工程數學 Midterm #1 Oct 15, 2019

總分 110, 得分超過 100 分，成績以 100 分計

註: 計算小錯誤無部份給分，每題的給分標準註記於題目旁，請仔細作答

1. (10%) 給分標準:全對給分、只求出通解得 5 分

$$\frac{dy}{dx} = \cos 8x \quad , \quad y(0) = 5$$

2. (10%) 給分標準:全對給分、只求出通解得 5 分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2y} \quad , \quad y(-2) = -1$$

3. (20%) 給分標準:全對給分 *hint, 因式分解+變數代換*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - x^2}$$

4. (15%) 給分標準:全對給分、只求出通解得 8 分

Hint: $\cos x \cos x = cos^2 x$, $\quad \frac{d\ (cos^2 x)}{dx} = \frac{d\ (cosx\ \ cosx)}{dx} = -\,2cosx\ \ sinx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x\ \ \sin x}{y(1 - x^2)} \quad , \quad y(0) = 2$$

5. (15%) 給分標準:全對給分、只求出通解得 8 分

$$y'' - y' - 12y = 0 \quad , \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$$

6. (20%) 齊次 ODE: 給分標準: 全對給分，本題是隨堂練習

$2xyy' = y^2 - x^2$ ，令 $\mathrm{u(x)} = \frac{y(x)}{x}$

7. (20%) nonhomogeneous ODE 未定係數法，

$y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

給分標準: 全對給分，只求出 y_h 得 8 分

公式表

求 y_h:

Auxiliary equation: $m^2 + am + b = 0$

根為: $\frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

$\sqrt{a^2-4b}$*解有三種可能*:

<1>相異實根: m_1, m_2

ODE 通解為: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

<2>實數重根: m

ODE 通解為: $y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}$

<3>複數根 (共軛虛根): $\alpha \pm \omega i$

ODE 通解為: $y = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

求 y_p:

Undetermined coefficients method (未定係數法):

R(x)	y_p 假設型
k	A
e^{ax}	Ae^{ax}
cos bx 或 sin bx	A cos bx + B sin bx
x^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x^1 + A_0$
cx^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x^1 + A_0$
$x^n e^{nx}$	$e^{nx}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x^1 + A_0)$
$cx^n e^{nx}$	$e^{nx}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x^1 + A_0)$
$x^n\cos bx$ 或 $x^n\sin bx$	$(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x^1 + A_0)\cos bx$ + $(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_1 x^1 + B_0)\sin bx$

註: a, b, c, k, n, A, B 為常數