透视投影矩阵推导
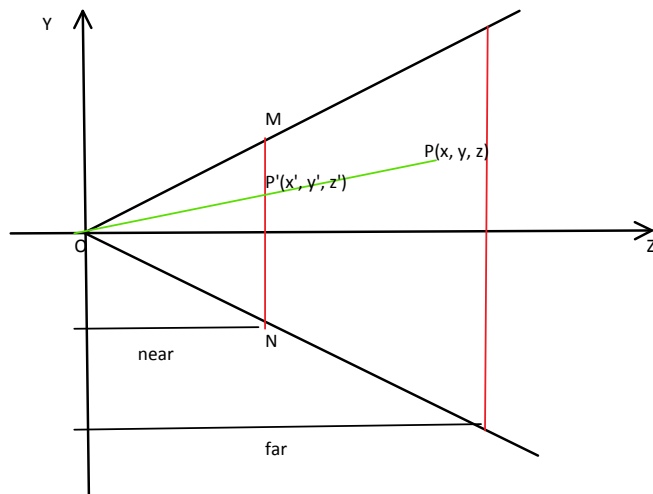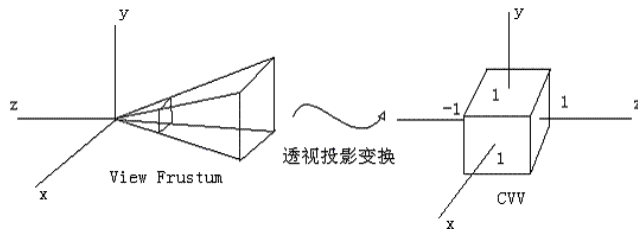
2018年5月8日   11:04

透视投影矩阵的任务就是把位于视椎体内的物体顶点（xyz）坐标映射到[-1, 1]范围。这就相当于把这个四棱台扭曲变形成一个立方体。这个立方体叫做规则观察体(cvv)

$\Theta = \angle POZ$

$Fov = \angle MON$

屏幕高度H = |MN|

屏幕宽高比aspect = W/H

W = aspect*H

$Tan(fov/2) = \dfrac{H/2}{near}$

H = 2*near*tan(fov/2)

W = 2*aspect*near*tan(fov/2)

$Tan\theta = y'/near = y/z$ 同理 x'/near = x/z

$\therefore y' = near*y/z \in [-H/2, H/2]$

x' = near*x/z ∈ [-W/2, W/2]

对x',y'分别除以W/2, H/2使其取值范围位于[-1, 1]

则有 $x'' = \dfrac{x'}{W/2} = \dfrac{near*x}{z*(2*aspect*near*tan(fov/2))/2} = \dfrac{x}{z*aspect*tan(fov/2)}$

$y'' = \dfrac{y'}{H/2} = \dfrac{near*y}{z*(2*near*tan(fov/2))/2} = \dfrac{y}{z*tan(fov/2)}$

最后需要的坐标P'' = （$\dfrac{x}{z*aspect*tan(fov/2)}$ ，$\dfrac{y}{z*tan(fov/2)}$ ， z''）

假设z'' ∈ [-1, 1]

为了自动化得到p''，需要推导一个矩阵使得matrix * p = p''

$$\begin{pmatrix} m00 & m01 & m02 & m03 \\ m10 & m11 & m12 & m13 \\ m20 & m21 & m22 & m23 \\ m30 & m31 & m32 & m33 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{z * aspect * \tan(fov/2)} \\ \dfrac{y}{z * \tan(fov/2)} \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

此时需要m00*x+m01*y+m02*z+m03 = x''

很难找到合适的m00*x+m02*z = K*x/z

所以对p''每个元素乘以z

$$
\begin{pmatrix} m00 & m01 & m02 & m03 \\ m10 & m11 & m12 & m13 \\ m20 & m21 & m22 & m23 \\ m30 & m31 & m32 & m33 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{aspect * \tan(fov/2)} \\ \dfrac{y}{\tan(fov/2)} \\ z * z'' \\ z \end{pmatrix}
$$

可得

m00 = $\dfrac{1}{aspect*\tan(fov/2)}$

m11 = $\dfrac{1}{\tan(fov/2)}$

∵ m22*z + m23 = z*z''

∴z'' = m22 + m23/z

又∵当z = near时z''=-1, 当z=far时z''=1

∴

-1 = m22 + m23/near

1 = m22 + m23/far

解方程可得

m23 = $\dfrac{2*far*near}{near-far}$

m22 = $\dfrac{-near-far}{near-far}$

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{1}{aspect * \tan(fov/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\tan(fov/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-zFar-zNear}{zNear-zFar} & \dfrac{2*zNear*zFar}{zNear-zFar} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

将这个矩阵乘以视锥体内的一个顶点得到的坐标是所有元素乘以了原z值，所以需要将所有元素除以第四个分量w的值(z)即为顶点映射到cvv的坐标。