Abgabe: 06.10.2020

GTI Aufgaben Serie 1

Vithusan Ramalingam (21-105-515)

Jan Ellenberger (21-103-643)

Aufgabe 1.

a) Ja, dies gilt in jeder booleschen Algebra, da in jeder booleschen Algebra die gleichen Gesetze gelten. Kann ich es also mit einem der Gesetze Beweisen so gilt es in jeder booleschen Algebra.

Zu zeigen: $\neg x \neg y = \neg(x + y)$ | links de Morgansche Regel anwenden

$\neg(x + y) = \neg(x + y)$

Somit sehen wir, dass es stimmt

b.) Zu zeigen: $\neg 0 = 1$

$= \neg 0$ |neutrales Element 1 für Multiplikation

$= \neg 0 \cdot 1$ |neutrales Elemnet 0 für Addition

$= (\neg 0 \cdot 1) + 0$ |Distributivgesetz anwenden

$= (\neg 0 + 0) \cdot (1 + 0)$ |rechte klammer ausrechnen

$= (\neg 0 + 0) \cdot 1$ |Komplementgesetz

$= 1$

$\neg 0 = 1$

■

c.) Beweis anhand von Wahrheitsabellen.

Wahrheitstabelle für f(x, y, z) = $x(y + z) \neg(xy)z + y$:

X	Y	Z	$x(y + z) \neg(xy)z + y$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Wahrheitstabelle für g(x, y, z) = y + z :

Y	Z	Y +_Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

■

Wie man sehen kann, erhalten wir für dieselben Eingabewerte für Y und Z dasselbe Resultat. Somit sind die beiden Funktionen äquivalent.

d.) Beweis anhand von Wahrheitstabellen.

Wahrheitstabelle für f(x, y, z) = ¬y¬z + yz :

Y	Z	¬y¬z + yz
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wahrheitstabelle für g(x, y, z) = ¬yz + y¬z :

Y	Z	¬yz + y¬z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

■

Wir erhalten hier für dieselben Eingabewerte für Y und Z unterschiedliche Resultate, somit sind diese Funktionen nicht äquivalent.

Abgabe: 06.10.2020

Aufgabe 2.

a.) $f(x,y,z) = (x \lor y) \land \neg (x \land \neg z)$
Wir beweisen die Richtigkeit unserer Funktion mithilfe folgender Wahrheitstabelle:

X	Y	Z	$(x \lor y) \land \neg (x \land \neg z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Wie man sieht, erhält man, wenn man x = 0 setzt immer den jeweiligen y Wert und wenn man x = 1 setzt den jeweiligen z wert.

Aufgabe 3.

a.) $(159)_{10}$ in 8-adischer-Darstellung

Um auf den Zahlenwert mit der Basis 8 zu kommen, rechnen wir:

159 / 8 = 19 Rest 7

19 / 8 = 2 Rest 3

2 / 8 = 0 Rest 2

Jetzt liest man den Rest von unten nach oben in dem Falle 2,3,7. Die sind die Zahlen, mit denen wir die Basis 8^n multiplizieren müssen. Diese Restwerte fügen wir also in folgende Formel ein, wobei m die Anzahl der Restwerte, in diesem Fall 3 ist.

$$Z = x_1 \cdot b^{m-1} + x_2 \cdot b^{m-2} + x_3 \cdot b^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n \cdot b^{m-n}$$

Das ergibt uns folgendes:

$$Z = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 \text{ und ergibt } (237)_8$$

b.) $(226)_{10}$ in 8-adischer Darstellung

Dies erfolgt analog zur Aufgabe 3.a.) und kann mit derselben Umrechnungsmethode gemacht werden:
226 / 8 = 28 Rest 2
28 / 8 = 3 Rest 4
3 / 8 = 0 Rest 3

Das ergibt und folgende adische Darstellung:

$Z = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0$ und ergibt $(342)_2$

Aufgabe 4.

Dualzahl: Das Prinzip ist bis auf den Schluss dasselbe wie in Aufgabe 3.a)

Wir rechnen 273 / 2 und notieren uns den Rest. Danach rechnen wir das Ergebnis durch 2 und notieren wieder den Rest. Dies machen wir so lange bis wir auf ein Ergebnis = 0 kommen.

273 / 2 = 136	Rest 1
136 / 2 = 68	Rest 0
68 / 2 = 34	Rest 0
34 / 2 = 17	Rest 0
17 / 2 = 8	Rest 1
8 / 2 = 4	Rest 0
4 / 2 = 2	Rest 0
2 / 2 = 1	Rest 0
1 / 2 = 0	Rest 1

Um die Dualzahl zu erhalten, schreiben wir die Reste von unten nach oben auf.

Das ergibt $(100010001)_2$

$(273)_{10}$ als Oktalzahl dies erfolgt analog wie bei der Umrechnung in eine Dualzahl nur wird diesmal durch 8 geteilt und am Schluss der Rest in umgekehrter Reihenfolge notiert.

273 / 8 = 34	Rest 1
34 / 8 = 4	Rest 2
4 / 8 = 0	Rest 4

Nun notieren wir den Rest in umgekehrter Reihenfolge als 421 und erhalten so unsere Oktalzahl $(421)_{8:}$

$(273)_{10}$ als Hexadezimalzahl. Diese Umrechnung ist gleich wie bei die in eine Oktalzahl nur diesmal mit dem Divisor 16.

273 / 16 = 17	Rest 1
17 / 16 = 1	Rest 1
1 / 16 = 0	Rest 1

Wir schreiben wieder den Rest in umgekehrter Reihenfolge auf und erhalten so unsere Hexadezimalzahl $(111)_{16}$

Aufgabe 5.

Wir berechnen die Binärzahl wie in Aufgabe 4 als wir die Dualzahl berechnet haben.

17 / 2 = 8	Rest 1
8 / 2 = 4	Rest 0
4 / 2 = 2	Rest 0
2 / 2 = 1	Rest 0
1 / 2 = 0	Rest 1

Wir schreiben den Rest von unten nach oben auf und erhalten unsere Binärzahl: $(10001)_2$

Nun können wir die Binärzahl von $(69)_{10}$ analog berechnen:

69 / 2 = 34	Rest 1
34 / 2 = 17	Rest 0
17 / 2 = 8	Rest 1
8 / 2 = 4	Rest 0
4 / 2 = 2	Rest 0
2 / 2 = 1	Rest 0
1 / 2 = 0	Rest 1

Wir erhalten die Binärzahl analog wie oben: $(1000101)_2$

Um die Binärzahlen zu addieren schreiben wir sie übereinander wie folgt auf:

Hier gelten folgende Regeln 1+1=0 und wenn wir 1+1 wie bei der normalen schriftlichen addition rechnen übernehmen wir auch hier eine 1 in die nächste Spalte.

```
    10001
+ 1000101
       1
---------
  1010110
```

$(1010110)_2 = (86)_{10}$

Rot eingezeichnet die 1 die wir aus der vorherigen Spalte übertragen haben.

Da $(17)_{10} + (69)_{10} = (86)_{10}$ sehen wir dass unsere Berechnung stimmt.

Aufgabe 6.

In einer dreielementigen booleschen Algebra hätten wir die Elemente {1,0, a}

Aus dem Komplementgesetz aus der Vorlesung ergibt sich folgendes:

$$y \wedge \neg y = 0 \qquad a \vee \neg y = 1$$

So definieren wir die Komplementärmengen

$$\neg 0 = 1 \text{ und für } a = \neg a$$

Wenden wir hier die Idempotenz an und setzen für a: ¬a ein

$a = a \wedge a = a \wedge \neg a$

Dies gibt folglich a = 0. ↯ Ende des Beweis.

Eine dreielementige boolesche Algebra ist also nicht möglich

Aufgabe 7.

Es gilt alle Rechengesetze der booleschen Algebra zu beweisen.

Bijektion: Komplementärmenge von a = b und umgekehrt.

0 ist Komplementär zu 1 und umgekehrt.

Wir beweisen die folgenden Gesetze mithilfe von Wahrheitstabellen

Abgabe: 06.10.2020

Kommutativgesetz :

a V b = b V a , a ⋀ b = b ⋀ a:

A	B	A V b	B V a	A ⋀ b	B ⋀ a
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Verschmelzungsgesetz :

(a V b) ⋀ a = a, (a ⋀ b) V a = a

A	B	(a V b) ⋀ a	A	(a ⋀ b) V a	a
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

De Morgansche Regel :

¬(a V b) = ¬a ⋀ ¬b

¬ (a ⋀ b) = ¬a V ¬b

A	B	¬(a V b)	¬a ⋀ ¬b	¬ (a ⋀ b)	¬a V ¬b
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Idempotenz :

a = a V a = a ⋀ a = ¬ ¬ a

a	a V a	a ⋀ a	¬ ¬ a
0	0	0	0
1	1	1	1

Neutrale Elemente 0, 1:

a V 0 = a, a ⋀ 0 = 0, a ⋀ 1 = a, a V 1=1

a	a V 0 = a	a ⋀ 0 = 0	a ⋀ 1 = a	a V 1=1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

Abgabe: 06.10.2020