ex.2) $-2 \cdot 1 = -2$
$\longrightarrow$ 1은 -2의 multiplicative identity

ex.3) $\pi \cdot 1 = \pi$
$\longrightarrow$ 1은 π의 multiplicative identity

Multiplicative Inverses

Multiplicative Inverses(곱셈에 대한 역원)

$a \cdot x = e \longrightarrow a \cdot x = 1$ by multiplicative identity

$\longrightarrow (a \cdot x) \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot \frac{1}{a}, a \neq 0$

$\longrightarrow (x \cdot a) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ by commutativity

$\longrightarrow x \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$ by associativity

$\longrightarrow x = \frac{1}{a}$

$\frac{1}{a}$은 a^{-1}로 표현할 수 있음

a^{-1}은 임의의 a의 multiplicative inverse

ex.1) $2 \cdot x = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$\longrightarrow \frac{1}{2}$는 2의 multiplicative inverse

ex.2) $-2 \cdot x = 1 \longrightarrow x = -\frac{1}{2} = (-2)^{-1}$

$\longrightarrow -\frac{1}{2}$는 -2의 multiplicative inverse

ex.3) $\pi \cdot x = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{\pi}$

$\longrightarrow \frac{1}{\pi}$는 π의 multiplicative inverse

+) 인버스는 존재하지 않을 수도 있다.

ex) 0

Additive/Multiplicative Identities/Inverses

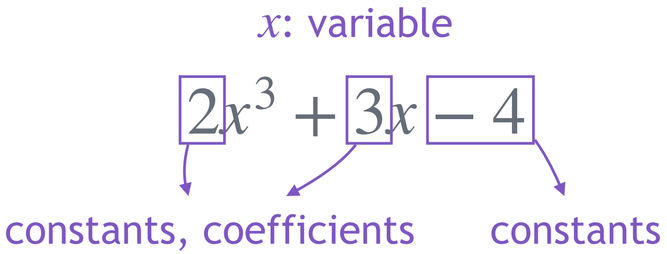
	Identity	Inverse
Addition	0	$-a$
Multiplication	1	$1/a$

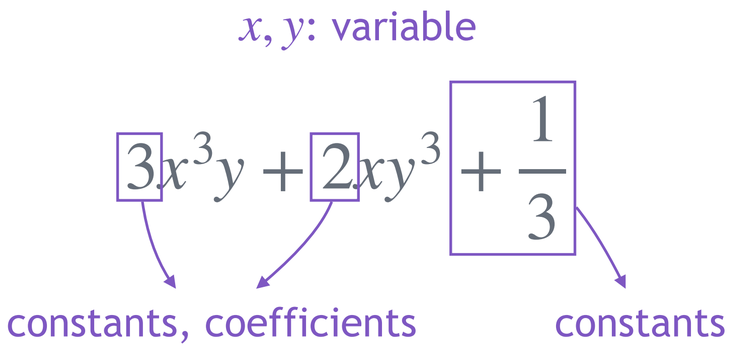
Variables and Constants

- Constants(상수): 계산 중 변하지 않는 값
- Variables(변수): 함수의 입출력과 같이 상황에 다라 달라질 수 있는 값

  variable은 상황에 따라 달라질 수 있으므로 x, y, z와 같은 문자로 값을 표현

- Coefficients(계수): 변수에 곱해지는 **상수**





Equations (= 방정식)

(LHS) = (RHS)

Left-hand Side Right-hand Side

- 두 값(LHS, RHS)이 등호(=)를 통해 서로 같음을 나타내는 식
- LHS 또는 RHS에 변수가 포함되는 경우, 변수가 어떤 값이 되는지에 따라 equation은 '서로 같음'이 만족될 수도, 만족되지 않을 수도 있음

$2 = 2$
항상 참인 equation

$4 \neq 2$
항상 거짓인 equation

$x = 2$
x가 2일 땐 참,
다른 값일 땐 거짓인 equation

Solutions of Equations

- 방정식을 만족시키는 **변수들의 값 또는 조건을 찾는 과정**을 '방정식을 푼다'라고 표현함

$$\text{(LHS) = (RHS)} \longrightarrow x = \alpha$$

- 방정식을 만족시키는 변수들의 값 또는 조건을 찾는 과정을 방정식의 solution(해)라고 부름
- 모든 solution들을 모든 집합을 solution set(해집합)이라고 부름

Basic Rules for Solving Equations

- LHS와 RHS에 같은 값을 더해도 =관계는 변하지 않음

$$\text{LHS = RHS} \longrightarrow \text{LHS} + \alpha = \text{RHS} + \alpha$$

- LHS와 RHS에 0이 아닌 같은 값을 곱해도 =관계는 변하지 않음

$$\text{LHS = RHS} \longrightarrow \text{LHS} \cdot \alpha = \text{RHS} \cdot \alpha, \quad \alpha \neq 0$$

Basic Rules for Solving Equations

ex.1) $x+2=0 \longrightarrow x=\alpha$

$x+2=0 \longrightarrow (x+2)-2=0-2$ 2의 additive inverse

$\longrightarrow x=-2$ associativity of addition

ex.2) $3x-2=1 \longrightarrow x=\alpha$

$3x-2=1 \longrightarrow (3x-2)+2=1+2$ -2의 additive inverse

$\longrightarrow 3x=3$ associativity of addition

$\longrightarrow 3x\cdot\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}$ 3의 multiplicative inverse

$\longrightarrow x=1$

CLOSING

Basic Algebra

Chap.1 Algebraic Properties