

# 电动力学讲义

袁野

浙江近代物理中心 · 浙江大学物理学院

Copyright © 2023 袁 野

版本 0.5, 最后更新于 2023 年 6 月 14 日

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 模板来源于<https://person.zju.edu.cn/yuan/>

浙江近代物理中心 · 浙江大学物理学院  
浙江大学 · 杭州 · 中国



# 目录

<b>1</b>	<b>绪论</b> .....	9
1.1	电动力学的基本观念 .....	9
1.2	电磁场作为一种物理实体 .....	10
1.3	电与磁的统一 .....	13
1.4	讲义的内容安排 .....	14
1.5	学习电动力学的意义 .....	15
<b>2</b>	<b>静电场</b> .....	19
2.1	库伦定律 .....	19
2.2	一般电荷分布的电场计算 .....	20
2.3	补充：关于计算机软件的使用 .....	22
<b>3</b>	<b>静电场的宏观性质</b> .....	27
3.1	静电场中的曲面 .....	27
3.2	静电场中的曲线 .....	28

3.3	应用	29
-----	----	----

## 4 梯度场

4.1	矢量代数与张量	31
-----	---------	----

4.2	梯度场	37
-----	-----	----

4.3	电势	41
-----	----	----

## 5 一般矢量场的微积分

5.1	一般矢量场的宏观性质	43
-----	------------	----

5.2	一般矢量场的微观性质	45
-----	------------	----

## 6 静电场的微观性质

6.1	散度公式	49
-----	------	----

6.2	泊松方程、拉普拉斯方程	52
-----	-------------	----

6.3	静电场的能量密度	53
-----	----------	----

## 7 静电问题的解

7.1	一般矢量场的分解	57
-----	----------	----

7.2	存在有限边界的静电问题	59
-----	-------------	----

7.3	库仑定律在有限区域静电问题中的扩展 .....	61
7.4	导体 .....	63
7.5	镜像法 .....	64

## 8

拉普拉斯方程的分解 .....	69
-----------------	----

8.1	笛卡尔坐标系下的变量分离 .....	69
8.2	正交曲线坐标系 .....	70
8.3	变量的分离 .....	75

## 9

静电场的正交函数展开 .....	77
------------------	----

9.1	正交函数 .....	77
9.2	笛卡尔坐标系 .....	79
9.3	球坐标系 .....	82
9.4	多极子与静电场的多极展开 .....	85

## 10

静磁场 .....	89
-----------	----

10.1	磁场的探测 .....	89
10.2	毕奥-萨伐尔定律 .....	93

<b>11</b>	<b>静磁场的微观与宏观性质</b> . . . . .	95
11.1	静磁场的基本性质 . . . . .	95
11.2	静磁场的矢势 . . . . .	96
11.3	静磁场的多极展开 . . . . .	97
<b>12</b>	<b>介质中的静电场与静磁场</b> . . . . .	101
12.1	电介质 . . . . .	101
12.2	极化矢量 . . . . .	102
12.3	有电介质存在时的静电定律 . . . . .	103
12.4	线性电介质 . . . . .	105
12.5	磁化矢量 . . . . .	106
12.6	有介质存在时的静磁定律 . . . . .	106
<b>13</b>	<b>从静电/磁场到一般电磁场： 一个几何观点</b> . . . . .	109
13.1	场作为一种几何体 . . . . .	109
13.2	第一组运动方程 . . . . .	111
13.3	第二组运动方程 . . . . .	113

13.4	磁生电与电生磁	118
------	---------	-----

13.5	麦克斯韦方程组	120
------	---------	-----

## 14 电磁场的一般动力学性质

123
-----

14.1	等效原理	123
------	------	-----

14.2	洛伦兹变换	128
------	-------	-----

14.3	闵氏时空里的张量场	133
------	-----------	-----

14.4	能量与动量	138
------	-------	-----

## 15 真空中的电磁波

145
-----

15.1	动力学变量与规范不变性	145
------	-------------	-----

15.2	真空中电磁场的波动方程	148
------	-------------	-----

15.3	平面波	149
------	-----	-----

## 16 有宏观介质存在时的电磁场

157
-----

16.1	宏观介质中的电磁场	157
------	-----------	-----

16.2	导体中的电磁场	160
------	---------	-----

<b>17</b>	<b>带有边界的电磁场动力学</b> .....	163
17.1	一般电磁场的边界条件 .....	163
17.2	电磁波在两种介质界面上的传播 .....	164
17.3	全反射 .....	170
17.4	波导 .....	172
<b>18</b>	<b>电磁辐射</b> .....	177
18.1	推迟势 .....	177
18.2	单个带电质点的电磁辐射 .....	182
18.3	电偶极辐射 .....	189
18.4	磁偶极辐射 .....	189
18.5	辐射的一般性质 .....	189
<b>19</b>	<b>动体的电动力学</b> .....	191
	<b>索引</b> .....	193



1.1	电动力学的基本观念	9
1.2	电磁场作为一种物理实体	10
1.3	电与磁的统一	13
1.4	讲义的内容安排	14
1.5	学习电动力学的意义	15

## 1.1 电动力学的基本观念

- 在详细展开这门课程的讨论之前我们首先明确一下电动力学在研究些什么。
- 任何一个物理理论都有一个或一类明确的物理对象。电动力学所研究的物理对象是**电磁场** (electromagnetic field)。注意这即不是电场也不是磁场，而是电磁场。
- 当然在我们最初接触电磁现象的时候，在最简单的情形中电现象与磁现象往往是分立的，至少乍看上去如此。在这些情形中我们经常看到电荷与电荷间的吸引与排斥，磁体与磁体间的吸引与排斥。在初等的电学与磁学中我们甚至学到这些吸引与排斥力在理想情况下可以由一些简单的定律指导。依据最初的经验我们很容易倾向与把这些相互作用力描述为电荷与电荷间、磁体与磁体间直接发生的作用，就好比牛顿力学中我们经常研究的两个相互接触的物体之间发生的压力与拉力，虽然现在这种相互作用是超距的。
- 在这样的观念下，电场与磁场概念的引入纯粹是一种描述超距作用的方便的手段。因为超距，所以无论两个物体的相对位置如何这种相互作用总是存在，它在不同构形下的大小与方向构成了关于空间位置的某种分布。这正好贴合了**场**这种概念：在给定空间基础上所有点处某种特定数学量的取值的集合。大小、方向以及线性叠加的属性使得电现象与磁现象各自可以用**矢量场**加以描述。
- 在学过电动力学这门课程之后，我们对于这类物理的认识最核心的是要在观念上发生一个转变，包括以下两个方面：
  - 电磁场并非只是某种描述方法或着运动形式，而是切切实实的**物理实体**。它就是电动力学要研究的物理对象本身。
  - 电场与磁场不是两种独立的物理存在，而是同一种场（电磁场）的不同侧面。

## 1.2 电磁场作为一种物理实体

- 电磁场作为一种物理实体，首先意味着电磁场的存在性不需要以电荷或“磁体”为前提。现如今我们当然广泛知晓这种不依赖于“物质”的电磁场的存在形式：电磁波。事实上每个人无时无刻不在与这种存在形式打交道。但在历史上对于这种存在形式的明确认知是在人们完全掌握了电磁场的规律后作为一个推论获得的。电磁波的发现反过来也佐证了我们对电磁现象构建的理论的正确性。
- 对于初学者而言，把电磁场看作一种物理实体可能多少是违背经验直觉的。我们从小对所谓“实体”的认知，会至少需要它是某种看得见摸得着的存在。哪怕小到一个分子或原子，经验直觉告诉我们它是可以用容器<sup>1</sup>束缚起来的，当它碰到容器壁后会发生碰撞反弹回来。因此一定意义上这也属于“摸得着”的存在。现代的科技手段（例如扫描隧道显微镜、原子力显微镜等等）甚至能够让我们看到分子尺度、原子尺度物质的结构。
- 相比而言，电磁场却是非常不同的存在。它似乎看不见摸不着，甚至从经验上看似乎能够轻易穿透大多数物质。那么在什么意义上我们把它归类于一种物理实体呢？事实上直观经验是有欺骗性的。当我们说我们看到了或者摸到了某个物体的时候，如果在微观层面深究这种探测方式的机理，便会知道我们真正直接探测的并非这些物质本身，反而是电磁场。当我们看到一个画面时，是有电磁波进入我们的眼睛，在我们视觉细胞的接受器里与特定分子发生作用使其电子激发到更高能量的运动状态，并进一步触发电流经神经进入了我们的大脑。当我们摸到一样东西时，实际是分子间作用力对我们的触觉细胞产生了压力，同样触发电信号传入大脑，而分子间作用力本质上也是电磁相互作用。我们之所以没有察觉电磁场本身的存在，仅仅是在于我们的感受器从这些触发事件中所提取的信息是有限的，它并没有细致到去测量电磁场本身的性质，而只是把电磁相互作用作为一种途径去获知产生这种作用的物质的有与无。
- 这就与我们设计一个实验装置或者一个工程设备一样。我们使用什么样的传感器首先要取决于我们想要获取什么样的信息。当我们真正的关注点在电磁场本身时，我们当然可以设计相应的装置对它展开更加精细的测量。之所以能够且容易这么做，在于电磁场与我们通常所说的物质（从宏观的物体到微观的诸如电子等粒子）的耦合是广泛存在的，这种耦合会影响后者的运动行为从而被察觉。通过定量地观测这些运动行为的变化我们可以对电磁场的各种性质进行归类并分别开展定量的测量。
- 综上，电磁场作为一个物理实体的首要因素，在于它是可以通过合适的方法被探测并且被定量测量的。
- 有了合适的测量方法以后，我们可以尝试在不同时刻对电磁场的同一种性质进行多组测量。在同样的初始条件以及同样的实验环境下，（经典层面）我们会获得同样的测量结果。于是紧接着有一个基本的问题：这些不同时刻的结果相互间是否存在什么关联，这种关联是否有什么规律可循？这是所有类别物理共同的核心问题，亦即理解所研究系统的动力学演化规律。更细致点说，
  - 哪些量能够表征系统的构形，区分系统的不同运动状态？（我们把它们称为物

<sup>1</sup>或者其它起到类似于容器的作用但更“高级”一点的办法，例如某种势阱。

理量)。

– 这些物理量随时间满足什么规律 (公式、运动方程)?

- 电磁场也不例外。它作为一个物理实体被研究的另一个核心因素, 在于它随时间的演化确实满足特定的规律。现如今我们只要读过一点科普都会知道这个规律可以由一组方程组精确表述, 称为**麦克斯韦方程组**

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}(t, \mathbf{x}), \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.4)$$

简便起见, 这里我们只写出麦克斯韦方程组在真空中的形式。 $\epsilon_0$  与  $\mu_0$  是两个常数, 我们暂且无需在意。

- 我们有两个量来表征电磁场的状态, 其中  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  为电场,  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  为磁场。它们各自在三维欧几里得空间  $\mathbb{R}^3$  的每一点上都是一个 (三维) 矢量, 并且具体的值是可以随时间变化的。数学上我们也可以把它们看作是有关三维空间以及一维时间的函数, 只不过函数的取值是一个三维矢量。
- 上述公式里还有另外两个场。一个是电荷密度  $\rho(t, \mathbf{x})$ , 表征每一时刻  $t$  在空间点  $\mathbf{x}$  处每单位体积内有多少电荷量, 我们也可以把它看作是一个标量场。另一个是电流密度  $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ , 表征每一时刻  $t$  在空间点  $\mathbf{x}$  处穿过每单位面积的电流强度。由于电流在三维空间中是有方向的,  $\mathbf{J}$  的取值也为一个三维矢量, 故而电流密度可以被看作是一个矢量场。

– 注意这两种场不以动力学变量的方式出现在麦克斯韦方程组中: 我们不讨论这两个量自身的动力学演化规律, 而是把这部分信息当作已知条件放进这个方程组里。

– 当然这两种场不能是任意指定的。在经典物理中电荷既不能凭空产生也不能凭空消失, 顶多只能从一个地方转移到另一个地方。这意味着一个守恒关系, 具体表述为

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.5)$$

这是麦克斯韦方程组自洽的前提条件。事实上这个式子也能从前面四个方程推导得到。

- 电荷与电流与通常所说的物质自身的性质及运动状态相关。这两种量在麦克斯韦方程组中的出现反映了前面我们所说的电磁场与物质的“耦合”: 这两个量作为一个项出现在电磁场的动力学方程组中, 它们的存在表征了电磁场的某些性质, 并且会影响电磁场随时间的演化。
- 当我们需要研究物质自身在电磁场作用下的动力学行为时, 那么我们有一个额外的电磁场对物质作用力的表达式

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.6)$$

这里我们把物质抽象为一个质点， $q$  是其所带的电荷量，而  $\mathbf{v}$  是其运动速度。

- 有一些基本的定性信息我们很容易能够从这组方程里读出来：
  - 第一个式子与第四个式子不依赖于对时间的导数，并且它们具有相似的结构。第一个式子只包含了电场场强  $\mathbf{E}$  与电荷密度  $\rho$ 。不难猜到这个式子应该是我们熟知的库仑定律的某种等价的表达式。类比可知，对于磁场场强  $\mathbf{B}$  而言存在某种类似的规律，只不过相应的“磁荷”在我们所考虑的电动力学的范畴里（至少被假定）是不存在的。
  - 第二式与第三式显性地包含对时间的导数。粗略地讲，在第二式中我们看到随时间变化的磁场伴随着电场，在第三式中我们看到反过来随时间变化的电场也伴随着磁场（当然这里还有电流的影响）。电磁场的动力学演化行为主要包含在这两个式子里。
  - 麦克斯韦方程组本身是一阶微分方程组，这与我们在经典力学中经常遇到的动力学方程看上去不太一样（后者关于时间的微分是二阶的）。然而不难观察到，如果以第二式解得  $\mathbf{E}$  再代入第三式，大体上会得到一个关于  $\mathbf{B}$  的二阶微分方程。反过来如果以第三式解得  $\mathbf{B}$  再代入第二式，我们也会得到一个关于  $\mathbf{E}$  的二阶微分方程。因此这组方程确实描述了电磁场的动力学演化规律。
  - 事实上上述得到的二阶微分方程与经典力学里讨论的波动方程具有非常相似的结构。在后续的讲解中我们将看到这些方程的确存在随时间震荡的解，亦即波动解。并且这其中具有单一振荡频率的解总是具有固定的传播速度  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ ，这是我们所熟知的真空光速。然而与常见的经典力学系统不同的是，后者涉及的波动方式经常包含纵波（比如地震波），然而电磁场的波动解只有横波。这也是在相对论出现之前人们尝试用以太的观点阐述电磁场本质时所遇到的关键困境之一。
  - 在电动力学中，我们不再说电磁场由电荷或电流激发产生。在麦克斯韦方程组中我们完全可以令  $\rho(t, \mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 。如此得到的方程依然是非平庸的，后面我们会看到这种情况下方程依然有非平庸的解。
- 如果我们所考察的系统随时间演化是不变的，那么麦克斯韦方程组退化为

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}), \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.10)$$

我们看到电场场强  $\mathbf{E}$  与磁场场强  $\mathbf{B}$  之间的耦合完全被解除了。因而这种情况下它们各自可以独立地作为静电场（前两个式子）与静磁场（后两个式子）来研究。在我们初次了解电磁现象时，所涉及的大多数系统都是低速的（准静态），对这样的系统上述退化后的方程组是一个很好的近似。这大致也是为什么我们对电磁现象的最初认知倾向于把它作为独立的电场与磁场分别对待。毕竟，同样作为矢量场， $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  在上述方程组中的角色有很大不同（在纯粹真空中我们很容易看到这两个物理量之间是对偶的），这反映在宏观的现象里电现象与磁现象乍看起来也有天壤的区别。

- 在这门课程的前半部分我们将主要分析的上述静电与静磁系统，而电磁场的动力学演化问题则将放在下半部分讲解。

### 1.3 电与磁的统一

- 前面在麦克斯韦方程组中我们看到电场  $\mathbf{E}$  与磁场  $\mathbf{B}$  在时间演化上是相互耦合的。以此我们似乎可以认为  $\mathbf{E}$  表征了一种称为电场的物理实体，而  $\mathbf{B}$  表征了另一种称为磁场的物理实体，两者相互独立，只不过它们之间会发生相互作用。
- 然而上述观点是片面的。其根本原因在于，物理定律在不同的惯性参考系中应当是不变的。具体到电磁场，这意味着麦克斯韦方程组在不同惯性参考系中应当具有相同的形式。直观现象上我们甚至能从非常简单的系统看清这一点
  - 设想在一个惯性参考系中有一根无限长的直线，上面有均匀分布的正电荷且均处于静止状态。这是一个非常典型的静电系统，在后面将详细讨论到。我们知道这样的系统里只能观察到电场场强  $\mathbf{E}$ 。
  - 现在假设有另一个观测者平行于这根直线匀速运动。在他自身的静止参考系里面看，直线上的电荷也在沿着直线匀速运动，因而构成稳恒电流。我们知道在这个参考系里我们既能观测到电场  $\mathbf{E}$  也能观测到磁场  $\mathbf{B}$ 。

注意这里我们甚至没有讨论到运动方程中  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  的耦合。在两个参考系中所涉及的只有静电现象与静磁现象。显然磁场不可能在惯性参考系的变换中自发冒出来。由此我们必须把  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  看作是共同表征了某种唯一的物理实体的构形，而在惯性参考系的变换中这两种场相互之间会发生混合。

- 除了直观现象，纯粹从理论形式中我们也很容易得到这个结论。设想两个惯性参考系具有相互平行的坐标轴，并写其中一个沿着其中一个轴向（记做  $x$ ）相对于另一个以速度  $v$  做匀速运动。在牛顿力学的框架下我们知道这两个参考系间的变换涉及坐标变换

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.11)$$

注意麦克斯韦方程组中符号  $\nabla$  表示的是对空间坐标求导数的操作， $\nabla \cdot$  与  $\nabla \times$  之间的区别只不过在于如何处理矢量的各个分量。现在我们的任务是从一个参考系里的麦克斯韦方程组出发，利用上述变换关系得到另一个参考系里对应的方程组。物理定律的不变性要求新得到的方程组依然是具有同样形式的麦克斯韦方程组！然而上述变换意味着

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + v \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (1.12)$$

因此原先的对时间求导项在新的参考系里会拆分出对空间求导项。为了把新的方程重新写回麦克斯韦方程组的形式，我们将不得不对原先参考系中的  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  做适当线性组合，并且把所得到的组合结果看作是新的参考系中的  $\mathbf{E}'$  或者  $\mathbf{B}'$ 。

- 事实上，如若我们真的依照上述牛顿力学中参考系的变换方式（称为伽利略变换）分析上述问题，我们将发现在新的参考系里我们将无法重建麦克斯韦方程组。这说明伽利略变换与麦克斯韦方程组是不相容的。



- 基于上述观察，我们把时间  $t$  与空间  $\mathbf{x}$  看作同一个四维矢量  $(t, \mathbf{x})$  的分量，在惯性参考系变换中考虑更一般的线性变换<sup>2</sup>。通过要求麦克斯韦方程组的不变性，我们可以发现坐标变换必须是**洛伦兹变换** (Lorentz transformation)，由此我们便由牛顿力学转入了狭义相对论。关于洛伦兹变换的具体形式和性质将在这门课的后半部分展开讲解。这是非常有趣的事情：一个表面看似经典的系统在深入研究后带给了我们全新的物理认知。同时这也告诉我们狭义相对论实际上并没有多么高深莫测，也没有像我们（也许在学习这门课之前）想象得离我们那么遥远。事实上我们在日常生活中会频繁接触到它，因为一旦涉及电磁场在不同惯性参考系间的变换，相对论效应是不可避免的！<sup>3</sup>
- 另一方面， $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  在参考系变换下发生混合的事实也告诉我们，把它们各自看作是空间中的一种三维矢量场已然是不再合适的。三维矢量的意义仅仅在于，在静止系统中当我们把参考系绕固定点做任意的三维旋转变换，该三维矢量也会按照同样方式发生旋转。然而在洛伦兹变换下时间与空间之间也会发生“旋转”。相应地，电磁场自然应当由某种具有四维分量的结构加以刻画。对  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  具体变换方式的深入研究告诉我们，这种结构是一种四维里的二阶反对称协变张量  $F_{\mu\nu}$ （如果你暂且不熟悉张量，把它看作是一个  $4 \times 4$  的反对称矩阵。这门课程将会对张量做必要的介绍。）

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

在洛伦兹变换下它的两侧都以与坐标变换相同的方式变换。回到前面罗列的麦克斯韦方程组，那里的四个方程恰好对应于两个四维矢量方程的时间与空间分量。事实上，如果我们换用一种稍微不太一样但等价的数学结构（微分形式） $\mathcal{F}$ ，麦克斯韦方程组可以非常简洁地化为

$$d\mathcal{F} = 0, \quad (1.14)$$

$$d(*\mathcal{F}) + \mathcal{J} = 0. \quad (1.15)$$

这里  $\mathcal{J}$  相当于电荷密度与电流密度组成的四维矢量。关于这组方程在后面的讲座里我们将简要提及。

## 1.4 讲义的内容安排

- 本讲义在内容上大致分为如下五个版块。

<sup>2</sup>不考虑非线性变换。高维空间里的非线性变换一般是没法在全空间很好定义的，而且我们不会期待对伽利略变换做出很大改动，毕竟在日常经验中伽利略变换是一个非常好的近似。

<sup>3</sup>更本质点说，这与电磁场的基本“量子形态”——光子——是一个无质量粒子有关。无质量粒子不存在所谓的低速的牛顿力学的极限。

- 在第一个版块里我们详细介绍静电学与静磁学。这个版块里有相当一部分内容与普通物理所讲的电磁学是重合的, 不过在本讲义里这一部分讨论的重心在于两点:
  - 其一是将分析的观念转换为做为独立物理存在的场。
  - 其二是引入必要的数学工具以更加系统地分析电磁现象。这两点目的除了用于求解一般的静电和静磁问题外, 也是为后续对电磁场动力学演化的讨论打基础。
- 在第二个版块里我们将引入指导电磁场演化规律的运动方程, 亦即麦克斯韦方程组。可能与过去大多数教材所采取的路线不同的是, 这里我们从已知的静电与静磁规律出发, 直接利用电磁场作为不依赖于具体参考系的物质这一要求, 从几何的角度导出麦克斯韦方程组。在得到该方程组后我们再反过来回顾实验中观测到的电磁感应现象。在把场作为一个物理系统的观点指导下, 我们也将详细介绍如何在拉格朗日力学的框架下描述电磁场, 并且在这个基础上探讨电磁场所具有的对称性以及相应的守恒律与守恒量。
- 其后的三个版块将根据三种不同的情境详细讨论电磁场作为一种物质的动力学演化。它们涵盖了电磁场参与一个物理系统运动演化的几种典型情况。
- 在第三个版块里我们将分析独立存在的电磁场的运动, 亦即真空中的电磁波。
- 在第四个版块里我们将探讨有宏观物质存在时电磁场的运动。这里的前提是把宏观物质看作某种固定的背景, 它们对于电磁场的响应至多只以特定平均化后的等效规律表现出来。这里我们将讨论宏观电磁介质中等效的麦克斯韦方程组, 电磁波在介质中的传播, 以及有特定界面存在时电磁波的传播规律等等。
- 在最后一个版块里我们将介绍电磁场与微观粒子的相互作用。这里大致又分为三个部分:
  - 第一个部分一般性地讨论微观粒子的动力学行为如何能够与电磁规律相协调, 亦即动体的电动力学。
  - 第二个部分讨论微观粒子的运动对电磁场产生的影响。这里涉及的一大类重要现象是电磁辐射。
  - 第三个部分讨论电磁场的运动对微观粒子动力学的影响。这里重点讨论的是电磁波与微观粒子的经典散射。

## 1.5 学习电动力学的意义

---

- 毫不夸张地说, 电动力学是人类跨入现代文明的关键基石之一。支撑现代社会的能源、动力、通信、制造与计算皆离不开电动力学的指导。例如, 在能源方面这里涉及如何将其它形式的能量高效地转换为电能、如何将电能进行高效地安全地远距离传输, 在动力方面如何将电能高效地稳定地转化成机械能 (特别例如现在的高速铁路以及新能源汽车), 在通信方面如何控制电磁信号的传输、如何降低通信器件的功耗, 在制造方面如何提高传感器以及加工的精度、如何为工程设计提供一个可靠的物理仿真环境, 在计算方面如何设计出效率更高能耗更小的计算器件, 等等。虽然这些领

域中的任何一个都同样依赖于多元化的知识与技术基础，但电动力学（或者说电磁场的运动规律）在其中都起着举足轻重的影响。运用好它，不但能够为这些生产生活提供可靠的理论支持，甚至有可能允许我们在特定科学研究和工程应用中产生飞跃性的构想和设计（微波炉、干涉仪、相控阵雷达、磁悬浮、回旋加速器、磁约束核聚变、射电天文等等）。人类步入现代化的过程，也是人类对电磁场的驾驭不断成熟和趋于极致的过程。

- 电动力学之所以对我们的日常生活如此重要，归根结底在于电磁相互作用在自然界所有已知的四种相互作用中其特征尺度与我们大部分日常生活所涉及的尺度是最为接近的一个。相比而言，强相互作用与弱相互作用的影响范围不出原子核的尺度，我们只有在接触亚原子物理过程的时候（放射性、裂变、聚变等）才会真正与其打交道。而引力相互作用的影响只有大到星球、星系或者更大的尺度才会变得显著。虽然放眼整个宇宙所有这些相互作用都有着自身不可忽视的角色，但是迄今人类生活所真正普遍涉及的尺度，小到原子层面，大则到约等于地球的大小，而对于这个尺度区间内的一切物理现象与物理过程，电磁相互作用的影响无疑都是占有主导地位的。仅仅凭借这一点，可以说学物理如果不学电动力学是相当可惜的。
- 前面提到在学习电动力学的过程中我们会顺带学习狭义相对论。它源自于电磁场运动规律与等效原理这一物理学普遍原理的调和，而其意义则又超出了电磁场的范畴。由于我们平时生活中所接触到的特征速度普遍远小于光速，我们极少会接触到显著的狭义相对论效应。这也是为什么我们每个人在头一次接触到这一理论的时候或多或少都会感受到震撼的原因。同样出于这个原因狭义相对论似乎显得并没有那么有用。不过设想随着人类对太空探索的技术不断进步、范围不断扩展，在将来我们需要涉足的速度与尺度势必要不断增大。事实上在现今的太空探索中为了精度的要求我们已经必须考虑相对论效应的影响，而人类生产活动进入到星系的层面，狭义相对论乃至广义相对论不可避免地会像如今的电动力学一样成为不可或缺的指导工具，甚至进入我们的日常生活。这个将来不一定那么遥远。
- 聊过生产生活中的应用后，我们回到物理学研究本身，简单谈一下电动力学对于研究其它物理系统的帮助。
- 有别于本科四大力学中的其它三个，电动力学教给我们的是现实世界中的一个真实存在的组成部分（而其它三个都是构建了描述物理系统演化的一般框架）。电动力学是我们从开始接触物理以来所学习的第一个把**场**专门作为一个物理系统来研究的理论。在此之前我们学过质点的动力学，学过（有限）多体的动力学，学过刚体的动力学，但是把在空间中具有连续分布的系统作为对象来研究其动力学行为这是第一次。当然，细心的同学会设想，在我们掌握了牛顿力学之后，我们可以构造分布在无限晶格上的质点，它们相互间通过某种作用关联，在取特定的连续极限下它们的运动也类似于一个场（前面提到以太就是采用了这样的机械观点）。这确实是一种用来构造场的常用方法，在凝聚态物理中我们其实会遇到不少类似的问题。但是这样的研究场的方法自身也会带来不少问题。
  - 并非所有种类的场都能够用这种方法构造。对于大多数的场，如果目的是研究场的性质本身，这种方法也是繁复的。



- 这种晶格的极限与场之间的对应关系本身也不是一个一一映射。在许多例子里, 同一种场可以由多种晶格来实现。这为研究场带来的额外的复杂性。
- 当然, 最根本的问题依然在于, 如同电磁场一样, 在不少理论中场自身应当被看作是一个基本的物理实体, 而不是依托于任何更基本的物体而存在。
- 电磁场是我们研究的第一个作为基本物理实体的场。在这个理论中我们会接触到的诸多分析方法 (也是我们在这门课程中将要学习的) 会自然地拓展到对其它场的分析中。从一般的场论观点看, 电磁场也是个颇为特殊的模型。如果同学们以后继续深入学习, 会了解到它可以被看作是具有内禀自旋为 1 的场, 并且是“无质量”的场。其中的无质量性质决定了电磁相互作用是一种长程的相互作用, 从而我们能够在尺度上观察到电磁波与电磁辐射。而自旋为 1 决定了电磁场与其它物质之间相互作用的耦合方式。这些性质事实上给电磁场的理论施加了很强的自洽性约束, 以至于它的运动方程 (麦克斯韦方程组) 几乎是唯一 的。
- 在往后的课程中我们会看到, 电磁场具有所谓的规范变换不变性, 也称规范对称性。这种不变性与局域的电荷变换有关, 因此又称为局域对称性。这是电磁场的一种内秉的性质。事实上已知的其它三种相互作用都可以看作是对电磁场概念的某种拓展, 而它们同样都具有规范对称性。
  - 将电荷的概念进一步拓展, 我们可以得到更一般的所谓非交换规范场, 也称杨-米尔斯场。强相互作用与弱相互作用皆属于这一大类。此外, 电磁场也孕育了场论中最初的对偶思想 (前面提到的  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  交换)。特别在与量子物理结合后, 这种对偶思想为人们理解强耦合系统的物理性质提供了莫大的帮助。
  - 将自旋进一步拓展到 2, 我们会得到引力相互作用。细心的同学可能早已注意到, 哪怕是最古老的牛顿引力定律已经呈现出与电磁相互作用的某种相似性

$$F_{\text{EM}} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1.16)$$

$$F_{\text{G}} = G_{\text{N}} \frac{M_1 M_2}{r^2}. \quad (1.17)$$

而现如今人类甚至初步具备了利用引力波探索电磁相互作用往往无法触及的黑洞过程的技术 (人们现有的引力波探测技术本质上就是巨型的迈克尔逊-莫雷干涉仪, 不过其信号甄别涉及对引力波性质及引力辐射的深入研究<sup>4</sup>)。

- 由以上讨论我们也看到, 电动力学所涵盖的内容即会贴近我们的生活又会帮助我们洞悉自然界相互作用的深层机理。这个学科既可阳春白雪, 又可下里巴人。在学习这门课程的过程中观察过去的研究如何将我们日常司空见惯的现象一步一步抽象提升到解释普遍规律的系统性的理论, 本身也是一个奇妙的旅程。

<sup>4</sup>有兴趣的同学可以阅读一下激光干涉仪引力波天文台 (LIGO) 官网给的介绍: <https://www.ligo.caltech.edu/page/learn-more>。



2.1	库伦定律 . . . . .	19
2.2	一般电荷分布的电场计算 . . . . .	20
2.3	补充: 关于计算机软件的使用 . . . . .	22

## 2.1 库伦定律

- 库伦定律 (Coulomb's law):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}. \quad (2.1)$$

该公式描述一个电荷量为  $Q$  的点状物体 (点源) 对另一个电荷量为  $q$  的点状物体施加的作用力。两个物体相对距离为  $r$ ,  $\epsilon_0$  为真空介电常数<sup>1</sup>

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,8128(13) \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}. \quad (2.2)$$

- 力的方向沿两点连线, 同性电荷相斥, 异性电荷相吸。
  - 力的大小: (1) 正比于各自的电荷, (2) 平方反比于相对距离。
  - 注: 该公式形式上看关于两个电荷是对称的, 于是也可以反过来理解。不过要注意的是, 从实验角度看这里其中一个电荷  $q$  要求是所谓的试验电荷, 亦即我们假想它的电量趋近于零的极限。设想在实验中我们如果用了很大的电荷, 这势必影响到周围的电场甚至“点源”(真实的实验中不会是一个理想的点) 处的电荷分布, 进而影响到试验电荷自身所受的力。
- 为了方便地讨论这种相互作用力, 在这门课程中我们将系统利用矢量的描述方法。假设源电荷  $Q$  位于坐标  $\mathbf{x}'$  处, 试验电荷  $q$  位于  $\mathbf{x}$  处。于是  $Q$  作用在  $q$  上的力  $\mathbf{F}$  为

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.3)$$

注意  $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$  为从  $\mathbf{x}'$  指向  $\mathbf{x}$  的单位矢量。库伦定律实际反映的是一个静止点源  $Q$  对周围带电物体的影响。除了正比于试验电荷的电荷量之外, 这种影响完全取决于  $Q$ , 并且关于空间构成一定分布。由此我们可以改写

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}q, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.5)$$

$\mathbf{E}$  称为坐标点  $\mathbf{x}$  处的**电场强度**。我们把  $\mathbf{E}$  关于  $\mathbf{x}$  的分布  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  (亦即空间中每个点所关联的电场强度的集合) 称为**电场**。

<sup>1</sup><https://www.physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?ep0>.

- 上述拆分告诉我们库仑定律可以看作是二个更基本的规律的推论：
  - 在更一般的情形下我们把(2.4)用作电场的度量。无论所谓的电场是以何种方式产生的，当我们测量一个试验点电荷的受力时，会观察到这个力的大小和方向只与点电荷的位置以及电量有关，且大小正比于试验电荷的电量  $q$ 。
  - 另一方面，(2.5)则决定了在最简单的情况下单个理想的点电荷所对应的电场。

## 2.2 一般电荷分布的电场计算

- 同一点处的电场强度  $\mathbf{E}$  并非一定来自于单一点源，因而需要对(2.5)进行扩展。当电荷源在空间中构成一定分布时，我们把它们看作是多个点电荷源的集合，分别适用库仑定律，所得到的作用在实验电荷上的力遵循力的矢量叠加原理。由此电场强度  $\mathbf{E}$  在任意给定的空间点  $\mathbf{x}$  上同样遵循矢量叠加原理。在数学处理上有两种情况：
  - 如果一个系统由离散的点源组成，我们用脚标  $i$  标记不同的点源，任意点  $\mathbf{x}$  上的电场强度则为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i Q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|^3}. \quad (2.6)$$

上述求和号表示矢量的加法。

- 如果一个系统具有连续的电荷分布，如前所述我们假想把带电物体切成许多小份，其中每一份在尺度趋近于零的极限下可看作是一个独立的点源。假设电荷分布密度为  $\rho(\mathbf{x})$ ，那么点  $\mathbf{x}'$  处微小体积元上的电荷量为  $\rho(\mathbf{x}')dV \equiv \rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$ ，由此电场强度可以表述成一个关于空间的积分

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.7)$$

(在具体计算中对于矢量的每个分量上式都是通常的积分。) 这里的积分区间  $V$  总是可以取全空间，在没有电荷的地方我们只需要设定  $\rho(\mathbf{x}') = 0$ 。

- 连续分布的电荷还可以分为三种情况分别处理：
  - 体积分。连续电荷成三维分布时，我们直接利用上述公式计算。
  - 线积分。有些问题中电荷只分布于二维曲面上，且已知线电荷密度（单位几何长度上的电荷量）为  $\lambda(\mathbf{x}')$ （单位  $\text{C m}^{-1}$ ）。那么我们在(2.6)中做替换

$$dV \mapsto d\mathbf{l}, \quad \rho(\mathbf{x}') \mapsto \lambda(\mathbf{x}'), \quad (2.8)$$

且积分域为整条曲线。假设这条曲线上的点可以由一个参数  $t$  追踪，亦即  $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}'_i(t)$ 。注意曲线上任意线段的实际长度并不一定等同于对应参数  $t$  改变的值。当  $t$  改变了一个微小量  $dt$  时，曲线上的点产生了微小位移

$$d\mathbf{l} \equiv (dx'_1, dx'_2, dx'_3) = (\partial_t x'_1 dt, \partial_t x'_2 dt, \partial_t x'_3 dt). \quad (2.9)$$

此处  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ 。于是线元为

$$d\mathbf{l} \equiv |\mathbf{dl}| = \sqrt{(\partial_t x'_1)^2 + (\partial_t x'_2)^2 + (\partial_t x'_3)^2} dt. \quad (2.10)$$

特别地, 如果  $t \equiv x'_1$ , 那么上式简化为

$$dl = \sqrt{1 + (\partial_{x'_1} x'_2)^2 + (\partial_{x'_1} x'_3)^2} dx'_1. \quad (2.11)$$

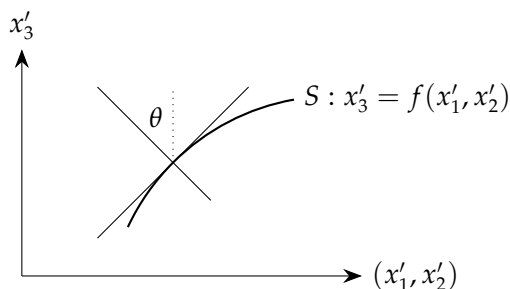
- 面积分。还有一些问题中电荷只分布于一个二维曲面上, 拥有面电荷密度  $\sigma(\mathbf{x}')$  (单位几何面积上的电荷量,  $\text{C m}^{-2}$ )。这时我们在(2.6)中做替换

$$dV \mapsto dS, \quad \rho(\mathbf{x}') \mapsto \sigma(\mathbf{x}'). \quad (2.12)$$

$dS$  指代微小面元的面积。例如, 如果用球坐标处理半径为  $r$  的球面, 其面元为  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ 。更一般地, 假定曲面可以由一个函数  $f(x'_1, x'_2)$  描述,  $\{x'_1, x'_2\}$  为两个独立坐标分量, 那么我们有

$$dS = \sqrt{1 + (\partial_{x'_1} f)^2 + (\partial_{x'_2} f)^2} dx'_1 dx'_2 \equiv \frac{1}{\cos \theta} dx'_1 dx'_2, \quad (2.13)$$

( $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ 。)  $\theta$  为曲面法矢量与  $x'_1$ - $x'_2$  平面法矢量的夹角。



- \* 在上面公式中我们把曲面按沿第三轴投影方向分割。曲面由方程  $F(\mathbf{x}') \equiv f(x'_1, x'_2) - x'_3 = 0$  给出。于是曲面在点  $\mathbf{x}'$  处的法向量由函数  $F$  的梯度给出 (关于梯度的概念后面将进一步介绍)

$$\nabla F \equiv (\partial_{x'_1} F, \partial_{x'_2} F, \partial_{x'_3} F) = (\partial_{x'_1} f, \partial_{x'_2} f, -1). \quad (2.14)$$

而  $\theta$  也可看作该法矢量与第三轴的夹角, 于是

$$\cos \theta = \frac{|(\nabla F)_3|}{|\nabla F|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_{x'_1} f)^2 + (\partial_{x'_2} f)^2 + 1}}. \quad (2.15)$$

在上述切割中每一个投影过后的面元面积为  $dx'_1 dx'_2$ , 因此我们得到表达式(2.13)。

- \* 更一般地, 我们可以类比于前面对线元的处理, 把面元  $dS$  在三个方向上的投影作为分量构造一个矢量

$$d\mathbf{S} = (dx'_2 dx'_3, dx'_3 dx'_1, dx'_1 dx'_2). \quad (2.16)$$

$dS$  则为这个矢量的模长。(为了使这个关系严格成立我们需要引入微分形式的概念, 这在后面会进一步介绍。)

- 我们举几个电荷系统的例子。

- 离散电荷分布。假设两个带电量同为  $q$  的点电荷，一个在坐标  $(-a, 0, 0)$  处，另一个在  $(a, 0, 0)$  处。我们分两种情况考虑  $y$ - $z$  平面上的场强。

第一种情况下两个电荷同为正电荷，由对称性不难发现  $\mathbf{E}$  的指向背离坐标原点。我们有（按照以往的习惯，我们当然也可以首先考虑场强的绝对值  $|\mathbf{E}|$  然后再分析其各个分量）

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(a, y, z)}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{(-a, y, z)}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(0, y, z)}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

第二种情况，如果前一个电荷为正后一个为负，那么电场强度垂直于  $y$ - $z$  平面，具体为

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(a, y, z)}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{(-a, y, z)}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(a, 0, 0)}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (2.18)$$

我们可以研究更一般的位置，甚至在例如 Mathematica 等软件里绘制出电场矢量的分布图。由电场的叠加性质我们知道，在空间的某个邻域内没有电荷的时候这个邻域中电场矢量  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  关于坐标  $\mathbf{x}$  总是连续变化的。于是从任意一点出发我们总是可以沿着  $\mathbf{E}$  的方向画出一根连续的线，直至这根线遇到某个电荷（从正电荷出发，到负电荷截止）。我们把这样的线称作**电场线**。

- 一维电荷分布。我们假设电荷均匀分布在负实轴上，其线电荷密度为  $\lambda$ 。那么对于任意空间点  $\mathbf{x}$  我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 dx'_1 \frac{(x_1 - x'_1, x_2, x_3)}{((x_1 - x'_1)^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r}, \frac{x_2}{x_2^2 + x_3^2} \left(1 - \frac{x_1}{r}\right), \frac{x_3}{x_2^2 + x_3^2} \left(1 - \frac{x_1}{r}\right) \right).\end{aligned}\quad (2.19)$$

这里  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 。

## 2.3 补充：关于计算机软件的使用

- 计算机从诞生起便对人类的数学处理能力带来了显著的扩展。现代的计算机软件（及程序语言）已经在科学研究中起到了不可或缺的作用。这些工具同样可以形象地帮助我们理解课程上学习的内容（特别是借助于丰富的绘图模块），所以这里建议同学们在本科的学习中至少选择其中一种详细地学习一下。
- 这些工具按照处理的数学问题的性质主要分为两大类：数值运算（numerical computation）与符号运算（symbolic computation）。现代的软件一般或多或少都会同时支持这两类运算，不过由于这两类运算内在的逻辑有巨大的差别，单一一种软件往往会偏重于其中一类。目前市面上存在的在各种数学领域都有较为丰富且成熟的函数库的通用数学处理系统主要包括

- MATLAB。即“矩阵实验室”(matrix laboratory), 老牌的数值运算软件, 在各种需要大量数值计算与仿真的领域都有广泛的应用。该软件也具有一定的符号运算能力, 不过是通过额外的函数库实现的。我们学校已经购买有 MATLAB 的使用权。
- Mathematica。主流的符号运算软件, 该软件可以说几乎是理论物理研究中必备的软件。该软件也含盖了诸多数值运算功能, 不过其效率不及专用的数值运算程序。<sup>2</sup>
- Maple。另一款主流的符号运算软件, 与 Mathematica 相比相对小众一点, 不过它在某些类别的运算上效率更高。

这几款软件掌握任何一种, 已经可以高效地处理大多数在日常工作和学习中会遇到的数学问题。这些软件也各自都有比较完善成熟的学习资料 and 用户手册。在这门课接下来涉及到计算机演示的地方, 我们将使用 Mathematica。

- 除了上述现成的应用软件外, 科学计算也往往涉及到计算程序的直接编写。前面介绍的应用软件也有各自专用的交互语言, 依托应用平台可以编写简单的程序, 但这类程序的执行效率远不及通用编程语言编译后生成的可直接在系统层面执行的程序。因此特别是当一个计算程序有在大量事例上反复应用的需求时, 使用通用语言直接编写程序是更为合适的选择。在科学计算中流行的编程语言早年有 Fortran, 如今主要有 C/C++ 以及 python。通用语言自身并不直接适用于科学计算 (除非自己把所有需要的功能自己写起来)。它对科学计算的支持是通过各种事先专门设计、编写、优化并编译好的函数库实现的。每一个函数库往往只针对一类特定的问题而设计。
  - C/C++(+gsl,ginac,gmp,mpi...)。最著名通用的编程语言 (之一), 是一个介于高级语言与低级语言之间的语言。这使其在保持语言的相对简洁的同时能高效地调动计算机资源。在对算法进行合理优化后, 对于专门问题该语言编写的程序能够达到相当高的运算速度。但是该语言的简洁性不如真正的高级语言, 其使用时的调试和维护成本相对比较高。因此该语言主要是用于编写针对专门问题的函数库。该语言本身也有许多高效的现成函数库, 常用的例如 gsl (GNU Science Library, 集成了许多科学计算常用的函数和方法)、mkl (另一个常用的针对 Intel 处理器的数值计算库)、ginac (用于符号运算的函数库, 定义了不少常见的代数结构和运算方法。这个库最早实际上是高能粒子物理中为了计算分析量子场论里的费曼图而设计的, 如今被进一步扩展包含了更多功能。)、gmp (用于实现任意精度数值计算的函数库)、mpi (用于实现大规模并行计算) 等等。
  - python(+numpy,scipy,sympy,matplotlib...)。近几年非常流行的通用高级编程语言。该语言语法结构非常简单, 因此其日常使用的调试和维护成本很低, 对于初学者来讲也非常容易上手, 但是该语言的解释和运行效率较低。该语言之所以会在科学计算 (甚至许多其它领域) 中有相当广泛的应用, 核心原因在于它对于其它语言 (包括 C/C++) 提供了非常便利的接口, 从而能够便利地调用及其它效率更高的语言编译好的函数库。因此 python 也被称为“胶水语言”,

<sup>2</sup>其公司还运营了一个包含各种标准数学函数的各种常见与不常见性质的百科网站: <https://functions.wolfram.com>。同学们学习数学物理方法的时候可以参考。



用户在真正使用的时候往往只是把它用作调用底层函数库的应用前端。如今 python 有相当庞大的用户群，因此也催生出了许多成熟的科学函数库。比较常用的例如用于数值运算的 numpy（这个库本身是用 C 编写的）、用于数据制图的 matplotlib、用于符号运算的 sympy 等等。

- 我们以课上同学们举的一个例子<sup>3</sup>演示一下计算机对我们探索静电系统的帮助。这个例子是通过轴线被切去了一半的圆柱面，其上分布有均匀的面电荷。简便起见，这里我们假设圆柱面的轴线为  $x_3$  轴，半径  $R = 1$ ，且用  $x_2 = 0$  的平面切去了其  $x_2 > 0$  的部分。此外假设面电荷密度  $\sigma = 1$ （计算机模拟时候我们暂且忽略物理量单位）。该半圆柱面可以方便地用参数  $(x'_3, t)$  建立坐标，其上任意一点为

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (\cos t, -\sin t, x'_3), \quad x'_3 \in (-\infty, +\infty), \quad t \in [0, \pi]. \quad (2.20)$$

这个设置下计算电场的被积函数是  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{3/2}$ 。现在用 Mathematica 分析这个例子。首先用变量 `xx` 指代  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ，`x3i` 指代  $x'_3$ （在接下来的代码中我们把 Mathematica 内置的函数与常量用粗体标出，我们自己定义的变量用颜色标出。）

```
xx={x[1], x[2], x[3]} - {Cos[t], -Sin[t], x3i};
```

1

首先积掉 `x3i` 得到一个新的函数 `int`

```
Integrate[xx/((xx.xx)^(3/2)), x3i];
```

2

```
int=Limit[%, x3i->+Infinity] - Limit[%, x3i->-Infinity]//Factor
```

3

其结果为

$$\left( \frac{2(x_1 - \cos t)}{1 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cos t + 2x_2 \sin t}, \frac{2(x_2 + \sin t)}{1 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cos t + 2x_2 \sin t}, 0 \right). \quad (2.21)$$

这里我们已经看到电场场强  $\mathbf{E}$  的第三分量在任意点处都为零（于是在接下来的计算中我们直接忽略它）。这与整个系统在沿第三方向的平移不变性以及关于  $x_3$  轴法平面的反演不变性有关。直接在一般的  $\mathbf{x}$  位置对  $t$  做积分的结果有点复杂，我们接下来采用数值办法。在区域  $x_1 \in [-2, 2], x_2 \in [-3/2, 1/2]$  内取一组间隔为  $1/100$  的格点

```
points=
  Flatten[
    Table[{x,y},{x,-2,2,1/100},{y,-3/2,1/2,1/100}]
    ,1];
```

4

5

6

7

其中每一个点上分别用数值积分计算电场强度的前两个分量，从而生成一系列数据。由于数据点取得比较多，为提高效率我们可以用并行计算 `ParallelTable` 生成列表

```
data=
  ParallelTable[
    {item,{
```

8

9

10

<sup>3</sup>2021-2022 春夏学期。



```

NIntegrate[int[[1]]/.{x[i_]:>item[[i]]},{t,0,Pi}], 11
NIntegrate[int[[2]]/.{x[i_]:>item[[i]]},{t,0,Pi}]]} 12
,{item,points}]; 13

```

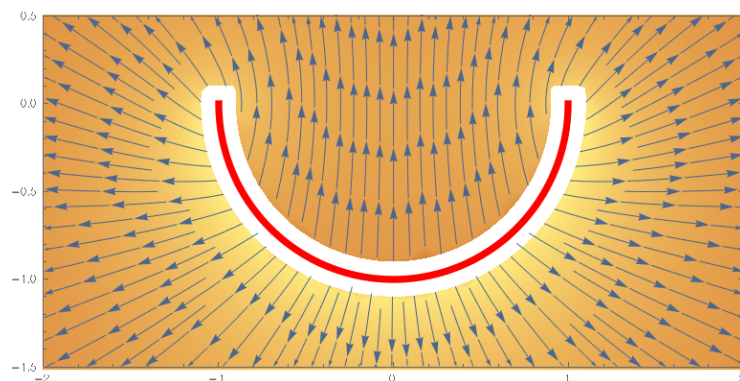
数据准备好后,接下来我们可以用制图函数直观地了解电场分部。这里比较有用的函数有 ListStreamDensityPlot (绘制流线图) 和 ListVectorPlot (绘制矢量分布图)。以前者为例

```

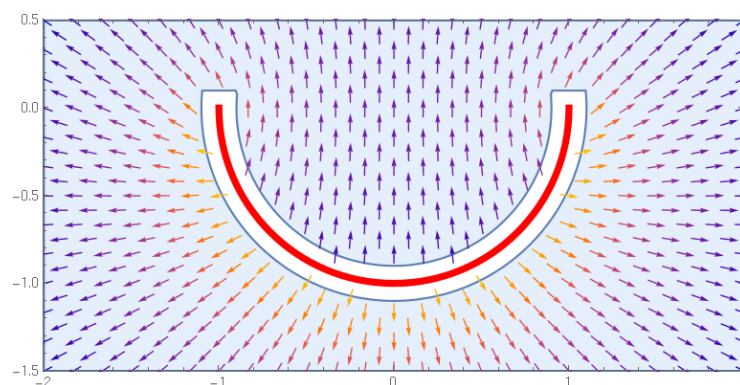
Show[ 14
ListStreamDensityPlot[data, 15
RegionFunction-> 16
Function[{x,y,vx,vy,n}, 17
(Abs[Sqrt[x^2+y^2]-1]>1/10&& y<1/10)||y>=1/10], 18
StreamPoints->Fine, 19
PlotRange->{{-2,2},{-1.5,0.5}}, 20
AspectRatio->1/2], 21
Graphics[{Red,Thickness[0.01],Circle[{0,0},1,{Pi,2Pi}]}] 22
] 23

```

于是我们得到下图



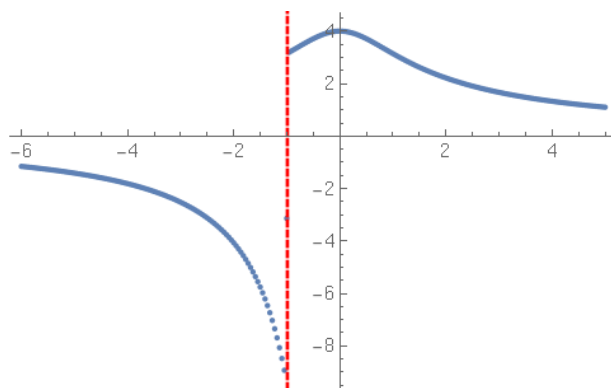
这里红色粗实线代表半圆柱面, 流线图中的线大致反映了电场的场线, 背景上的颜色额外反映的每一点处电场场强的大小。绘制矢量分布图的方法大致类似, 这里不再赘述, 其结果为



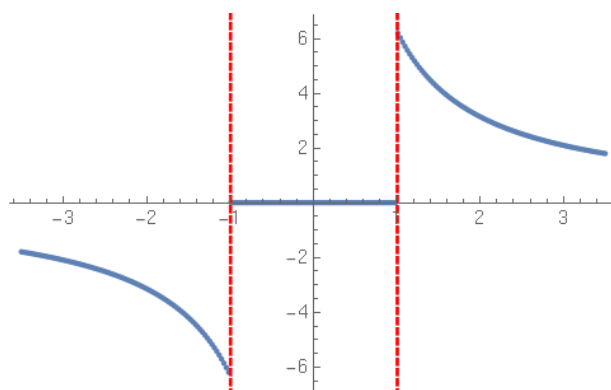
这里矢量的方向代表相应点上电场的方向，矢量的颜色反映了电场的大小。在这两张图里我们可以看到几个有意思的现象。首先是曲面内外两侧电场强度大小似乎有个明显的落差。我们可以在  $x_2$  轴上更细致地观察一下这个变化。由对称性不难看出这个轴上电场指向都是平行于该轴的，因此我们只要关注第二分量（红色虚线为圆柱面位置）

```
Table[{x[2], NIntegrate[int[[2]] /. {x[1] -> 0}, {t, 0, Pi}]}
, {x[2], -6, 5, 1/22}];
Show[
  ListPlot[%],
  Graphics[{Red, Dashed, Thick, Line[{ {-1, -10}, {-1, 5} }]}]]
```

这组代码生成  $x_2$  轴上电场矢量的第二分量



另外我们也看到在半圆内部电场矢量的方向几乎没有太大变化。为更细致地观察这一点，我们不妨看一下  $x_1$  轴上各点处电场的分量。所使用的代码也是与上一段非常类似的。所得到的图像为



当然，我们利用计算机辅助可以仔细观察的性质还有很多，以上只是一些参考。在上面的示例代码中调用各个函数的时候，我们额外对函数设置了不少属性。这些属性及其相关作用和例子都可以很容易地在软件的帮助文件里查到。感兴趣的同学可以用这些方法试试其它的静电系统。

3.1	静电场中的曲面	27
3.2	静电场中的曲线	28
3.3	应用	29

- 到目前为止，我们仅仅把电场看作是研究静电系统中相互作用力的一种方便的手段。我们把这种相互作用看作是源电荷直接对任意带电物体的影响，只不过在引入了电场的概念后，我们可以等效地说：“这种影响是由电场在特定点上施加给带电物体的”。
- 如果我们所面对的系统中的所有源都已经知晓，那么我们完全可以放心地使用前一节所述的定律。然而在实践中这往往是不现实的。我们会遇到复杂的系统：系统具有特定的边界及其相应的边界条件，但我们对边界上以及边界之外的可能的电荷分布一无所知。在这个情况下我们依然想要求解系统内的电场场强分布。对于这类问题我们便需要新的分析手段，这也促使我们开始把电场  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  当作某种物理实体来研究。
- 下面我们利用库仑定律中平方反比律与中心指向性来考察一般静电场的两种宏观性质。

### 3.1 静电场中的曲面

- 简便起见我们先关注单个点电荷源。假定其电荷量为  $Q$ ，并且位于坐标原点。我们考虑位置  $\mathbf{r}$  方向邻域内的一个立体角  $d\Omega$ ，相应地有一个垂直于  $\mathbf{r}$  的微小平面  $d\mathbf{S}$ ，其面积为  $|d\mathbf{S}| = |\mathbf{r}|^2 d\Omega$ 。注意  $d\mathbf{S}$  是一个矢量，其方向与它的法矢量一致。此处电场的场强  $|\mathbf{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$ ，并且与  $d\mathbf{S}$  是平行的。我们现在考虑两种变换：
  - 首先我们考虑选取不同的半径。由平方反比律我们发现乘积  $|\mathbf{E}||d\mathbf{S}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$  与位置距原点的距离无关。无论  $\mathbf{r}$  的模长是多少这个值始终不变。
  - 其次我们考虑让平面的法向量与  $\mathbf{r}$  之间有一个非平庸夹角  $\theta$ ，那么掠过该立体角的平面面积为  $|d\mathbf{S}| = \frac{|\mathbf{r}|^2 d\Omega}{\cos\theta}$ 。由此我们看到两个矢量的点积

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \equiv |\mathbf{E}||d\mathbf{S}| \cos\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (3.1)$$

是一个不变量，并且与前面例子 ( $\theta = 0$ ) 的结果等同。

假如我们现在考虑任意一个包围原点的闭合曲面，把该曲面分成许多小份，在每一小份上取  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  再求和，基于上述讨论我们知道在无限切割的极限下这等同于对一个中心在原点的单位球面做同样的事情，因而有如下积分恒等式

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3.2)$$

特别地，这个曲面依然可以是一个球面但其球心不一定与点源重合。

- 另一方面，如果我们所考虑的闭合曲面没有包围原点，那么我们总是可以把曲面拆成两部分，分别覆盖相同的立体角，但是恰好相差一个符号，于是

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.3)$$

这个式子有一个推论，告诉我们如果我们考虑一个开曲面，只要曲面的边界不变，我们总是可以在不触及电荷的情况下对曲面做任意连续变形而保持上式左边的积分结果不变。

- 总而言之，我们发现  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  在面上的积分只与曲面的拓扑结构有关。
- 对于更加一般的静止电荷分布，根据前面的讨论我们总是可以把它拆分成对点电荷的求和，相对于每一个点电荷上述分析结果皆成立。由于电场强度  $\mathbf{E}$  本身满足矢量加合关系，对一般的静电系统我们有

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{包围}}}{\epsilon_0}. \quad (3.4)$$

这里  $Q_{\text{包围}}$  是由曲面  $S$  所包围住的总电荷量。

- 上述关系是我们这门课程中遇到的第一个关于电磁场的积分恒等式，这里涉及到矢量场在面上的积分。我们把这个积分称为电场的**通量** (flux)。这个式子告诉我们，一个曲面所包围的电荷量正比于这个面上的电场通量。
  - 注：在使用这个公式时面积单位元  $d\mathbf{S}$  是有方向的，指向朝曲面外侧的法向量。

## 3.2 静电场中的曲线

- 其次我们看一下中心指向性的另一个推论。依然考虑单个点源  $Q$  (且假定位于坐标原点)。假设在点  $\mathbf{x}$  处有一个试验电荷  $q$ ，该点处的电场  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{x}$  的方向相同。如果把电荷做一个微小位移  $d\mathbf{l}_0$ ，且  $d\mathbf{l}_0$  平行于  $\mathbf{x}$ ，那么静电力对电荷做的功为  $q|\mathbf{E}||d\mathbf{l}_0|$ 。同样考虑两种情况：

- 如果我们做任意的微小位移  $d\mathbf{l}$ ，其与  $\mathbf{x}$  的夹角为  $\theta$ ，那么静电力做的功为

$$q|\mathbf{E}||d\mathbf{l}| \cos \theta \equiv q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.5)$$

这意味着，我们可以把位移矢量分解为径向分量与切向分量，只有径向分量等同于  $d\mathbf{l}_0$ ，那么现在做的功与原先的情况相等。在几何上我们看到这两种位移的终点都落在坐标系的同一个球壳上。

- 换一种情况，如果我们考虑出发点为  $\mathbf{x}'$ ，并且做位移  $d\mathbf{l}'_0$ ，其方向依然沿着径向。假定  $|\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|$ ， $|d\mathbf{l}'_0| = |d\mathbf{l}_0|$ ，那么两种情况下静电力做的功依然相等。

以上所有情况的共性在于它们的起点与终点都分别处于一个共同的球壳上，我们看到这要满足这个条件静电力的功就保持不变。

- 现在我们考虑同样的设置，但是把试验电荷  $q$  从点  $\mathbf{x}_1$  处经过有限位移移动到点  $\mathbf{x}_2$  处。注意移动的具体路径可以有多种选择，我们比较任意两条路径  $L_1$  与  $L_2$ 。为看清

两者间的关系我们利用坐标系的同心球壳切割这两条路径。从任意一个半径为  $r$  的球壳到与其相邻的半径为  $r + dr$  的球壳, 虽然两条路径的具体起止点不同, 依据上面的讨论在这样的微小位移下静电力的功依然是等同的。于是我们看到静电力做的总的功只依赖于起点与终点的位置, 而不依赖于移动的具体路径。在牛顿力学中我们学到在这样的情况意味着静电力是一个保守力, 相应地可以给它引入所谓势能的概念。关于这个概念我们后面再进一步讨论。

- 作为与前面对曲面讨论的类比, 这里我们把其中一条路径的方向反过来, 亦即先从点  $\mathbf{x}_1$  出发沿  $L_1$  移动到点  $\mathbf{x}_2$ , 再进一步沿  $L_2$  走回到点  $\mathbf{x}_1$ , 由此走过一条完整的闭合路径。那么上面的结论意味着

$$\int_{L_1+L_2} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (3.6)$$

事实上我们可以对这条曲线做任意的局部变形, 利用前面的讨论变形后的路径依然满足上述积分恒等式。更进一步, 对于任意的电荷分布, 由电场的矢量叠加性质不难看到这个结论依然成立。因此, 对任意闭合路径  $L$

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.7)$$

是静电场的另一个普遍规律。

### 3.3 应用

---

- 上述宏观性质 (主要是通量公式) 可以直接方便地用于求解一些高度对称的系统的静电场。这些系统固然可以用库仑定律求解, 但是求解过程会繁琐许多。我们这里举几个例子。
- **均匀带电直线。**
- **均匀带电无限平板。**
- **带电球体。**



4.1	矢量代数与张量	31
4.2	梯度场	37
4.3	电势	41

## 4.1 矢量代数与张量

- 矢量是有方向和长度的量。表示一个矢量有几种不同的方法：
  - 用一个抽象符号表示，常用的例如  $\vec{x}$  或  $\mathbf{x}$ （这部讲义里我们将普遍采用加粗的写法）。这个表示方法强调了矢量是一种几何概念：有关矢量的表达式，包括前一讲中我们所看到的积分恒等式，并不依赖于我们在什么样的坐标系中去研究它。
  - 在确定一个（笛卡尔）坐标系后用坐标系中的分量表示，例如三维空间中我们有  $(x_1, x_2, x_3)$ 。这种表示往往在实际计算中更加实用，因为它把相对抽象的符号计算化为我们更加得心应手的数值（纯数字）计算。
  - 用上标或者下标统一表示矢量的各个分量，例如  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )，但不特意指定其具体分量的值，这个指标具体用什么符号书写当然也是可以随我们选择的（对于与三维空间相关的指标通常习惯用拉丁字母  $i, j, k, \dots$ ）。这种标记方法是将矢量看作一大类更加一般的几何量，张量 (tensor)，的一种特殊情况。这种表示方法能帮助我们轻松地处理一些（看上去复杂的）恒等关系，并且在以后能够帮助我们更容易地理解一些相对复杂的物理概念。在这门课的至少第一部分内容里我们几乎只讨论三维矢量，并且不需要对上标与下标作出明确区分<sup>1</sup>，因此在这一阶段我们暂且可以把张量仅仅当作是一种便捷的表示方法。在同学们适应了这种描述语言后，等到讨论电磁场的动力学时我们将进一步了解张量的一般意义和用法。
- 矢量与矢量间的等价关系可以用一下任何一种方式陈述

$$\text{符号: } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (4.1a)$$

$$\text{分量: } x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3, \quad (4.1b)$$

$$\text{张量: } x_i = y_i. \quad (4.1c)$$

作为一种特定的几何量，矢量只能与矢量等价，而不能与其它任何不同种类的量（例如标量）等价。当用分量形式书写时，无论在那种坐标系下，相互等价的两个矢量的任何对应分量都必须分别相等。而用张量的方式书写时，这个原则则体现在等号两

<sup>1</sup>这种特殊性是由三维欧几里得空间中距离的定义（数学上称为度规）所导致的。一般情况下张量的上指标与下指标有不同的意义。简单起见我们暂且忽略这个问题并且约定所有指标都写在下面，以免与指数混淆。



边的表达式具有完全一致的指标  $i$ 。这一点在目前看来相当平庸，但是在以后处理复杂表达式之间的等价关系时经常容易被忽视，需要加以重视。

- 矢量最基本的运算是加法运算，这在我们学习力学的时候便已经熟悉了。在笛卡尔坐标系下，矢量的加法等同于矢量的各个分量分别相加

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3). \quad (4.2)$$

- 两个矢量  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  可以定义一个点乘运算  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ，运算返回一个标量。中学课程里我们知道这个标量等于两个矢量模长的乘积再乘以两矢量夹角的余弦， $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \theta$ 。这个点乘的几何意义是其中一个矢量在另一个矢量方向上的投影长度与另一矢量长度间的乘积。在前面的讨论中我们已经看到，它会出现许多从矢量性质的物理量中提取标量的问题里，例如通量或者功。
- 用分量的形式或张量的形式定义为

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \underbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}_{\text{分量}} = \sum_{i=1}^3 \underbrace{x_i y_i}_{\text{张量}} \equiv x_i y_i. \quad (4.3)$$

在张量表达式的最后一个式子里我们使用了**爱因斯坦约定** (Einstein's convention)：每当一个指标在同一个张量表达式里出现且仅出现两次时，我们默认对它所有的取值求和（数学上也称为**缩并** (contraction)）。不参与求和的指标实际都只会出现一次。因此虽然这个表达式乍看起来带了两个指标，但它实际上并不依赖于任何指标，从而是一个标量。关于张量表达式的这个性质稍后将有更细致的说明。点乘关于参与运算的两个矢量显然是交换对称的

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}. \quad (4.4)$$

由普通乘法的结合律与分配律我们不难看出点乘运算关于两个矢量具有双线性，亦即

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + b(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x} \cdot (a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + b(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}). \quad (4.6)$$

这些性质无论从分量还是张量角度考虑都很容易理解。

- 给定两个矢量  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  我们也可以定义一个叉乘运算  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ，该运算返回另一个矢量。这个新的矢量的模长等于两矢量模长的乘积再乘以夹角的正弦，其方向垂直于两矢量所张成的平面并满足右手定则（因而两个相互平行或反平行的矢量的叉乘为零）。其模长的几何意义为  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  所张成的平行四边形的面积。
- 用分量的方法叉乘的定义为

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (4.7)$$

如果用张量的形式定义，我们首先引入一个所谓的**Levi-Civita 符号**  $\epsilon_{ijk}$ ，规定  $\epsilon_{123} = 1$  并且该符号关于其任意两个下标的交换反对称。于是我们有（注意这里有两个指标满足爱因斯坦约定）

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k. \quad (4.8)$$



无论从叉乘几何图像的右手定则, 还是显性的分量表达式, 亦或 Levi-Civita 符号的反对称性, 都不难看出叉乘运算关于参与运算的两个矢量交换是反对称的

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}. \quad (4.9)$$

而另一方面, 点乘的双线性性质在这里依然成立

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = a(\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + b(\mathbf{y} \times \mathbf{z}), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x} \times (a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + b(\mathbf{x} \times \mathbf{z}). \quad (4.11)$$

- 如果  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$  并且  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  是通常所说的矢量, 那么严格说来  $\mathbf{z}$  并不是矢量, 而是所谓的**赝矢量** (pseudo-vector)。普通矢量与赝矢量在三维空间的连续平移或旋转变换 (或者换个角度说坐标系的连续变换) 下的变换方式是相同的, 因此很多时候我们不会特意在意它们之间的区别。但它们的区别在于前者在空间反演变换 ( $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ) 下其各个分量是取反号的, 而后者在该变换下保持不变。类似地, 如果我们有三个普通矢量  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{z}$ , 通过 Levi-Civita 符号构造出来的标量  $\epsilon_{ijk}x_iy_jz_k$  也称为**赝标量** (pseudo-scalar), 因为它在空间反演下会变成自身的相反数, 与普通的标量相异。
- 对于不熟悉张量的同学我们这里对于诸如(4.8)的张量等式做一些额外说明:
  - 在一般的张量表达式里我们会看到许多不同的指标。所有这些指标可以分为两类。以(4.8)为例, 第一类指标包含  $i$ , 第二类指标包含  $j$  和  $k$ 。不难看到这两类指标的区别在于是否进行了求和。第一类指标没有被求和, 当我们把一个表达式整体看作一个张量的时候, 这类指标表征了张量的属性, 它们总的数目称为张量的**阶** (rank)。我们通过对这类指标赋予特定的值来提取张量相应的分量。第二类指标做了求和, 确切地说它们并不是 (表达式整体作为一个张量的) 张量指标, 人们经常称此为“伪指标” (dummy index)。对于这类指标我们在书写的时候甚至可以根据需要随意改变它们的记号而保持表达式的意义不变, 例如

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \epsilon_{ijk}x_jy_k \equiv \epsilon_{i\alpha\beta}x_\alpha y_\beta. \quad (4.12)$$

- 当我们写下张量与张量之间的相等关系时, 切记等号两侧的张量必须是同一种类的张量: 张量指标的数目 (亦即阶) 必须相等, 并且对应的指标必须使用相同的符号标记<sup>2</sup>。例如在(4.8)中我们看到等号两侧各有一个指标  $i$ , 这表示矢量与矢量之间的相等。为了加深理解, 我们再看一个稍微非平庸的例子。一个矩阵  $\mathbf{M}$  的分量由行与列标记, 因此它可以看作是一个二阶张量  $M_{ij}$  (把第一个指标看作行的标记, 第二个指标看作列的标记)。现考虑两个矩阵  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{T}$ 。当我们写下张量等式

$$S_{ij} = T_{ij} \quad (4.13)$$

时, 注意到两侧的第一个指标与第二个指标分别使用了同一个符号, 意味着每次指定一个行与一个列两矩阵对应的分量总是相等, 因此这个张量等式等价于

<sup>2</sup>对于最一般的张量, 我们甚至需要区分所谓的逆变指标与协变指标, 记号上对应于上指标和下指标。不过在当前三维欧几里得空间里的讨论下我们可以完全忽略这种区别。

矩阵关系  $\mathbf{S} = \mathbf{T}$ 。另一方面，如果我们写下

$$S_{ij} = T_{ji}, \quad (4.14)$$

张量的两个指标与行列关系从矩阵角度看来在等式两边是对调的，因此这个张量等式翻译成矩阵实际为  $\mathbf{S} = \mathbf{T}^T$ （右侧是矩阵的转置）。从这个例子我们看到张量等式据具体含义对等号两侧（第一类）指标间的对应明确的依赖。

- 尽管存在可能的指标缩并，一个写成乘积的具体张量表达式里乘积的各个因子相互之间的顺序是可以任意置换的，因为每当指标取到特定值时这些因子无非指代张量的具体分量，而分量与分量间的乘法是普通乘法。作为一个非平庸一点的例子，假如我们用二阶张量  $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$  和一阶张量  $C_i$  通过指标缩并定义一个新的三阶张量  $T_{ijk} = A_{il}B_{lj}C_k$ ，那么它等价地也可以写为

$$T_{ijk} = A_{il}C_kB_{lj} = B_{lj}A_{il}C_k = B_{lj}C_kA_{il} = C_kA_{il}B_{lj} = C_kB_{lj}A_{il}. \quad (4.15)$$

注意这里所做的置换仅仅限于乘积各因子间的置换，而每个张量自身的指标顺序是分别保持不变的。由上一条我们已经知道，当一个张量的指标顺序改变时它本身的意义也就变了。

- 有了上述两种运算以后，我们可以考虑它们的复合运算  $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ 。用张量的形式书写这个标量为

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \epsilon_{ijk}x_iy_jz_k. \quad (4.16)$$

由 Levi-Civita 符号的全反对称性质我们知道这个标量关于三个矢量的交换也是全反对称的。这一点单单从原先矢量之间的点乘与叉乘符号上是不容易看出来的，其中不那么显然的反对称置换例如

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= \epsilon_{ijk}x_iy_jz_k = \epsilon_{ijk}y_jx_iz_k = -\epsilon_{jik}y_jx_iz_k \\ &= -\epsilon_{ijk}y_jx_iz_k = -\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

其中第三个等号基于 Levi-Civita 符号的反对称性，第四个等号纯粹改变了两组伪指标的书写记号，第五个等号反过来使用了第一个等号将表达式重新写回矢量间的运算。在这个复合运算中我们看到了使用张量语言的一个优势。事实上细心的同学应该已经发现这个标量其实是一个行列式

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (4.18)$$

这个量表征由  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$  与  $\mathbf{z}$  所张成的平行六面体的体积。作为一个赝标量它关于任意两个矢量交换反对称性的意义在于，在这样的交换下这三个矢量为体空间提供的坐标架的手性就变了。

- 我们也可以考虑由两个叉乘组成的复合运算  $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ 。该运算返回一个矢量，我们暂且把它记为  $\mathbf{v}$ 。我们先用线性代数的方法分析这个表达式。由于一般任意给出三个矢量能够张成整个三维线性空间，所以我们期待  $\mathbf{v}$  可以在  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$ 、 $\mathbf{z}$  上重新做线性展开

$$\mathbf{v} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}. \quad (4.19)$$

由叉乘的定义我们知道叉乘的结果与参与叉乘的任何一个矢量垂直。因此一方面我们有

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = a \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = 0. \quad (4.20)$$

这告诉我们  $a = 0$ 。另一方面

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = b(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) = 0. \quad (4.21)$$

该方程可以解掉  $b$  与  $c$  中的一个自由度, 剩下一个整体的待定因子。所以我们可以将等式进一步写为

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = A((\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}). \quad (4.22)$$

从等式两边各个矢量的缩放比较我们可以得知余下的整体系数  $A$  只能是一个常数。

- 有同学可能会猜测这个系数是否会三个矢量的某种标量函数。如果是这种可能性, 这个标量只可能由  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ 、 $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$  与  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$  的乘除法所得, 亦即

$$A \propto (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^{p_1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})^{p_2} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})^{p_3}. \quad (4.23)$$

但是这个量又不能随任意矢量的缩放而变化, 故而  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ 。

为了得到这个常数我们不妨假设一个特殊情形: 令  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0$  且  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{z}$  平行。那么等式(4.22)左侧得到  $|\mathbf{x}||\mathbf{z}|\mathbf{y}$ , 而右侧得到  $c|\mathbf{x}||\mathbf{z}|\mathbf{y}$ , 由此  $c = 1$ 。于是我们得到了一个恒等式

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}. \quad (4.24)$$

这个恒等式在特定问题中可以帮助我们化简矢量间的乘法。

- 除了上述线性分析方法外, 我们再介绍张量的推导办法, 这会在以后的学习中变得非常实用。我们首先注意到两个叉乘的复合用张量可以写成

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}))_i &= \epsilon_{ijm} x_j (\mathbf{y} \times \mathbf{z})_m \\ &= \epsilon_{ijm} \epsilon_{mkl} x_j y_k z_l. \end{aligned} \quad (4.25)$$

在这个式子中我们首先关注由两个 Levi-Civita 符号构成的四阶张量 (依赖于四个指标)

$$\epsilon_{ijm} \epsilon_{mkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (4.26)$$

这里  $\delta_{ij}$  是 [Kronecker  \$\delta\$](#)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4.27)$$

关于 Kronecker  $\delta$  有一些很容易理解的一般性质可以使用:

- 首先由定义它显然关于两个指标置换是对称的,  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .
- 其次对于任意张量  $A_{i_1 i_2 i_3 \dots}$ , 将它的一个指标与 Kronecker  $\delta$  做缩并只不过相当于做了一个指标替换

$$\delta_{ji_a} A_{\dots i_a \dots} = A_{\dots j \dots}. \quad (4.28)$$

一些特殊的例子比如  $\delta_{ij} x_j = x_i$ ,  $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$ , 等等。

– 将 Kronecker  $\delta$  自身的两个指标做缩并, 我们有  $\delta_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = 3$ 。

将(4.26)代入上述张量表示(4.25)并应用这些性质, 我们于是得到

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}))_i &= (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) x_j y_k z_l \\ &= (\delta_{ik} y_k)(\delta_{jl} x_j z_l) - (\delta_{il} z_l)(\delta_{jk} x_j y_k) \\ &= ((\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z})_i. \end{aligned} \quad (4.29)$$

其中第二个等号只是应用了分量间普通乘法的分配律、交换律与结合律。这里我们可以清楚看到张量方法为计算带来的便利。

- 关于(4.26)这样的恒等式我们做一些额外说明。这个式子一旦给出, 想要去验证的话是非常简单直接的。这里我们简单聊一下如果事先不知道能够写成等式右边的形式, 如何去看出这样的结构。事实上我们可以先讨论一个更一般的情况,  $\epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}$ , 亦即直接把两个 Levi-Civita 符号乘在一起但保留所有六个自由指标。这个组合有一个特性: 它关于  $\{i_1, i_2, i_3\}$  以及  $\{j_1, j_2, j_3\}$  这两组指标自身的任意置换是反对称的 (来自于 Levi-Civita 符号本身的定义)。当这些指标取一些特殊值时我们很容易看出表达式返回的数值, 比如  $\epsilon_{123}\epsilon_{123} = 1$  (而且对于任何指标我们显然只能得到  $\{-1, 0, 1\}$  这三种结果)。为了凑出这个特殊结果我们可以猜想

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} \stackrel{?}{=} \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3}. \quad (4.30)$$

这个式子关于上述特定分量是对的, 但它的问题是不满足前面提到的对称性。为了进一步凑出一个满足置换对称条件的表达式, 比如说与  $\{j_1, j_2, j_3\}$  有关的对称条件, 一个简单的做法是我们从上式右侧出发直接枚举  $\{j_1, j_2, j_3\}$  这三个指标之间所有可能的置换, 对于每个奇数次置换额外添上一个负号, 再把所得到的这个组合全部加起来

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} \stackrel{?}{=} & \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3} - \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} \delta_{i_3 j_3} \\ & + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_1} + \delta_{i_1 j_3} \delta_{i_2 j_1} \delta_{i_3 j_2} - \delta_{i_1 j_3} \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_1}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

在新出现的项里由于指标之间匹配的错位, 这样的表达式同样满足  $\epsilon_{123}\epsilon_{123} = 1$ , 并且兼顾了指标  $\{j_1, j_2, j_3\}$  的对称条件。此时又很容易看出这个式子其实也直接符合了指标  $\{i_1, i_2, i_3\}$  的对称条件, 因此满足了我们对于  $\epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}$  的所有要求。通过简单的枚举我们不难验证上述式子确实是一个恒等式。注意上述分析并不是有关这个恒等式的一个严格推导, 但是这里我们看到在有足够对称性的情况下一个表达式的结构往往是容易直接预测的。这种思路在相当多的物理问题中有广泛的应用。

- 有了上述结论以后, 为了获得(4.26), 最直接的方法当然是计算指标的缩并。令  $j_1 = i_1$ , 利用 Kronecker  $\delta$  的性质我们有

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{i_1 j_2 j_3} &= \delta_{i_1 i_1} \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3} - \delta_{i_1 i_1} \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 i_1} \delta_{i_3 j_3} \\ &\quad + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 i_1} + \delta_{i_1 j_3} \delta_{i_2 i_1} \delta_{i_3 j_2} - \delta_{i_1 j_3} \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 i_1} \\ &= 3\delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3} - 3\delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_2} - \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3} \\ &\quad + \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_2} + \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_2} - \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3} \\ &= \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3} - \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

这个结果与(4.26)是等价的。当然,我们也可以尝试通过类似于上述对称性的方法直接写下这个结果。作为一个依赖于四个指标的表达式,对称性实际上已经告诉我们

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{i_1 j_2 j_3} \propto \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3} - \delta_{i_2 j_3} \delta_{i_3 j_2}. \quad (4.33)$$

为了寻求整体的比例系数,我们看到当  $i_2, i_3$  的值具体取定后,为了获得非零的贡献  $i_1$  的值是完全被 Levi-Civita 符号的反对称性定死的,这解释了这个比例系数得是 1 (当然我们最终还是要实际检验所得到的表达式)。类似地,如果有两对指标做了缩并,我们有

$$\epsilon_{mni} \epsilon_{mnj} = 2\delta_{ij}, \quad (4.34)$$

这其中的系数 2 在于取定  $i$  的值后有两种  $m, n$  的取值会有非零的贡献。而所有指标均做缩并的情形

$$\epsilon_{mno} \epsilon_{mno} = 3! \quad (4.35)$$

对应于所有六种非零贡献的和。在应用这些恒等式的时候,我们需要注意等式左边 Levi-Civita 符号的指标顺序,不同顺序可能会造成一个符号差异。

## 4.2 梯度场

- 所谓**场** (field) 是某种量在给定空间中的分布,或者说是在给定空间中每一点都指定一个量并考虑所有这些量的集合。这个概念里有两个基本要素:
  - 其一,在定义一个场之前我们首先需要明确分布所处的空间是什么。这个空间一旦指定好就是完全固定的,我们称它为**基底空间** (base space)。在静电与静磁学的讨论中这个空间是三维欧氏空间  $\mathbb{R}^3$ ,而在后面有关动力学的讨论中我们将看到这个空间需要扩大为四维闵氏时空。
  - 其二,作为一个分布,基底空间上每一个点会关联(或者说映射到)一个量。这个量往往不是完全任意选取的,而是会在一个事先指定好的空间(或集合)里取值,这个空间称为**目标空间** (target space)。因此任何点所关联的量都属于同一种类型。常见的目标空间比如某个数域或是某个线性空间。如果所考虑的量是标量(实数、复数、等等),那么这个场称为**标量场** (scalar field),如果是矢量则称为**矢量场** (vector field)。
- 标量场是最容易理解的情形。我们以往经常研究的函数都可以看作是标量场的具体例子(对于实函数,它的目标空间是  $\mathbb{R}$ ): 单变量函数  $f(x)$  可以看作是一维空间  $\mathbb{R}^1$  上的标量场,双变量函数  $f(x, y)$  可以看作是二维空间  $\mathbb{R}^2$  上的标量场,等等。更复杂一点,如果某个函数  $f(\theta)$  的自变量是极角坐标  $\theta \sim \theta + 2\pi$ , 例如  $\sin \theta$ , 那么这个函数可以看作是圆环  $S^1$  上的标量场。我们暂且只讨论基底空间为  $\mathbb{R}^3$  的情况。
- 构造矢量场的一个直接方法是对标量场做偏微分。为此我们引入一个算符  $\nabla$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \equiv \partial_i, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.36)$$

(等式右侧是张量写法。) 于是给定一个标量函数/标量场  $f(\mathbf{x})$  以后我们可以得到一个矢量场

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_3} \right) \equiv \partial_i f, \quad (4.37)$$

称为这个标量函数的**梯度场** (或简称梯度, gradient)。反之,  $f(\mathbf{x})$  称为矢量场  $\nabla f(\mathbf{x})$  的**势函数** (或简称势, potential)。

- 在微积分课程中我们学到过多元函数沿特定路径的导数。具体地, 指定一条由参数  $t$  表征的路径  $\mathbf{x}(t)$ 。那么函数  $f(\mathbf{x})$  在点  $\mathbf{x}$  处沿这条路径的导数为

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \nabla f(\mathbf{x}). \quad (4.38)$$

不失一般性我们假定  $|d\mathbf{x}/dt| = 1$ <sup>3</sup>, 那么这个量表征了函数沿曲线方向的变化快慢。如果我们考虑过点  $\mathbf{x}$  的各种可能的曲线, 因而也考察各种不同的方向, 不难发现当  $d\mathbf{x}/dt$  与  $\nabla f$  夹角为零时上述乘积达到最大值。因而我们说函数  $f(\mathbf{x})$  的梯度在每个点上表征了函数在该点处最速增大的方向以及快慢。

- 另一方面, 如果乘积  $\partial_i \mathbf{x} \cdot \nabla f = 0$ , 那么  $\partial_i \mathbf{x}$  所指的方向为函数  $f(\mathbf{x})$  值保持不变的方向。方程  $f(\mathbf{x}) = C$  ( $C$  为任意常数) 在空间中定义了一个曲面, 称为**等势面** (equipotential)。由该乘积我们知道任意点  $\mathbf{x}$  上的梯度  $\nabla f(\mathbf{x})$  总是与通过该点的等势面垂直。
- 由  $\nabla$  的定义我们也可以把它看作一个矢量, 于是可以讨论它的“点乘”与“叉乘”运算, 只不过作为一个微分算符  $\nabla$  依然要作用在其后面的函数上。首先, “叉乘”作用在任意矢量场  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  上得到一个新的矢量场

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \epsilon_{ijk} \partial_j u_k(\mathbf{x}) \\ &= \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

该操作称为**旋度** (curl)。当该操作作用在一个梯度场  $\mathbf{u} = \nabla f$  时我们有

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f(\mathbf{x}) &= \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f(\mathbf{x}) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

由于偏导运算的可交换性, 等式右边所有项皆相消了。因此我们得到一个恒等式

$$\nabla \times \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (4.41)$$

这个关系对于一般的梯度场都是适用的。反过来, 如果一个矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  在一个单连通区域的任意一点都满足旋度为零  $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , 那么在这个区域里我们总是能够为其找到一个势函数 (在下一讲我们会进一步讨论到)。

- 我们看一下对单一点源产生的静电场求旋度的结果。点  $\mathbf{x}$  处电场用张量形式写为

$$E_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i}{(x_k x_k)^{3/2}} \quad (4.42)$$

<sup>3</sup>这一点总是可以通过参数重定义  $t = t(\tau)$  实现。

将其对分量  $x_i$  求导数得到

$$\partial_j E_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta_{ij}(x_k x_k) - 3x_i x_j}{(x_m x_m)^{5/2}}. \quad (4.43)$$

这里用到  $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$ 。由上式我们看到  $\partial_j E_i = \partial_i E_j$ ，代入旋度的定义式于是得到

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (4.44)$$

电场在任意点上的矢量叠加性质告诉我们，对于更一般分布静止电荷产生的静电场上述等式总是成立。这意味着静电场总是一个梯度场，相应地我们可以给它定义一个势函数。这在后面将进一步讨论。

- 其次看一下“点乘”。它作用在任意矢量场  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  上得到一个标量场

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \partial_i u_i = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (4.45)$$

这一操作称为**散度** (divergence)。如果该矢量场是一个梯度场  $\nabla f(\mathbf{x})$ ，那么上式进一步化为

$$\nabla \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_i \partial_i) f = \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)}_{\Delta} f. \quad (4.46)$$

这里的二阶微分算符  $\Delta$  称为**拉普拉斯算符** (Laplace operator)。

- 对于单一点源产生的静电场，由(4.43)不难看出

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \partial_i E_i = 0. \quad (4.47)$$

(应用爱因斯坦约定的时候注意  $\delta_{ii} = 3$ 。) 这个式子在原点处并不成立，对于更一般的电荷分布它的右侧需要做适当修改。我们把具体讨论推迟到下一讲。

- 上述等式可以用一些更加方便的数学工具讨论，我们这里简要介绍一下。
  - 在积分中我们常常遇到所谓的积分元  $dx$ ，我们把这称为**微分形式** (differential form)，经常也直接简称**形式** (form)。对于高维的积分我们常常看到几个这样的元素乘在一起，如果严格用微分形式书写我们则需要在中间引入一个新的“乘法符号”  $\wedge$ ，称为**楔积** (wedge)，例如二维与三维积分里我们有

$$dx_1 \wedge dx_2, \quad dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \quad (4.48)$$

该符号与普通乘法的区别在于它关于两个相乘因子的交换是反对称的，因而  $dx \wedge dx = 0$ <sup>4</sup>。一般的微分形式可以线性展开到这些楔积上。几何上我们可以

<sup>4</sup>如果同学们对引入满足这些性质的“乘法”感到没有头绪，可以回想一下初等微积分课程中我们对多元积分的几点基本认识：(1) 我们对同一个积分变量不会积两次及两次以上，亦即积分式中不会出现类似于  $dx dx dy$  这样的积分元。(2) 在对一个多元积分做积分变量代换时需要添上一个雅可比因子 (Jacobian)，而后者是一个行列式

$$dx_1 \cdots dx_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x'_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \end{vmatrix} dx'_1 \cdots dx'_n. \quad (4.49)$$

我们知道行列式关于其任意两行或任意两列的交换是反对称的。



把这些微分形式看作（带方向的）面积元与体积元。尤其在三维空间中，我们看到独立的  $dx_i \wedge dx_j$  楔积只有三个，这对应于曲面（法矢量）的三维指向性：它们分别是面积元  $d\mathbf{S}$  在三个方向上的投影（这非常容易理解，比如在 1-2 平面上的投影在图像上恰好就是  $(dx_1, 0, 0)$  与  $(0, dx_2, 0)$  两个位移框出的平行四边形的面积，因此相应的面积元投影必须与两者的叉乘相关，而后者是反对称的）

$$d\mathbf{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2). \quad (4.50)$$

与此对比，三个  $dx$  的楔积只有唯一一个，而我们也知道体积分的积分元是可以（除却坐标系标架手征性造成的符号差别外）唯一写出来的

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \quad (4.51)$$

- 作为楔积定义的一个简单应用，考虑一个曲面  $S$  在某个区域内如果可以用变量  $t_1, t_2$  参数化上面的点，亦即  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t_1, t_2) \in S$ ，那么(4.50)中任意一个楔积可以转换为

$$\begin{aligned} dx_i \wedge dx_j &= \left( \frac{\partial x_i}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2} dt_2 \right) \wedge \left( \frac{\partial x_j}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_j}{\partial t_2} dt_2 \right) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial t_1} & \frac{\partial x_i}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_j}{\partial t_1} & \frac{\partial x_j}{\partial t_2} \end{vmatrix} dt_1 \wedge dt_2 \equiv \left| \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(t_1, t_2)} \right| dt_1 \wedge dt_2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

于是在该区域内曲面  $S$  上的矢量面积元可以写为

$$d\mathbf{S} = \left( \left| \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)} \right|, \left| \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)} \right|, \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right| \right) dt_1 \wedge dt_2, \quad (4.53)$$

而它的模长（亦即面积元的绝对面积）为

$$dS \equiv |d\mathbf{S}| = \sqrt{\left| \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right|^2} dt_1 \wedge dt_2. \quad (4.54)$$

特别地，当选取  $(t_1, t_2) = (x_1, x_2)$  时，上述表达式退化为前面关于面积分讨论中遇到的情况(2.13)。

- 我们把微分形式包含  $d$  的个数称为它的**阶** (rank)。一个  $k$  阶的微分形式也经常简称为  $k$ -形式 ( $k$ -form)。普通的函数  $f(\mathbf{x})$  可以看作是 0-形式。
- 一个  $n$ -形式能且只能在一个  $n$  维曲面上做积分，相应得到一个标量，这是我们一般所做的（多元）积分。（作为一个极端的例子，零维的积分等价于将 0-形式  $f(\mathbf{x})$  在离散的点上取值。）
- 微分形式的一个常用构造方法是所谓的**外微分** (exterior differentiation)，记作  $d$ ，具体定义为

$$d = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (4.55)$$

这个算符与  $\nabla$  非常相似，只不过是在做完偏导后额外乘上了相应的  $dx$ 。它可以作用在任意的微分形式  $\omega$  上，具体作用方式为

$$d\omega = \sum_{i=1}^3 dx_i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \quad (4.56)$$



其中  $\partial\omega/\partial x_i$  是对  $\omega$  的楔积展开中的每个展开系数分别求导。当然它也可以作用在普通函数  $f$  上, 其结果为一个一阶微分形式

$$df = d\mathbf{x} \cdot \nabla f. \quad (4.57)$$

因此静电场可以看作是对某个势函数做外微分而得到的一阶微分形式。

- 有了上述工具我们首先可以看到外微分的一个一般性质

$$d^2 = (dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots = 0. \quad (4.58)$$

作为一个直接推论, 对于任意一个标量场  $f(\mathbf{x})$  我们有

$$d^2 f = 0. \quad (4.59)$$

这个等式与(4.41)是完全等价的。为了看清这一点, 我们注意到

$$\begin{aligned} d^2 f &= dx_2 \wedge dx_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \cdots \\ &= (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2) \cdot (\nabla \times \nabla f). \end{aligned} \quad (4.60)$$

- 理论上  $d^2$  不仅可以作用在标量函数上, 而且可以作用在任何微分形式上, 等式(4.58)都成立。我们于是看到外微分的讨论直接带给我们梯度场性质(4.41)的一个推广。
- 微分形式和外微分事实上适用于更广泛的微分流形 (没接触过这个概念的同学可以直接把它想象是任意维度的光滑曲面)。关于这些概念, 有兴趣的同学可以参考《Geometry, Topology and Physics》(Mikio Nakahara 著, 第二版) 的 5.4 节。当然我们这个课程里用不到这些更一般化的讨论, 我们暂且只需要了解上述运算规则以及微分形式的几何图像就足够了。

### 4.3 电势

- 上一节中我们看到静电场是一种梯度场。为了得到其对应的势函数我们首先看一个点电荷的效应。注意到

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.61)$$

由此我们可以定义一个势函数  $\phi(\mathbf{x})$ , 称为**电势**。对于位于  $\mathbf{x}'$  处的点电荷这个势函数定义为

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.62)$$

电场则表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}). \quad (4.63)$$

也就是说, 每一点处的电场强度矢量表明该点处电势下降最快的方向和速度。

- 对于更加一般的电荷分布，由微分算符  $\nabla$  的线性性质我们可以得知电场与电势的关系式(4.63)依然成立，而电势函数满足简单的标量叠加关系，亦即

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.64)$$

- 由于电场是电势的导数，电势的定义中通常允许存在一个不定的加法常数因子，改动这个因子不会影响到电场的取值。对于电荷局限于有限区域的系统，我们通常约定无穷远处的电势为 0。上述点电荷的电势公式(4.62)即是遵循了这一约定。
- 现在考虑沿任意路径  $L$  的积分（从点  $\mathbf{x}_1$  到点  $\mathbf{x}_2$ ）。假定这条路径上的点可以由一个参数  $t$  标记，亦即  $x_i = x_i(t)$ ，那么

$$d\mathbf{l} = (\partial_t x_1, \partial_t x_2, \partial_t x_3) dt, \quad (4.65)$$

由此

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{x}(t)). \quad (4.66)$$

也就是说，上式左侧在这条曲线的一维空间中是一个全微分，而且是势函数  $\phi(\mathbf{x})$  约束到这条曲线后（作为一元函数）的全微分。因此积分只依赖于路径的两个端点

$$\int_L (q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = q\phi(\mathbf{x}_1) - q\phi(\mathbf{x}_2). \quad (4.67)$$

我们看到这个势与前面讨论静电力做功的结论是一致的： $q\phi(\mathbf{x})$  对应于试验电荷在点  $\mathbf{x}$  处的势能。故而电势的单位是 J/C，称为伏特，用 V 表示。此外，任意闭合路径  $L$  上的积分恒为零

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (4.68)$$

- 前面我们得知在微观层面上静电场的旋度处处为零

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.69)$$

在下一节里我们将看到(4.68)与(4.69)是静电场同一个基本性质的两种相互等价的表述，前者在宏观层面上，后者在微观层面上。在后面的课程中我们也将会看到，该微分方程对于变化的电磁场需要做出改动，并进而成为麦克斯韦方程组中的一个重要方程。对于静电场而言，上述方程是在磁场为零情况下的一个退化情形。

5.1	一般矢量场的宏观性质 . . . . .	43
5.2	一般矢量场的微观性质 . . . . .	45

## 5.1 一般矢量场的宏观性质

- 梯度场只是一类特殊的矢量场。我们接下来研究一般的矢量场。
- 我们首先询问一般的矢量场可能会有什么样的性质。为了获得一些相对直观的感受我们可以设想矢量场的一些现实例子。由于矢量场在空间每一个点上都由一个矢量刻画，一个很直接的应用是把这些矢量与流体在具体空间点上的流速联系起来，从而让矢量场描述流体在特定时刻整体的流动状态。从这个例子我们看到，当我们指定了一个矢量场的时候我们只是得知了系统的某个瞬时状态，而物理上主要关心的是系统的构形随时间的演化。尽管如此，在任意瞬时我们依然可以询问这样的系统是否有某种整体的性质（由可以明确定义的物理量刻画）是有趣的，尤其是当这种性质与某种守恒律相联系的时候。
  - 假如我们处理的是理想的不可压缩的流体，且在给定空间邻域内如果速度矢量都是有限且连续变化的，那么有多少流体流入就得有多少流体流出，亦即流的守恒。我们需要考虑如何刻画这个守恒规则。
  - 上述守恒情况唯一可能被破坏的情形是给定区域内存在流体的流入口（比如接了个水龙头）或流出口（安了个下水口）。术语上我们把这两者都称为源。我们需要一个方法利用矢量场探明这些源的存在性。
  - 在没有外力矩影响的情况下刚体的运动具有守恒的角动量。对于流体我们在自然界中也观察到诸如龙卷风、台风这样的涡旋状态。从直观感受上这样的状态在一定条件下能够长时间稳定存在，这反映出其背后某种（被微弱破缺了的）守恒性质。我们也需要引入合适的概念来表征这种守恒性。

接下来我们首先从宏观的角度描述这些特征。

- 我们还是用理想流体类比，分析在给定区域（二维）边界上流体的流出或流入量。首先我们在边界上点  $\mathbf{x}$  取一个微小面元  $d\mathbf{S}$ 。注意这个面元虽然带面积单位但是是一个矢量，不失一般性我们假定该矢量的方向垂直于区域边界向外。如果  $\mathbf{x}$  处流速为  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ，那么微小时间段  $dt$  后总共有

$$(\mathbf{v}dt) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.1)$$

体积的流体通过这一面元，这个标量取正号时为流出，负号时为流入。除去时间  $dt$  后，我们把  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  称为矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  在面元  $d\mathbf{S}$  上的**通量** (flux)，表征流体在给定时间

刻通过给定面积的流量速率。对于任意的曲面  $S$ ，我们则通过积分定义它上面的通量

$$\Phi = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.2)$$

这个定义与我们之前讨论电场的通量在形式上是一致的。对于一个给定的区域  $V$ ，它的边界  $\partial V$  是一个闭合曲面<sup>1</sup>，于是流的守恒意味着矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  在整个闭合曲面上的通量为 0

$$\int_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (5.3)$$

- 前面提到，区域  $V$  内可能存在的源会破坏流的守恒，这时候上述积分等于某个非零的数。这个数字刻画了  $V$  内各个源上流体在单位时间内的流入流出总量（流入为正，流出为负）。如果源是离散的，我们只需要把它们各自的流入流出速度做简单的加合。而更一般情况下我们需要考虑一个密度函数  $\rho(\mathbf{x})$  表征在点  $\mathbf{x}$  处单位体积单位时间内流入或流出的流体总量。于是最一般地我们有

$$\int_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{x}) dV. \quad (5.4)$$

- 上一节在梯度场的讨论中我们提到其每一点处的矢量值表征势函数在该点处沿不同方向的变化情况，如果在点  $\mathbf{x}$  处指定微小线元  $d\mathbf{l}$ （注意依然是一个矢量），那么势函数沿这个线元所发生的微小变化为

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.5)$$

于是沿任意开路径  $L$ （具有两个端点）所发生的势的变化为一个积分

$$f_1 - f_0 = \int_L \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.6)$$

这里  $\phi_0$  和  $\phi_1$  分别是路径首尾两个端点处的势。

- 对于梯度场我们知道其对应的势函数在每一点处具有确定的值，在这种情形下上述积分只与路径的端点位置有关而与路径的具体选择无关。这一性质的直接推论是在梯度场中上述积分对于任意闭合路径的结果都为零

$$\Gamma \equiv \int_{L_{\text{闭合}}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (5.7)$$

- 在一般矢量场中上式积分对任意闭合路径所定义的量  $\Gamma$  被称为**环量**（circulation）。当这个量不为零时，我们无法再给矢量场找到相应的势函数。对于理想流体，如果其所受的外力（场）均为保守力，那么对于与流体协动的任意闭合路径  $L(t)$  其环量是守恒的<sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} \Gamma = 0. \quad (5.8)$$

这在流体力学中被称为开尔文定理（Kelvin's theorem），它表征了理想流体的角动量守恒性质<sup>3</sup>。

<sup>1</sup>这里  $\partial V$  中的  $\partial$  不指代任何偏微分，而是指代几何上的边界关系。

<sup>2</sup>该路径随时间的变化由其上各个点处流体的瞬时速度所决定。

<sup>3</sup>关于开尔文定理的证明，有兴趣的同学可以参考[https://wikimili.com/en/kelvin's\\_circulation\\_theorem](https://wikimili.com/en/kelvin's_circulation_theorem)。

## 5.2 一般矢量场的微观性质

- 上一节我们讨论了矢量场沿某一曲面或曲线积分的宏观性质, 这一节我们进一步讨论它在给定点上的微观性质。为了方便理解和记忆, 我们首先给出关于外微分的一个一般定理。考虑某个微分形式  $\omega$  以及一个维数比  $\omega$  的阶大 1 的单联通区域  $R$ 。 $\omega$  可以在  $R$  的边界  $\partial R$  (是一个维数小 1 的闭合区域) 上积分。我们有一个一般的关系式

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega. \quad (5.9)$$

这称为斯托克斯定理<sup>4</sup>。我们不对该定理做详细的证明, 而是介绍它的几个具体应用。有兴趣的同学可以参考《Geometry, Topology and Physics》(Mikio Nakahara 著, 第二版) 的 6.1 节。

- 事实上(5.6)是该积分关系最简单的情形 ( $\omega$  的阶为 0, 亦即纯标量)。此处边界上的积分简化为对曲线两个端点求和 (带方向)。在前面的讨论中我们已经得知

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = d\mathbf{l} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i} = df. \quad (5.10)$$

显然两个等式是吻合的。

- 其次我们看一下  $\omega$  是二阶的情况, 这里它可以在一个曲面上积分。前面我们遇到的相应的例子是  $\omega = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$  (这也是我们在三维空间中能够写出的最一般的二阶微分形式)。明确起见我们重新把这个点乘写成分量形式

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = v_1(\mathbf{x})dx_2 \wedge dx_3 + v_2(\mathbf{x})dx_3 \wedge dx_1 + v_3(\mathbf{x})dx_1 \wedge dx_2. \quad (5.11)$$

于是这个微分形式的外微分为

$$\begin{aligned} d(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV. \end{aligned} \quad (5.12)$$

我们看到这与矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  的散度有关。因此重新改回矢量的语言(5.9)化为

$$\int_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) dV. \quad (5.13)$$

这个等式称为高斯定理。

- 最后我们讨论  $\omega$  的阶为 1 的情形。前面遇到的相应例子为  $\omega = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}$  (这也是我们在三维空间中能够写出的最一般的一阶微分形式)。同样, 我们先把该表达式展开成分量形式

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = v_1(\mathbf{x})dx_1 + v_2(\mathbf{x})dx_2 + v_3(\mathbf{x})dx_3. \quad (5.14)$$

<sup>4</sup>后面将看到, 我们在初等微积分里所学的斯托克斯定理只是该定理的一个特例。

该微分形式的微分为

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}) &= \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_3 \\
 &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
 &= (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

这与矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  的旋度有关。于是我们得到了另一个一般关系式

$$\int_{\partial S} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{S}. \tag{5.16}$$

这一恒等式称为斯托克斯定理。

- 有了上述恒等关系，我们把它们带入前面讨论的矢量场的宏观性质当中。我们首先看通量积分

$$\int_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} - \int_V \rho(\mathbf{x}) dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v} - \rho) dV = 0. \tag{5.17}$$

这一公式对任意选定的区域都必须成立，因而我们发现矢量场的散度满足

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{x}) = 0. \tag{5.18}$$

- 我们其次看矢量场对闭合路径的线积分。目前我们暂且只关注梯度场，于是对于给定面区域  $S$  我们有

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{5.19}$$

由于在梯度场中这个式子对任意闭合路径都成立，这意味着梯度场的旋度处处为零

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0. \tag{5.20}$$

反之，在任意单联通区域内如果  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  的旋度处处为零，那么由斯托克斯定理我们知道该区域内任意一条闭合路径对应的环量也恒为零。这意味着在该区域内  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  可以看作是一个梯度场，我们可以给它定义相应的势函数。但只要在任何一点旋度非零，这么做是不可行的。

- 对于更一般的矢量场，如果沿给定区域边界  $\partial S$  的线积分不为零，我们假设这个值可以由区域  $S$  上的某种其它通量积分得到，相应的另外一种矢量场记作  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ，亦即

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}. \tag{5.21}$$

那么利用斯托克斯定理我们得到

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{5.22}$$

如果该等式对任意面区域都成立，那么我们得到关于矢量场旋度的一个微分恒等式

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0. \tag{5.23}$$

当然，这个式子目前是建立在假设上的。在往后的课程中我们会逐步发现该等式在电动力学中的应用。这里我们仅讨论  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  的一个一般性质

– 从(5.23)我们直接可以判断  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  的散度为零（有关张量用法见下一节点）

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k = 0. \quad (5.24)$$

结合静电场的散度公示我们于是类比得知  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  自身不存在相应的源或者“荷”。由此，如果我们给矢量场  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  画场线的话，这些场线只能要么没有端点，要么其端点落在无穷远处。

- 在结束这一讲之前我们再从张量角度看一下微分算符  $\nabla$  的性质。该算符作用在一个标量场上所得到的矢量场用张量写出实际上就是

$$\nabla f \implies \partial_i f, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (5.25)$$

这里微分算符所带的指标完全可与普通张量的指标一样处理，唯一不同是我们得记住这个算符会作用到后面的函数上。对于矢量场我们前面介绍了  $\nabla$  参与的两种操作，散度与旋度，这两种操作实际上都可以看作是两步：先如同梯度一样求导，再把  $\nabla$  的指标与相应的指标缩并。在三维空间中，这种缩并只有两种可能性

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \implies \sum_{i=1}^3 \partial_i v_i, \quad (5.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} \implies \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial_j v_k. \quad (5.27)$$

在分量层面  $\partial_i$  与普通的一元微分运算满足完全相同的线性性质以及莱布尼茨法则

$$\partial_i (af + bg) = a\partial_i f + b\partial_i g, \quad (5.28)$$

$$\partial_i (fg) = f\partial_i g + g\partial_i f. \quad (5.29)$$

$a$  与  $b$  为常数。由这个基本性质我么能够很容易地处理  $\nabla$  参与的更复杂的符合运算。

– 为了帮助大家熟悉这种分析方法，我们这里举一个例子， $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ 。张量方法如下（为简化书写，下面的推导中我们使用爱因斯坦约定）

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}))_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} u_m v_n) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} \partial_j (u_m v_n) \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) (v_n \partial_j u_m + u_m \partial_j v_n) \\ &= v_j \partial_j u_i - v_i \partial_j u_j + u_i \partial_j v_j - u_j \partial_j v_i. \end{aligned} \quad (5.30)$$

把最后一行翻译成矢量运算的语言，我们于是立即得到

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (5.31)$$





6.1	散度公式	49
6.2	泊松方程、拉普拉斯方程	52
6.3	静电场的能量密度	53

## 6.1 散度公式

- 第二讲末尾我们已经讨论了电场通量的守恒性

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int_V d^3x (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho. \quad (6.1)$$

这其中前一个等式来自于高斯定理。由于该等式必须对任意三维子区域  $V$  成立，我们于是知道对于每一个点  $\mathbf{x}$  都必须有

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (6.2)$$

这个微分性质与前面通量满足的积分性质是互为等价的。

- 由库伦定律我们已经知道给定任意的静电分布  $\rho(\mathbf{x})$  总是存在一个电场  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  满足上面给出的性质，所以对于静电场来说该散度公式也可以看作是库伦定律的一个推论。
- 反过来，通过这个微分等式我们也可以把电荷看作是静电场散度的一种度量。如果把这个等式看作是电场的一个基本性质，那么库伦定律所给出的电场分布则是该方程的一个特解。事实上，这个方程是作为麦克斯韦方程组的一员出现的，也就是说它其实适用于一般的电磁场，因而相对于库伦定律来讲更加基本（虽然到目前为止我们是从库伦定律出发“推导”出这个等式的）。
- 作为一个微分方程，它允许存在的解在没有指定边界条件的情况下当然不只一个。我们可以探讨更一般的解具有什么样的结构，以及它与库伦定律给出的静电场解相比有什么不同。关于这个问题我们在以后的讨论中会逐步解答。
- 目前我们首先需要解决一个使用上的问题。散度公式(6.2)在写出来的时候我们是假定了一个体电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ 。如果系统里的电荷是构成面分布或者线分布或者甚至是离散的，那我们又该怎么处理？为了将这些情况也纳入(6.2)的适用范围，我们这里介绍一下狄拉克 **delta 函数**  $\delta(x)$ 。
  - $\delta(x)$  并不是普通意义上的函数，而是属于所谓**广义函数**的范畴<sup>1</sup>。对任意  $x \neq 0$  有  $\delta(x) = 0$  而  $\delta(0) = \infty$ ，此外对任意试验函数  $f(x)$ （要求  $f(x)$  在  $x = 0$  的领域内连续）必须满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0). \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>更精确一点说，数学上把  $\delta$  函数所属的一大类“函数”称为**分布**（distribution）。

换句话说,  $\delta(x)$  的主要意义不在于它自身的值, 而在于它参与的积分的结果。

- \*  $\delta(x)$  只有在实数积分中才有意义, 它不能出现在复数积分里。
- \* 不难发现  $\delta(x)$  的积分是亥维赛 (Heaviside) 函数  $\theta(x)$

$$\int_{-\infty}^x dt \delta(t) = \theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \quad (6.4)$$

- \*  $\delta(x)$  的导数则可以通过分部积分定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta'(x) f(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f'(x) = -f'(0). \quad (6.5)$$

- \* 假设某个函数  $g(x)$  在  $x = x^*$  的邻域内单调且  $g(x^*) = 0$  ( $x^*$  为某个具体数字), 那么 (令  $t = g(x)$ )

$$\begin{aligned} \int_{x^*-\epsilon}^{x^*+\epsilon} dx \delta(g(x)) f(x) &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{dt}{|dt/dx|} \delta(t) f(g^{-1}(t)) \\ &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{dt}{|g'(g^{-1}(t))|} \delta(t) f(g^{-1}(t)) \\ &= \frac{1}{|g'(x^*)|} f(x^*) \\ &= \int_{x^*-\epsilon}^{x^*+\epsilon} \frac{dx}{|g'(x)|} \delta(x - x^*) f(x). \end{aligned} \quad (6.6)$$

这里第一个等式右边出现的绝对值考虑到了  $g(x)$  在  $x = x^*$  邻域内的单调递增或递减两种情况<sup>2</sup>。因此一般性地, 如果  $g(x)$  有  $n$  个离散的根  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ , 那么在每一个根的邻域内我们都有上述关系, 于是总体上我们有

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i^*). \quad (6.7)$$

作为一个特例, 我们经常会遇到的情况是一个线性函数

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x). \quad (6.8)$$

- \* 我们可以用通常的函数取特定极限逼近狄拉克  $\delta$  函数。这其中一個比较常见的做法是利用高斯分布

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a}}. \quad (6.9)$$

我们也可以把这个公式看作是狄拉克  $\delta$  函数的一个定义方法。这其中  $\delta(x)$  在不同  $x$  上的取值很容易通过等式右边的极限验证。 $\delta(x)$  所满足的积分则可以通过鞍点近似证明。

- \* 另外一种常用的定义  $\delta(x)$  的方法利用到复分析, 具体地我们有

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right). \quad (6.10)$$

<sup>2</sup>如果  $g(x)$  在  $x = x^*$  处有重根, 那么我们在实际操作时候需要先将  $g(x)$  进行微小调整使得重根分裂为几个不同的单根, 做完这里的操作后再取调整趋近于零的极限。

这种定义方式的好处在于在必要的时候我们可以把原先实轴上的积分解析延拓到复平面上的轨道积分。

\* 在高维空间中我们可以通过把不同维度上的  $\delta(x_i)$  相乘得到具有类似性质的  $\delta$  函数。

– 有了狄拉克  $\delta$  函数的概念, 我们便可以利用电荷密度的方式描述离散点电荷。假定点  $\mathbf{x}^*$  处存在一个离散电荷  $Q$ , 那么这种情况下电荷密度可以写成

$$\rho(\mathbf{x}) = Q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \quad \delta^3(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3). \quad (6.11)$$

由此我们便可以把离散点电荷的情况纳入电场散度的讨论中。作为一个直接推论, 我们也可以看到

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (6.12)$$

注意: 不做特别说明时候我们总是假定  $\nabla$  是作用在  $\mathbf{x}$  上的。

– 上面我们把离散的点电荷用体电荷密度替代了。我们同样可以问是否能利用  $\delta$  函数将面电荷密度  $\sigma$  以及线电荷密度  $\lambda$  替换成体电荷密度  $\rho$ 。答案是肯定的, 不过这里有一些额外的细节需要注意。

\* 以面电荷密度为例, 假如电荷所分布的曲面可以由某个方程  $f(\mathbf{x}) = 0$  描述, 那么最直接地我们可能会猜想

$$\rho(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\delta(f(\mathbf{x})). \quad (6.13)$$

但是这里存在一个问题: 同一个曲面对应的方程往往不是唯一的。比如说, 哪怕最简单的  $x_2$ - $x_3$  平面, 我们可以写成  $x_1 = 0$ , 也可以写成  $x_1^2 = 0$ , 甚至更复杂点  $\arctan(x_1) = 0$ , 等等。由  $\delta$  函数的性质(6.7)我们知道这些不同的函数代入上面的公式再对空间做积分, 所得到的结果一般来说肯定是不一样的。

\* 这门课程中我们不要求大家掌握关于面密度与线密度的体密度描述方法。对于有兴趣的同学, 我们这里仅从图像上很快分析一下。通过观察可以发现, 要得到正确的描述主要在于在曲面上任意一点的邻域里沿曲面法向量方向做积分的时候我们能够恰好遇到一个标准的  $\delta(x)$  函数 (从而只留下面密度  $\sigma(\mathbf{x})$  本身), 而对于一般性的  $f(\mathbf{x})$  问题是出在积分会给出某个比例因子, 这个因子实际上是  $f$  的值沿法方向的增减速度。由此我们便知道首先得确保  $f(\mathbf{x})$  在曲面上不能有重根, 在这个前提下正确的表达式实际只需再额外乘以  $f(\mathbf{x})$  梯度矢量的模长

$$\rho(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})|\nabla f(\mathbf{x})|\delta(f(\mathbf{x})). \quad (6.14)$$

· 作为验证, 我们看一下第一次作业中的例子。我们假设曲面  $x_3 = -(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$  上均匀分布有面密度恒为  $\sigma$  的电荷, 求原点处的场强。这里我们仅需考察一下电荷密度与积分元的乘积。如果是直接利用面分布的话, 我们以  $\{x_1, x_2\}$  对曲面参数化, 那么由以前的分析我

们知道这个乘积为

$$\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2} dx_1 dx_2 = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}} dx_1 dx_2. \quad (6.15)$$

如果是用体电荷分布的话, 令  $f = x_3 + (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$ , 我们需要额外把  $x_3$  积掉, 于是有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma |\nabla f(\mathbf{x})| \delta(x_3 + (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \sigma |\nabla f(\mathbf{x})| dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

最后一行里  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, -(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2})$ 。由于

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( -\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, -\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, 1 \right), \quad (6.17)$$

取其模长后显然这与直接利用面分布计算是等价的。

- \* 对于线电荷分布  $\lambda(\mathbf{x})$ , 我们首先要明确三维空间中的曲线一般可以由两个方程决定, 我们这里假设它们为  $g(\mathbf{x})$  与  $h(\mathbf{x})$ 。因此在它的体电荷密度描述中会包含两个  $\delta$  函数, 这两个函数刻画的是曲线上任意一点的法平面上电荷量的剧烈变化。这个法平面作为一个二维线性空间实际可以由  $\nabla g(\mathbf{x})$  与  $\nabla h(\mathbf{x})$  这两个矢量张成。与面电荷分布的情况类似,  $g(\mathbf{x})$  与  $h(\mathbf{x})$  的选择是有很大任意性的, 相应地我们也需要额外乘上一个因子来弥补不同选择给电量积分造成的区别。具体的推导感兴趣的同学可以自行推敲, 这里我们仅给出一般结论

$$\rho(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) |(\nabla g(\mathbf{x})) \times (\nabla h(\mathbf{x}))| \delta(g(\mathbf{x})) \delta(h(\mathbf{x})). \quad (6.18)$$

## 6.2 泊松方程、拉普拉斯方程

- 前面我们讨论了电势的概念。把电场与电势的关系代入静电场的散度公式我们得到

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} = 0, \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) \equiv \nabla \cdot (\nabla \phi(\mathbf{x})). \quad (6.19)$$

这被称作静电场的**泊松方程** (Poisson equation)。如果以坐标形式写出, 那么在笛卡尔坐标系中这里的二阶微分算符  $\nabla^2$  实际为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (6.20)$$

- 如果我们所考察的区域内部完全没有任何电荷存在, 亦即  $\rho(\mathbf{x}) = 0$ , 那么上述方程退化到

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.21)$$

这被称为静电场的**拉普拉斯方程** (Laplace equation)。

- 在引入电势之后, 我们看到原本关于静电场这种矢量场的散度与旋度微分公示完全化为了关于标量场的单一微分方程。该方程 (加上合适的边界条件) 完全决定了静电场的结构。因此这将是处理一般系统静电问题的基本出发点。

### 6.3 静电场的能量密度

- 前面我们看到电场的电势与能量相联系。对于一个点电荷  $q$  而言, 当它在移动过程中其所处位置的电势改变了  $\Delta\phi$  时, 我们说它在静电场中的势能改变了  $\Delta E$ , 满足

$$\Delta E = q\Delta\phi. \quad (6.22)$$

- 如果一个静电系统中只有一个点电荷  $Q_1$ , 且电势在无限远处衰落至零, 那么这个电荷自身不会受到任何静电作用力, 无论我们把它移动至什么位置所做的功都为零。由此我们可以假定这样的系统的静电势能  $E = 0$ 。
- 如果我们把  $Q_1$  固定住 (假定在点  $\mathbf{x}_1$ ), 此时考虑另外一个位于无穷远的电量为  $Q_2$  的点电荷。这两个电荷组成的系统静电势能依然为零。现在把  $Q_2$  缓慢移动至点  $\mathbf{x}_2$ , 那么现在系统的静电势能等于移动过程中外力所做的功, 亦即

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \quad (6.23)$$

注意我们把这个势能看作是  $Q_1$  与  $Q_2$  共有的。

- 我们可以不断重复上面的操作, 把已有的点电荷固定住, 并且引入新的点电荷, 将其从无穷远处缓慢移动到某个有限的位置。如果已有  $n-1$  个点电荷, 现在把新的点电荷  $Q_n$  移动至  $\mathbf{x}_n$ , 那么移动过程中外界做的功为

$$Q_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_n|}. \quad (6.24)$$

这同样看作是所有  $n$  个电荷组成的系统整体的静电势能增量。因此递推可知, 如果一个系统由  $n$  个离散的点电荷组成, 并且在无穷远处电势衰减至零, 那么系统所拥有的静电势能为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Q_i Q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Q_i Q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (6.25)$$

- 进一步推广上述结论, 如果一个系统的电荷局限在有限的区域 (无穷远处电势依然为零), 但是构成密度为  $\rho(\mathbf{x})$  的连续分布, 那么系统的总电势能为

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3x_i d^3x_j \frac{\rho(\mathbf{x}_i)\rho(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (6.26)$$

上述表达式也可以写成一个等价的形式: 如果已知每一点处的电势为  $\phi(\mathbf{x})$ , 那么总电势能为

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}). \quad (6.27)$$

- 上述给出的公式看上去都是与电荷相关的，我们可以用电场的散度公式将其改写一下

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x \nabla \cdot (\Phi \mathbf{E}) - \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E} \cdot \nabla) \phi \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\partial V} \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

如果研究的是全空间并且电荷只局限在有限的区域内，那么上式第一项变为零。从余下的第二项我们得知，其实也可以把电势能看作是蕴藏在电场中，其给定点处的能量密度正比于该点上电场场强的平方

$$\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2. \tag{6.29}$$

因此我们把该表达式定义为静电场的能量密度。

- 现在我们反过来看一下前面提到的所谓电荷自身势能的情况。为了说明问题，我们研究两个点电荷组成的系统，假设第一个电荷  $Q_1$  位于  $\mathbf{x}_1$ ，第二个电荷  $Q_2$  位于  $\mathbf{x}_2$ 。按照(6.29)计算，系统的总电势能为

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \left| \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} \right|^2 dV \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \left| \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right|^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \left| \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} \right|^2 dV \\
 &\quad + \underbrace{\frac{Q_1 Q_2}{16\pi^2 \epsilon_0} \int_V \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} dV}_I.
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

上述展开的前两项各自从形式上看分别指代了单独存在  $Q_1$  或者单独存在  $Q_2$  时候电场依照能量密度(6.29)所计算出的总势能。第三项里涉及到一个积分  $I$ 。为了方便计算这个积分我们可以以  $\mathbf{x}_2$  作为原点，并且以  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  标记第三轴正向（假定其笛卡尔分量为  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = (0, 0, a)$ ）建立球坐标系，于是

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta - a), \tag{6.31}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_2 = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \tag{6.32}$$

从而被积函数完全不依赖于  $\varphi$ 。因此

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \frac{r - a \cos \theta}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta \\
 &= \frac{2\pi}{a} \int_0^\infty ds \int_{-1}^{+1} dt \frac{s - t}{(s^2 + 1 - 2st)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

这里第二行做了变量带换  $r = as$ ,  $\cos \theta = t$ 。余下的积分容易做出来，其值为 2。我们从而看到上述展开的第三项化为

$$\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \tag{6.34}$$



这正是利用离散分布电荷的电能公式所计算出来的结果。这说明两种计算方法的确是相差了电荷自身固有的“电势能”。

- 当然,这并不能说明两种计算之间存在什么矛盾。前面我们看到电势的取值存在一个任意的参考点。电势能也同样如此。那么上述前两项在什么意义上是一个“常数”? 我们不难看到,这部分贡献不会参与系统与外界的任何作用:它完全不会由于电荷系统对外界的做功而增加或者减少。因此这部分贡献到底取什么值在物理上是没有差别的。事实上,对于离散分布的电荷而言,果真利用(6.29)计算的话这部分贡献是发散的。



7.1	一般矢量场的分解	57
7.2	存在有限边界的静电问题	59
7.3	库仑定律在有限区域静电问题中的扩展	61
7.4	导体	63
7.5	镜像法	64

## 7.1 一般矢量场的分解

- 在进一步讨论之前我们简要评论一下静电场对于一般矢量场的结构的启发。如果我们从一般性的散度公式

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad (7.1)$$

出发，并且已知源的分布  $\rho(\mathbf{x})$ （假设这个分布是局域的），现在问存在什么样的矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  满足该条件。那么我们总是可以从库伦定律类比构造出这样一个场  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$  来，亦即

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (7.2)$$

此外，如果  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  进一步满足一般的旋度公式

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (\nabla \cdot \mathbf{u} = 0), \quad (7.3)$$

由于  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$  的旋度恒为零，我们总是可以把  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  拆成两部分

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), \quad (7.4)$$

使得

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \quad (7.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (7.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (7.8)$$

也就是说，任意矢量场总是能够拆分成两个相互独立的部分，其中一个部分  $\mathbf{v}_1$  有源而无旋，另一个部分  $\mathbf{v}_2$  则有旋而无源。到此我们看到矢量场的散度与旋度是两种相互独立的性质。

- 我们可以进一步挖掘上述分解蕴含的信息。从静电场电势的讨论我们得知  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$  可以表示成一个标量函数的梯度

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}). \quad (7.9)$$

在前面的讨论里我们引入过微分形式的概念。我们知道在这个语境下上述第二式(7.6)指代一个一阶微分形式  $\omega_1$  的外微分为零

$$d\omega_1 = 0, \quad \omega_1 = \mathbf{v}_1 \cdot (dx_1, dx_2, dx_3). \quad (7.10)$$

由外微分的普遍性质  $d^2 = 0$  我们又知道该方程至少存在一个“平庸”的解，亦即  $\omega_1$  自身是某个零阶微分形式  $f$  的外微分

$$\omega_1 = df. \quad (7.11)$$

这便是上面所述的梯度解(7.9)。我们当然可以询问是否还会存在其它的解。关于这个问题我们这里不做深入讨论（详细讨论需要涉及到拓扑学方面的知识），我们只需记住在三维欧式空间  $\mathbb{R}^3$  中只存在这种平庸解，或者说在该空间中只要一个矢量场的旋度为零那么它一定是一个梯度场。

- 类比上述分析，我们可以把  $\mathbf{v}_2$  看作是来自于一个二阶微分形式  $\omega_2$

$$\omega_2 = \mathbf{v}_2 \cdot (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2). \quad (7.12)$$

于是第三个方程(7.7)意味着该形式的外微分也为零

$$d\omega_2 = 0. \quad (7.13)$$

对于该方程我们同样很容易找到一种“平庸”解

$$\omega_2 = dA, \quad A = \mathbf{A} \cdot (dx_1, dx_2, dx_3). \quad (7.14)$$

由于类似原因，在  $\mathbb{R}^3$  中我们也只能找到这一种解。注意到由前面的讨论

$$dA = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2), \quad (7.15)$$

因此之后每当我们看到一个矢量场的散度恒为零时它一定可以写成另一矢量场的旋度

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (7.16)$$

实际上这里的矢量场  $\mathbf{A}$  在后面的静磁学里我们会看到将作为磁场的矢势出现。

- 总结以上讨论，我们于是知道  $\mathbb{R}^3$  中一般的矢量场可以分解成

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (7.17)$$

在以后的学习中，当我们试图从经典物理的拉格朗日量（或作用量）方法处理一般电磁场的动力学问题时，我们将会看到这些势函数将成为电磁场的广义坐标（或者说动力学变量）。

## 7.2 存在有限边界的静电问题

- 前面提到过, 在许多现实问题当中我们往往要面对有限区域里的静电问题, 这些问题的一个主要特征是在区域边界之外我们对于系统可能存在的电荷分布一无所知, 取而代之的是我们会知晓电场在区域边界上的一些性质 (所谓的边界条件)。这种情况下我们当然不能再想当然地直接套用库伦定律。
- 不过无论情况多复杂, 静电场在给定区域中任意一点邻域内的性质始终是不变的: 它的势函数始终满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (7.18)$$

因此在一般的静电问题中我们通常会把泊松方程 (或者退化后的拉普拉斯方程) 作为求解的根本出发点。

- 在利用微分方程求解静电场分布的时候我们首先面对的问题是什么样的已知边界条件能够帮助我们唯一确定出电场的分布。显然, 如果没有足够的边界条件输入的话, 微分方程本身往往会给出多种可能的解, 此时边界条件的信息还不足以完全替代缺失掉的有关完整电荷分布的信息。而如果边界条件不小心设置的过多的话, 我们同样有可能没法保证微分方程给出的任何一个解都与所有边界条件相符合 (作为类比, 在研究一个质点的运动时, 如果我们在初始时刻和终止时刻把质点的坐标以及速度全部给出, 那么对任意输入的数据运动方程 (一个一元二次常微分方程) 往往是无解的)。
- 为了确认什么样的边界条件是适合在静电问题中作为输入数据指定的, 我们首先从高斯定理出发

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d^3x = \int_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (7.19)$$

现在利用两个任意的标量场  $\varphi(\mathbf{x})$  和  $\psi(\mathbf{x})$  构造一个矢量场, 令

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x}). \quad (7.20)$$

把这个选择代入高斯定理, 并且注意到恒等式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) &= \partial_i (\psi \partial_i \varphi) \\ &= (\partial_i \psi) (\partial_i \varphi) + \psi (\partial_i \partial_i \varphi) \\ &= (\nabla \psi) \cdot (\nabla \varphi) + \psi \nabla^2 \varphi. \end{aligned} \quad (7.21)$$

我们于是获得一个新的恒等式

$$\int_V (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi) d^3x = \int_{\partial V} \psi (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (7.22)$$

该等式称为**格林第一恒等式** (Green's First Identity)。这里  $(\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S}$  的意义是  $\varphi$  在曲面  $\partial V$  上任意点沿曲面法矢量方向的方向导数与该点处曲面面元 (模长) 的乘积。

- 再次强调, 作为一个数学恒等式, (7.22) 对于任意的区域  $V$  以及任意的标量场 (或函数)  $\varphi(\mathbf{x})$  和  $\psi(\mathbf{x})$  都是成立的。特别地, 这里的两个函数一般甚至可以是多元函数, 只不过在该恒等式中我们仅关注它们对积分变量  $\mathbf{x}$  的依赖。

- 现在假定区域  $V$  内静电场的电势函数有两个不同的解都满足同样的泊松方程(7.18), 那么它们的差  $u(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) - \phi_2(\mathbf{x})$  在区域  $V$  内满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.23)$$

现在将格林第一恒等式中的函数  $\varphi(\mathbf{x})$  和  $\psi(\mathbf{x})$  皆替换成  $u(\mathbf{x})$ , 我们看到恒等式左侧第二项是消失的, 于是有

$$\begin{aligned} \int_V |\nabla u|^2 d^3x &= \int_{\partial V} u(\nabla u) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\partial V} (\phi_1 - \phi_2) (\mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} - \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (7.24)$$

最后一个等式里我们把  $u$  改回了两个解中静电场的电势以及场强。

- 观察上述等式左侧, 这里的被积函数在每一个点上都是一个梯度矢量的模长平方, 因此总是非负的。于是我们看到, 只要在等式右侧以某种方式迫使这个积分为零, 那么在整个区域  $V$  一定总是有

$$|\nabla u(\mathbf{x})| \equiv |\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x})| = 0, \quad (7.25)$$

亦即  $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{x})$ , 我们从而得到唯一的解。当然, 如果是看电势函数的话,  $\phi_1(\mathbf{x})$  与  $\phi_2(\mathbf{x})$  依然有可能差一个常数, 但是这个差别没有任何实际的物理影响, 因此在这个意义上我们说静电问题的解是唯一的。

- 观察恒等式(7.24)右侧的边界积分, 这里的被积函数总是分解为两个因子。前一个因子与电势函数在边界上的取值有关, 而后一个因子与电场在边界上的法向分量的取值有关。于是我们看到两种基本的可能性:
  - 如果在整个边界上我们都已知了电势函数的值, 由于  $\phi_1(\mathbf{x})$  与  $\phi_2(\mathbf{x})$  来自于相同的静电问题, 因此  $\phi_1(\mathbf{x}) - \phi_2(\mathbf{x})$  在整个边界上恒为零。于是由上述讨论该情况下静电问题的解是唯一的。这种已知电势函数  $\phi(\mathbf{x})$  在边界上取值的条件称为**狄利希里条件** (Dirichlet condition)。这里取值可以是一个常数也可以是依赖于边界点的函数。这类条件可以类比于质点运动问题中指定初末时刻质点的坐标。
  - 如果在整个边界上我们都已知了电场在边界法方向的分量的值, 那么由于  $\mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} - \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = 0$ , 静电问题的解也是唯一的。这种已知边界上电场 (或电势梯度) 法向分量的条件称为**诺依曼条件** (Neumann condition)。这里法分量的取值一般地同样可以是依赖于边界点的函数。这类边界条件可以类比于质点运动问题中指定初末时刻质点的速度。

这两种情况构成了两类典型的具有唯一解的静电问题。更一般地, 我们当然可以将区域边界  $\partial V$  拆分成若干互不重叠的区域, 在每个区域上分别给出狄利希里条件或者诺依曼条件, 如此(7.24)中的积分依然为零, 所对应的静电问题同样有唯一的解。但是一般来说, 如果在此基础上设置更多的边界条件, 那么往往会导致所考虑的静电问题无解。

### 7.3 库仑定律在有限区域静电问题中的扩展

- 前面我们明确了静电问题存在唯一解的条件。接下讨论的主要任务当然是如何从泊松方程以及合适的边界条件出发具体解出静电问题中的电势函数（或电场分布）。根据问题的具体情况往往有不同的求解方法可以采用。接下来我们首先探讨一个相对比较直接的思路：尝试直接构造出这个唯一解，或者换句话说像库仑定律一样直接利用已知信息通过适当的积分去计算电场的分布。这种求解方法可以看作是对库仑定律在有限区域情况下的扩展，这个扩展包括进了区域边界所造成的影响。
- 为了寻找上述扩展，我们首先从格林第一恒等式(7.22)出发，在(7.22)中把两个标量场  $\varphi$  与  $\psi$  对调，再减去(7.22)自身，可以得到一个更对称的恒等式

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d^3x = \int_{\partial V} (\varphi (\nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} - \psi (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S}). \quad (7.26)$$

这称为**格林第二恒等式** (Green's Second Identity)。它依然对任意区域  $V$  以及任意函数  $\varphi(\mathbf{x})$  和  $\psi(\mathbf{x})$  都成立。

- 在格林第二恒等式(7.26)左侧的体积分里我们看到了一个熟悉的结构  $\nabla^2$ 。同样的算符出现在了泊松方程里。于是我们直接令  $\varphi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$  就是我们想要求解的静电系统里的电势函数，相应地有

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (7.27)$$

至于另一个标量场  $\psi(\mathbf{x})$ ，我们假定它实际还依赖于另一个点  $\mathbf{y}$ ，并且将其写成  $\psi(\mathbf{x}) \equiv G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 。在此基础上我们假设这个函数满足微分方程

$$\nabla^2 G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (7.28)$$

注意  $\nabla$  依然只作用在  $\mathbf{x}$  上。把这些代入格林第二恒等式，我们得到

$$\begin{aligned} & \int_V \left( -4\pi\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \right) d^3x \\ &= \int_{\partial V} (\phi(\mathbf{x})(\nabla G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}) + G(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S})). \end{aligned} \quad (7.29)$$

我们于是看到，上述对  $G$  函数的要求(7.28)的好处在于，当  $\mathbf{y} \in V$  时，等式左侧  $\delta$  函数项直接可以积掉，使得我们得到一个关于区域  $V$  内电势的积分表达式

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (\mathbf{E}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}') (\nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (7.30)$$

为了形式上与前面的公式统一，这里我们把积分变量名重新改为  $\mathbf{x}'$ 。 $\nabla'$  只作用在  $\mathbf{x}'$  上。

- 为了理解表达式(7.30)的意义我们可以将其与库仑定律对比。这个表达式里我们把电势函数  $\phi(\mathbf{x})$  写成了三个贡献的加和。



- 其中的第一项是一个对整个区域  $V$  的体积分。电荷密度  $\rho(\mathbf{x}')$  是作为已知数据进入静电问题里的。不难看到, 如果我们令

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (7.31)$$

那么这一项就与原先的库仑定律完全一致。这大体能够让我们理解函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  的作用: 它描述了目标点  $\mathbf{x}$  与点源位置  $\mathbf{x}'$  之间几何关系对电势的影响。这个函数称为**格林函数** (Green function)。当然, 在实际的静电问题中我们不能够将格林函数想当然地设置成(7.31)。在后续讨论中我们将会看到格林函数的几个具体例子。

- 另外两项贡献都源自于区域边界上的积分, 因而会与静电问题中设置的边界条件相关。如果格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  是已知的, 那么当边界上指定狄利希里条件的时候第三项便可以通过积分计算出来, 而当边界上指定诺依曼条件的时候第二项就可以计算出来。
- 当然, 如果要能够直接利用(7.31)里的积分直接计算出电势函数  $\phi(\mathbf{x})$ , 那么直观看上去在边界的每一个点上我们都需要同时知道相应的狄利希里条件和诺依曼条件。但是正如前面有关解的唯一性讨论中所提及的, 如果一个静电问题中这两种条件同时都任意指定, 那么静电问题往往是无解的。所以表达式(7.31)自身一般并不能够像库仑定律一样直接用于上述计算。这里同时存在的另一个问题在于, 单单知道格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  的微分方程(7.28)也不足以完全确定其具体表达式。
- 幸运的是, 上述两方面问题也提供了同时将它们解决的思路: 进一步定下格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  所满足的边界条件, 使得在唯一确定它的表达式的同时将(7.31)中两个边界积分消除掉一个。这里具体的做法取决于我们需要用到电场的哪一类边界条件。
  - 对于狄利希里条件, 我们会用到(7.30)中第二项边界积分, 但是需要第一项边界积分消失 (因为我们不知道电势在边界上的法向导数)。为此我们只要求

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial V, \quad (7.32)$$

亦即给  $G$  函数自身指定特定的狄利希里边界条件。根据这个条件以及  $G$  自身的微分方程我们可以解出  $G$  函数的具体表达式。在此之上区域  $V$  内的电势便可以由(7.30)退化后的公式

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}') (\nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}) \quad (7.33)$$

计算得到。

- 对于诺依曼条件, 我们则是需要(7.30)中的第一项边界积分但舍弃第二项边界积分 (因为我们不知道电势在边界上的值)。为此我们也只需给  $G$  函数提供一个特定的诺依曼条件

$$\left. \nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right|_{\text{法向分量}} = 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial V. \quad (7.34)$$

与狄利希里条件的情况一样, 在解出  $G$  的表达式后我们便可以利用(7.30)退化后的公式

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (\mathbf{E}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}) \quad (7.35)$$

计算区域  $V$  内的电势。

- 从上面的分析我们看到, 无论对于哪种情况, 在利用类似库伦定律的方法计算静电场分布时, 我们首先都需要根据微分方程(7.28)以及  $G$  函数自身的边界条件解出  $G$  函数的具体形式。这里得到的  $G$  函数称为**格林函数** (Green function)。在知晓了这个函数后剩下的纯粹是一个积分问题。
- 在从微分方程出发求解静电问题时我们输入的信息往往分为三个部分:
  1. 区域的几何形状;
  2. 区域内部的电荷分布;
  3. 电场或电势在区域边界上的边界条件。

格林函数求解静电场分布的方法相当于是把微分方程的求解分成的两步:

1. 在第一步里我们仅需要输入区域几何形状相关的信息以及每个边界上边界条件的类型 (注意仅仅是类型, 而不是具体的边界条件) 以求出格林函数。因此格林函数的具体形式仅仅依赖于所考察区域的几何。
2. 在第二步里我们把格林函数连同上述剩余的输入信息代到前面的公式里。这些剩下的信息是真正依赖于问题所给的物理条件的信息。

于是相较于每次重新解一遍微分方程, 格林函数的好处是在于, 一旦它的具体表达式明确已有, 它可以直接用来处理一大类具有相同区域几何形状以及边界条件类型的问题。

- 对于一般的区域构形我们当然需要通过严格解微分方程才能得到想要的格林函数, 甚至也许没法简单得到格林函数的解析表达式。但是在一些特殊情况下我们甚至能够直接“猜出”格林函数, 这将在稍后进一步探讨。

## 7.4 导体

- 在许多实际问题中, 导体很自然地构成电场的边界。**导体** (conductor) 泛指一大类材料, 电子在其中可以“自由”地运动。或者更准确一点说, 一旦导体内部有非零地电场, 导体内的电荷就会在电场作用下产生流动 (虽然有电阻)。直至导体内的电荷重新分布后使得导体内的总电场为零, 这种流动才会停止, 整个系统才处于静电平衡状态。
- 这种性质直接带来静电问题中导体满足的几个普遍规律:
  - 导体内部电场场强处处为零。
  - 导体中的净电荷只分布于导体表面。这是上面一条通过电场散度公式或高斯定理的直接推论。
  - 导体表面导体外一侧的电场场强总是垂直于导体表面。这来自于静电场中闭合路径积分恒为零的性质。
  - 导体表面导体外一侧的电场场强大小满足

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \widehat{\mathbf{dS}} = (-\nabla\phi) \cdot \widehat{\mathbf{dS}} = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\epsilon_0}, \quad (7.36)$$

$\sigma(\mathbf{x})$  为导体表面的电荷分布。事实上由于前一条性质, 我们这里有一个更强的结论,  $\sigma(\mathbf{x}) = \epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{x})|$ 。这种电荷分布也称为**感应电荷**(induced charge), 因为这种电荷分布是在外加电场影响下导体内电子重新分布导致的。注意即便导体原本总带电量为零, 这种感应电荷分布也可能是非平庸的。

- 一个连通的导体具有恒定的电势。这是也是第一条的直接推论。
- 这里我们不难看到在导体边界上指定静电场两种边界条件的方式:
  - 狄利希里条件: 指定导体所具有的电势。
  - 诺伊曼条件: 给出导体表面感应电荷的分布。
- 由上述基本性质我们还可以导出一些额外的性质:
  - 当导体具有空腔时, 如果空腔不存在额外的电荷, 那么导体的空腔中电场恒为零。这里我们在导体的内表面及其包围的空腔中讨论静电问题的解。因为空腔内没有电荷分布, 其中的电场满足拉普拉斯方程, 导体内表面拥有相同的电势, 因而提供了狄利希里条件最简单的情况, 即电势的边界值为一个常数  $c$ 。很容易看出  $\phi(\mathbf{x}) = c$  一定是满足这些条件的一个解。依据上一讲介绍的解的唯一性, 我们于是知道内部空间中电场一定为零。这一结论显然只与空腔本身有关, 而与导体外表面的感应电荷分布以及其它可能存在的空腔均无关。
  - 由上一条的结论我们还可以进一步通过高斯定理推论出, 在此种情况下导体内表面上的感应电荷密度一定为零, 或者换句话说, 导体的所有感应电荷都只分布于导体外表面。
  - 当导体的某个空腔  $V$  具有额外的电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  时, 其相应的导体内表面上一定会有感应电荷分布, 且内表面上的感应电荷总量为

$$- \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (7.37)$$

这是由空腔外导体内电场恒为零以及高斯定理所保证的。

- 上一条还有一个直接推论, 我们可以看到导体任何内部空间及其相应的导体内表面上的(感应)电荷分布对于这个区域外的任何静电问题不施加任何影响。

## 7.5 镜像法

- 当静电问题中边界具有一些特殊的几何构形时往往可以利用镜像法计算电场的分布(源电荷的分布可以复杂)。从本质上说, 这种方法的可行性主要在于这些情境下格林函数具有非常简单的解。我们接下来通过几个具体例子加以分析。
- **例一。**假设  $x_1 \leq 0$  的整个空间中布满了导体, 且导体的电势为零。在点  $\mathbf{A} = (a, 0, 0)$  ( $a > 0$ ) 处放置一个电荷量为  $Q$  的点电荷。我们求空间  $x_1 > 0$  内的电场分布。
  - 这个问题中空间的边界是一个导体, 相应地我们有一个狄利希里条件, 即导体电势为零。同时我们也知道在  $x_1 = 0_+$  处电场应当垂直于导体表面。我们先直接分析电场场强。在边界任意一点  $(0, x_2, x_3)$  上由源电荷自身产生的电场为

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{A}}{|\mathbf{x} - \mathbf{A}|^3} \Big|_{x_1=0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-a, x_2, x_3)}{(a^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}. \quad (7.38)$$

不难看出, 如果我们假想在点  $(-a, 0, 0)$  处放置一个电荷量为  $-Q$  的电荷 (称其为**镜像电荷**), 那么它的贡献

$$\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{A}}{|\mathbf{x} + \mathbf{A}|^3} \Big|_{x_1=0} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(a, x_2, x_3)}{(a^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \quad (7.39)$$

恰好能抵消源电荷在边界切方向的电场分量。假设问题的解就是该源电荷与镜像电荷共同的作用

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{A}}{|\mathbf{x} - \mathbf{A}|^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} + \mathbf{A}}{|\mathbf{x} + \mathbf{A}|^3}, \quad x_1 > 0. \quad (7.40)$$

由于这个电场是直接由库伦定律构造出来的, 并且镜像电荷的位置在所考察区间  $x_1 > 0$  之外, 它显然满足该区间里的泊松方程。我们需要再检查一下它是否也满足给定的边界条件。由上式我们很容易看到它对应的势函数为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{A}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{A}|} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2 + x_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right), \quad x_1 > 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

的确, 这个电势在  $x_1 = 0$  时恒为零 (一般性地电势可以有一个任意加法因子, 不过这里已经被所假设的导体电势大小固定了)。由狄利希里条件下电场解的唯一性我们于是知道(7.40)就是最终的答案。

- 现在我们反过来反观一下上一讲介绍的格林函数方法。对于狄利希里条件一般的公式为

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}') (\nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \cdot d\mathbf{S}. \quad (7.42)$$

在该问题中  $V$  为  $x_1 > 0$  的区域,  $\partial V$  为  $x_2$ - $x_3$  坐标平面。由于导体的电势为零, 事实上这里第二项的边界积分完全为零, 我们从而只留下  $V$  中的体积分。由于电荷密度已知为

$$\rho(\mathbf{x}') = Q\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{A}), \quad (7.43)$$

通过与我们前面得到的电势结果对比不难发现这里的格林函数为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_m|}, \quad (7.44)$$

其中  $\mathbf{x}'_m = (-x'_1, x'_2, x'_3)$  为点  $\mathbf{x}'$  关于 2-3 平面的镜像。

- 我们也可以首先从格林函数的角度出发, 问格林函数的具体形式应该是什么。这里重要的是两个条件: (1) 镜像电荷一定在所考察区域之外 (否则会破坏泊松方程); (2) 格林函数在边界上等于零。对于格林函数来说, 区域内的点电荷产生的影响是固定的,  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ , 主要问题在于如何在区域外添加合适的镜像电荷使得第二个条件被满足。在单个平面边界的情况下上述最终的表达式是比较容易看出来的。

- 当有了格林函数的表达式(7.44)以后, 对于区域  $x_1 > 0$  内有更一般电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  的情况我们都能够统一写出相应的电势计算方法

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (7.45)$$

注意这个式子只对区域内部的点  $\mathbf{x} \in V$  成立。

- 我们现在来观察一下导体表面感应电荷的面密度。由前面的讨论我们知道在任意点  $(0, x_2, x_3)$  处总的场强为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(-a, 0, 0)}{(a^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{x} \in \partial V. \quad (7.46)$$

因此该点处的电荷面密度是

$$\sigma(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{x} \in \partial V. \quad (7.47)$$

- 我们再来考虑这个系统里点电荷与导体之间的相互作用力。这可以从两个角度出发:

- \* 如果我们是观察导体的受力, 那么这等效于导体表面每个面元上电荷受力之合。具体为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\partial V} \frac{\mathbf{E}}{2}(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 \\ &= \left( \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^3} r dr, 0, 0 \right) = \left( \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (7.48)$$

这里我们需要额外除以一个 2, 这是因为上述计算中我们要排除每个感应电荷面元自身产生的电场, 而这等效地相当于是把导体表面处的电场减半(切向受力对于完整的导体而言相互抵消了)。

- \* 如果我们是观察点电荷, 计算方法则更为简单。原则上我们需要计算导体表面所有感应电荷在  $\mathbf{a}$  处共同产生的电场强度, 不过现在我们已经知道这等效于单个镜像电荷在同一处产生的电场。因此这个力的计算相当于是两个电荷间直接的库伦力

$$\mathbf{F}' = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{a}}{|2\mathbf{a}|^3} Q. \quad (7.49)$$

通过结果我们看到这两种分析角度是等价的。

- 例二。我们来考虑其它只需单个镜像点电荷的情形。

- 为了理解最一般的情况, 我们首先研究一下两个带有相反符号的点电荷所产生的电场的等势面(亦即势能相等的点构成的曲面)。不失一般性, 假定一个电荷为  $Q_1$ , 位于坐标原点, 另一个电荷为  $-Q_2$ , 位于坐标  $\mathbf{x}' = (-r, 0, 0)$  处。我们直接能够知道等势面一定关于  $x_1$  轴旋转对称。我们还是取无穷远处参考电势为零。加入点  $\mathbf{x}$  位于电势为  $C$  的等势面上, 那么我们有如下关系式

$$\frac{Q_1}{|\mathbf{x}|} - \frac{Q_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{Q_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} - \frac{Q_2}{\sqrt{(x_1 + r)^2 + x_2^2 + x_3^2}} = 4\pi\epsilon_0 C. \quad (7.50)$$

对于一般的电势  $C$  这样的曲面比较复杂。我们现在看电势为零的等势面  $C = 0$ , 那么上述方程可整理为

\*  $Q_1 = Q_2$  时

$$2x_1 + r = 0. \quad (7.51)$$

\*  $Q_1 \neq Q_2$  时 (不失一般性, 考虑  $Q_1, Q_2 > 0$ )

$$\left(x_1 + \frac{Q_1^2}{Q_1^2 - Q_2^2}r\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{Q_1^2 Q_2^2}{(Q_1^2 - Q_2^2)^2}r^2. \quad (7.52)$$

这里第一种情况我们在前面一个例子里已经讨论过了, 现在我们聚焦第二种情况。从上面式子里我们看到这个等式面是以  $(-\frac{Q_1^2}{Q_1^2 - Q_2^2}r, 0, 0)$  为圆心,  $\left|\frac{Q_1 Q_2}{Q_1^2 - Q_2^2}\right|r$  为半径的球面。这里我们可以发现一个一般规律, 假设电势为零的等势面半径为  $R$ , 两个电荷距该球面距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 那么我们总是有

$$r_1 r_2 = R^2 \quad (7.53)$$

$$\frac{Q_1^2}{r_1} = \frac{Q_2^2}{r_2}. \quad (7.54)$$

有了上述结论, 我们首先讨论一个电势为零的球面边界。假定边界的半径为  $R$  (球心在坐标原点), 源电荷  $Q$  的位置为  $\mathbf{a}$  (不失一般性可以假定  $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$ )。这进一步可以分为两种情况:

- \* 第一种情况, 我们考虑一个球形腔, 腔外是导体, 这时  $|\mathbf{a}| < R$ 。
  - \* 第二种情况, 我们考虑一个球形导体, 源电荷则在导体外, 亦即  $|\mathbf{a}| > R$ 。
- 这种情况里由于无穷远处参考电势假定为零, 我们可以假想有一个导线将导体连到无穷远处使它们等势。

无论是哪种情况, 由上一条的分析我们都能看出镜像电荷总是位于

$$\frac{R^2}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \quad (7.55)$$

(这个位置一定是在导体里面), 并且带电荷量

$$-\frac{R}{|\mathbf{a}|}Q. \quad (7.56)$$

于是空间当中任意一点  $\mathbf{x}$  处的电势为

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{|\mathbf{a}|} \frac{1}{\left|\mathbf{x} - \frac{R^2}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}\right|}, \quad (7.57)$$

相应地, 该问题中的格林函数为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\left|\frac{|\mathbf{x}'|}{R} \mathbf{x} - \frac{R}{|\mathbf{x}'|} \mathbf{x}'\right|}. \quad (7.58)$$





8.1	笛卡尔坐标系下的变量分离 . . . .	69
8.2	正交曲线坐标系 . . . . .	70
8.3	变量的分离 . . . . .	75

- 这一讲我们关注拉普拉斯方程的解法。这个方程不仅决定了区域内无电荷分布的系统的电场，甚至对于有电荷分布的电场，拉普拉斯方程的解也是泊松方程的通解的组分。
- 在笛卡尔坐标系中拉普拉斯方程用坐标分量具体写为

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.1)$$

这是一个二阶三变量的齐次方程。直接尝试从边界条件出发对这样的方程做积分是非常复杂的。在解析分析中我们处理这类方程的方式是将其分解成更为简单的问题。这里的核心思想包括两个方面：

- 把高维多变量的偏微分方程问题化为一维单变量的常微分方程问题，
- 利用正交完备的函数基将原本解微分方程的问题划归为线性代数问题。
- 我们把上述第二类问题放到下一讲，这一讲只处理多变量方程的变量分离。由于这个问题只涉及微分方程在任意点邻域内的性质，我们可暂且忽略掉静电问题的边界条件。

## 8.1 笛卡尔坐标系下的变量分离

- 先看最简单的情况：欧几里得空间的笛卡尔坐标系。该坐标系下，空间中任意一点  $\mathbf{x}$  处三条坐标线（固定两个变量改变第三个变量所描出的线）都是相互正交的。相应地，在拉普拉斯算符中我们看到对三个坐标变量的偏导分隔在不同的项里。换言之不存在包含对多个变量求偏导的混合项。
- 这种情况下我们可以试探性地假设该方程存在某些解可以分解为单变量函数的简单乘积，亦即

$$\phi(\mathbf{x}) = U(x_1)V(x_2)W(x_3). \quad (8.2)$$

这样做的目的是尝试把原先的单个多变量方程化为多个单变量方程加以处理。

- 为了确认这种可行性，我们把上述试探解代入拉普拉斯方程，并将整个方程除以这个解本身，得到

$$\frac{1}{U(x_1)} \frac{\partial^2 U(x_1)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{V(x_2)} \frac{\partial^2 V(x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{1}{W(x_3)} \frac{\partial^2 W(x_3)}{\partial x_3^2} = 0. \quad (8.3)$$

于是我们看到一个有意思的现象：方程对于各个变量的依赖也被分隔在了不同的项里。为了使整个方程依然成立，唯一的可能性是这里每一项分别等于某个常数，并且这三个常数相加为零。把这三个常数记为  $A_1$ 、 $A_2$  及  $A_3$ ，于是对于这个试探解拉普拉斯方程化为

$$\frac{\partial^2 U(x_1)}{\partial x_1^2} + A_1 U(x_1) = 0, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial^2 V(x_2)}{\partial x_2^2} + A_2 V(x_2) = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^2 W(x_3)}{\partial x_3^2} + A_3 W(x_3) = 0, \quad (8.6)$$

并且

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0. \quad (8.7)$$

于是我们确实得到了三个因子函数  $U(x_1)$ 、 $V(x_2)$  以及  $W(x_3)$  各自所满足的一元常微分方程。这三个常微分方程几乎是相互独立的，唯一的联系仅仅在于其中的三个常数需要满足一个线性关系，但这并不妨碍我们对每个微分方程单独求解。因此对于这样的试探解整个问题大大简化了。

- 注意对于每组固定的常数上述分解只对应于拉普拉斯方程的特定的解，而不是完全等价于拉普拉斯方程自身。事实上这组常数可以有多种不同的取法，相应得到多个不同的解。我们可以期待拉普拉斯方程的一般解总是能够化为这些解的线性合。这个问题将放在下一讲讨论。

## 8.2 正交曲线坐标系

- 笛卡尔坐标系在处理带有平直边界或者具有平移对称性的静电问题时非常实用。实际问题中往往也会涉及其它类型的系统。现在我们尝试把上述笛卡尔坐标系中变量分离的方法拓展到更一般的情形。前面提到，笛卡尔坐标系中这种简化方法之所以容易操作，其关键原因在于空间任意一点上坐标线的正交性。因此在更一般的讨论中这一性质需要得到保留。由此这里简要介绍一下**正交曲线坐标系**。这类坐标系在空间中每个点邻域内**局部**地看都类似于笛卡尔坐标系：

- 其三个坐标线都是相互正交的。
- 唯一不同仅仅在于坐标线的整体指向，以及坐标刻度间隔相对于实际几何长度可能存在的缩放。

\* 这里需要特别注意，用数字标记刻度是一回事，几何上的长度是另一回事，两者之间差了一个**标度**：我们在处理实际问题时候，对于长度当然要指明用了什么单位而不是仅仅给出一个数字。在一般的坐标系中这个“单位”是可以随空间点变化的。

\* 在笛卡尔坐标系中不会特意强调这个问题，因为按照一般约定我们直接用笛卡尔坐标系中的距离概念定义它所表征的空间里的真实几何长度。亦即，

若两个点的坐标分别为  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ , 那么它们之间距离的几何长度为

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}. \quad (8.8)$$

在这样的定义下, 一个微小的几何位移  $d\mathbf{l}$  直接写为

$$d\mathbf{l} = (dx_1, dx_2, dx_3) \equiv dx_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + dx_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + dx_3 \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (8.9)$$

其中  $\{\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3\}$  为笛卡尔坐标系中三个坐标方向上的单位矢量 (或称**坐标架**), 满足正交归一关系

$$\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j = \delta_{ij}. \quad (8.10)$$

这个坐标架是不随空间点的变化而变化的。于是我们看到刻度上的变化  $dx_i$  直接等同于第  $i$  方向上移动的几何距离。

- \* 然而在一般的坐标系中上述刻度与距离间的直接对应不再适用。作为解释这个标度问题的最简单的例子, 对于一维空间我们除了可以用笛卡尔坐标  $x$  外, 也可以选择其它参数  $t$ , 比如令  $x = \sinh t$ , 那么  $t \in (-\infty, +\infty)$  与一维空间中的点也具有一一对应关系。然而, 这时我们的线元  $d\mathbf{l}$  则为

$$d\mathbf{l} = dx = \cosh t dt. \quad (8.11)$$

这里的  $\cosh t$  便为  $t$  坐标系里点  $t$  处的长度标度, 描述了单位  $t$  刻度所对应的真实几何长度。

正交曲线坐标系中最典型的例子是球坐标系与柱坐标系, 它们也是我们接下来主要关注的。

- 首先我们关于正交曲线坐标系作一些一般的讨论。假设新的坐标系下三个独立坐标参数为  $\{t_1, t_2, t_3\}$ 。为了避免混淆, 我们把任意一点上三个坐标方向的单位矢量记为  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ , 也满足正交归一关系

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}. \quad (8.12)$$

于是虽然新的坐标系在全局上不同于笛卡尔坐标系, 但是在空间里任意一点的邻域内塔依然类似于一个笛卡尔坐标系:

- 如果我们甚至在这样的邻域内坐标参数的刻度直接对应于“距离”, 那么相应地在这个邻域里我们得到的就是一个“笛卡尔坐标系”。
- 如果是放在真实的空间里考虑, 那么邻域里这个坐标系与真正的笛卡尔坐标系的区别仅在于在每个坐标方向上分别需要考虑从坐标刻度映射到几何距离所涉及的标度。

对于单独一个邻域来说, 上述两种描述是完全相互等价的, 因为在邻域内部坐标架以及标度随空间点的变化是可以忽略的高阶小量。

- 上述观察可以直接帮助我们写下一般正交曲线坐标系中的线元、面元和体元, 因为这些几何量全部是在一个点的邻域内定义的。首先, 几何上微小位移对应的线元可以写为 (对比笛卡尔坐标系中的(8.9))

$$d\mathbf{l} = f_1 dt_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + f_2 dt_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + f_3 dt_3 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (8.13)$$

这里  $\{f_1, f_2, f_3\}$  三个标量因子分别指代三个坐标参数相关的标度, 类似于(8.11)里的  $\cosh t$ , 我们在后面会看到更多具体例子。相应地, 面元与体元分别为

$$d\mathbf{S} = f_2 f_3 dt_2 \wedge dt_3 \hat{\mathbf{e}}_1 + f_3 f_1 dt_3 \wedge dt_1 \hat{\mathbf{e}}_2 + f_1 f_2 dt_1 \wedge dt_2 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (8.14)$$

$$dV = f_1 f_2 f_3 dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3. \quad (8.15)$$

正如前面所说的, 这些几何上的积分元的表达式与笛卡尔坐标系中的表达式高度相似, 区别仅仅在于我们需要额外乘上每个方向上的标度。

- 我们的主要任务是在这类更广泛的坐标系下找出梯度、散度与旋度的正确计算方法。这里的关键在于需要保证斯托克斯定理

$$\int_R d\omega = \int_{\partial R} \omega \quad (8.16)$$

在新的坐标系下依然成立 (上述定理本质上是一个几何关系, 是不依赖于坐标系的选择的。至于其原因超出了本课程的范围, 有兴趣的同学可查阅相关数学书籍。)。由于这个公式对任意区域恒成立, 我们不妨只聚焦于某个点的邻域。选择正交曲线坐标系的简单性在于, 在微小邻域内坐标线的角度是无关紧要的 (所有坐标线相对于笛卡尔坐标系都旋转了相同的角度并保持正交)。如前所述这时正交曲线坐标系与笛卡尔坐标系唯一的区别仅仅在于坐标刻度的缩放。在单个邻域内我们甚至可以纯粹以坐标刻度定义一个假想的“笛卡尔坐标系” (因为在邻域内部可以忽略坐标架及标度本身的变化), 使我们能够使用笛卡尔坐标系中已知的结论。

– 我们先看梯度, 这与线积分有关

$$\begin{aligned} \int_L (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{l} &= \phi_{\text{终点}} - \phi_{\text{起点}} \\ &= \int_L \left( \frac{\partial \phi}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial \phi}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial \phi}{\partial t_3} dt_3 \right) \\ &= \int_L \left( \frac{\partial \phi}{\partial t_1}, \frac{\partial \phi}{\partial t_2}, \frac{\partial \phi}{\partial t_3} \right) \cdot (dt_1, dt_2, dt_3)_{\hat{\mathbf{e}}}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

- \* (8.17)中第一个等号是从宏观角度考虑要求斯托克斯定理(8.16)是一个不依赖于坐标系的几何关系。我们可以把它看作是用来定义新坐标系里的梯度  $\nabla \phi$ 。
- \* 第二个等号是抛开了几何尺度不谈纯粹从参数角度在指定邻域内我们定义的“笛卡尔坐标系”里应用了我们熟悉的斯托克斯定理。
- \* 第三个等号是利用了区域内任意一点上坐标架的正交归一性质(?)将被积函数写成两个矢量的点乘, 其中每个矢量均写成对坐标架  $\hat{\mathbf{e}}$  的线性展开。这里我们使用一个简化记号

$$(a_1, a_2, a_3)_{\hat{\mathbf{e}}} \equiv a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (8.18)$$

由(8.13)我们看到线元  $d\mathbf{l}$  相比于  $(dt_1, dt_2, dt_3)_{\hat{\mathbf{e}}}$  每一个分量都多出了一个标度因子  $f_i$ , 因此在梯度的每一个分量中除了对新坐标的偏导外我们也需要把这些因子除去。于是正交曲线坐标系中梯度定义为

$$\nabla \phi = \frac{1}{f_1} \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{f_2} \frac{\partial \phi}{\partial t_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{f_3} \frac{\partial \phi}{\partial t_3} \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (8.19)$$

– 对于旋度，我们观察面积分

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (8.20)$$

注意这里矢量场的三个分量为新坐标系下的分量而非笛卡尔坐标系里的分量，亦即  $\mathbf{v} = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ 。用分量形式右侧的积分元可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} &= (v_1, v_2, v_3)_{\hat{\mathbf{e}}} \cdot (f_1 dt_1, f_2 dt_2, f_3 dt_3)_{\hat{\mathbf{e}}} \\ &= (f_1 v_1, f_2 v_2, f_3 v_3)_{\hat{\mathbf{e}}} \cdot (dt_1, dt_2, dt_3)_{\hat{\mathbf{e}}}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

于是，借鉴梯度讨论里(8.17)中第二个等号，我们在邻域内的“笛卡尔坐标系”里我们已经熟悉的斯托克斯定理，再与(8.20)左侧比较，我们发现

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} &= \left( \frac{\partial(f_3 v_3)}{\partial t_2} - \frac{\partial(f_2 v_2)}{\partial t_3}, \frac{\partial(f_1 v_1)}{\partial t_3} - \frac{\partial(f_3 v_3)}{\partial t_1}, \frac{\partial(f_2 v_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial(f_1 v_1)}{\partial t_2} \right)_{\hat{\mathbf{e}}} \\ &\quad \cdot (dt_2 \wedge dt_3, dt_3 \wedge dt_1, dt_1 \wedge dt_2)_{\hat{\mathbf{e}}}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

通过  $d\mathbf{S}$  的定义(8.14)，我们于是知道旋度定义为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{f_2 f_3} \left( \frac{\partial(f_3 v_3)}{\partial t_2} - \frac{\partial(f_2 v_2)}{\partial t_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{f_3 f_1} \left( \frac{\partial(f_1 v_1)}{\partial t_3} - \frac{\partial(f_3 v_3)}{\partial t_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &\quad + \frac{1}{f_1 f_2} \left( \frac{\partial(f_2 v_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial(f_1 v_1)}{\partial t_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (8.23)$$

– 最后，对于散度我们考察体积分

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV &= \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\partial V} (v_1, v_2, v_3)_{\hat{\mathbf{e}}} \cdot (f_2 f_3 dt_2 \wedge dt_3, f_3 f_1 dt_3 \wedge dt_1, f_1 f_2 dt_1 \wedge dt_2)_{\hat{\mathbf{e}}} \\ &= \int_{\partial V} (f_2 f_3 v_1, f_3 f_1 v_2, f_1 f_2 v_3)_{\hat{\mathbf{e}}} \cdot (dt_2 \wedge dt_3, dt_3 \wedge dt_1, dt_1 \wedge dt_2)_{\hat{\mathbf{e}}}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

运用与之前类似的推理我们发现

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \left( \frac{\partial(f_2 f_3 v_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial(f_3 f_1 v_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial(f_1 f_2 v_3)}{\partial t_3} \right) dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3. \quad (8.25)$$

于是由  $dV$  的定义(8.15)我们得到散度的定义

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{f_1 f_2 f_3} \left( \frac{\partial(f_2 f_3 v_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial(f_3 f_1 v_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial(f_1 f_2 v_3)}{\partial t_3} \right). \quad (8.26)$$

– 由上述梯度与散度的表达式，我们也进一步得知在一般正交曲线坐标系下**拉普拉斯算符** $\nabla^2$  的表达式为

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{f_1 f_2 f_3} \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{f_2 f_3}{f_1} \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left( \frac{f_3 f_1}{f_2} \frac{\partial \phi}{\partial t_2} \right) + \frac{\partial}{\partial t_3} \left( \frac{f_1 f_2}{f_3} \frac{\partial \phi}{\partial t_3} \right) \right). \quad (8.27)$$

这里我们留意一个一般形式：在正交曲线坐标系中拉普拉斯算符里对各个坐标参数的偏导是没有交叉项的。这可以看作是该类坐标系在每个点邻域内坐标系相互正交的一个直接推论。这对于我们后面利用分离变量法分析拉普拉斯方程的解至关重要。

- 对于所有这些表达式, 我们看到当选取笛卡尔坐标系的时候,  $f_1 = f_2 = f_3 = 1$ , 它们都正确退化到笛卡尔坐标系中我们已经熟悉的表达式。
- 我们现在来看具体例子。首先是球坐标系, 这里通常选取一个径向参数  $r$  与两个角度参数  $\theta$  与  $\varphi$ 。它们与笛卡尔坐标之间的关系为

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (8.28)$$

我们把笛卡尔坐标系下的线元表示转化到球坐标系下的线元表示。具体做法为

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= dx_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + dx_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + dx_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= (dr \sin \theta \cos \varphi + d\theta r \cos \theta \cos \varphi - d\varphi r \sin \theta \sin \varphi) \hat{\mathbf{x}}_1 \\ &\quad + (dr \sin \theta \sin \varphi + d\theta r \cos \theta \sin \varphi + d\varphi r \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &\quad + (dr \cos \theta - d\theta r \sin \theta) \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= dr \underbrace{(\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_3)}_{f_r \hat{\mathbf{e}}_r} \\ &\quad + d\theta \underbrace{(r \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 - r \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_3)}_{f_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta} \\ &\quad + d\varphi \underbrace{(-r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2)}_{f_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

从中提取  $dr$ 、 $d\theta$  和  $d\varphi$  分别乘的矢量的单位矢量, 由此得到球坐标系中任意一点上的坐标线单位矢量 (有时也称标架)

$$\hat{\mathbf{e}}_r(\mathbf{x}) = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (8.30)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x}) = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 - \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (8.31)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi(\mathbf{x}) = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2. \quad (8.32)$$

相应地我们得到球坐标系下线元的一般表达式

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (8.33)$$

因此三个参数方向上的标度因子为

$$f_r = 1, \quad f_\theta = r, \quad f_\varphi = r \sin \theta. \quad (8.34)$$

当然, 对于球坐标系以及后面的柱坐标系而言我们通过三维的几何图像能够很容易地直接定出这些标度因子。对于更一般的正交曲线坐标系, 当我们没有很直观的几何图像可以利用时, 上述的计算方法总是适用的。参考前面给出的结论, 我们于是很快知道拉普拉斯算符在球坐标系下表述为

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \quad (8.35)$$

我们往往也会把坐标  $\theta$  替换成参数  $t = \cos \theta$  ( $t \in [-1, 1]$ ), 相应地上述表达式变为

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( (1 - t^2) \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{r^2 (1 - t^2)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \quad (8.36)$$

- 其次我们看柱坐标系, 这里通常保留第三方向的分量, 记为  $z$ , 然后在  $12$  平面上使用极坐标参数  $\{r, \varphi\}$ , 它们与笛卡尔坐标之间的关系为

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z. \quad (8.37)$$

由类似方法可以得到这个坐标系下线元

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + dz \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (8.38)$$

因此三个标度因子为

$$f_r = 1, \quad f_\varphi = r, \quad f_z = 1. \quad (8.39)$$

于是该坐标系下拉普拉斯的作用方式为

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (8.40)$$

### 8.3 变量的分离

- 从上一节讨论我们看到, 在一般的正交曲线坐标系中, 拉普拉斯算符依然不包含任何混合偏导项。这使得我们可以像在笛卡尔坐标系里一样探讨变量分离的试探解

$$\phi(t_1, t_2, t_3) = U(t_1)V(t_2)W(t_3). \quad (8.41)$$

拉普拉斯算符里每一项只作用在其中一个因子上。当  $\nabla^2$  作用完以后我们再除以  $\phi$  本身, 便可以将这些因子分隔在不同的项里。

- 对于球坐标系, 我们做分解

$$\phi(r, t, \varphi) = R(r)P(t)F(\varphi), \quad (8.42)$$

处理后我们直接得到

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} \left( (1-t^2) \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{1}{(1-t^2)F} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.43)$$

这个问题里我们可以拆分出

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + A_1 R = 0, \quad (8.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( (1-t^2) \frac{\partial P}{\partial t} \right) - \left( A_1 + \frac{A_2}{1-t^2} \right) P = 0, \quad (8.45)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + A_2 F = 0. \quad (8.46)$$

- 对于柱坐标系, 我们做分解

$$\phi(r, t, \varphi) = R(r)F(\varphi)H(z), \quad (8.47)$$



由此可以得到

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (8.48)$$

这可以拆解为

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - (A_1 + r^2 A_2) R = 0, \quad (8.49)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + A_1 F = 0, \quad (8.50)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + A_2 H = 0. \quad (8.51)$$

9.1	正交函数 . . . . .	77
9.2	笛卡尔坐标系 . . . . .	79
9.3	球坐标系 . . . . .	82
9.4	多极子与静电场的多极展开 . . . .	85

- 这一讲我们处理上一讲余下的问题，亦即在正交曲线坐标系下把多变量的拉普拉斯方程化为多个常微分方程后，如何利用线性代数方法求得静电场的解。
- 现在我们需要把边界条件也一并考虑进来。对于单变量的常微分方程，其边界对应于变量取某个固定的值。在我们的三维问题里，线性分解的方法最有效的情况是问题所考察区域的边界恰好对应于坐标系的某个坐标面（某个坐标等于固定值的曲面），因为只有这样才能在考虑任意一个维度上的常微分方程的解时不至于受到另外两个变量的过多约束。
- 在实际问题中上述逻辑是反过来应用的：我们根据问题中区域边界的几何构形来决定采用什么样的坐标系，再应用上一讲以及这一讲的方法。
- 注意：这里介绍的方法是专门针对拉普拉斯方程的，因此只适用于分析不包含任何电荷分布的区域。

## 9.1 正交函数

- 我们首先回顾一下正交函数的概念。简便起见先讨论一维问题。考察实轴上某个区间  $(a, b)$ ，我们假设这个区间上定义了一组实数或复数函数  $U_n(x)$ ，下标  $n$  用以区分不同的函数。如果这些函数满足关系

$$\int_a^b U_m^*(x) U_n(x) dx = \delta_{mn}, \quad (9.1)$$

那么我们称它们为**正交归一**的 (orthonormal)。

- 有了这个性质以后我们就可以把它们作为一组基矢量构造一个线性空间，这个空间里每一个“点”都对应于某个函数  $f(x)$ ，并且可以一般性地展开为

$$f(x) = \sum_n c_n U_n(x), \quad (9.2)$$

$c_n$  为线性展开系数。有了上述正交归一关系后我们甚至可以非常方便地利用  $f(x)$ （如果已知它的具体表达式的话）计算出展开系数

$$c_n = \int_a^b U_n^*(x) f(x) dx. \quad (9.3)$$

我们知道这样一个线性空间的维数应当等于  $U_n(x)$  的个数。

- 当然, 如果我们仅仅任意选择一组正交归一的函数的话, 通过上述方式构造出来的线性空间里所包含的函数集合是非常特殊的。在实际应用中我们往往真正关心的是: **是否存在一组基函数  $U_n(x)$  使得这样构造出来的函数集合与 (一定条件下) 区间  $(a, b)$  上所有函数的集合等价**。或者换句话说, 是否可以把区间  $(a, b)$  上可能遇到的任意函数都唯一展开到所选择的基函数  $U_n(x)$  上。
- 该问题涉及到基矢量  $U_n(x)$  的**完备性**。这里首先我们要明确在什么意义上两个函数等价。为此我们通常定义两个函数  $f(x)$  与  $g(x)$  间的“距离”

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx. \quad (9.4)$$

当这个积分的值等于零的时候我们认为这两个函数严格等价。尤其, 我们很容易看出在实数域里如果这两个函数都是上述线性空间里的某个点的话, 那么这个积分与我们通常在线性空间里定义的模长平方是一致的。<sup>1</sup>

- 现在我们把区间  $(a, b)$  上的某个函数  $f(x)$  与线性空间中的某个点比较, 计算

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_n c_n U_n(x) \right|^2 dx. \quad (9.7)$$

不难发现, 如果要通过选择合适的展开系数  $c_n$  使得上述表达式的值最小, 那么在系数空间中的相应点上该表达式对任意一个  $c_n$  的导数都必须为零 (以实数域为例)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_n} \int_a^b \left| f - \sum_m c_m U_m \right|^2 dx &= -2 \int_a^b U_n \left( f - \sum_m c_m U_m \right) dx \\ &= -2 \int_a^b f(x) U_n(x) dx + 2c_n = 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

于是我们看到展开系数  $c_n$  必须满足(9.3)。当我们需要使上述线性空间能够精确描述  $(a, b)$  上任意函数时, 我们需要合理选择  $U_n(x)$  使得对于任意  $f(x)$  上述积分(9.7)都能够趋近于零。这时候我们便说基矢量  $U_n(x)$  是完备的。通常情况下, 如此得到的线性空间是无穷维的。

- 当我们有了一组正交完备基  $U_n(x)$  以后, 我们便可以用(9.2)表示区间  $(a, b)$  上的任意函数  $f(x)$ 。如果把(9.3)代入(9.2)我们观察到

$$f(x) = \int_a^b \left( \sum_n U_n^*(x') U_n(x) \right) f(x') dx'. \quad (9.9)$$

由此我们得到一个重要恒等关系

$$\delta(x - x') = \sum_n U_n^*(x') U_n(x). \quad (9.10)$$

<sup>1</sup>更具体一点, 我们把(9.2)中系数  $c_n$  组成的数列看作是  $f(x)$  作为一个矢量的分量表示。假定  $f(x) - g(x)$  的展开为

$$f(x) - g(x) = d_n U_n(x), \quad (9.5)$$

那么在实数域里

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx = \sum_{m,n} d_m d_n \underbrace{\int_a^b U_m(x) U_n(x) dx}_{\delta_{mn}} = \sum_n d_n^2. \quad (9.6)$$

这称为**正交完备关系** (completeness relation)。事实上这无外乎是我们所考虑的无穷维线性空间上的“单位矩阵” (可以把  $U_n(x)$  想象成某种单位矢量<sup>2</sup>)。

- 扩展到高维空间, 我们假定所考察的区域可以看作是多个一维区间的“直积”, 亦即: 能够找到特定的坐标参量使得区域中任意一个坐标参量的取值范围不依赖于其余的坐标参量。那么该空间里的正交完备函数基可以取为每个一维问题的基的直积。例如在二维  $x_1$ - $x_2$  平面上考察区域  $x_1 \in [a_1, b_1]$ ,  $x_2 \in [a_2, b_2]$ 。如果在第一方向上我们取正交函数  $U_m(x_1)$ , 在第二方向上我们取正交函数  $V_n(x_2)$ , 那么在完整的二维区域里我们可以选取正交函数基

$$F_{mn}(x_1, x_2) = U_m(x_1)V_n(x_2), \quad (9.13)$$

而一般的函数  $f(x_1, x_2)$  可以唯一展开为

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m,n} c_{mn} F_{mn}(x_1, x_2), \quad (9.14)$$

其中展开系数  $c_{mn}$  可以由以下积分计算

$$c_{mn} = \int F_{mn}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (9.15)$$

- 更一般地, 我们确定了第一个维度上的正交函数基以后, 第二个维度上所选取的正交函数基甚至是可以依赖于第一个维度上的具体基函数的, 亦即对于任意固定的  $m$ , 选择某组  $V_{mn}(x_2)$  作为第二个维度上的基, 而对于整个二维区域

$$F_{mn}(x_1, x_2) = U_m(x_1)V_{mn}(x_2). \quad (9.16)$$

这种情况下上述结论依然成立。后面我们将看到具体例子。<sup>3</sup>

## 9.2 笛卡尔坐标系

- 我们通过最简单的笛卡尔坐标系说明上述正交完备函数展开的方法。笛卡尔坐标系往往适用于平直的且相互正交的边界或者具有平移对称性的 (无边界) 区域, 这时我们把坐标轴取成垂直于边界的方向。具体到每一个分量方向, 可以有如下几种可能性:

- 没有任何边界。
- 只有一个边界, 比如说某个坐标方向只取  $x > 0$ 。

<sup>2</sup>作为类比, 在三维欧几里得空间中我们取定笛卡尔坐标系后, 单位矩阵  $\mathbf{1}$  显然可以表示为

$$\mathbf{1} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \quad (9.11)$$

其中没一项里左边一个矢量对应行, 右边一个矢量对应列。这是因为对任意矢量  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$  我们有

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = \left( \sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left( \sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{ij} \mathbf{e}_i v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{ij} \mathbf{e}_i v_j \delta_{ij} = \mathbf{v}. \quad (9.12)$$

<sup>3</sup>关于正交函数的更深入的讨论, 可以参考 R. 柯朗和 D. 希尔伯特《数学物理方法》第二章 2.1 节。

- 有两个边界，比如说所考虑区域在某个方向上取  $x \in [0, a]$ 。
- 我们以格里菲斯教材上的例 3.3 来做详细说明。这里我们设置所考察区域为

$$x_1 > 0, \quad 0 < x_2 < a. \quad (9.17)$$

也就是沿  $x_1$  方向有一个边界，沿  $x_2$  方向有两个边界，沿  $x_3$  方向则不存在边界。我们设置边界条件

$$\phi|_{x_1=0} = \phi_0(x_2), \quad \phi|_{x_1 \rightarrow \infty} = 0, \quad \phi|_{x_2=0} = \phi|_{x_2=a} = 0. \quad (9.18)$$

- 通过上述条件我们看到这个系统在  $x_3$  方向上具有平移对称性，因此电势  $\phi$  不是  $x_3$  的函数。该问题等效地是一个二维问题。
- 相应地，拉普拉斯方程经分离变量后化为

$$\phi(x_1, x_2) = U(x_1)V(x_2), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + A_1 U = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + A_2 V = 0. \quad (9.19)$$

并且

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (9.20)$$

我们简单回顾一下上述二阶齐次方程的解的形式：

- \* 若  $A_1 = 0$ ，所得到的解是线性的

$$U(x_1) = C_0 + C_1 x_1. \quad (9.21)$$

- \* 若  $A_1 > 0$ ，我们令  $A_1 = k^2$ ，相应的解为

$$U(x_1) = B_1 \sin(kx_1) + B_2 \cos(kx_1). \quad (9.22)$$

- \* 若  $A_1 < 0$ ，我们令  $A_1 = -k^2$ ，相应的解为

$$U(x_1) = D_1 e^{kx_1} + D_2 e^{-kx_1}. \quad (9.23)$$

这里  $\{C_0, C_1, B_1, B_2, D_1, D_2\}$  皆为待定积分常数。 $V(x_2)$  也满足类似结构。

- 如果  $A_1 = A_2 = 0$ ，那么由边界条件我们很容易看出所得到的解为零，所以我们不作考虑（但更一般的情况下需要留意这种可能性）。
- 因为电势在  $x_2 = 0$  以及  $x_2 = a$  处皆为零，由上式我们看到只能令

$$A_2 = -A_1 = k^2 \equiv \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2. \quad (9.24)$$

并且为了满足  $x_2$  方向的两个边界条件以及  $x_1$  方向无限远处电势为零的边界条件，我们只能取

$$U(x_1) \propto e^{-\frac{n\pi}{a}x_1}, \quad V(x_2) \propto \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_2\right), \quad n \in \mathbb{N}_+. \quad (9.25)$$

对于任意给定的  $n \in \mathbb{N}_+$  其相应的  $U(x_1)$  与  $V(x_2)$  的乘积构成原先拉普拉斯方程的一个解。我们把所有这些解组成一组基函数，由此假设电势展开为

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n\pi}{a}x_1} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_2\right). \quad (9.26)$$

– 现在我们唯一只剩  $x_1 = 0$  处的边界条件。利用上述展开我们有

$$\phi(0, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x_2\right) = \phi_0(x_2). \quad (9.27)$$

注意到  $(0, a)$  区间上的这些正弦函数满足正交归一性质

$$\frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \delta_{mn}. \quad (9.28)$$

因此当我们知道  $\phi_0$  的具体表达式后, 我们可以直接积分算出上述展开系数

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} x_2\right) \phi_0(x_2) dx_2. \quad (9.29)$$

- 如果我们所研究的系统不在某个方向上具有平移对称性, 那么  $\phi(x_1, x_2, x_3)$  同时是三个坐标的函数, 但这时我们所采用的方法是类似的。例如, 在上面例子的基础上我们在  $x_3$  方向考虑区间  $x_3 \in (0, b)$ , 并且相应的边界条件为

$$\phi|_{x_3=0} = \phi|_{x_3=b} = 0, \quad \phi|_{x_1=0} = \phi_0(x_2, x_3). \quad (9.30)$$

对于这个系统我们不难看出在  $x_3$  方向上需要额外引入一组正弦函数, 使得电势可以展开为

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n} e^{-\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} x_1} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_3\right). \quad (9.31)$$

在唯一剩下的边界上上述展开应满足条件

$$\phi(0, x_2, x_3) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_3\right) = \phi_0(x_2, x_3). \quad (9.32)$$

为了得到这些展开系数, 我们只需要在两个方向上分别使用三角函数的正交归一关系。由此

$$c_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_2\right) \int_0^b dx_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_3\right) \phi_0(x_2, x_3). \quad (9.33)$$

- 在上述例子中我们都用到了在固定有限区间中三角函数构成一组正交完备基的性质。这称为**傅立叶分解**。
- 在探讨更复杂的分离变量问题之前, 我们这里需要强调一下: 分离变量法带来的电势函数线性展开不仅仅是纯粹数学上的实用工具, 它其实有很强的物理意义 (无论多强调都不为过)。

– 为了看清这一点, 我们回到一开始分析的“二维”例子。我们现在计算一下这个系统所具有的电势能 (更确切地说是沿  $x_3$  方向的电势能线密度, 由于平移对称性整个系统的总电势能显然是无限的)。假设我们已经知道了电势傅立叶展开系数  $c_n$  的具体数值, 我们首先知道任意空间点上的电场强度

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \left( -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} c_n e^{-\frac{n\pi}{a} x_1} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x_2\right), -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} c_n e^{-\frac{n\pi}{a} x_1} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x_2\right), 0 \right). \quad (9.34)$$

由此我们利用电场场强模平方的公式来计算电势能（密度） $\lambda$

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{d\mathcal{E}}{dx_3} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty dx_1 \int_0^a dx_2 |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty dx_1 \int_0^a dx_2 \left( \left( \sum_{n=1}^\infty \frac{n\pi}{a} c_n e^{-\frac{n\pi}{a} x_1} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x_2\right) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^\infty \frac{n\pi}{a} c_n e^{-\frac{n\pi}{a} x_1} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x_2\right) \right)^2 \right) \\
 &= \epsilon_0 \int_0^\infty dx_1 \left( \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 c_n^2 e^{-\frac{2n\pi}{a} x_1} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \epsilon_0 \sum_{n=1}^\infty n c_n^2.
 \end{aligned} \tag{9.35}$$

上面计算中从第二行到第三行我们利用了三角函数到正交归一关系(9.28)以及类似的关系

$$\frac{2}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \delta_{mn}. \tag{9.36}$$

两项的  $x_2$  积分结果是相等的。

— 从上述结果我们发现几点有趣的现象：

- \* 傅立叶分解所得的每一项对电势能的贡献彼此间是相互独立的，我们把每一项称为一个**模式**（mode）。
- \* 各个傅立叶模式对电势能的贡献满足线性相加关系，其系数为傅立叶系数的平方  $c_n^2$ 。我们可以把这个贡献看作是对应模式独立自有的能量。
- \* 各个模式处于不同的能级。在这个特殊例子中所有这些能级是等间距分布的。如果把能级记作  $\mathcal{E}_n$ ，那么这个系统里

$$\mathcal{E}_n = \frac{\pi}{4} \epsilon_0 n. \tag{9.37}$$

每个能级上有且仅有一种模式。

- 概括地说，傅立叶分解得到的每一个模式都是系统的具有特定**本征能量**的稳定“运动状态”。当然，对于静电系统我们不讨论它随时间的演化，这样的说法不够确切。不过在以后我们学习电磁波的传播的时候，我们将看到两者间的确切关系。

### 9.3 球坐标系

- 我们回到球坐标系下的拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{9.38}$$

来讨论变量的分离。这里我们分两步走。首先假设

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi), \tag{9.39}$$



那么把方程两边乘上  $r^2/\phi$  我们可以分离得到

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - l(l+1)R = 0, \quad (9.40)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0. \quad (9.41)$$

$Y(\theta, \phi)$  只依赖于球面上的两个坐标 (因而可以看作是定义在二维球面上的函数), 称为**球谐函数** (spherical harmonics)。这里参数  $l(l+1)$  暂且是我们人为的一个约定。

- 上述关于径向函数  $R(r)$  的微分方程已经足够简单, 我们可以得到它的一般通解

$$R(r) = C_1 r^{-1-l} + C_2 r^l. \quad (9.42)$$

$C_1$  与  $C_2$  为两个积分常数。如果我们所考虑的问题中需要要求  $R(r)$  在  $r$  取无穷大时趋近于零, 那么上式第二项就必须取为零。

- 我们可以进一步令

$$Y(\theta, \phi) = P(\theta)F(\phi), \quad (9.43)$$

并从上述第二个方程分离得到

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P = 0, \quad (9.44)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + m^2 F = 0. \quad (9.45)$$

这里我们已经把分离出现的参数记为  $m^2$ 。这是因为在我们将要讨论的大多数问题中  $\varphi$  方向上没有额外的边界, 但是注意到  $\varphi$  方向本身是有限的, 而这总是提供了一个周期边界条件

$$F(\varphi) = F(\varphi + 2\pi). \quad (9.46)$$

于是在上述分离变量中我们不难看出  $F(\varphi)$  的解只能是

$$F(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (9.47)$$

- 我们暂且假设所要考虑的系统关于选定的  $x_3$  轴具有旋转对称性, 那么电势函数与  $\varphi$  无关, 相应地在上述表达式中只能取  $m = 0$ 。于是方程(9.44)退化为

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + l(l+1)P = 0. \quad (9.48)$$

这里方便起见我们改换一下变量, 令  $t = \cos \theta$ , 相应地  $\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial t}$ 。对这个新的变量我们于是有

$$\frac{d}{dt} \left( (1-t^2) \frac{dP}{dt} \right) + l(l+1)P = 0. \quad (9.49)$$

这称为**勒让德方程** (Legendre equation)。注意变量  $t$  的定义域为  $[-1, 1]$ 。

- 我们可以尝试用弗罗贝尼乌斯方法 (Frobenius' method) 求解这个微分方程。具体而言, 我们假设在  $t = 0$  的邻域内  $P(t)$  的展开

$$P(t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k. \quad (9.50)$$

将此代入勒让德方程，通过要求等式对任意  $t$  成立，我们于是得到关于待定参数  $\alpha$  以及  $a_k$  的无限多个线性方程。篇幅关系我们这里不做深入讨论。这个分析最终能够说明，如果我们要求所解得的级数展开在  $t = \pm 1$  处收敛，那么必须有  $l \in \mathbb{N}$ ，而此时上述展开恰好总是能够在  $t^l$  阶上截断，因此总是得到一个多项式。这些多项式可以由参数  $l$  标记  $P_l(t)$ ，我们称其为**勒让德多项式**。例如最低阶的几个多项式为

$$P_0(t) = 1, \quad (9.51)$$

$$P_1(t) = t, \quad (9.52)$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad (9.53)$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad (9.54)$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), \quad (9.55)$$

等等（这里取约定  $P_l(1) = 1 \ \forall l$ ）。对于一般的  $l$  我们可以通过罗德里格斯公式 (Rodrigues' formula) 得到

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l. \quad (9.56)$$

- 通过以上分析我们得到了一组无穷多个的函数。现在回到我们之前问过的问题，如果用这些勒让德多项式作为基定义一个线性空间，这个空间是否可以覆盖定义在  $[-1, 1]$  上的任意（实）函数？答案是肯定的。勒让德多项式满足正交归一关系

$$\int_{-1}^1 P_l(t) P_{l'}(t) dt = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (9.57)$$

关于完备性我们又有

$$\delta(t - t') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(t) P_l(t'). \quad (9.58)$$

于是在区间  $[-1, 1]$  上的函数总是可以有一个展开

$$f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(t), \quad (9.59)$$

类似于傅立叶分解中我们所看到的，这里的展开系数依然可以通过一个积分直接得到

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(t) f(t) dt. \quad (9.60)$$

- 回到具有绕第三轴旋转对称的系统的拉普拉斯方程的问题。以半径为  $R$  的球腔为例，如果我们知道边界上的电势为  $\phi_0(\theta)$ 。由于这里我们讨论的是有限边界，所以  $R(r)$  的通解中我们需要舍去一半，由此一般的展开为

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (9.61)$$

在边界上

$$\phi_0(t) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(t). \quad (9.62)$$

于是展开系数为

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_{-1}^1 P_l(t) \phi_0(t) dt. \quad (9.63)$$

对具体情况的计算我们就不再赘述。

- 我们再简要介绍一下  $m \neq 0$  的情况。用变量  $t$  我们有

$$\frac{d}{dt} \left( (1-t^2) \frac{dP}{dt} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right) P = 0. \quad (9.64)$$

这称为**连带勒让德方程** (associated Legendre equation), 相应的解由两个参数标记  $P_{l,m}(t)$ , 称为连带勒让德多项式。 $l$  的取值范围与之前一致, 而对于每个固定的  $l$ ,  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$  一共  $2l+1$  个可能的值。从勒让德多项式出发我们有一个一般的公式计算  $m > 0$  的情况

$$P_l^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_l(t). \quad (9.65)$$

而对于一般的  $m$  我们也有一个类似的罗德里格斯公式

$$P_l^m(t) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}} (t^2-1)^l. \quad (9.66)$$

由此我们可以进一步定义球谐函数

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (9.67)$$

它们满足正交归一关系

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad (9.68)$$

(注意这里积分元  $\sin \theta d\theta d\varphi$  是二维单位球面上的“体积元”) 以及完备关系

$$\delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') Y_{l,m}(\theta, \varphi). \quad (9.69)$$

## 9.4 多极子与静电场的多极展开

- 关于勒让德多项式还有一个特殊性质就是它的**生成函数** (generating function)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(t). \quad (9.70)$$

把这个函数对小  $x$  展开所得到的级数在  $x^l$  阶上的系数恰好是对应的勒让德多项式。

令  $t = \cos \theta$  并且  $x = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}'|}$ , 我们得到

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{x}|^l}{|\mathbf{x}'|^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad |\mathbf{x}| < |\mathbf{x}'|. \quad (9.71)$$

反之, 令  $x = \frac{|\mathbf{x}'|}{|\mathbf{x}|}$ , 我们得到

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{x}'|^l}{|\mathbf{x}|^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad |\mathbf{x}| > |\mathbf{x}'|. \quad (9.72)$$

- 我们看到上述生成函数与点电荷库伦势对坐标的依赖具有同样的结构。现在我们进一步分析这个关系的物理含义。
- 考察  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$  的情形。注意到这个展开是按照贡献大小来区分的：当我们观察的位置非常远的时候， $l$  的阶数越低则相应的展开项贡献越大。在给定误差范围下我们总是可以把上述无穷级数求和做一个截断以得到对真实电势的近似。
- 我们首先看领头项， $l = 0$ 。这时  $P_0(\cos \theta) = 1$ ，而该项对  $r$  的依赖是线性反比的，类似于一个处在坐标原点的电荷的影响。于是对于一个局域的电荷分布我们有

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{tot}}}{|\mathbf{x}|} + \mathcal{O}(\xi), \quad Q_{\text{tot}} = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV. \quad (9.73)$$

领头阶贡献相当于把所有电荷都集中在坐标原点所产生的库伦势。这是非常自然的事情，当我们离带电体系很远的时候，它看上去等效为一个点。

- 有趣的情形在于，当一个带电体系的总电荷为零的时候，那么原先的领头阶贡献恰好抵消掉了，而原先的次领头阶  $l = 1$  成为了这个情形下实际上的领头阶，它对电势的贡献是平方反比于距离的。注意到  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ ，对于这样的系统我们有

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')|\mathbf{x}'| \cos \theta}{|\mathbf{x}|^2} dV + \mathcal{O}(\xi^2) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_V (\rho(\mathbf{x}') dV)(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\int_V \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' dV) \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \end{aligned} \quad (9.74)$$

我们把

$$\mathbf{p} \equiv \int_V \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' dV \quad (9.75)$$

称为系统的**电偶极矩** (electric dipole moment)。这个量只与电荷分布本身有关，因此我们可以把它看作是带电系统自有的性质。一旦我们知道了一个系统的总偶极矩，那么其电势在大距离展开的次领头阶就被完全确定了。

- 为了弄清偶极矩的物理图像，我们来看最简单的例子。总电荷为零的非平庸的电荷分布最简单的情况显然是考虑一对符号相反电量相等的点电荷，称为**电偶极子** (electric dipole)。假定从负电荷指向正电荷的位移矢量为  $\mathbf{d}$ ，那么该构形所具有的偶极矩为

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_1 - Q\mathbf{r}_2 = Q\mathbf{d}. \quad (9.76)$$

我们看到这个量只与它们各自的电荷量以及相对位置相关，与它们的绝对位置无关（当然这只在总电荷为零时成立）。

- 于是每次我们看到一个偶极矩矢量，我们都可以把它想象成是一对符号相反电量相等的点电荷的贡献。这个图像唯一需要注意的地方在于，前面近似公式里出现的“偶极子”是位于一个理想的点（原点）上的物理量，而现实中我们能看到的偶极子通常具有一定长度尺寸。所以严格地说展开公式里的理想的偶极子应当是被看作某种极限

$$\mathbf{p} = \lim_{|\mathbf{d}| \rightarrow 0} Q\mathbf{d}, \quad Q|\mathbf{d}| = \text{常数}. \quad (9.77)$$

- 拓展开来, 如果一个理想偶极子处于一个一般位置  $\mathbf{x}'$ , 那么它对应的电势分布为

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (9.78)$$

- 我们现在做一个进一步假设: 系统的总电荷与总电偶极距皆为零。此时领头阶的贡献来自于**电四极距** (electric quadrupole moment), 即  $l = 2$  项。由  $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$  我们得到

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') |\mathbf{x}'|^2 (3\cos^2\theta - 1)}{2|\mathbf{x}|^3} dV + \mathcal{O}(\xi^3) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') (3(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})^2 - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}))}{2|\mathbf{x}|^5} dV + \mathcal{O}(\xi^3) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\left( \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}') dV (3x'_i x'_j - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') \delta_{ij}) \right)}_{p_{ij}} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} + \mathcal{O}(\xi^3). \end{aligned} \quad (9.79)$$

我们看到这个式子与电荷公式以及前述电偶极距公式有很大相似之处, 只不过电场的来源现在变成了一个二阶对称张量  $p_{ij}$  (也可理解为一个矩阵), 并且由上面的表达式这个张量显然是无迹的:  $\delta_{ij} p_{ij} = 0$  (或者用矩阵的语言, 该矩阵对角元之和为零)。

- 如果需要更加精细地计算电势或电场分布, 我们当然需要进一步考察更高的  $l$  取值所对应的贡献。所有这些贡献各自最终都能等效地看作是某个位于坐标原点的量, 只不过这样的量一般性地并不只是一个简单的标量, 而是一个  $l$  阶张量, 其对电势的贡献在大尺度上也与距离的  $-l - 1$  次方成正比。这些量统称为**电多极距** (electric multipole moment), 因此我们这里考察的展开也称为静电场的**多极展开** (multipole expansion)。
- 事实上, 上述电四极距的性质同样也适用于高阶的电多极距: 它是一个  $l$  阶全对称且无迹的张量。这个性质使我们能够直接去构造这样的量。以  $l = 3$  对应的电八极距为例, 我们可以首先写下

$$p_{ijk} = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV \left( x'_i x'_j x'_k + \cdots \right), \quad (9.80)$$

其中省略号对应的部分待定。由第一项我们已经看到这样定义的三阶张量关于指标置换是全对称的, 然而它的迹 (任意两个指标与额外的 Kronecker  $\delta$  做缩并) 不为零。为了进一步构造无迹但又保持置换对称的张量, 由电四极距的结构启发我们看到只需要以对称的方式补上一些包含  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'$  这样结构的项 (但是注意整个表达式关于  $\mathbf{x}'$  的依赖得是齐次的)。因此我们假定

$$p_{ijk} = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV \left( x'_i x'_j x'_k + c(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') (x'_i \delta_{jk} + x'_j \delta_{ik} + x'_k \delta_{ij}) \right). \quad (9.81)$$

由于该张量已经是置换对称的, 因此为了满足无迹条件我们只要求

$$p_{ijk} \delta_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV (1 + 5c)(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') x'_k = 0_k. \quad (9.82)$$

于是系数  $c = -1/5$ 。进一步取合适的归一化因子我们可以把电八极距定义为

$$p_{ijk} = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV \frac{5x'_i x'_j x'_k - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') (x'_i \delta_{jk} + x'_j \delta_{ik} + x'_k \delta_{ij})}{2}. \quad (9.83)$$

在考察它对电势的贡献时（假设它位于原点），我们只需将它与足够数量的  $\mathbf{x}$  做缩并，并且配足随  $|\mathbf{x}|$  增大的衰减趋势，遗迹

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{ijk}x_i x_j x_k}{|\mathbf{x}|^7}. \quad (9.84)$$

如果进一步转换到球坐标，我们不难看出这正好重新生成了勒让德多项式  $P_3(\cos\theta)$ 。因此上述构造也可以看作是勒让德多项式的一种独立的定义方式。

10.1	磁场的探测	89
10.2	毕奥-萨伐尔定律	93

## 10.1 磁场的探测

- 电场可以由（理想）点电荷的受力探测，我们现在问磁场可以如何探测。我们对于磁现象最初的认知来自于磁铁。当你给一个小孩一块磁铁，让他用绳子吊着磁铁玩一段时间，他或多或少会获得如下的感性认知：

- 磁铁不会拽着绳子跑偏（除非你拿另一块磁铁靠近它）。
- 磁铁会倾向于保持特定的方向。当你把它的方向改变时，它倾向于回到原先的方向。
- 如果足够小心，你甚至有可能发现，如果你把它静止时的指向掉转 180 度，它看上去也有可能静止，但是一旦有轻微扰动它又会转回原先的方向。

正是利用了磁铁的这些性质古人发明了指南针。它之所以可以用来“指南”，用现代的话语来说，是因为我们知道地球拥有磁场，并且在地面上的任何小范围区域（相对于地球尺寸而言）它可以近似被认为是均匀的。

- 上述现象能够告诉我们哪些关于磁现象的认知？毋庸置疑磁铁肯定在受某种外界的作用。在不靠近任何其它（可疑）物体的前提下可以近似认为这种影响是恒定的，因为你可以改变你所处的位置并观察到相同的现象（更数学点说，外界的影响具有平移对称性，因此任何描述这种作用的量在空间分布上是均匀的，我们可以用一个常量表示它）。
  - 于是从上面第一条我们得知，当这种作用不随空间位置改变的时候，磁铁的受力在任何情况下皆为零（这个结论在不均匀的外界作用下不再成立）。后两条进一步告诉我们磁铁所受到的是力矩  $\mathbf{N}$ 。
  - 如果要描述力矩  $\mathbf{N}$ ，我们必需讨论另外两个量，一个量表征磁铁的性质（忽略其大小、尺寸等细节），另一个量表征外界对磁铁的作用。这里关键的信息是，这两个量必须都是矢量。我们把前者记做  $\mathbf{m}$ ，后者记做  $\mathbf{B}$ 。
    - \* 两个量皆为标量的情况显然不成立，因为利用两个标量顶多只能通过代数运算产生第三个标量，而  $\mathbf{N}$  是一个矢量。
    - \* 这两个量不可能一个是标量一个是矢量。一个标量与一个矢量只能做乘法，并且所得的新矢量与原先的矢量平行。如果磁铁的特征量是标量，那么  $\mathbf{N}$  总是与  $\mathbf{B}$  平行，便不会依赖于磁铁自身的方向。反过来，如果外界作用的特征量是标量，那么  $\mathbf{N}$  总是与  $\mathbf{m}$  平行，这会意味着磁铁在任意指向下都会受到一个非零的力矩，并且这个力矩会促使磁铁保持该方向加速旋转。



- \* 我们当然也可以探讨更一般的张量的可能性，但这往往会造成两个问题。一方面  $\mathbf{N}$  随两种量的角度依赖会更加复杂，另一方面这种依赖往往会是而非线性的。
- $\mathbf{N}$  与  $\mathbf{m}$  及  $\mathbf{B}$  之间具体的依赖关系当然可以通过定量地测量  $\mathbf{N}$  随磁铁的角度变化来得到。其实如果我们限制在三维空间中讨论三个矢量间的关系，并且确认磁铁不会受任何其它影响，那么这个关系已经几乎唯一被确定了

$$\mathbf{N} \propto \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (10.1)$$

这里的比例系数是我们无法通过定性讨论决定的，但是利用该式我们很容易推断出前面总结的所有定性性质。我们把这种外界的作用  $\mathbf{B}$  称为**磁场场强**，或简称**磁场**。从上式我们看到，磁场  $\mathbf{B}$  的定义方向与磁铁静止时的指向是一致的。在许多演示实验中，演示者会准备一堆磁性粉末随机铺开在一块平整衬板上，当把一块大的磁铁放置在衬板下方时，粉末受到磁场的作用会重新分布，系统静止后粉末会倾向于连成一条条的线，这正是描绘了磁场在每一点上的方向（在衬板平面上的投影）。这是我们对磁场最直观的认知。

- 磁铁是研究磁场的最直观的方式，但是目前我们还没能清晰理解磁铁的属性。在上述描述中我们只是经验性地将磁铁受磁场影响的属性抽象为一个矢量  $\mathbf{m}$ ，但是关于该矢量的微观机制暂且是不明确的。在静电现象中我们把物体在电场中受力归结于电荷，这是一个标量，好比是质量一样。宏观物体带电量的增减在微观上来自于带电粒子的移动。如果简单类比，我们似乎会倾向于将  $\mathbf{m}$  称为磁荷，然而从上面的讨论我们看到  $\mathbf{m}$  更类似于静电系统中的电偶极距。如果同电量一样  $\mathbf{m}$  有一个基本单位，而宏观物质的  $\mathbf{m}$  的增减是通过带基本单位的  $\mathbf{m}$  的微观粒子实现的话，这也会带来一系列问题。比较显著的问题在于， $\mathbf{m}$  是一个矢量；如果宏观的  $\mathbf{m}$  归结于某类微观粒子，那么在忽略其它因素的影响下大量这样的粒子中单个粒子的  $\mathbf{m}$  的取向理应是随机的，那么对于宏观物体而言它的总  $\mathbf{m}$  只能为零（矢量的叠加不同于电荷的简单加合）。而这是与我们的经验相违背的。我们也未曾观察到过这样的“磁荷”在物质与物质之间可以任意转移。
- 近代对磁现象的深入理解始于电学：研究通电导线在磁场中的受力。这里我们不遵循历史发展的逻辑，而是直接讨论其微观机理。我们知道电流在微观层面实际为带电粒子的运动，因此磁场对物质的影响同样归结于其对带电粒子的影响，只不过这种影响的性质与电场产生的影响是截然不同的。
  - 测量电场的时候，我们只是用一个“点状”的物体，去测量它在某个空间点上的受力情况。我们发现这个力正比于点状物体的电荷量。这个点状物体可以是运动的，但是受力与其速度无关，于是我们判断可以直接令电场场强  $\mathbf{E}$  由

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (10.2)$$

这个公式定义（我们看到这个问题里除了  $\mathbf{F}$  外没有其它相关的矢量性的物理量，所以我们直接认定场强的方向由力的方向给出）。

- 我们设想对磁场用类似的手段测量，则会发现不一样的现象：
  - \* “点状”物体速度为零时，受力为零。

\* “点状”物体具有速度  $\mathbf{v}$  时, 受力总是正比于速度的大小以及物体所带电荷量的大小。

\* 受力总是垂直于速度  $\mathbf{v}$  与某个额外方向张成的平面, 并且又正比于两个方向间的夹角的正弦。

这些都是实验上可以通过测量一个带电微小点状物体的运动加以验证的。从中我们可以总结出一个公式, 而公式中不依赖于“点状”物体自身属性的一个矢量我们把它定为磁场的场强  $\mathbf{B}$ 。于是

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10.3)$$

这称为**洛伦兹力公式** (Lorentz force law)。

当然, 在同时有电场与磁场的时候, 由力的矢量叠加性我们有

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (10.4)$$

- 前面提到, 在许多系统中微观带电粒子的运动在宏观上是以电流的形式存在的。我们现在详细讨论下对电流的定量描述。
  - 在学习了三维空间矢量场的一般性质 (尤其是高斯定理) 之后, 我们可以首先定义电流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ , 要求其通量积分对任意区域满足

$$\int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(t, \mathbf{x}) dV = 0, \quad (10.5)$$

注意这里体电荷密度  $\rho$  是可以随时间变化的。 $\mathbf{J}$  关于区域边界  $\partial V$  的通量表征单位时间内区域  $V$  内总电荷量的增减。由量纲我们看到  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  的单位为  $\text{Cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ , 它的实际物理意义为在点  $\mathbf{x}$  处单位时间内通过单位截面的电荷量的大小。注意电流密度是有方向的, 所以真正通过的电荷量也会依赖于电流密度方向与截面法向量的夹角, 即为我们在通量积分中看到的  $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ 。

- 由于电流的方向就是构成电流的电荷 (假设为正电荷) 的运动方向, 对比一下电流密度  $\mathbf{J}$  与洛伦兹力公式中的  $q\mathbf{v}$  的量纲, 我们很容易看到这时在点  $\mathbf{x}$  处微小体积元的导体上所受的力为

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{J}dV) \times \mathbf{B}. \quad (10.6)$$

- 类似地, 如果电流是被约束在一个曲面上, 我们也可以定义一个面电流密度  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{K}$  与曲面法向量垂直), 其单位为  $\text{Cm}^{-1}\text{s}^{-1}$ , 指代曲面任意点上单位时间内通过单位截线的电荷量的大小。于是对于曲面上任意区域  $S$  我们有

$$\int_{\partial S} (\mathbf{K} \times d\mathbf{l}) \cdot \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|} + \frac{d}{dt} \int_S \sigma(t, \mathbf{x}) |d\mathbf{S}| = 0. \quad (10.7)$$

同理, 单位面积上所受的洛伦兹力为

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{K}|d\mathbf{S}|) \times \mathbf{B}. \quad (10.8)$$

- 最后回到我们通常更为熟悉的情况, 如果是一根导线, 那么电流方向就是导线线元的方向。于是单位导线线元上所受的洛伦兹力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (10.9)$$

- 作为上述内容的一个应用，我们考察一下处于均匀磁场  $\mathbf{B}$  中的闭合电流环路  $L$ ，电流大小为  $I$ ，环路的具体几何形状可以任意。

– 该环路的受力为

$$\mathbf{F} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left( \int_L d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}. \quad (10.10)$$

大括号里的表达式虽然是一个矢量积分，但是其各个分量的被积函数都是一个全微分。由于积分路径是闭合的，我们看到该环路总的受力为零。

– 该环路所受的磁场作用的力距为

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_L \mathbf{r} \times (I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \\ &= I \int_L \epsilon_{ijk} r_j \epsilon_{klm} dr_l B_m = I \int_L (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) r_j dr_l B_m \\ &= I \int_L d\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - I \mathbf{B} \int_L \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

注意最后一行第二项的被积函数也是一个全微分  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$ ，因此这一项积分为零。另一方面，由类似的张量计算可知

$$\int_L (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \times \mathbf{B} = - \int_L \mathbf{r} (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \int_L d\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = 2 \int_L d\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}). \quad (10.12)$$

其中最后一个等号采用了分部积分  $r_i dr_j = d(r_i r_j) - (dr_i) r_j$ （这里我们把分量  $r_i$  看作是關於  $\mathbf{r}$  的标量函数）。于是我们最终得到

$$\mathbf{N} = \underbrace{\left( \frac{1}{2} \int_L \mathbf{r} \times (I d\mathbf{r}) \right)}_{\mathbf{m}} \times \mathbf{B}. \quad (10.13)$$

- 从上式我们看到这个模型在均匀磁场中所受的力与力距同前面我们对磁铁做定性分析得到的结果是一致的。后面我们将看到这个图像是理解磁铁微观机理的基础。
- 我们把矢量  $\mathbf{m}$  称为**磁偶极距** (magnetic dipole moment)。为了明确它的含义，我们可以假定所考虑的闭合环路是某个平面上的半径为  $R$  的圆环。在这个平面上以环心为原点建立极坐标系，于是有

$$|\mathbf{m}| = \frac{1}{2} R^2 I \int_0^{2\pi} d\theta = I(\pi R^2). \quad (10.14)$$

亦即  $\mathbf{m}$  的大小为环上的电流大小乘以环的面积。而  $\mathbf{m}$  的方向与平面垂直。

- 对于一般的闭合路径  $L$ ，我们可以（对磁偶极距矢量的每一个分量分别）应用斯托克斯定理。取任意边界为  $L$  的曲面  $S$ ， $L = \partial S$ 。于是

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{I}{2} \int_L \epsilon_{ijk} x_j dx_k \\ &= \frac{I}{2} \int_S \epsilon_{lmk} \partial_m \epsilon_{ijk} x_j dS_l \\ &= \frac{I}{2} \int_S dS_l \epsilon_{ljk} \epsilon_{ijk} = I \int_S d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

因此原先平面上的圆环面积被更一般的对面元  $d\mathbf{S}$  代替。这个结果是很容易预期的，因为不管选择什么样的曲面  $S$ ，我们都可以将其分割成大量微小面元。在

无限分割的极限下, 每个面元都可以近似看作是在一个平面上, 并且其边界环绕有电流  $I$ 。

- 我们回到(10.13)中磁偶极距的线积分表达式, 亦即

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \mathbf{x}' \times (I d\mathbf{l}'). \quad (10.16)$$

这种形式的表达式可以直接推广到一般的有限面电流分布 (局限在某个曲面的有限区域  $S$  内)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{x}' \times (\mathbf{K}(\mathbf{x}') |d\mathbf{S}'|) \quad (10.17)$$

以及有限体电流分布 (局限在某个有限区域  $V$  内)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{x}' \times (\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV). \quad (10.18)$$

## 10.2 毕奥-萨伐尔定律

- 运动的电荷能够感受到磁场的作用力, 运动的电荷也能反过来激发磁场。我们首先来研究静磁场, 即不随时间变化的恒定的磁场。为此我们要求整个系统也是不随时间改变的, 于是对于电流密度我们要求其散度处处为零

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0. \quad (10.19)$$

- 注意有限个离散点电荷的运动是不满足这一性质的, 因此不在我们讨论范围内。
- 此种情况下如果我们给电流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  画相应的场线, 我们看到这些场线要么得构成环路, 要么就得延伸到无穷远, 它们不能在有限处截断。
- 恒定电流产生的磁场由**毕奥-萨伐尔定律** (Biot-Savart Law) 给出。以导线中的电流  $I$  为例, 单位线元中的电流在某点  $\mathbf{x}$  处产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I d\mathbf{l}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (10.20)$$

如果是其它类型的电流, 我们只需将其中的  $I d\mathbf{l}$  替换成相应的  $\mathbf{K} |d\mathbf{S}|$  或  $\mathbf{J} dV$  即可。

- 我们看到, 与库伦定律类似, 磁场大小同样也满足平方反比律, 它与电场的主要差别在于它的方向。但是注意这个定律的内涵与库伦定律是不同的: 库伦定律适用于独立的单一点电荷 (即便我们讨论线元、面元、体元时, 它们也可以作为独立存在的电荷), 而应用毕奥-萨伐尔定律的时候我们必须对稳恒电流存在的整个区域积分, 单独的电流元  $I d\mathbf{l}$  是没有意义的。



11.1	静磁场的基本性质 . . . . .	95
11.2	静磁场的矢势 . . . . .	96
11.3	静磁场的多极展开 . . . . .	97

## 11.1 静磁场的基本性质

- 与对静电场的讨论类似，我们考察一下静磁场的微观与宏观性质。
- 首先看静磁场的散度。不失一般性，对于电流源我们考虑任意的体电流分布  $\mathbf{J}$ 。那么利用毕奥-萨伐尔定律，在点  $\mathbf{x}$  处的磁场场强散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \nabla \cdot \left( \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right). \quad (11.1)$$

应用矢量场微分关系

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \epsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\ &= \epsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k + \epsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (11.2)$$

由于  $\nabla$  只作用在  $\mathbf{x}$  上而  $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$  只依赖于  $\mathbf{x}'$ ，因此

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \left( \nabla \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right). \quad (11.3)$$

上式括号里的式子也出现在点电荷的静电场中，那边由静电场作为梯度场的性质我们知道上述旋度为零。因此

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \quad (11.4)$$

静磁场的散度恒为零。

- 相应地，宏观上如果取任意闭合曲面我们对静磁场求通量

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (11.5)$$

这个式子也恒为零。

- 接下来看静磁场的旋度。由矢量微分关系 ( $\mathbf{J}$  不依赖于  $\mathbf{x}$ )

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{V}) &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} J_l V_m) \\ &= (\delta_l \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{jl}) J_l (\partial_j V_m) \\ &= \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{V} \end{aligned} \quad (11.6)$$

我们有

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' (\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}_{I_2}. \quad (11.7)$$

由点电荷电场的散度公式我们知道上式第一项可以化为

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{x}') 4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (11.8)$$

第二项里由于  $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$  关于  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  的交换反对称性, 我们可以把作用在  $\mathbf{x}$  上的梯度算符  $\nabla$  替换成作用在  $\mathbf{x}'$  上的梯度算符  $-\nabla'$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' (\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \partial'_i \left( J_i(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

上式第二项由(10.19)可知为零。第一项可以化为一个边界积分, 得到

$$I_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} (\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}') \quad (11.10)$$

对电流源位置  $\mathbf{x}'$  的积分通常取全空间, 因此边界  $\partial V$  在无穷远处。在上面的积分里,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{S}'$  大体上对应于电流的通量, 亦即相当于区域内电量的增减 (这里不是讨论严格的积分关系, 而是估计物理量的量级), 对于一个有限的系统而言这部分应当是有限的, 最多相当于  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  展开的  $r^0$  阶。而它前面的因子  $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \sim r^{-2}$ 。因此我们看到这一项在边界趋于无穷远的情况下可以忽略不计。综合以上分析, 静磁场的旋度满足

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (11.11)$$

换句话说, 电流密度  $\mathbf{J}$  是静磁场旋度的度量。

- 相应地, 上述旋度关系在宏观上意味着静磁场沿给定面区域边界上的围道积分相当于区域上的电流通量

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (11.12)$$

这是所谓的**安培环量定理**。

## 11.2 静磁场的矢势

- 在上一节中我们了解到静磁场的两个基本微观性质

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0, \quad (11.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (11.14)$$

这里为了使系统的电荷分布不随时间变化体电流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  必须满足

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0. \quad (11.15)$$



- 以上基本性质告诉我们静磁场是一个有旋而无源的场。在前面一般矢量场的描述中我们介绍过, 对于这样的场可以引入矢势的概念, 我们把它记为  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , 它本身也是一种矢量场, 我们可以用它导出磁场场强

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (11.16)$$

由此磁场的散度性质(11.13)自动成立, 而磁场的旋度性质(11.14)则化为方程

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})) \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (11.17)$$

- 我们前面讲过, 任意的矢量场都可以拆分成一个有源无旋部分与一个无源有旋部分的合。由磁场场强与矢势的关系(11.16)我们看到, 矢势  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  的有源无旋部分实际没有任何物理意义 (不会影响磁场场强)。或者换句话说, 我们总是可以给一个矢势  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  施以变换

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}), \quad (11.18)$$

其中  $f(\mathbf{x})$  是任意函数。这样的变换不会改变系统的物理状态 (在静磁问题里亦即磁场  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  的分布), 称为**规范变换** (gauge transformation)。因此我们总是可以舍去有源无旋的部分, 从而令矢势  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  是一个无源有旋的场

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0. \quad (11.19)$$

这个前提下矢势的基本方程(11.17)简化为

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (11.20)$$

我们看到, 与静电场的电势  $\phi(\mathbf{x})$  类似, 上述方程对于矢势的每一个分量都构成一个独立的泊松方程。

- 在给定问题中我们当然可以尝试直接求解上述泊松方程以得到矢势分布。不过对于一般静磁系统来说主要的困难在于矢势的边界条件。
  - 在实际应用中我们往往会依据一些物理上确切可测量的量确定边界条件, 比如经典系统中的边界电场法向场强或电荷密度 (诺伊曼条件)、或边界电势 (狄利希里条件, 注意虽然电势本身没有绝对的物理意义, 但电势差有, 而一旦取定电势参考零点, 电势便是确切可以测量的量)。
  - 静磁系统中情况则更为复杂。在确定边界条件的时候我们往往还是需要回归于对磁场场强  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  的讨论, 但是由(11.16)我们看到  $\mathbf{B}$  的每个分量中都包含  $\mathbf{A}$  的不同分量的贡献, 也就是说虽然微分方程里  $\mathbf{A}$  的不同分量是相互独立的, 但是边界条件依然会把它们混合在一起。所以在许多实际问题中如果真的利用解微分方程的思路求解磁场分布, 那么 we 一般都需要面对一个相互耦合的微分方程系统。

### 11.3 静磁场的多极展开

- 如果在静磁问题中我们所研究的是全空间, 并且系统内的电流分布是局限在一个有限的区域内的, 那么我们可以假设矢势  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  的每一个分量在  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  时都趋近于零。

这种情况下，区别于前面的讨论，我们看到  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  的每一个分量所满足的微分方程以及边界条件都是相互独立的，并且分别与（电荷局域的）静电系统中的对应问题具有等价的结 构。

- 作为回顾，静电系统中电势满足的泊松方程为

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (11.21)$$

在无穷远处取电势参考零点的边界条件下，电势函数的解为

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') dV'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (11.22)$$

- 与静电系统类比，我们于是可以知道在上述条件下静磁场的矢势具有一个简单的类似库伦势的表达式

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (11.23)$$

- 我们甚至可以把上述表达式进一步简化一下。注意到静磁系统中电流密度  $\mathbf{J}$  是一个无源的场（散度处处为零）。在电流分布局限在有限区域内的情况下， $\mathbf{J}$  的场线不能够延伸到无限远，也不能在有限区域内存在任何端点，因此它们只能够在有限区域内构成闭合的回路。我们现在选取任意一根闭合  $\mathbf{J}$  场线，以场线为轴心取某个微小截面  $s$  来构造一个闭合柱体，那么这个柱体可以被近似看作一根一维导线，其中的电流为  $I = |\mathbf{J}|s$ （且在“导线”上处处相等）。任意的有限电流分布均可以被拆解为这样一根根导线的合，于是我们可以把讨论简化到单跟闭合导线（具有恒定电流  $I$ ），上述公式则转为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial S} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (11.24)$$

- 现在我们考虑在  $|\mathbf{x}|$  很大情况下矢势的近似展开。与电势的多极展开类似，这个展开的头几阶为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\partial S} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\partial S} \frac{d\mathbf{l}'(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} + \dots \quad (11.25)$$

- 这个展开里的第一项为**磁单极子**的贡献。不过这里依赖于电流系统的积分纯粹是一个闭合回路的线元积分，满足

$$\int_{\partial S} d\mathbf{l}' = \mathbf{0}. \quad (11.26)$$

因此这一项实际上是消失的。相对应地，我们所考虑的静磁系统中不存在磁单极子（磁单极子是电荷的一个类比，这一点我们从磁场  $\mathbf{B}$  散度为零的性质也可以看出）。

- 我们接下来看展开(11.25)里的第二项。为了理解这一项我们观察一下这里与电流源相关的积分

$$\int_{\partial S} d\mathbf{l}'(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}). \quad (11.27)$$

在上一讲里我们已推导过恒等式（对于任意矢量  $\mathbf{v}$ ）

$$\int_{\partial S} d\mathbf{x}'(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\partial S} (\mathbf{x}' \times d\mathbf{x}') \times \mathbf{v} = \left( \int_S d\mathbf{S}' \right) \times \mathbf{v}. \quad (11.28)$$

注意到  $d\mathbf{l}' \equiv d\mathbf{x}'$ , 我们将上述结果代入矢势展开(11.25)的第二项, 得到

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\int_S d\mathbf{S}') \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad \mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{S}'. \quad (11.29)$$

与静电场多极展开的电偶极项类似, 我们把这一阶贡献称为**磁偶极子**的贡献, 这其中  $\mathbf{m}$  就是上一讲所定义的磁偶极矩。



12.1	电介质	101
12.2	极化矢量	102
12.3	有电介质存在时的静电定律	103
12.4	线性电介质	105
12.5	磁化矢量	106
12.6	有介质存在时的静磁定律	106

## 12.1 电介质

- 之前的讨论中我们接触到了一类重要的物质，导体。导体中的载流子（金属中的电子、电解液中的离子等等）在宏观范围内可以自由迁移，因此在外加电场作用下电荷会发生宏观的重新分布。
- 现在我们讨论另一类重要的物质，绝缘体（或电介质）。这类物质中电荷往往被束缚在原子或分子中，因而在宏观层面上它们不能自由迁移。但是在微观层面上电荷的分布依然可以受外加电场的作用而发生改变。
- 可以想见，如果要系统在微观层面的特征，那么带有电介质的静电问题中电荷的具体分布将是及其复杂的。然而在实际问题中：
  - 精细到微观层面的信息对于处理实际问题没有什么帮助。
  - 对系统的测量总是需要借助特定的探测仪器，而后者总是具有一定尺度的，只能耦合到给定尺度的物理。因此我们真正能测量到的总是探测仪器分辨率尺度上的平均效应。
  - 这涉及到我们看待电磁理论的时候经常容易忽视的一个地方。到目前为止在我们学习电场或磁场的时候，由于场本身在数学上是由连续变化的分布描述的，这容易让人以为物理的场在任意微小尺度上的变化也是连续的。这是一种误解。所谓连续性在物理上是一个相对的概念。任何物理量都伴随着一定的精度。当我们说某个物理量是连续分布的时候，仅仅意味着它在给定精度下的平均值在宏观尺度上是连续变化的。而受制于实验水平的制约我们并不能够了解更小尺度下实际发生了什么。因此哪怕我们在讨论真空中的电磁系统，所讨论的定律也应当被理解为适用于给定精度下的平均效应，它们至少在宏观层面是被实验验证了的。但是如果真的精确到微观的物理过程，现如今我们知道分子或原子层面的物理过程将不得不涉及可观的量子效应，甚至到更微小的尺度上电磁场自身都必须得量子化。这时候所涉及的实验手段都将发生质的变化。这门课所学的经典的电动力学只是处理宏观的电磁场及其相关物理。

综上所述，对电介质的描述同样需要基于平均化的处理。

## 12.2 极化矢量

- 现在我们详细讨论下宏观上如何描述电介质对静电问题的影响。无论电介质在外加电场作用下发生改变的具体微观机制是什么，静电平衡后我们总是可以假设它精细到微观层面具有某个固定的电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$ 。现在所要面对的问题是，如果实验的精度没有那么高，以至于我们需要在  $\rho(\mathbf{x})$  的基础上在更大尺度上取平均，那么电介质对电场的反馈应当如何描述。
- 不失一般性我们可以假定这样的平均是在一个球形区域里做的。首先退一步讨论一个基本的平均问题。考虑一个半径为  $R$  的球形区域，作为我们将要取平均的区域，方便起见我们把坐标原点取成球心。现在在空间某个点  $\mathbf{a}$  处放置一个电荷  $q$ （可以在球内也可以在球外），不失一般性我们令  $\mathbf{a} = (-a, 0, 0)$ 。我们要做出该区域内的平均电场强度  $\mathbf{E}_{\text{平均}}$ （场强对球体的积分再除以球的体积）。由对称性我们知道场强对球体的积分肯定指向第一轴正向，这个量为

$$\begin{aligned} & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dr d\theta d\varphi r^2 \sin\theta \frac{a + r \cos\theta}{(r^2 + a^2 + 2ra \cos\theta)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \int_{-1}^1 dt r^2 \frac{a + rt}{(r^2 + a^2 + 2rat)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{r^2}{a^2} (1 - \text{sgn}(r - a)). \end{aligned} \quad (12.1)$$

其中  $\text{sgn}(x)$  返回变量  $x$  的符号，因此最后一行的被积函数只有在  $r < a$  的区域才不等于零。由此我们可以区分两种情况：

- 若电荷在区域外面  $a > R$ ，那么全区域的积分都有贡献，我们得到

$$\mathbf{E}_{\text{平均}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \hat{\mathbf{e}}_1. \quad (12.2)$$

这个结果相当于该电荷在球心处产生的电场场强。

- 若  $a < R$ ，那么对  $r$  的积分到  $a$  处截止，于是我们得到

$$\mathbf{E}_{\text{平均}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{R^3} \hat{\mathbf{e}}_1. \quad (12.3)$$

上述形式等同于把电荷  $q$  均匀分布在该球形区域内以后半径  $a$  处的电场场强。

- 从上述例子第一种情况我们已经发现，如果电场来自于区域外部电荷，那么区域的平均电场与区域的中心处的电场无异。显然，该结果可以直接拓展到区域外的任意电荷分布，甚至电偶极矩等等。
- 对于第二种情况，我们进一步把它拓展到区域内一般的电荷分布

$$\mathbf{E}_{\text{平均}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad (12.4)$$

这里  $\mathbf{p}$  为区域内总的电偶极矩，所以相应地  $\mathbf{P}$  为电偶极矩在该区域内的平均体密度，也称为**极化矢量**。假定该区域的中心位于点  $\mathbf{x}$ ，在宏观上我们把相应的  $\mathbf{P}$  看作是

点处的电偶极距体密度，写为  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ 。当所考察的球形区域的中心发生了微小变动时，容易看到  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  的值也会发生微小变化，因此极化矢量在宏观上可以描述为一个连续变化的矢量场。

- 我们于是看到，区域内电荷对区域内平均电场的贡献仅仅与其极化矢量（或者总电偶极矩）有关，而与区域内电荷分布的更多细节（四极矩、八极矩等等）无关。因此在宏观上，当有电介质参与到静电学问题中时，我们仅需要知道它的极化矢量分布。
- 与电荷的连续分布类比，在图像上我们可以把极化矢量  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  理解为大量理想电偶极子在空间中的分布。这在微观层面上表现为原子或分子在外加电场作用下的极化（正负电荷中心的相对偏移）。

### 12.3 有电介质存在时的静电定律

- 我们现在考察一下电介质的极化矢量自身对电势函数的贡献。假定电介质处于一定空间区域  $V$ ，那么直接利用理想电偶极子的电势公式

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\mathrm{d}V' \mathbf{P}(\mathbf{x}')) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}V' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \left( \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}V' \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.\end{aligned}\quad (12.5)$$

这个电势拆分成了两块。无论第一项还是第二项，从它们对两点距离的依赖关系我们直接看出能够把它们都看作是某种电荷分布。第一块体积分里，我们把

$$\rho_{\text{束缚}}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (12.6)$$

称作是电介质的体束缚电荷密度。第二块积分里，我们把

$$\sigma_{\text{束缚}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{|\mathrm{d}\mathbf{S}|} \quad (12.7)$$

称作是电介质表面的面束缚电荷密度，这相当于极化矢量的边界上的法向投影。

- 许多问题中，电介质内的束缚电荷的具体信息是并不事先知道的。因此我们把系统内的电荷人为拆分成两部分

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_{\text{束缚}}(\mathbf{x}) + \rho_{\text{自由}}(\mathbf{x}). \quad (12.8)$$

束缚电荷指电介质内由极化而产生的不可自由移动的电荷，而自由电荷指代其它类型的电荷，包括人为指定的，也包括导体内的诱导电荷。

- 有了上述定义后，完整的电场场强  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  满足

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{束缚}}(\mathbf{x}) + \rho_{\text{自由}}(\mathbf{x})) = \frac{1}{\epsilon_0} (-\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \rho_{\text{自由}}(\mathbf{x})). \quad (12.9)$$



稍加处理我们于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho_{\text{自由}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (12.10)$$

这里  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  称为**电位移矢量**。该微分公式在宏观上也有一个高斯型的通量积分公式。在涉及到与通量和电荷间关系的分析时，我们便可以直接使用电位移矢量。

- 对于一些有高度对称性的系统电位移矢量的求解非常类似于真空中电场的求解。
- 虽然电位移矢量具有与真空电场类似的散度公式，这并不说明任何情形下我们都可以用以前的方法分析它。特别是，库伦定律并不能直接适用于  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ ：旋度  $\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x})$  可以是非零的。因此对于电位移矢量来说也不存在一个相应的势函数。
- 在经典问题中我们现在接触到了三种不同的矢量分布， $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  与  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ 。在具体应用时候我们需要注意区分这几种物理量的意义和适用情况。

	存在于	散度	旋度	场线端点
$\mathbf{E}(\mathbf{x})$	全空间	$\rho/\epsilon_0$	0	所有电荷
$\mathbf{P}(\mathbf{x})$	电介质	$-\rho_{\text{束缚}}$		束缚电荷
$\mathbf{D}(\mathbf{x})$	全空间	$\rho_{\text{自由}}$	看情况	自由电荷

尤其，当系统内没有任何自由电荷的时候，电位移矢量是没有任何端点的：它要么延伸到无限远，要么构成环路，而在后一种情况下它的旋度显然不可能为零。

- 为了理解清楚上述性质，我们不妨考察一个简单的系统：一根因某种原因沿轴向均匀极化了的圆柱形电介质棒。因为它是均匀极化的，它的体内不存在任何束缚电荷，而它的所有面束缚电荷均集中在圆柱体两端的横截面上，一端为均匀正电荷，另一端为均匀负电荷。于是：
  - 电场线均起始与带正束缚电荷的一端，终止于带负束缚电荷的一端。
  - 极化矢量线局限于圆柱体内部，起始于带负束缚电荷的一端，终止于带正束缚电荷的一端。
  - 电位移矢量线不存在端点，每一条电位移矢量线均构成一个同时通过圆柱两端面的环路，且在圆柱体外每一点上电位移矢量与电场矢量是同方向的。这说明在该例子中电位移矢量构成一个有旋无源的场。由于电场与极化矢量场在圆柱体内外均是无旋的，我们甚至能够得知电位移矢量的旋度均集中于圆柱体的表面。
- 与导体不同，电介质存在的时候不管是电介质内部还是外部我们都需要面对电场的求解，这种情况下尤其要注意边界上各个量所满足的条件。在边界上我们往往是把一个矢量拆分成法向分量与切向分量区别对待。
  - 首先再回顾一下导体。导体内部电场完全为零，外表面上电场没有切向分量，法向分量正比于导体的面电荷

$$E_{\text{法向}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (12.11)$$



- 如果边界的一侧是电介质、另一侧是真空，那么表面束缚电荷完全由电介质内极化矢量决定

$$\sigma_{\text{束缚}} = P_{\text{电介质}}^{\text{法向}}. \quad (12.12)$$

对于电场来说

$$E_{\text{真空}}^{\text{法向}} - E_{\text{电介质}}^{\text{法向}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_{\text{真空}}^{\text{切向}} - E_{\text{电介质}}^{\text{切向}} = 0. \quad (12.13)$$

由此我们知晓电位移矢量的性质

$$D_{\text{真空}}^{\text{法向}} - D_{\text{电介质}}^{\text{法向}} = \sigma_{\text{自由}}, \quad D_{\text{真空}}^{\text{切向}} - D_{\text{电介质}}^{\text{切向}} = -P_{\text{电介质}}^{\text{切向}}. \quad (12.14)$$

- 如果边界一侧是电介质 A，另一侧是电介质 B，这时我们要注意边界束缚电荷有两部分贡献

$$\sigma_{\text{束缚}} = P_A^{\text{法向}} - P_B^{\text{法向}}. \quad (12.15)$$

其它公式并没有什么变化，除了电位移矢量的切向性质

$$D_A^{\text{切向}} - D_B^{\text{切向}} = P_A^{\text{切向}} - P_B^{\text{切向}}. \quad (12.16)$$

## 12.4 线性电介质

- 极化矢量  $\mathbf{P}$  是电介质对电场的响应。如果把  $\mathbf{P}$  看作是电场  $\mathbf{E}$  的函数  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  那么这个函数往往是高度复杂的。它可以是非线性的， $\mathbf{P}$  的方向也不必与  $\mathbf{E}$  平行。甚至这个函数实际不可能在  $\mathbf{E}$  的完整取值范围内总是有定义，因为无论原子或分子内部形成稳定束缚态的作用力有多强，只要外加的电场足够大，原子或分子最终都是可以被电离的，从而本质上它们不再构成电介质。
- 但另一方面，只要电场相对于原子或分子内部的束缚力足够小，上述依赖关系总是可以近似看作是线性的

$$P_i(\mathbf{x}) = \alpha_{ij} E_j(\mathbf{x}). \quad (12.17)$$

这里没有任何不依赖于  $\mathbf{E}$  的常数项，因为通常电介质自身不会自发产生任何极化。如果电介质在微观上甚至是各向同性的（例如惰性气体），这时极化矢量与电场强度之间的关系则更简单

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (12.18)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (12.19)$$

$\epsilon$  为电介质的**介电常数**，而  $\epsilon_r$  称为**相对介电常数**。注意上述  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  是空间里的总电场，而不是单单自由电荷产生的贡献。

## 12.5 磁化矢量

- 与处理介质中的静电问题类似，我们首先理解一下对一定范围内的磁场进行平均化处理后微观层面的电流分布对静磁系统产生了何种影响。为此依然选择一个球形区域，假定其半径为  $R$ ，球心为坐原点，并且区域内有电流分布  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 。现在考虑区域内部的电流对整个区域的磁场的贡献的平均值

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{1}{V} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' d^3x. \quad (12.20)$$

这里对  $\mathbf{x}$  的积分我们在前面对电场的平均化计算中实际遇到过，具体结果为

$$\frac{1}{V} \int_V \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x = \begin{cases} -\frac{\mathbf{x}'}{R^3}, & |\mathbf{x}'| < R, \\ -\frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3}, & |\mathbf{x}'| > R. \end{cases} \quad (12.21)$$

将  $|\mathbf{x}'| < R$  的结果代入上式，我们于是有

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B} \rangle &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{-\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{x}'}{R^3} d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \equiv \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

这里  $\mathbf{m}$  为区域内电流对应的总磁偶极矩。而  $\mathbf{M}$  为该磁偶极矩对区域的平均，我们可以把它理解为磁偶极矩的体分布密度，称为**磁化矢量**。

- 对于域外电流，由积分公式(12.21)不难看出其对区域磁场贡献的平均等于在区域中心产生的磁场。在处理宏观问题的时候，用以进行平均处理的区域的尺寸是忽略不计的，亦即在数学上取  $R \rightarrow 0$  的极限。这个前提下平均区域的特征尺寸相对于区域间的距离是一个趋近于零的小量，故而在极限下留存的贡献仅仅是多极展开的领头阶。由于我们考虑的电磁问题中不存在磁单极子，于是我们看到域外的微观层面的电流分布依然可以由磁偶极子等效。
- 综上所述，在处理介质的时候，我们在每个点  $\mathbf{x}$  上取微小邻域，将邻域内磁场的平均值重新看作这个点上的磁场  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 。而对于介质本身的属性，我们仅需要知道每个邻域中的平均磁偶极矩，亦即磁化矢量  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 。

## 12.6 有介质存在时的静磁定律

- 基于磁偶极子分布的图像，我们现在考察  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  整体对磁场的影响。前面由多极子展开的讨论我们知道单个理想的磁偶极子周围的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (12.23)$$

因此磁化矢量的贡献为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \left( \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \end{aligned} \quad (12.24)$$

现在依然利用分部积分处理，注意到对任意矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  和标量场  $f(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}
 \left( \int_V \mathbf{v} \times (\nabla f) dV \right) &= \int_V \epsilon_{ijk} v_j \partial_k f dV \\
 &= \int_V \partial_k (\epsilon_{ijk} v_j f) dV - \int_V \epsilon_{ijk} (\partial_k v_j) f dV \\
 &= \int_{\partial V} \epsilon_{ijk} v_j f dS_k + \int_V (\epsilon_{ikj} \partial_k v_j) f dV \\
 &= \left( \int_{\partial V} f \mathbf{v} \times d\mathbf{S} + \int_V f (\nabla \times \mathbf{v}) dV \right)_i.
 \end{aligned} \tag{12.25}$$

应用到上述矢势的表达式得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times d\mathbf{S}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'. \tag{12.26}$$

- 上面式子的两项对距离的依赖都是线性反比的，符合毕奥-萨伐尔公式的结构。与静电问题类似我们可以把这里的两个分子等效看作是束缚的面电流与束缚的体电流

$$\mathbf{K}_{\text{束缚}}(\mathbf{x}) |d\mathbf{S}| = \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times d\mathbf{S}, \tag{12.27}$$

$$\mathbf{J}_{\text{束缚}}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}). \tag{12.28}$$

几点注意事项：

- 面元矢量  $d\mathbf{S}$  的指向总是垂直于区域的表面，因此叉乘  $\mathbf{M} \times d\mathbf{S}$  的指向总是在所考察的点上与区域表面相切，亦即它所指定的电流总是局限在表面上的。这与我们原先定义的面电流密度  $\mathbf{K}$  的概念完全吻合。
- 无论是体束缚电流  $\mathbf{J}_{\text{束缚}}$  还是面束缚电流  $\mathbf{K}_{\text{束缚}}$  都不是通常意义上所说的电流。通常所说的电流是指导体内载流子大规模集群运动所造成的宏观上的电荷迁移现象。对于磁介质而言，我们前面提到它的微观电流是局域在原子或分子层面内的，电荷在宏观上实际并没有任何迁移。之所以会等效观察到束缚电流，是在于微观层面电荷的运动对外加磁场会产生响应，从而微观电流的大小和流向（依赖于所处位置）会发生一定改变。当我们在介质内划定一定区域时，这些微观电流的叠加不一定是恰好抵消的，于是在宏观上这种涨落对磁场的反馈与通常所说的宏观电流等效。
- 至此我们看到对宏观磁介质的两种等价的描述方式。一种是把它等效看作是大量理想磁偶极子在空间里分布，另一种是把它等效看作（宏观）束缚电流的分布。
- 现在进一步考察磁场满足的微分方程。原先在真空里的静磁问题中我们有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{12.29}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{12.30}$$

当我们把介质用束缚电流等效处理时，上述公式依然是适用的，只不过这时候右侧的电流密度  $\mathbf{J}$  需要包含两部分的贡献

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{自由}} + \mathbf{J}_{\text{束缚}}. \tag{12.31}$$

其中  $\mathbf{J}_{\text{自由}}$  指带前面所述的真实存在的宏观电流。借助磁化矢量与体束缚电流间的关系，我们可以将旋度公式改写为

$$\nabla \times \underbrace{\left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)}_{\mathbf{H}} = \mathbf{J}_{\text{自由}}. \quad (12.32)$$

这里我们定义了另一个矢量场  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 。

- 与静电问题中的  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  类似， $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  可以在全空间中定义（在真空中简单令  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ）。对于静磁问题而言，当有介质存在时  $\mathbf{H}$  相比于  $\mathbf{B}$  是更加方便讨论的一个物理量。这是由于介质中的束缚电荷在实验上是不容易直接测量的，而测量宏观电流  $\mathbf{J}_{\text{自由}}$  在我们初次接触电学实验时候就已经经常在做了。因此对于实际问题而言，我们相对更容易直接掌握  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  的信息。不过这里要注意的是， $\mathbf{H}$  的散度不一定为零。
- 对于有介质参与的静磁问题我们现在有两个微分方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{自由}}, \quad (12.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (12.34)$$

如果要具体解出这组方程，我们一般还需要知道  $\mathbf{H}$  与  $\mathbf{B}$  之间（或者  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{B}$  之间）的具体依赖关系。而这取决与实际所考察的介质。

- 当我们知道上述两个微分方程后，我们同样也知道其对应的积分公式。由于第二个方程相比于真空中的静磁系统没有任何改动，因此即便存在介质时候磁场  $\mathbf{B}$  关于任意闭合曲面的通量依然必须恒为零

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (12.35)$$

而另一方面，第一个方程意味着原先的安培环路定理这这里需要改写为关于  $\mathbf{H}$  的一个环路积分公式

$$\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_{\text{自由}} \cdot d\mathbf{S}. \quad (12.36)$$

亦即  $\mathbf{H}$  的任意闭合环路积分必须等于穿过闭合环路的宏观电流通量。

- 由上述积分我们很容易看到相邻两个区域交界面上磁场需要满足的一般边界条件。假定我们用“上”、“下”标记界面两边的区域，且界面法矢量的参考方向为指向“上”区域。

– 由通量公式可知， $\mathbf{B}$  在交界面处的法向分量必须保持连续

$$\mathbf{B}_{\text{上}} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|} = \mathbf{B}_{\text{下}} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|}. \quad (12.37)$$

– 由环量公式可知， $\mathbf{H}$  在交界面处上下表面切向分量的差值（注意这是矢量相减）必须等于界面上该点处的（宏观）自由面电流

$$\frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|} \times \mathbf{H}_{\text{上}} - \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|} \times \mathbf{H}_{\text{下}} = \mathbf{K}_{\text{自由}}. \quad (12.38)$$

# 从静电/磁场到一般电磁场： 一个几何观点

13.1	场作为一种几何体 . . . . .	109
13.2	第一组运动方程 . . . . .	111
13.3	第二组运动方程 . . . . .	113
13.4	磁生电与电生磁 . . . . .	118
13.5	麦克斯韦方程组 . . . . .	120

## 13.1 场作为一种几何体

- 到目前为止在（真空中的）静电学与静磁学问题中我们已经知晓了四条基本性质：
  - 静电场满足

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}, \quad (13.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (13.2)$$

- 静磁场满足

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0, \quad (13.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (13.4)$$

同时，这里涉及的电流分布满足守恒公式

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0. \quad (13.5)$$

我们现在从几何的角度审视一下这些方程。

- 我们曾经介绍过，在三维空间中，一个矢量场的散度可以看作是一个二阶微分形式的外微分（得到一个三阶微分形式），而一个矢量场的旋度可以看作是一个一阶微分形式的外微分（得到一个二阶微分形式）。如果采用此种描述方法，那么例如上述电场的两个方程就化为

$$d(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho dV, \quad (13.6)$$

$$d(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = 0. \quad (13.7)$$

如果我们坚持要用微分形式这种数学结构来刻画物理量，我们首先看到三阶微分形式  $\rho dV$  可以直接解释为微小体积元上的电荷量。因此由(13.6)我们很自然地希望把电场场强描述为某种二阶微分形式  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} \equiv \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad d\mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho dV). \quad (13.8)$$

如此则需要对旋度公式(13.7)里的一阶微分形式  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  做进一步理解。

- 注意到三维空间中一阶微分形式与二阶微分形式的自由度都为 3, 亦即一个矢量即可以出现在一阶微分形式中也可以出现在二阶微分形式中。我们可以在它们之间引入一种对应关系, 即所谓的 **Hodge 对偶** (Hodge dual)。
- 在  $d$  维欧几里得空间  $\mathbb{R}^d$  中, 对于一个  $p$  阶微分形式

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (13.9)$$

(注意这个表达式里有  $p$  重求和, 系数  $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_p}$  关于其所有指标是全反对称的, 最前面的系数  $1/p!$  只是为了消掉求和中重复出现的项。), 其 Hodge 对偶为

$$*\omega = \frac{1}{p!(d-p)!} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_p} \epsilon_{i_1, i_2, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots, i_d} dx_{i_{p+1}} \wedge dx_{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}. \quad (13.10)$$

尽管上述表达式看上去可能很复杂, 但可以看到它的实际作用只不过是把原先每一种  $dx$  的楔积改换成其余集  $dx$  的楔积, 唯一需要留意的是楔积里各个  $dx$  出现的顺序以及前面可能产生的符号 (前面的系数  $1/p!(d-p)!$  依然只是为了抵消抽象求和表达式中的重复项)。

- 具体到三维空间里, 我们于是有

$$\begin{aligned} *\mathcal{E} &= *(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) \\ &= *(E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

由此, 静电场的旋度公式用微分形式书写为

$$d(*\mathcal{E}) = 0. \quad (13.12)$$

- 进一步尝试把这套描述方法推广到静磁场时, 我们会遇到观念上的困难。
- 具体看旋度公式,  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  转换成微分形式为

$$d(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}) = \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.13)$$

等式右边我们看到电流密度  $\mathbf{J}$  以一个二阶的微分形式出现, 即便我们尝试对等式两侧同时取 Hodge 对偶,  $\mathbf{J}$  也只能被理解为一个一阶微分形式。然而无论在洛伦兹力公式还是毕奥-萨伐尔公式里我们都看到  $\mathbf{J}$  是以电流元  $\mathbf{J}dV$  的方式出现的, 因此从物理图像上看它应当如同电荷密度  $\rho$  一样是一个三阶微分形式。

- 事实上, 在我们引入了 Hodge 对偶之后, 无论对于电场还是磁场, 我们都可以分别看作一阶微分形式或者二阶微分形式, 这里面存在很大任意性, 但我们目前没有更多信息可以用来判断哪一种描述方式在物理图像上是更加自然的。
- 更大的问题在于, 物理规律是不应随惯性参考系的变化而变化的, 但是正如绪论中所讨论到的, 通过对不同惯性参考系的简单观察能够确认电场  $\mathbf{E}$  与磁场  $\mathbf{B}$  必须被看作某种完整的物理实体的不同“分量”。但是在三维空间中无论我们上面做出何种选择, 它们只能各自以独立的微分形式的方式出现。

- 基于上述考量，我们有必要对我们的描述方式做出一定更改。对于这个更改有如下一些线索：
  - 空间每一点上电场与磁场放在一起总共有 6 个自由度。假想我们希望用某个单一类别的微分形式来描述它们的整体，那么这类微分形式也必须恰好有 6 个自由度。最简单的可能性是**四维空间里的二阶微分形式**。
    - \* 这种微分形式还有个特别之处在于它的 Hodge 对偶依然是一个二阶微分形式。它可能使得我们不再有上述对场强描述方法的选择上的担忧。
    - \* 作为对比，另外两种拥有 6 个自由度的微分形式为六维空间里的一阶微分形式与五阶微分形式，然而这两种微分形式互为 Hodge 对偶，因此微分形式的选择上依然存在余下的自由度。同时这也会带给我们如何理解额外的三个维度的问题，而在四维中我们只需回答额外的一个维度是什么。
  - 如果电场与磁场确实被看作四维空间里的二阶微分形式，那么在我们的四个微分关系中无论是利用这个二阶微分形式自身还是它的 Hodge 对偶，等式右侧得到的  $\rho$  与  $\mathbf{J}$  都必须以三阶微分形式的方式存在（当然这里我们也需要明确三维中的散度与旋度运算与四维的外微分运算之间的关系）。这是我们所期待的。此外，四维的三阶微分形式有 4 个自由度，正好与  $\rho$  和  $\mathbf{J}$  放在一起的总自由度相等，因此很大可能性这两个物理量在四维中得看作是一个整体。
  - 当我们把  $\rho$  与  $\mathbf{J}$  皆看作三阶微分形式时，有一个额外的问题，在于一般的电荷守恒公式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (13.14)$$

在第一项中我们看到对空间坐标求导的算子  $\nabla$ ，它应当是四维外微分操作的一部分，从而  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  属于四阶微分形式。为了使等式成立， $\partial \rho / \partial t$  也应当属于四阶微分形式，从而  $\partial / \partial t$  也是四维外微分操作的一部分。由此我们看到上述假想的四维空间相对于我们到目前为止一直讨论的三维空间所多出来的一个维度恰好应当被看作是时间维度，因而我们所得到的实际上是**四维时空**！当然，为了真正把它们统一起来，我们需要让  $t$  与  $x$  具有相同的量纲，为此我们得给  $t$  乘以某种具有速度单位的量  $c$  来作为新的坐标参数。

## 13.2 第一组运动方程

- 为了便于讨论，我们给额外的时间坐标也指定长度的量纲，为此令这个参数为

$$x^0 = ct, \quad (13.15)$$

其中  $c$  为我们暂时假定的某个国际单位制中带有速度量纲的常数。此外从现在开始，按照通常的惯例，当我们讨论时空坐标时我们一律使用上指标，于是四维时空中的坐标点写为

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \mathbf{x}) \equiv (x^0, x^i). \quad (13.16)$$

( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) 在使用张量记号时, 同样按照惯例四维指标通常用希腊字母  $\mu, \nu, \dots$  书写, 而表示三维空间分量的张量指标用拉丁字母  $i, j, \dots$  书写。

- 我们对比电场力与磁场力公式

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{F} = q\frac{\mathbf{v}}{c} \times (c\mathbf{B}). \quad (13.17)$$

由于  $\mathbf{v}/c$  是一个无量纲的数字, 我们看到电场  $\mathbf{E}$  与磁场  $c\mathbf{B}$  具有相同的量纲 (因此我们实际希望把它们放在同一个微分形式里)。由此通过高斯定律和安培定律可知

$$\rho, \quad \epsilon_0\mu_0 c \mathbf{J} \quad (13.18)$$

也具有相同的量纲。而另一方面, 从电荷守恒关系又可以看到

$$\rho, \quad \mathbf{J}/c \quad (13.19)$$

具有相同的量纲。由此可知  $(\epsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$  的量纲必须总是与速度的量纲相同 (当然我们亦可以直接从高斯定律和安培定律中判断出  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  两个常数各自的国际单位制量纲来得到这个结论)。于是对于某个无量纲常数  $\alpha$  我们令

$$c = (\epsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}/\alpha. \quad (13.20)$$

- 前面提到我们希望用三阶微分形式描述电荷与电流的分布。四维时空中一般的三阶微分形式为

$$\omega^{(3)} = \omega^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \omega^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \omega^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \omega^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2, \quad (13.21)$$

而它的外微分为

$$d\omega^{(3)} = \left( \frac{\partial\omega^0}{\partial x^0} + \frac{\partial\omega^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\omega^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\omega^3}{\partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (13.22)$$

与电荷守恒公式对比, 不难发现我们现在可以把三维的电荷密度  $\rho$  与电流密度  $\mathbf{J}$  统一成四维里的某种电流密度三阶微分形式  $\mathcal{J}$ , 令 ( $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon_0}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & - \alpha\sqrt{\mu_0}J^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \alpha\sqrt{\mu_0}J^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \alpha\sqrt{\mu_0}J^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \quad (13.23)$$

于是电荷守恒关系在四维时空里意味着  $\mathcal{J}$  的外微分为零

$$d\mathcal{J} = 0. \quad (13.24)$$

- 我们现在回过去看静电场与静磁场的微分性质。我们把四个等式重新拆分为两组。第一组为

$$\nabla \cdot (\sqrt{\epsilon_0} \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon_0}}, \quad (13.25a)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\alpha \mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0}} \right) = \alpha\sqrt{\mu_0} \mathbf{J}. \quad (13.25b)$$



第二组为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.26a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (13.26b)$$

- 我们先观察第一组方程。由于我们已经把  $\rho$  与  $\mathbf{J}$  统一到四维时空的三阶微分形式  $\mathcal{J}$  里, 那么这两个方程应当合并表示为某个二阶微分形式  $\tilde{\mathcal{F}}$  的外微分与  $\mathcal{J}$  之间的等价关系。不失一般性, 假设

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} = & \tilde{F}_{01} dx^0 \wedge dx^1 + \tilde{F}_{02} dx^0 \wedge dx^2 + \tilde{F}_{03} dx^0 \wedge dx^3 \\ & + \tilde{F}_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \tilde{F}_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \tilde{F}_{23} dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (13.27)$$

(这里我们特意对系数使用了下指标, 稍后会进一步说明。) 那么

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathcal{F}} = & \left( \frac{\partial \tilde{F}_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{F}_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{F}_{23}}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & - \left( -\frac{\partial \tilde{F}_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial \tilde{F}_{03}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{F}_{23}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \left( \frac{\partial \tilde{F}_{01}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{F}_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{F}_{13}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ & - \left( -\frac{\partial \tilde{F}_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{F}_{02}}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{F}_{12}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \quad (13.28)$$

令

$$d\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{J}, \quad (13.29)$$

并将该式与(13.23)对比 (将  $\rho$  与  $\mathbf{J}$  代换成电场的散度与磁场的旋度)。从  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  项中我们直接看到

$$\tilde{F}_{12} = \sqrt{\epsilon_0} E^3, \quad \tilde{F}_{13} = -\sqrt{\epsilon_0} E^2, \quad \tilde{F}_{23} = \sqrt{\epsilon_0} E^1. \quad (13.30)$$

在其余三项中, 通过对比对空间分量  $\{x^1, x^2, x^3\}$  的导数我们又可以发现

$$\tilde{F}_{01} = \frac{\alpha B^1}{\sqrt{\mu_0}}, \quad \tilde{F}_{02} = \frac{\alpha B^2}{\sqrt{\mu_0}}, \quad \tilde{F}_{03} = \frac{\alpha B^3}{\sqrt{\mu_0}}. \quad (13.31)$$

然而我们同时也看到这三项中又额外包含了对时间分量的偏导。这意味着在我们预设的用微分形式描述电场与磁场的前提下, 原先的磁场散度公式(13.25b)对于变化的电磁场需要扩展为

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\alpha^2 c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (13.32)$$

### 13.3 第二组运动方程

- 我们紧接着再看第二组方程。这里对电场及磁场的散度与旋度操作互换了, 我们显然不能再直接用  $\tilde{\mathcal{F}}$ 。不过我们可以看一下它的 Hodge 对偶。在此之前我们考察一下更一般的张量概念。

- 首先回顾一下距离的概念。在三维欧氏空间的笛卡尔坐标系中，对于任意微小位移  $d\mathbf{l}$ ，我们知道其对应距离的平方  $ds^2 \equiv |d\mathbf{l}|^2$  为

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \equiv dx^i dx^i. \quad (13.33)$$

其中最后一个式子里我们使用了之前介绍的张量记号。注意这里不是在讨论积分元，因此上述表达式不应理解为微分形式， $dx$  之间的乘积也仅遵循普通乘法而非楔积。这样的表达式对于更加一般的坐标系乃至更加一般的空间不再适用。例如，同样是三维欧氏空间，但如果用正交曲线坐标系的话，那么距离的平方则显然应该写为

$$ds^2 = f_1^2(dt^1)^2 + f_2^2(dt^2)^2 + f_3^2(dt^3)^2 \neq dt^i dt^i. \quad (13.34)$$

由于距离平方总是二次依赖于坐标变动的，因此一般性地我们总是可以将其形式上写成

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}. \quad (13.35)$$

这里的二阶对称张量  $g_{ij}$  称为空间的**度规** (metric)，亦即“度量长度的规则”：它定义了一个空间中任意微小位移的长度。这里的爱因斯坦约定我们特意指定发生在一个上指标和一个下指标之间（稍后会说明原因）。如果我们用  $\|g_{ij}\|$  表示由第一个指标指定行、第二个指标指定列所得到的矩阵，那么对于笛卡尔坐标系来说

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13.36)$$

亦即  $g_{ij} = \delta_{ij}$ ，而对于正交曲线坐标系而言

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3^2 \end{pmatrix}. \quad (13.37)$$

我们可以看到  $g_{ij}$  的元素一般来说可以依赖于坐标点。而更一般地， $g_{ij}$  也可以有非零的非对角元，且它不一定对应于欧氏空间。

- 在空间任意一点的邻域里我们有很大的自由度可以根据需要使用不同的坐标系，上述笛卡尔坐标与其它正交曲线坐标系便是很好的例子。坐标系选择的不同不会改变距离的数值，因为后者是一个纯几何的概念，但是如(13.36)和(13.37)所见它会影像度规的具体形式。如果我们在一个邻域里选取一组新的坐标记做  $y_i$ ，而相应的度规记做  $g'_{ij}$ ，那么根据距离的不变性显然有

$$g_{kl} dx^k dx^l = g_{kl} \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^i} dy^i \right) \left( \frac{\partial x^l}{\partial y^j} dy^j \right) = g'_{ij} dy^i dy^j, \quad (13.38)$$

其中第一个等号将原坐标  $x^i$  看作新坐标  $y^i$  的函数做了微分。由于这个等式对于任意微小位移  $dy^i$  都必须成立，于是从原坐标系到新坐标系度规需要发生变换

$$g_{ij} \mapsto g'_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}. \quad (13.39)$$

我们看到度规  $g_{ij}$  带有两个下指标，在邻域内的坐标变换下两个下指标各自独立变换且变换方式是一致的：皆与  $\partial x/\partial y$  做缩并（相当于做了一个线性变换）。我们把以这种方式变换的指标称为**协变指标** (covariant index)，并且统一将其写为下指标以提示它们的变换方式。相应地，所有指标均为协变指标的张量称为**协变张量** (covariant tensor)，而度规  $g_{ij}$  是一个对称的二阶协变张量。

- 另一方面，我们也经常讨论一个函数的方向导数，亦即它沿某一个指定方向的变化趋势。一个函数的方向导数一般可以写为

$$v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (13.40)$$

当然更为明确起见，我们甚至可以在这个方向上引入一个参数  $t$  并且令  $v^i \equiv \partial x^i / \partial t$ ，但归根到底  $v^i$  无非构成一个矢量。方向导数也是一个不依赖于坐标系的量（ $t$  以及方向的选择可以独立于  $x^i$ ）。如果我们在一个点的邻域里选取一组新的坐标  $y^j$ ，那么通过求导的链式法则，同样的方向导数显然可以写为

$$v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^j}. \quad (13.41)$$

于是我们看到，在邻域的坐标变换下带上指标的张量  $v^i$  的具体变换方式为

$$v^i \mapsto v'^i = v^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}. \quad (13.42)$$

以这种方式变换的指标称为**逆变指标** (contravariant index)。相应地所有指标均为逆变指标的张量称为**逆变张量**。我们通常所说的矢量便属于一阶逆变张量。

- 最一般的张量有可能即带有协变指标也带有逆变指标，它的每个指标在邻域里坐标变换下依照其具体类别分别按照(13.41)和(13.42)发生变换，例如

$$T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_n} \mapsto T_{k_1 k_2 \dots k_m}^{l_1 l_2 \dots l_n} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{k_2}}{\partial y^{i_2}} \dots \frac{\partial x^{k_m}}{\partial y^{i_m}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial y^{j_2}}{\partial x^{l_2}} \dots \frac{\partial y^{j_n}}{\partial x^{l_n}}. \quad (13.43)$$

这里尤其注意变换本身并不会改变指标的前后次序。

- 前面我们看到，在对一般的张量做指标缩并的时候我们总是把一个协变指标与一个逆变指标配对。这是因为两者的变换方式在邻域坐标变换下是恰好抵消的，亦即

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \delta_k^i. \quad (13.44)$$

由此，例如  $u_i v^i$ 、 $g_{ij} w^i x^j$  等等所计算得到的便是不依赖于坐标系的标量。而另一方面，在一般坐标系中诸如  $u_i v_i$  这样的表达式是没有意义的：每当同一个指标在一个表达式中出现两次（因而是一个伪指标）时，它必定一次出现在上面一次出现在下面。

- 前面看到度规  $g_{ij}$  本身是一个二阶对称协变张量，基于它我们也可以定义一个二阶对称逆变张量  $g^{ij}$ ，满足

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \quad (13.45)$$

在矩阵层面两者互为逆矩阵。由此我们可以利用这两个张量通过缩并操作将其它张量的逆变指标改成协变指标或者协变指标改成逆变指标（改动前后的两个张量是不同的张量，因为它们的变换方式不同），例如

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad v^i = g^{ij} v_j, \quad T_i^j = g^{jk} T_{ik} = g_{ik} T^{kj}. \quad (13.46)$$

注意, 由于度规一般是非平庸的, 因此协变张量  $v_i$  与逆变张量  $v^i$  在写出具体分量时一般具有不同的表达式。在课程的前半段我们为简化讨论没有将这两种指标加以区分, 仅仅是因为单看笛卡尔坐标系  $g_{ij}$  是一个单位矩阵。

- 有了上述准备我们可以查看一般坐标系里 Hodge 对偶的定义。对于一个一般的  $p$  阶微分形式(13.9)

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (13.47)$$

它的 Hodge 对偶  $*\omega$  为

$$*\omega = \frac{1}{p!(d-p)!} \sqrt{|g|} \omega_{j_1, j_2, \dots, j_p} g^{j_1 i_1} g^{j_2 i_2} \dots g^{j_p i_p} \epsilon_{i_1, i_2, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots, i_d} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_d}. \quad (13.48)$$

这里  $g^{ij}$  的出现以及相应的指标配对方式仅仅是笛卡尔坐标系中 Hodge 对偶定义式(13.10)扩展到区分逆/协变指标情形的一个自然结果。额外的因子

$$\sqrt{|g|} \equiv \sqrt{|\det(g_{ij})|} \quad (13.49)$$

是为了确保 Hodge 对偶  $*\omega$  的定义与邻域坐标系选择的无关性。

- 现在回到我们所要考察的四维时空, 其中“时间”坐标  $x^0 = ct$ 。由于我们期待它的空间部分恰好能够退化为三维欧氏空间, 因此它的度规张量  $g_{\mu\nu}$  只依赖于空间指标的部分必须为

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (13.50)$$

由于空间本身又是各向同性的, 因此最一般地我们可以把四维时空的度规写成

$$ds^2 = \eta(dx^0)^2 + 2\beta dx^0(dx^1 + dx^2 + dx^3) + \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (13.51)$$

这里有两个未知参数  $\eta$  和  $\beta$  (简单起见我们不考虑它们依赖于坐标点的情形)。首先可以确认的是, 由于我们对坐标  $x^0$  的定义里尚且留有一个待定参数  $\alpha$ , 我们总是可以通过调整这个参数使得  $\eta = \pm 1$ 。因此这里真正需要定下的参数是  $\alpha$  与  $\beta$  以及一个待定的符号。

- 现在我们令

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv F_{01} dx^0 \wedge dx^1 + F_{02} dx^0 \wedge dx^2 + F_{03} dx^0 \wedge dx^3 \\ &\quad + F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{13} dx^1 \wedge dx^3 + F_{23} dx^2 \wedge dx^3 \\ &= *\tilde{\mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (13.52)$$

由(13.48)可得

$$F_{01} = \frac{\sqrt{|\eta - 3\beta^2|}}{\eta - 3\beta^2} \left( \eta \tilde{F}_{23} + \beta(\tilde{F}_{02} - \tilde{F}_{03}) + \beta^2(-\tilde{F}_{12} + \tilde{F}_{13} - \tilde{F}_{23}) \right), \quad (13.53a)$$

$$F_{02} = \frac{\sqrt{|\eta - 3\beta^2|}}{\eta - 3\beta^2} \left( \eta(-\tilde{F}_{13}) + \beta(-\tilde{F}_{01} + \tilde{F}_{03}) + \beta^2(-\tilde{F}_{12} + \tilde{F}_{13} - \tilde{F}_{23}) \right), \quad (13.53b)$$

$$F_{03} = \frac{\sqrt{|\eta - 3\beta^2|}}{\eta - 3\beta^2} \left( \eta \tilde{F}_{12} + \beta(\tilde{F}_{01} - \tilde{F}_{02}) + \beta^2(-\tilde{F}_{12} + \tilde{F}_{13} - \tilde{F}_{23}) \right), \quad (13.53c)$$

$$F_{12} = \frac{\sqrt{|\eta - 3\beta^2|}}{\eta - 3\beta^2} \left( \tilde{F}_{03} + \beta(-\tilde{F}_{13} - \tilde{F}_{23}) \right), \quad (13.53d)$$

$$F_{13} = \frac{\sqrt{|\eta - 3\beta^2|}}{\eta - 3\beta^2} \left( -\tilde{F}_{02} + \beta(\tilde{F}_{12} - \tilde{F}_{23}) \right), \quad (13.53e)$$

$$F_{23} = \frac{\sqrt{|\eta - 3\beta^2|}}{\eta - 3\beta^2} \left( \tilde{F}_{01} + \beta(\tilde{F}_{12} + \tilde{F}_{13}) \right). \quad (13.53f)$$

- 根据前面思路, 我们希望外微分  $d\mathcal{F} = 0$  能够吻合余下的两个方程(13.26) (考虑到具体分量一共是四个方程, 恰好吻合外微分得到的三阶微分形式的四个自由度)。我们首先考察  $d\mathcal{F}$  中唯一不包含对时间求导的项, 亦即  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  的系数

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}|_{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3} &= \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} \\ &\propto \left( \frac{\partial \tilde{F}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{F}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{F}_{03}}{\partial x^3} \right) + \beta \left( \frac{\partial(\tilde{F}_{12} + \tilde{F}_{13})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\tilde{F}_{23} - \tilde{F}_{12})}{\partial x^2} - \frac{\partial(\tilde{F}_{13} + \tilde{F}_{23})}{\partial x^3} \right) \\ &\propto \frac{\alpha}{\sqrt{\mu_0}} \nabla \cdot \mathbf{B} + \beta \sqrt{\epsilon_0} \left( \frac{\partial(E^3 - E^2)}{\partial x^1} + \frac{\partial(E^1 - E^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial(E^2 - E^1)}{\partial x^3} \right). \end{aligned} \quad (13.54)$$

可以看到第一项刚好吻合(13.26a), 而正比于  $\beta$  甚至不能简单由  $\nabla$  和  $\mathbf{E}$  构造出来。这表明我们应当令  $\beta = 0$ 。于是我们所考察的度规退化为

$$ds^2 = \eta(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (13.55)$$

- 至此我们其实可以完全定出我们所考察的四维时空的度规。这是由于如果  $\eta = +1$ , 那么四维时空完全等同于四维欧氏空间, 这意味着时间与空间将没有任何区别! 这显然不符合我们通常的认知 (因为如此我们没有理由能轻易地观察到三维空间中的旋转变换却从来观察不到完整的四维空间中的旋转变换)。因此我们只剩下唯一的选项  $\eta = -1$

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (13.56)$$

该度规所定义的时空称为**闵可夫斯基时空** (Minkowski spacetime, 方便起见也简称闵氏时空)。数学上该时空往往用记号  $\mathbb{M}^4$  或  $\mathbb{R}^{3,1}$  表示。于是在闵氏时空里上述 Hodge 对偶的确切表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = *\tilde{\mathcal{F}} &= \tilde{F}_{23} dx^0 \wedge dx^1 - \tilde{F}_{13} dx^0 \wedge dx^2 + \tilde{F}_{12} dx^0 \wedge dx^3 \\ &\quad - \tilde{F}_{03} dx^1 \wedge dx^2 + \tilde{F}_{02} dx^1 \wedge dx^3 - \tilde{F}_{01} dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (13.57)$$

并且也容易验证

$$*(*\tilde{\mathcal{F}}) = *\mathcal{F} = -\tilde{\mathcal{F}}. \quad (13.58)$$

- 基于以上讨论  $\mathcal{F}$  的外微分为

$$\begin{aligned} d\mathcal{F} &= - \left( \frac{\partial \tilde{F}_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial \tilde{F}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{F}_{01}}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \left( \frac{\partial \tilde{F}_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial \tilde{F}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{F}_{01}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \left( \frac{\partial \tilde{F}_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{F}_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{F}_{02}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad - \left( -\frac{\partial \tilde{F}_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{F}_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{F}_{03}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \frac{\alpha\eta}{\sqrt{\mu_0}} (\nabla \cdot \mathbf{B}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \sqrt{\epsilon_0} \left( -\frac{\partial E^2}{\partial x^3} + \frac{\partial E^3}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial B^1}{\partial t} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \sqrt{\epsilon_0} \left( \frac{\partial E^1}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad - \sqrt{\epsilon_0} \left( -\frac{\partial E^1}{\partial x^2} + \frac{\partial E^2}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial B^3}{\partial t} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \quad (13.59)$$

通过对比各项与第二组方程(13.26)，我们看到如果令  $d\mathcal{F} = 0$ ，那么除了得到磁场的散度公式(13.26a)，电场的旋度公式(13.26b)在随时间有变化的情况下需要扩充为

$$\nabla \times \mathbf{E} + \alpha^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (13.60)$$

- 最后剩下的参数  $\alpha$  我们暂且没有足够的条件将其确定下来，不过上述方程定性上已经说明变化的磁场应当伴随有电场，因此这个参数能够通过相关的实验定出。

## 13.4 磁生电与电生磁

- 我们现在来具体考察下前面讨论所得的带有时间偏导扩展项的两个方程的物理意义。
- 首先查看(13.60)

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (13.61)$$

由于这里的时间偏导项是对磁场的导数，在定性上我们已经能够知道当空间里的磁场分布随时间发生变化时，空间里必定伴随有非零的电场分布（即便不存在电荷），并且这样的电场不再是无旋的场（或者说梯度场）。

- 上述微分公式当然存在对应的积分公式：我们该式两侧对任意选取的固定曲面  $S$  计算通量，并且对左侧第一项进一步应用高斯定理可得

$$\int_{\partial S} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} + \alpha^2 \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (13.62)$$

当然, 由于曲面是固定的, 且积分后所得的通量不再依赖于单个空间坐标 (当然它是曲面构形的泛函), 在这个情况下我们可以进一步把对时间的偏导提到积分之外并更换为全微分

$$\underbrace{\int_{\partial S} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}}_{\mathcal{V}_I} + \alpha^2 \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}}_{\Phi(t)} = 0. \quad (13.63)$$

左侧第一项的意义是在曲面边界的环路上累积的总的电势差, 我们把它称为环路上的**电动势**。更确切地说, 因为它是由磁场变化感应出电场得到的, 因此也称**感生电动势**, 我们把它记为  $\mathcal{V}_I$ 。第二项导数后面的积分则为磁场本身在曲面上的通量。于是这个公式可以表述为环路上的感生电动势正比于穿过环路的磁场通量变化速率的相反数。如果我们在变化的磁场中放置一导体线框, 那么线框环路中的感生电动势就会驱动载流子运动形成电流。

- 实验中在导体线框中形成电流的方式不止上面一种, 另一种常见的方式是利用运动的导体切割磁感线。我们暂且假定磁场是恒定不变的。考虑一段微小长度的导线在磁场中以速度  $\mathbf{v}$  运动, 那么宏观平均上其中的单个载流子 (假定载有电荷  $q$ ) 的运动速度也为  $\mathbf{v}$ , 于是其受力为  $F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , 如果载流子在这个力作用下沿着导线方向移动了距离  $d\mathbf{l}$ , 那么其获得的势能为  $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ , 因此在该小段导线上沿  $d\mathbf{l}$  方向由于运动而产生的电势为  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 。(当然这里的推理做了很大简化, 实际在微观上发生的过程比这复杂很多, 磁场本身实际也不会对一个运动的粒子做功: 它产生的力永远是垂直于粒子运动方向的。) 由于这个效应而在一个环路中形成的驱动电流的势称为**动生电动势**, 我们记做  $\mathcal{V}_M$ 。于是在磁场恒定的情况下我们有

$$\mathcal{V}_M + \int_{\partial S} (\mathbf{B}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{l} \equiv \mathcal{V}_M + \int_{\partial S} (\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \quad (13.64)$$

注意到  $\mathbf{v} \times d\mathbf{l}$  为边界环路上微小线元在单位时间内扫过的微小面积, 且其方向恰好也是相应面元的法方向, 因此整个第二项的被积函数实际等于该微小面元由于运动在单位时间内扫过面积所对应的磁通量。所以上述公式在磁场恒定的情况下亦等价于

$$\mathcal{V}_M + \frac{d}{dt} \Phi(t) = 0. \quad (13.65)$$

- 对比(13.63)与(13.64), 我们看到两个式子除了系数  $\alpha$  的区别外具有完全相同的结构。当然, 它们各自的适用情况不同, 前者适用于变化的磁场和固定的环路, 而后者适用于固定的磁场和变化的环路。扩展到最一般的情形, 如果磁场是可以随时间变化的, 同时环路线框也可以发生运动变形, 那么上述两种效应会同时存在, 相应的总的电动势  $\mathcal{V}$  可以分解为

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_I + \mathcal{V}_M. \quad (13.66)$$

不过值得注意的是, 这里多少贡献来自于感生电动势多少贡献来自于动生电动势是依赖于参考系的。比如在一个参考系中如果线框是固定不动的, 那么所有贡献都属于感生电动势, 但对于一个相对于该参考系匀速运动的参考系而言, 因为线框发生了运动, 所以一般来说在第二个参考系中两种贡献同时存在。于是我们可以期待(13.63)与(13.64)中与磁通量有关的项应当完全等价。由此我们定出最后一个待定参数

$$\alpha = 1. \quad (13.67)$$



而一般情况下总电动势的表达式为

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= -\frac{d}{dt}\Phi(t) \\ &\equiv -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial S} (\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \cdot d\mathbf{l}.\end{aligned}\quad (13.68)$$

- 我们接着看另外一个带时间偏导的运动方程(13.32)

$$\nabla \times \mathbf{B}(t\mathbf{x}) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(t\mathbf{x}). \quad (13.69)$$

人们经常也将该方程换做另外一种形式书写

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mu_0 \left( \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \underbrace{\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{x})}_{\mathbf{J}_d(t, \mathbf{x})} \right). \quad (13.70)$$

这种形式更接近于原先静磁场中的安培定律，只不过右侧除了真实的电流外还存在另外一项，人们将这个额外的等效“电流密度”称为**位移电流** (displacement current)，我们把它记做  $\mathbf{J}_d(t, \mathbf{x})$ 。

- 为了理解位移电流的必要性及其图像，我们可以设想一个理想的情况。假定我们能够一稳定的电流给一个电容器充电，那么乍看上去充电系统周围可以存在磁场。但问题是在电容器内部实际并没有电流从一端流到另外一端，那么这个区域里磁场从何而来？我们知道电容器的充电过程也是电容器内部两极板之间电场建立的过程。随着电容器的充电，极板间的电场也会不断增大，所以这个变化趋势正好对应于位移电流，从而产生非零的磁场。
- 于是上述公式告诉我们，电场的变化与电流是等价的。即便没有真实电流存在，只要空间内电场随时间发生变化，必定伴随有非零的磁场。

## 13.5 麦克斯韦方程组

- 现在回到方程组本身。由于上一节讨论定出了  $\alpha = 1$ ，我们最终完全确定出一组指导一般电磁场演化规律的运动方程，总结如下

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0}, \quad (13.71a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(t, \mathbf{x}), \quad (13.71b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (13.71c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (13.71d)$$

这组方程称为真空中的**麦克斯韦方程组** (Maxwell's equations)。它们是我们讨论电磁场运动的根本出发点。如绪论中已经提到的，这组方程仅讨论电磁场自身的演化，因此在使用这组方程的时候我们并不关心电荷  $\rho$  与电流  $\mathbf{J}$  所关联的物质的动力学演化，而是把它们看作一个已知的输入信息（或者说背景）。



- 相应地, 在我们定义闵氏时空的时候, 坐标  $x^0 = ct$  里涉及的速度参数的具体表达式为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (13.72)$$

在以后的讨论中我们将会看到, 这个参数是真空中电磁波的传播速度, 也是闵氏时空里任何物体运动能够拥有的最大速度。

- 如果时空中不存在任何电荷或电流, 上述麦克斯韦方程组则退化为

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (13.73a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (13.73b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (13.73c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (13.73d)$$

绪论中已经提及, 这种情况下电磁场依然能够具有非平庸的解。这一点以后将做更加深入的分析。这里我们可以很快观察到, 如果我们将电场与磁场做变换

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \mapsto c\mathbf{B}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \mapsto -\frac{1}{c}\mathbf{E}(t, \mathbf{x}). \quad (13.74)$$

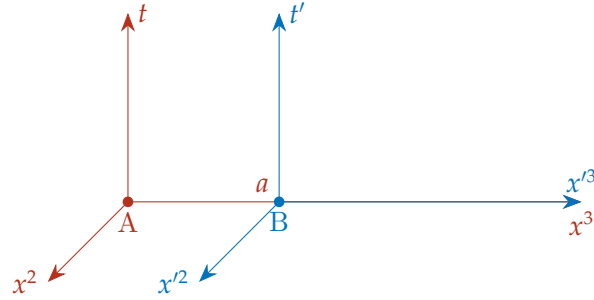
那么这组方程实际上是完全不变的。因为该情况下上述变换是电磁场的一种对称性, 这称为**电磁对偶** (electric-magnetic duality)。这种对偶性质具有深远的意义, 不过对它的讨论超出了这门课程的范围。



14.1	等效原理	123
14.2	洛伦兹变换	128
14.3	闵氏时空里的张量场	133
14.4	能量与动量	138

### 14.1 等效原理

- 在前面的讨论中我们基于几何的观点找到了一组指导电磁场随时间演化的动力学方程。这一节里我们针对该方程组讨论一下物理学中的一个普遍原理，**等效原理** (equivalence principle)。狭义的等效原理指出，指导物理系统演化的物理规律（亦即系统遵循的动力学方程）不应依赖于惯性参考系的选择。该原理确保了任意两个处于惯性运动的实验观测者所观察总结到的物理规律是完全一致的，这是物理学可以作为一门科学而研究并应用的基础。
- 具体到这门课里研究的电磁场，等效原理要求上述方程组在不同的惯性参考系里具有完全相同的形式。
- 为了检验这个原理，我们需要明确两个参考系之间可能的联系。讨论清晰起见我们假设有两个观测者 A 和 B。最初当他们相对静止且位于同一空间点时，他们采用相同的方式以自身为原点构建了一个参考系，以确保两者使用的参考系是相同的，接下来让观测者 B 携带他自身的参考系改换状态。下面我们区分三种典型的情形：
  - 情形一：观测者 B 与观测者 A 依然保持静止，且两者坐标架朝向相同，亦即仅仅让 B 相对于 A 在空间上平移了一段距离。
  - 情形二：观测者 B 与观测者 A 依然位于同一空间点且相对静止，不过 B 的朝向相对于 A 转过了某个角度。
  - 情形三：观测者 B 与观测者 A 保持相同朝向的坐标架，但是令 B 相对于 A 作匀速运动。
- 首先看第一种情形，不失一般性我们可以假定 B 在 A 的参考系看来平移了  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ 。于是两者参考系间的关系如下图（简明起见在图里我们忽略第一个空间维度，红色代表参考系 A，蓝色代表参考系 B）。



我们把参考系 A 中的坐标记做  $(t, x^1, x^2, x^3)$ , 参考系 B 中的坐标记做  $(t', x'^1, x'^2, x'^3)$ , 于是两者间的关系为

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3 - a. \quad (14.1)$$

通过导数的链式法则, 相应的偏导关系为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14.2)$$

当我们考虑两个观测者对于同一个场进行的测量时, 比方说如果是一个标量场, 我们把 A 测量的结果记做  $f(t, x^1, x^2, x^3)$ , B 测量的结果记做  $f'(t', x'^1, x'^2, x'^3)$ . 由于同一个事件点上场拥有唯一的数值 (不依赖于观测者), 因此两种测量结果间的关系为

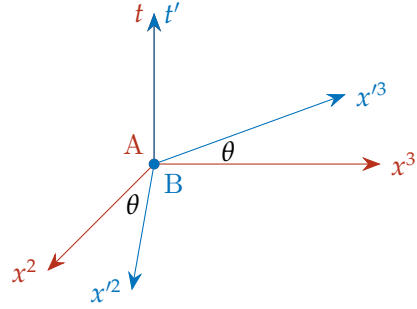
$$f(t, x^1, x^2, x^3) = f'(t', x'^1, x'^2, x'^3) \equiv f'(t, x^1, x^2, x^3 - a). \quad (14.3)$$

电荷密度  $\rho$  的变换便属于这种类型。对于  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{J}$  这样的矢量场而言, 由于两坐标系的坐标架朝向完全一致, 因此我们很直观地能够看到上述变换关系对于它们的每一个分量都必须分别成立。现在我们以电场的散度关系(13.71a)为例, 上述变换关系意味着

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \mathbf{E}(t, x^1, x^2, x^3) - \frac{\rho(t, x^1, x^2, x^3)}{\epsilon_0} \\ &\stackrel{(14.3)}{=} \nabla \cdot \mathbf{E}'(t, x^1, x^2, x^3 - a) - \frac{\rho'(t, x^1, x^2, x^3 - a)}{\epsilon_0} \\ &\stackrel{(14.2)}{=} \nabla' \cdot \mathbf{E}'(t, x^1, x^2, x^3 - a) - \frac{\rho'(t, x^1, x^2, x^3 - a)}{\epsilon_0} \\ &\stackrel{(14.3)}{=} \nabla' \cdot \mathbf{E}'(t', x'^1, x'^2, x'^3) - \frac{\rho'(t', x'^1, x'^2, x'^3)}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

其中第二个等号我们应用了(14.2)。当然, 即便我们事先不知道这个关系, 通过对  $\nabla \cdot \mathbf{E}'(t, x^1, x^2, x^3 - a)$  做具体计算也可以得到相同的结果。这里我们看到参考系 A 里的电场散度公式以完全相同的结构转换成的参考系 B 里的电场散度公式, 这验证了该方程在平移下与等效原理的相容性。用类似的推理我们也很容易检验其它三个麦克斯韦方程, 这里不再赘述。

- 接下来看第二种情形, 不失一般性假设 B 在 A 的参考系看来绕着第一轴正向旋转了某个  $\theta$  角。于是两者参考系间的关系如下图 (图里依然忽略第一个空间维度)。



相应地，两参考系中坐标间的关系为

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2 \cos \theta + x^3 \sin \theta, \quad x'^3 = -x^2 \sin \theta + x^3 \cos \theta. \quad (14.5)$$

同样通过链式法则，两坐标系里偏导数间的关系为（这里我们简写  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ ，以及  $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ ，参考系 B 中的记号类似。）

$$\partial_t = \frac{\partial t'}{\partial t} \partial'_t + \frac{\partial x'^i}{\partial t} \partial'_i = \partial'_t, \quad (14.6a)$$

$$\partial_1 = \frac{\partial t'}{\partial x^1} \partial'_t + \frac{\partial x'^i}{\partial x^1} \partial'_i = \partial'_1, \quad (14.6b)$$

$$\partial_2 = \frac{\partial t'}{\partial x^2} \partial'_t + \frac{\partial x'^i}{\partial x^2} \partial'_i = \cos \theta \partial'_2 - \sin \theta \partial'_3, \quad (14.6c)$$

$$\partial_3 = \frac{\partial t'}{\partial x^3} \partial'_t + \frac{\partial x'^i}{\partial x^3} \partial'_i = \sin \theta \partial'_2 + \cos \theta \partial'_3. \quad (14.6d)$$

- 如果依然考虑一个标量场，那么两参考系里测量结果直接的关系为

$$\begin{aligned} f(t, x^1, x^2, x^3) &= f'(t', x'^1, x'^2, x'^3) \\ &\equiv f'(t, x^1, x^2 \cos \theta + x^3 \sin \theta, -x^2 \sin \theta + x^3 \cos \theta). \end{aligned} \quad (14.7)$$

当我们考虑矢量场的时候，需要额外小心一些。每个事件点上矢量场给出的量是一个矢量，这个矢量本身并不依赖于观测者，但是当观测者自身坐标架的角度发生变化时，它在具体参考系里测量得到的分量是可以不同的。仔细查看 A 与 B 两参考系的关系，我们不难预期

$$E'^1(t', x'_1, x'_2, x'_3) = E^1(t, x_1, x_2, x_3), \quad (14.8a)$$

$$E'^2(t', x'_1, x'_2, x'_3) = E^2(t, x_1, x_2, x_3) \cos \theta + E^3(t, x_1, x_2, x_3) \sin \theta, \quad (14.8b)$$

$$E'^3(t', x'_1, x'_2, x'_3) = -E^2(t, x_1, x_2, x_3) \sin \theta + E^3(t, x_1, x_2, x_3) \cos \theta. \quad (14.8c)$$

- 当然，即便我们暂且不预知上述矢量场之间的变换关系，我们也可以用另外一种方法得到这个结论。假如我们想当然地断定标量场的变换方式能够照搬到矢量场的每一个分量，相应地在 B 参考系中的量记做  $\tilde{E}'_i(t', x'^1, x'^2, x'^3)$ ，满足

$$E^i(t, x^1, x^2, x^3) = \tilde{E}'^i(t', x'^1, x'^2, x'^3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (14.9)$$

现在我们同样查看一下电场的散度公式

$$\begin{aligned}
 0 &= \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) - \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}'(t', \mathbf{x}') - \frac{\rho'(t', \mathbf{x}')}{\epsilon_0} \\
 &= (\partial'_1 \tilde{E}'^1 + (\cos \theta \partial'_2 - \sin \theta \partial'_3) \tilde{E}'^2 + (\sin \theta \partial'_2 + \cos \theta \partial'_3) \tilde{E}'^3) - \frac{\rho'}{\epsilon_0} \\
 &= (\partial'_1 \tilde{E}'^1 + \partial'_2 (\tilde{E}'^2 \cos \theta + \tilde{E}'^3 \sin \theta) + \partial'_3 (-\tilde{E}'^2 \sin \theta + \tilde{E}'^3 \cos \theta)) - \frac{\rho'}{\epsilon_0} \\
 &= (\partial'_1 E^1 + \partial'_2 (E^2 \cos \theta + E^3 \sin \theta) + \partial'_3 (-E^2 \sin \theta + E^3 \cos \theta)) - \frac{\rho'}{\epsilon_0}.
 \end{aligned} \tag{14.10}$$

于是我们看到，为了保持电场散度公式在参考系 B 中具有完全相同的结构，那么我们必须将电场在参考系 B 中真正的分量定义为(14.8)中给出的组合。

- 我们可以将上述讨论做得更一般化。注意到从参考系 A 到参考系 B 的过程中空间坐标发生的变化无非是一个线性变换。我们可以将这个坐标变换以张量的形式写出

$$x'^i = R^i_j x^j, \tag{14.11}$$

其中二阶张量  $R^i_j$  对应的矩阵为

$$||R^i_j|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \tag{14.12}$$

由此标量场的变换(14.7)可以写成

$$f(t, x^i) = f'(t', x'^i) = f'(t, R^i_j x^j) \tag{14.13}$$

而矢量场的变换(14.8)则为

$$E^i(t, x^j) = (R^{-1})^i_k E'^k(t', x'^j) = (R^{-1})^i_k E'^k(t, R^j_l x^l), \tag{14.14}$$

其中的二阶张量  $R^{-1}$  由

$$(R^{-1})^i_j R^j_k = R^i_j (R^{-1})^j_k = \delta^i_k \tag{14.15}$$

定出（当然在矩阵层面这意味着  $||R^i_j||$  与  $||(R^{-1})^i_j||$  互为逆矩阵，因此我们也把  $(R^{-1})^i_j$  称为  $R^i_j$  的逆变换）。

- 变换关系(14.11)、(14.13)以及(14.14)可以以相同的形式直接拓展到（B 参考系相对于 A 参考系的）最一般的空间旋转。注意到同一等时间面上一个空间点与原点的距离是固定的，而另一方面两个观测者度量距离的方式是相同的，或者中两个参考系里空间部分的度规是一致的，皆为

$$g_{ij} = g'_{ij} = \delta_{ij}, \tag{14.16}$$

它们对应的矩阵是单位矩阵。于是我们有距离度量上的等价关系

$$g_{ij} x^i x^j = g'_{kl} x'^k x'^l = g_{kl} R^k_i R^l_j x^i x^j. \tag{14.17}$$

由于这对于任意空间点都成立，因此一般的参考系旋转变换  $R$  须满足

$$g_{ij} = g_{kl} R^k_i R^l_j. \quad (14.18)$$

如果将上式两侧同时与  $g^{mi}$  做缩并，可以得到

$$\delta^m_j = R^m_l R^l_j. \quad (14.19)$$

这意味着一般的旋转操作变换满足

$$(R^{-1})^i_j = R^i_j, \quad (14.20)$$

或者在矩阵层面我们得知旋转变换与其逆变换的对应的矩阵互为转置关系

$$|(R^{-1})^i_j| = |R^i_j| \equiv |R^i_j|^T. \quad (14.21)$$

当然另一方面，这也说明矢量场在参考系旋转下的变换关系(14.14)亦可以写成

$$E^i(t, x^j) = R^i_k E^k(t, R^j_l x^l). \quad (14.22)$$

上述这些关系从前面特殊的例子里都可以明确观察到。

- 基于上述讨论我们现在有足够的工具可以说明麦克斯韦方程组在参考系旋转变换下的不变性。由坐标变换关系(14.11)出发，通过链式法则我们知道偏导运算满足

$$\partial_i = R^j_i \partial'_j. \quad (14.23)$$

于是对于电场的散度公式(13.71a)我们有

$$0 = \partial_i E^i - \frac{\rho}{\epsilon_0} = (R^j_i \partial'_j)(R^i_k E^k) - \frac{\rho'}{\epsilon_0} = \underbrace{(R^j_i R^i_k)}_{\delta^j_k} \partial'_j E^k - \frac{\rho'}{\epsilon_0} = \partial'_i E^i - \frac{\rho'}{\epsilon_0}. \quad (14.24)$$

类似地，由第三个麦克斯韦方程(13.71c)（磁场的散度公式）的不变性可知，磁场在旋转下的变换方式与电场是一致的（当然这也是  $\mathbf{B}$  作为三维空间的矢量场我们本来就期待的）

$$B^i(t, x^j) = R^i_k B^k(t, R^j_l x^l). \quad (14.25)$$

接下来查看第四个麦克斯韦方程(13.71d)，我们有

$$\begin{aligned} 0^i &= \epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_t B^i \\ &= \epsilon^{ijk} g_{kl} \partial_j E^l + \partial_t B^i \\ &= \epsilon^{ijk} g_{kl} R^m_j \partial'_m (R^l_n E^n) + R^i_n \partial_t B^n \\ &= \epsilon^{ijk} R^m_j \partial'_m (R^n_k E^n) + R^i_n \partial_t B^n \\ &= (\epsilon^{ijk} R^m_j R^n_k) \partial'_m E'_n + R^i_n \partial_t B^n. \end{aligned} \quad (14.26)$$

这个表达式本身尚没有完全化成  $B$  参考系中对等的麦克斯韦方程。不过不难发现，只要我们将等式两边分别与  $R^o_i$  做缩并，并且用到(14.19)以及之前一次作业我们得到的有关 Levi-Civita 符号的恒等关系

$$\epsilon^{ijk} R^o_i R^m_j R^n_k = \epsilon^{omn}, \quad (14.27)$$

上述表达式直接化为

$$0^0 = \epsilon^{0mn} \partial'_m E'_n + \partial_t B'^0, \quad (14.28)$$

于是我们验证了第四个麦克斯韦方程的不变性。

- 通过类似的讨论我们同样可以检验最后剩下的第二个麦克斯韦方程(13.71b)的不变性，并且印证电流密度矢量确实按照矢量场的变换方式变换

$$J^i(t, x^j) = R_k^i J'^k(t, R_l^j x'^l). \quad (14.29)$$

至此我们可以确认完整的麦克斯韦方程组在参考系旋转变换下是保持不变的，等效原理在这种情形下也相应得到了满足。

## 14.2 洛伦兹变换

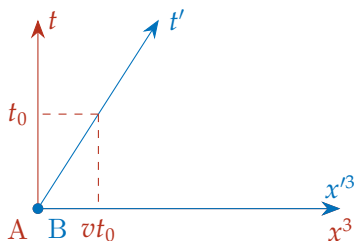
- 现在我们着重讨论第三种情形。不是一般性我们假定在观测者 A 看来 B 以速度  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$  做匀速运动，并且假定在时刻  $t = t' = 0$  时两个观测者位于同一个时空事件点。
- 按照牛顿经典力学的观点，上述联系的两个参考系之间满足**伽利略变换** (Galilean transformation)

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3 - vt. \quad (14.30)$$

于是由链式法则两参考系中导数之间的关系为

$$\partial_t = \partial'_t - v \partial'_{x^3}, \quad \partial_i = \partial'_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14.31)$$

伽利略变换下两参考系之间关系的图像如下（图中忽略相对平庸的第一和第二方向）。



- 考虑在两个参考系中分别测量同一个场时，对于标量场显然有

$$f(t, x^1, x^2, x^3) = f'(t', x'^1, x'^2, x'^3) \equiv f'(t, x^1, x^2, x^3 - vt). \quad (14.32)$$

对于矢量场，从上述关系图上乍看起来并不需要对空间矢量的各个分量（类似与第二种情形那样）做任何线性变换，因为这里空间方向的坐标架并没有发生什么变化。这一点也与上述伽利略变换的偏导关系(14.30)中空间偏导的直接等价相容。于是我们期待矢量场的各个分量直接满足

$$E^i(t, x^1, x^2, x^3) = E'^i(t', x'^1, x'^2, x'^3) \equiv E'^i(t, x^1, x^2, x^3 - vt), \quad (14.33)$$

类似的变换也适用于  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{J}$ 。



- 在上述考虑下麦克斯韦方程组中两个散度公式(13.71a)和(13.71c)显然是保持不变的, 这里不再赘述。我们着重看下磁场的旋度公式(13.71b), 代入上述变换关系后它的各个分量具体为

$$\partial'_2 B'^3 - \partial'_3 (B'^2 - v c^{-2} E'^1) - c^{-2} \partial'_t E'^1 = \mu_0 J'^1, \quad (14.34a)$$

$$\partial'_3 (B'^1 + v c^{-2} E'^2) - \partial'_1 B'^3 - c^{-2} \partial'_t E'^2 = \mu_0 J'^2, \quad (14.34b)$$

$$\partial'_1 B'^2 - \partial'_2 B'^1 - c^{-2} (\partial'_t - v \partial'_3) E'^3 = \mu_0 J'^3. \quad (14.34c)$$

我们看到这些分量表达式并不能像我们预期的那样各自直接变为  $B$  参考系中对应的麦克斯韦方程。观察上述表达式我们很有可能期待需要考虑对矢量场做一些进一步的线性变换以在  $B$  参考系中重新定义它们, 特别是  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  之间可能需要发生某种混合 (前两个式子里有同样的偏导作用在它们上面)。不过这里我们也会遇到几方面问题:

- 如果  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  能够发生混合, 那么同属于矢量场的  $\mathbf{J}$  没有理由不需要与其它某种矢量场发生混合, 然而这里我们没有任何额外的量可以用。
- $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  的混合会破坏(13.71a)和(13.71c)两个散度公式的不变性。
- 这里其实不难看出, 我们事实上根本没有办法让完整的麦克斯韦方程组在伽利略变换下保持不变。因此该方程组是没法与牛顿经典力学框架下的等效原理相容的。这是狭义相对论提出之前人们曾经面对的非常严重的困扰。
- 于是我们有必要对两参考系坐标之间的关系做适当更改。首先两组坐标之间的关系最好还是线性的, 否则它们之间的关系一般没法在整个时空中定义。其次, 由于  $B$  相对于  $A$  的运动只发生在第三方向, 简单起见我们可以假设第一和第二方向像伽利略变换里一样不发生任何变化。于是最一般的假设为

$$t' = \alpha t + \beta x^3, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = \gamma t + \delta x^3. \quad (14.35)$$

其中  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  为四个待定参数。我们接下来通过要求麦克斯韦方程组满足等效原理来尝试解出这些参数。如果最终发现不存在任何解, 那我们再进一步考虑是否需要把我们的某些假设放宽。

- 从上述坐标间的关系出发我们首先很容易得知偏导之间的关系

$$\partial_t = \alpha \partial'_t + \gamma \partial'_3, \quad \partial_1 = \partial'_1, \quad \partial_2 = \partial'_2, \quad \partial_3 = \beta \partial'_t + \delta \partial'_3. \quad (14.36)$$

由于我们现在并不清楚应该如何看待我们所面对的各种场 (如果暂且不去仔细思考前面关于微分形式的讨论的话), 我们暂且放弃直接从几何图像找出它们应当满足的变换关系, 转而看麦克斯韦方程组是否足以告诉我们什么。于是像(14.9)中的处理一样, 我们暂且只简单假设  $A$  参考系中每个场的每个具体分量  $f$  在  $B$  参考系中都有一个直接对应的量  $\tilde{f}'$

$$f(t, x^1, x^2, x^3) = \tilde{f}'(t', x'^1, x'^2, x'^3). \quad (14.37)$$

- 将上述关系代入麦克斯韦方程组。第一个方程(13.71a)化为

$$\partial'_1 \tilde{E}'^1 + \partial'_2 \tilde{E}'^2 + (\beta \partial'_t + \delta \partial'_3) \tilde{E}'^3 = \frac{\tilde{\rho}'}{\epsilon_0}. \quad (14.38)$$

第二个方程的各个分量分别化为

$$\partial_2 \tilde{B}^3 - (\beta \partial_t' + \delta \partial_3') \tilde{B}^2 - c^{-2}(\alpha \partial_t' + \gamma \partial_3') \tilde{E}^1 = \mu_0 \tilde{J}^1, \quad (14.39a)$$

$$(\beta \partial_t' + \delta \partial_3') \tilde{B}^1 - \partial_1 \tilde{B}^3 - c^{-2}(\alpha \partial_t' + \gamma \partial_3') \tilde{E}^2 = \mu_0 \tilde{J}^2, \quad (14.39b)$$

$$\partial_1 \tilde{B}^2 - \partial_2 \tilde{B}^1 - c^{-2}(\alpha \partial_t' + \gamma \partial_3') \tilde{E}^3 = \mu_0 \tilde{J}^3. \quad (14.39c)$$

前两个分量方程可进一步按照偏导数改写为

$$\underbrace{\partial_2' \tilde{B}^3}_{B^3} - \underbrace{\partial_3' (\delta \tilde{B}^2 + c^{-2} \gamma \tilde{E}^1)}_{B^2} - \underbrace{c^{-2} \partial_t' (c^2 \beta \tilde{B}^2 + \alpha \tilde{E}^1)}_{E^1} = \mu_0 \underbrace{\tilde{J}^1}_{J^1}, \quad (14.40a)$$

$$\underbrace{\partial_3' (\delta \tilde{B}^1 - c^{-2} \gamma \tilde{E}^2)}_{B^1} - \underbrace{\partial_1' \tilde{B}^3}_{B^3} - \underbrace{c^{-2} \partial_t' (\alpha \tilde{E}^2 - c^2 \beta \tilde{B}^1)}_{E^2} = \mu_0 \underbrace{\tilde{J}^2}_{J^2}. \quad (14.40b)$$

现在可以观察到(14.40a)与(14.40b)在偏导结构上已经能够吻合上 B 参考系中第二个麦克斯韦方程的第一和第二分量的形式。由此我们可以指定

$$B^1 = \delta \tilde{B}^1 - c^{-2} \gamma \tilde{E}^2, \quad (14.41a)$$

$$B^2 = \delta \tilde{B}^2 + c^{-2} \gamma \tilde{E}^1, \quad (14.41b)$$

$$B^3 = \tilde{B}^3, \quad (14.41c)$$

$$E^1 = \alpha \tilde{E}^1 + c^2 \beta \tilde{B}^2, \quad (14.41d)$$

$$E^2 = \alpha \tilde{E}^2 - c^2 \beta \tilde{B}^1, \quad (14.41e)$$

$$J^i = \tilde{J}^i, \quad i = 1, 2. \quad (14.41f)$$

- 剩下的两个方程(14.38)和(14.39c)并不能够直接吻合上 B 参考系中预期对应的方程。具体的区别在于,一方面方程(14.38)相比正常的电场散度公式多出了时间偏导项,而另一方面方程(14.39c)相比正常的磁场旋度公式的第三分量多出了第三空间方向的偏导项。不过可以注意到在这两个方程中无论是  $\partial_t'$  还是  $\partial_3'$  皆作用在  $\tilde{E}^3$  上。因此我们能够取它们的线性组合以消除其中的任何一项,具体为

$$\underbrace{\partial_1' (\alpha \tilde{E}^1 + c^2 \beta \tilde{B}^2)}_{E^1} + \underbrace{\partial_2' (\alpha \tilde{E}^2 - c^2 \beta \tilde{B}^1)}_{E^2} + (\alpha \delta - \beta \gamma) \underbrace{\partial_3' \tilde{E}^3}_{E^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{(\alpha \tilde{\rho}' + \beta \tilde{J}^3)}_{\rho'}, \quad (14.42a)$$

$$\underbrace{\partial_1' (\delta \tilde{B}^2 + c^{-2} \gamma \tilde{E}^1)}_{B^2} - \underbrace{\partial_2' (\delta \tilde{B}^1 - c^{-2} \gamma \tilde{E}^2)}_{B^1} - \frac{(\alpha \delta - \beta \gamma)}{c^2} \underbrace{\partial_t' \tilde{E}^3}_{E^3} = \mu_0 \underbrace{(\delta \tilde{J}^3 + \gamma \tilde{\rho}')}_{J^3}. \quad (14.42b)$$

非常有趣的是,如果我们要求这两个新方程与 B 参考系中的麦克斯韦方程吻合,那么所定义出的  $E^1$ 、 $E^2$ 、 $B^1$  以及  $B^2$  的表达式皆恰好与前面定出的完全一致。此外,这个条件又进一步帮助我们定出

$$E^3 = \tilde{E}^3, \quad (14.43a)$$

$$J^3 = \delta \tilde{J}^3 + \gamma \tilde{\rho}', \quad (14.43b)$$

$$\rho' = \alpha \tilde{\rho}' + \beta \tilde{J}^3. \quad (14.43c)$$

于此同时, 关于一开始设置的四个待定参数还有一个约束条件

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (14.44)$$

- 继续对剩余的两个麦克斯韦方程(13.71c)和(13.71d)做类似分析, 得到

$$\partial'_1 \tilde{B}'^1 + \partial'_2 \tilde{B}'^2 + (\beta\partial'_t + \delta\partial'_3) \tilde{B}'^3 = 0, \quad (14.45a)$$

$$\partial'_2 \underbrace{\tilde{E}'^3}_{E'^3} - \partial'_3 \underbrace{(\delta\tilde{E}'^2 - \gamma\tilde{B}'^1)}_{E'^2} + \partial'_t \underbrace{(\alpha\tilde{B}'^1 - \beta\tilde{E}'^2)}_{B'^1} = 0, \quad (14.45b)$$

$$\partial'_3 \underbrace{(\delta\tilde{E}'^1 + \gamma\tilde{B}'^2)}_{E'^1} - \partial'_1 \underbrace{\tilde{E}'^3}_{E'^3} + \partial'_t \underbrace{(\alpha\tilde{B}'^2 + \beta\tilde{E}'^1)}_{B'^2} = 0, \quad (14.45c)$$

$$\partial'_1 \tilde{E}'^2 - \partial'_2 \tilde{E}'^1 + (\alpha\partial'_t + \gamma\partial'_3) \tilde{B}'^3 = 0. \quad (14.45d)$$

其中第一个第四个方程可以进一步重新线性组合为 (进一步利用约束条件(14.44))

$$\partial'_1 \underbrace{(\alpha\tilde{B}'^1 - \beta\tilde{E}'^2)}_{B'^1} + \partial'_2 \underbrace{(\alpha\tilde{B}'^2 + \beta\tilde{E}'^1)}_{B'^2} + \partial'_3 \underbrace{\tilde{B}'^3}_{B'^3} = 0, \quad (14.46a)$$

$$\partial'_1 \underbrace{(\delta\tilde{E}'^2 - \gamma\tilde{B}'^1)}_{E'^2} - \partial'_2 \underbrace{(\delta\tilde{E}'^1 + \gamma\tilde{B}'^2)}_{E'^1} + \partial'_t \underbrace{\tilde{B}'^3}_{B'^3} = 0. \quad (14.46b)$$

由此我们得到四条新出现的条件

$$E'^1 = \delta\tilde{E}'^1 + \gamma\tilde{B}'^2, \quad (14.47a)$$

$$E'^2 = \delta\tilde{E}'^2 - \gamma\tilde{B}'^1, \quad (14.47b)$$

$$B'^1 = \alpha\tilde{B}'^1 - \beta\tilde{E}'^2, \quad (14.47c)$$

$$B'^2 = \alpha\tilde{B}'^2 + \beta\tilde{E}'^1. \quad (14.47d)$$

- 由于(14.47)必须与(14.41)一致, 通过对比我们可以发现待定参数又必须满足

$$\alpha = \delta, \quad \gamma = c^2\beta. \quad (14.48)$$

联立(14.44)与(14.48)可解得

$$\alpha = \delta = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}}, \quad \beta = \frac{\gamma}{c^2}. \quad (14.49)$$

(另外一个解  $\alpha = -\sqrt{1 + c^{-2}\gamma^2}$  可以直接排除掉, 因为我们自然希望  $\gamma = 0$  时整个变换能够退化为两参考系完全相同的情况。)

- 于是在考虑进完整的麦克斯韦方程组在目前所讨论的参考系变换下的不变性后, 我们假设的坐标变换最终余下一个自由的参数  $\gamma$ 。我们甚至可以将这个变换的形式写得更好看一些。令

$$\gamma = -c \sinh w, \quad (14.50)$$

于是坐标变换相应为

$$t' = \cosh w t - \frac{1}{c} \sinh w x^3, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = -c \sinh w t + \cosh w x^3. \quad (14.51)$$

或者换用之前定义的  $x^0 = ct$  及其相应的  $x'^0$ , 则有

$$x'^0 = \cosh w x^0 - \sinh w x^3, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = -\sinh w x^0 + \cosh w x^3. \quad (14.52)$$

这种变换称为**洛伦兹变换** (Lorentz transformation)。因为我们暂且尚未考虑进该变换与  $v$  之间的关系, 我们可以预期参数  $w$  的意义大体与  $v$  相当。这个参数称为**快度** (rapidity)。为了理解这个概念的好处, 我们将  $(x^0, x^3)$  的变换看作是一个矩阵变换

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ -\sinh w & \cosh w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (14.53)$$

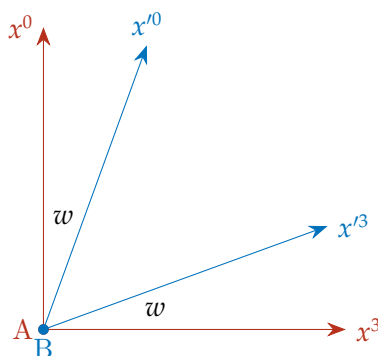
现在考虑由  $w_1$  和  $w_2$  定义的先后两次同类型参考系变换, 所得的结果应当属于同样的变换, 其具体计算结果为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cosh w_2 & -\sinh w_2 \\ -\sinh w_2 & \cosh w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh w_1 & -\sinh w_1 \\ -\sinh w_1 & \cosh w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(w_1 + w_2) & -\sinh(w_1 + w_2) \\ -\sinh(w_1 + w_2) & \cosh(w_1 + w_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14.54)$$

可见复合后的洛伦兹变换的快度恰好是原先两个快度之和。这种结构可以与上节第二种情形中绕同一轴先后两次所做的旋转变换类比。例如如果我们考虑观测者 B 绕 A 参考系的第一空间轴先转  $\theta_1$  角, 再以其所在参考系为基准继续转  $\theta_2$  角 (实际也相当于在 A 参考系内继续转动), 那么坐标  $(x^2, x^3)$  的变换结果为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14.55)$$

因此快度其实也类似于某种“角度”, 只不过这种“角度”描述的是四维时空中某一时间-空间平面上的“旋转”, 且这种“旋转”是双曲型的。坐标变换(14.53)相应的图像如下。



- 我们余下的任务是弄清楚快度与我们原先相对熟悉的速度之间的关系。为此我们可以先考察 A 参考系中的任意沿第三轴方向的速度  $\mathbf{u} = (0, 0, u^3)$  在 B 参考系中对应

的  $\mathbf{u}'$  是什么。考虑某个质点在 A 参考系中从  $t$  时刻的所在的  $(x^1, x^2, x^3)$  位置经过微小时间段  $dt$  运动到了  $t + dt$  时刻所在的  $(x^1, x^2, x^3 + u^3 dt)$  位置。通过上述洛伦兹变换我们可以写出这两个事件点在 B 参考系中的对应坐标, 于是得到

$$u'^3 = \frac{(x'^3 + dx'^3) - x'^3}{(t' + dt') - t'} = \frac{-c \sinh w + \cosh w u^3}{\cosh w - c^{-1} \sinh w u^3}. \quad (14.56)$$

如果该质点恰好与观测者 B 重合, 那么在 A 参考系中它具有  $u^3 = v$ , 而在 B 参考系中它是完全静止的, 亦即  $u'^3 = 0$ 。于是我们得知

$$v = c \tanh w. \quad (14.57)$$

因为  $|\tanh w| \leq 1$ , 于是我们得知在现在我们所考虑的时空里存在一个最大速度  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ 。由上述速度变换关系又可以得知这个速度  $c$  在任何惯性参考系中都是不变的。这一点对于我们所要考虑的物理具有深远的意义, 在以后会进一步展开讨论。

- 如果我们将快度代换回速度, 那么上述洛伦兹变换的形式为

$$t' = \frac{t - vx^3/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = \frac{x^3 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (14.58)$$

- 在上述结论里如果我们考虑  $v/c \rightarrow 0$  的极限, 在该极限下将变换关系展开到  $v/c$  的线性阶, 可以得到

$$t' = t - \frac{v}{c} \frac{x^3}{c} + \mathcal{O}(v^2), \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3 - vt + \mathcal{O}(v^2). \quad (14.59)$$

由于  $c$  的数值是一个很大的量, 在我们日常讨论的牛顿力学问题都适合在这样的极限下讨论, 且上述时间变换部分的第二项往往会被进一步忽略。在这个前提下洛伦兹变换(14.58)完好地退化到牛顿力学中的伽利略变换(14.30)。于是我们看到伽利略变换与洛伦兹变换并没有本质的冲突: 前者是后者在 (与  $c$  相比) 低速运动下的退化情况。因此电动力学的建立迫使我们重新思考时空本身的性质。

### 14.3 闵氏时空里的张量场

- 上一节中我们初步探寻了两个惯性参考系相对做匀速运动时它们坐标间的变换关系。在这个讨论里我们的出发点是 (用三维矢量的形式写出的) 麦克斯韦方程组满足等效原理这一基本要求。其所得的洛伦兹变换显示在相应的参考系坐标变换下时间与空间会互相发生混合, 而不存在所谓的绝对的时间概念。这意味着我们不得不把时间与空间看作一个整体。当然, 这个观点在我们一开始尝试从几何角度考察电磁学方程时就已经预见到了, 并且在相应的讨论中初步观察到这个四维时空是闵可夫斯基

基时空，其度规为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad ||g_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14.60)$$

(注意我们之前约定四维指标  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ )。接下来我们详细讨论一下洛伦兹变换与闵氏时空之间的关系。

- 我们回过来用张量的方式书写时空坐标，亦即  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ 。于是洛伦兹变换对应到一个二阶张量  $L^\mu{}_\nu$ ，满足

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (14.61)$$

在上一节里讨论的特殊情况下，这个二阶张量相关的矩阵为

$$||L^\mu{}_\nu|| = \begin{pmatrix} \cosh w & 0 & 0 & -\sinh w \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh w & 0 & 0 & \cosh w \end{pmatrix}. \quad (14.62)$$

不难检验，这样的变换也保持了闵氏时空的度规不变

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^\rho{}_\mu L^\sigma{}_\nu. \quad (14.63)$$

- 这一点可以与前面对空间旋转的讨论对比。那边我们看到任意旋转变换会保持三维欧氏空间的度规不变(14.18)。事实上，同样的旋转完全也可以一并放在四维闵氏时空里描述。我们旋转下左边的变换关系为  $x'^\mu = R^\mu{}_\nu x^\nu$ ，于是(14.12)里的例子可以书写为

$$||R^\mu{}_\nu|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (14.64)$$

显然，因为空间部分的旋转操作完全不会影响时间，因此这样的变换同样会保持闵氏时空的度规不变（在上面例子里当然可以具体验证）

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} R^\rho{}_\mu R^\sigma{}_\nu. \quad (14.65)$$

- 我们看到在四维时空的观点下洛伦兹变换与旋转变换其实没有非常本质的区别，其区别仅仅在于变换所发生的子平面到底是否包含时间方向还是只包含空间方向。而两者的本质共性在于，它们都会保持闵氏时空的度规不变，或者说它们是闵氏时空自身拥有的对称性。满足这种性质的变换在数学上称为**等距变换** (isometry)，亦即“保持距离的度量方式不变”。

- 于是最一般地，我们可以考虑任意保持坐标原点不变的等距变换  $\Lambda^\mu_\nu$ ，满足

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \equiv g'_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu. \quad (14.66)$$

在狭义相对论的研究中所有满足上述条件的变换往往广义地称为**洛伦兹变换**，而前面讨论的第三种情形里所谓的洛伦兹变换则又专门称为**加速变换** (boost)。当我们在文献中遇到“洛伦兹变换”这个术语是，需要注意到底是前面狭义的概念还是这里广义的概念。由于度规是一个对称张量，因此等距变换的限制条件给出了 10 个独立的约束方程，这意味着一般的  $\Lambda^\mu_\nu$  变换里包含了 6 个独立可调的参数。基于前面的讨论，我们不难理解其中 3 个自由度对应于空间中 3 个绕不同轴向的独立旋转，而另外 3 个自由度则对应于 3 个沿不同独立方向上的加速。

- 洛伦兹变换的张量在定义上具有一个逆变指标与一个协变指标（当心各指标的位置），不过我们也可以利用闵氏时空的度规改变张量指标的属性从而定义其它相关的变换张量（它们各自对应的矩阵是不同的，同学们可自行检验）

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} L^\rho_\nu, \quad \Lambda^{\mu\nu} = g^{\nu\rho} \Lambda^\mu_\rho, \quad \Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} g^{\nu\rho} \Lambda^\rho_\sigma. \quad (14.67)$$

特别注意，通过与旋转变换中类似的讨论，我们可知

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu, \quad (14.68)$$

具体证明这里不再赘述。

- 有了变换关系(14.66)后，我们不难得知偏导关系满足

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu. \quad (14.69)$$

各种场在一般洛伦兹变换下的变化方式与前面讨论旋转时候的情况非常相似。不过因为一个指标写成协变指标或者逆变指标的时候具体分量的表达式是有可能不同的（例如  $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$  而  $x_\mu = (-ct, \mathbf{x})$ ），因此在考察变换的时候我们需要注意区分两种情况。

- 标量场的变换方式为

$$f'(x') = f(x). \quad (14.70)$$

- 当我们在四维时空里讨论矢量场时，它在每个时空事件点上给出的值是一个类似于坐标  $x^\mu$  一样的四维矢量。对于一个矢量场，取决于它的张量指标是逆变的还是协变的，我们分别有

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x), \quad (14.71a)$$

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \equiv (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu(x). \quad (14.71b)$$

两个表达式之间显然也是可以通过度规相互转化的。

- 如果是一个二阶张量，那么取决于指标类型我们分别有

$$T'^\mu{}_\nu(x') = \Lambda^\mu_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma T^\rho{}_\sigma(x). \quad (14.72a)$$

$$T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}(x), \quad (14.72b)$$

$$T'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma T_{\rho\sigma}(x). \quad (14.72c)$$

$$T'^{\nu}{}_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\nu_\sigma T^\sigma{}_\rho(x). \quad (14.72d)$$

– 最一般地，对于任意张量，它的每一个指标根据类型都以同样的方式变动

$$T'^{\mu\cdots\mu\cdots}_{\nu\cdots\nu\cdots} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda_\nu^\sigma T^{\rho\cdots\rho\cdots}_{\sigma\cdots\sigma\cdots}. \quad (14.73)$$

当我们将任意一对逆变指标与协变指标做缩并时，由于上述指标变换方式，容易看出缩并操作在洛伦兹变换下是不变的。特别地，如果所有指标都缩并完了，那么所得到的的是一个洛伦兹不变的标量。例如最简单的例子

$$u'^\mu v'_\mu = (\Lambda^\mu_\rho u^\rho)(\Lambda_\mu^\sigma v_\sigma) = (\Lambda^\mu_\rho \Lambda_\mu^\sigma) u^\rho v_\sigma = \delta^\sigma_\rho u^\rho v_\sigma = u^\mu v_\mu. \quad (14.74)$$

• 现在回到上一节讨论的具体例子。其中电荷密度与电流密度的变换为

$$\{\rho', J^1, J^2, J^3\} = \left\{ \cosh w \rho - \frac{1}{c} \sinh w J^3, J^1, J^2, -c \sinh w \rho + \cosh w J^3 \right\}. \quad (14.75)$$

于是电荷密度与电流密度可以组成一个逆变矢量（这里我们额外约定一个整体的缩放）

$$J^\mu = \left( \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon_0}}, \sqrt{\mu_0} J^1, \sqrt{\mu_0} J^2, \sqrt{\mu_0} J^3 \right), \quad (14.76)$$

它们的变换与上述讨论的矢量变换相一致

$$J'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu J^\nu(x). \quad (14.77)$$

我们把这个四维矢量称为**四电流**。利用这种表述方法，电荷守恒关系可以简单地写为

$$\partial_\mu J^\mu(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu(x) = 0. \quad (14.78)$$

由于这里四维洛伦兹指标的缩并，由上面讨论这个方程的洛伦兹变换（包括加速和旋转）不变性是显然的。四电流与之前讨论的电流所关联的三阶微分形式之间的关系则为

$$\mathcal{J} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^\mu dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (14.79)$$

• 在同一个例子里，电场与磁场的变换为

$$E'^1 = \cosh w E^1 - c \sinh w B^2, \quad (14.80a)$$

$$E'^2 = \cosh w E^2 + c \sinh w B^1, \quad (14.80b)$$

$$E'^3 = E^3, \quad (14.80c)$$

$$B'^1 = \frac{1}{c} \sinh w E^2 + \cosh w B^1, \quad (14.80d)$$

$$B'^2 = -\frac{1}{c} \sinh w E^1 + \cosh w B^2, \quad (14.80e)$$

$$B'^3 = B^3. \quad (14.80f)$$

之前我们说过电场与磁场可以自然地组成一个二阶微分形式

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (14.81)$$



并且由前面的讨论我们知道这其中的二阶张量的具体形式为

$$||F_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\epsilon_0}E^1 & \sqrt{\epsilon_0}E^2 & \sqrt{\epsilon_0}E^3 \\ -\sqrt{\epsilon_0}E^1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}B^3 & \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}B^2 \\ -\sqrt{\epsilon_0}E^2 & \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}B^1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}B^1 \\ -\sqrt{\epsilon_0}E^3 & -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}B^2 & \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.82)$$

作为一个二阶协变张量, 我们预期它所遵循的变换方式为

$$F'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma}(x), \quad (14.83)$$

或者由矩阵的形式表述则为

$$\begin{aligned} ||F'_{\mu\nu}|| &= (||\Lambda^{\rho}_{\mu}||^{-1})^T ||F_{\rho\sigma}|| ||\Lambda^{\sigma}_{\nu}||^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh w & 0 & 0 & \sinh w \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh w & 0 & 0 & \cosh w \end{pmatrix} ||F_{\rho\sigma}|| \begin{pmatrix} \cosh w & 0 & 0 & \sinh w \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh w & 0 & 0 & \cosh w \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14.84)$$

通过简单的计算不难验证这个表达式与变换(14.80)完全一致。由此我们确认了电磁场在四维闵氏时空中可以用上述**反对称的二阶协变张量**(14.82)描述。

- 在前面的讨论中我们看到微分形式将麦克斯韦方程组表述为两个方程

$$d\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{J}, \quad (14.85a)$$

$$d\mathcal{F} = 0, \quad (14.85b)$$

其中  $\mathcal{F} = *\tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}} = -*\mathcal{F}$ 。其中第二个表达式转化成张量书写为

$$d\mathcal{F} = (dx^{\mu}\partial_{\mu}) \wedge \left( \frac{1}{2} F_{\nu\rho} dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} \right) = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} F_{\nu\rho}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} = 0. \quad (14.86)$$

因为楔积中的  $dx$  相互之间是全反对称的, 因此这意味着 (对于所有分量都是零的张量, 简便起见我们不明确把它的指标写出来)

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0, \quad (14.87)$$

其中指标上的 “[ ]” 指代对方括号里的指标做反对称化。基于  $F_{\mu\nu}$  自身的反对称性, 这个表达式可以简化为

$$\partial_{\mu} F_{\nu\rho} + \partial_{\nu} F_{\rho\mu} + \partial_{\rho} F_{\mu\nu} = 0. \quad (14.88)$$

这个等式也称为**比安奇恒等式** (Bianchi identity)。当然, 该方程的另外一种等价的写法为

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\nu} F_{\rho\sigma} = 0. \quad (14.89)$$

由于在四维里对于任意洛伦兹变换我们同样有

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} \Lambda_{\rho'}^{\rho} \Lambda_{\sigma'}^{\sigma} \quad (14.90)$$

(14.89)直接反映出对应的两个麦克斯韦方程是洛伦兹不变的。

- 对于第一个方程(14.85a)，由类似的分析我们直接知道它等价于

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\tilde{F}_{\rho\sigma}=J^\mu. \quad (14.91)$$

而另一方面

$$\tilde{F}_{\rho\sigma}=-\frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\omega\rho\sigma}F^{\lambda\omega}, \quad F^{\mu\nu}=g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}. \quad (14.92)$$

将此代入上述方程并进一步化简可得

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}=J^\mu. \quad (14.93)$$

因为该方程里纯粹只涉及洛伦兹指标的缩并，因此它显然也是洛伦兹不变的。此外，由于  $F^{\mu\nu}$  的反对称性，该方程也直接显示出电流得是守恒的， $\partial_\mu J^\mu=0$ 。

- 综上所述，除了通常熟悉的三维矢量的方式或者我们最开始讲的微分形式的方式外，利用四维张量麦克斯韦方程组可以等价地写为

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}=J^\mu, \quad (14.94a)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}=0. \quad (14.94b)$$

无论是微分形式的方法还是张量的方法都能够直接反映出，麦克斯韦方程组作为指导电磁场演化的物理规律，它是不依赖于具体的实验观测者或者说具体的惯性参考系的。

## 14.4 能量与动量

- 接下来我们探讨电磁场自身所携带的能量与动量。在以前的学习中我们了解过能量守恒定律与动量守恒定律分别都是经典力学中的普遍原理，它们能够帮助我们方便地探讨许多力学现象。不出意外这两个定律应当也适用于有电磁场存在的系统中。电磁场之所以需要自身带有能量与动量，一个直接的反映在于它能够对带电物质施加作用力

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \quad (14.95)$$

当一个作用力施加在一个运动的质点上时，它会对质点产生功与冲量，从而改变质点的动能与动量。然而这个功与冲量不可能是凭空产生的，它们只能来自于电磁场自身的能量与动量损失。我们希望一般性地了解电磁场的能量和动量与电磁场构形之间的关系。

- 首先我们考察能量。这部分讨论我们分别从两个角度入手。一个角度是利用四维张量猜想电磁场能量的形式。另一个角度是从上述洛伦兹力做功出发推导电磁场的能量密度。
- 先看第一个角度。在前面静电场的分析中我们已经得知，当一个参考系中只观察到静电场存在时，电磁场的能量密度为

$$\mathcal{E}(\mathbf{x})=\frac{\epsilon_0}{2}|\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2. \quad (14.96)$$

考虑到电磁理论在不同惯性参考系中的等价性, 在上一节的分析中我们看到相关的物理量最好属于某个四维张量, 或者是能够通过已知的张量通过缩并构造。能量密度  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  也不例外。当然我们暂且不太能够确定它到底是自身应当看作一个标量场还是某个张量场的一个分量。但是至少我们现在知道电场本身作为分量出现在电磁张量  $F_{\mu\nu}$ , 而上式说明无论什么情形能量密度得二次依赖于  $F_{\mu\nu}$ 。

- 当磁场为零时

$$||F_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\epsilon_0}E^1 & \sqrt{\epsilon_0}E^2 & \sqrt{\epsilon_0}E^3 \\ -\sqrt{\epsilon_0}E^1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\epsilon_0}E^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\epsilon_0}E^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.97)$$

不难计算出

$$||F^{\mu\rho}F_{\rho\nu}|| = \begin{pmatrix} \epsilon_0|\mathbf{E}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0(E^1)^2 & \epsilon_0E^1E^2 & \epsilon_0E^1E^3 \\ 0 & \epsilon_0E^1E^2 & \epsilon_0(E^2)^2 & \epsilon_0E^2E^3 \\ 0 & \epsilon_0E^1E^3 & \epsilon_0E^2E^3 & \epsilon_0(E^3)^2 \end{pmatrix}, \quad (14.98)$$

而

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\epsilon_0|\mathbf{E}|^2. \quad (14.99)$$

因此一般情况下能量密度  $\mathcal{E}(x)$  会是  $F^{0\rho}F_{\rho 0}$  与  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  的某种线性组合。

- 我们现在检查一下上述结构是否有可能满足能量守恒。为了理解能量守恒预期以什么样的方程描述, 我们首先回想一下电荷守恒公式, 其四维的微分表述形式为

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (14.100)$$

宏观上这意味着如果我们取任意的四维区域  $R$ , 并且在其边界  $\partial R$  上计算“通量”  $J^\mu dV_\mu$  的积分, 所得的结果为零

$$\int_{\partial R} J^\mu dV_\mu = \int_R d(J^\mu dV_\mu) = \int_R (\partial_\mu J^\mu) dR = 0, \quad (14.101)$$

这里

$$dV_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma, \quad (14.102)$$

其具体分量为

$$(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3, -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2), \quad (14.103)$$

而四维“体积元”  $dR = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ 。特别地, 如果我们把  $R$  选择为介于先后两个等时间面之间的区域, 那么  $\partial R$  由这两个等时间面和空间无穷远的部分组成。一方面正常情况下我们认为电流不会当真流出空间无穷远, 因此相应的边界积分为零。而另一方面每个等时间面都是一个完整的空间 (于是相应的积分元就是  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ), 因此每个等时间面上算得的都是对应时刻整个空间里的总电荷量。于是该情况下上述表达式告诉我们全空间里的总电荷量是守恒的。当然上述表达式

本身则是非常一般化地描述任何四维子区域上的电荷守恒关系。而通常我们对空间部分积分所得到的宏观的电荷守恒公式

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (14.104)$$

则是上述四维的守恒公式(14.101)对时间求导之后得到的瞬时守恒公式。

- 当我们把能量守恒与电荷守恒做类比的时候, 我们看到需要引入所谓**能流密度**的概念, 亦即单位时间通过单位截面有多少能量流过。并且可以预期能流密度与能量密度刚好能够像电流密度与电荷密度那样组成一个一阶张量。如果暂且假设对于一般的电磁场  $\mathcal{E} = F^{0\rho} F_{\rho 0}$  (暂且忽略整体的系数), 那么这个一阶张量的比较自然的取法为

$$F^{\mu\rho} F_{\rho 0}. \quad (14.105)$$

为了研究电磁场自身的能量守恒我们需要在所考察的区域内假设  $J^\mu = 0$ , 因为一旦有电荷或电流存在的话它们不可避免对电磁场产生影响从而引发电磁场与其它系统之间的能量交换。在这个前提下, 能量守恒性质类比(14.101)即为研究如下微分

$$\begin{aligned} \partial_\mu (F^{\mu\rho} F_{\rho 0}) &= \underbrace{(\partial_\mu F^{\mu\rho})}_{J^\rho=0} F_{\rho 0} + F^{\mu\rho} (\partial_\mu F_{\rho 0}) \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\rho} (\partial_\mu F_{\rho 0} + \partial_\rho F_{0\mu}) \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\rho} (\partial_0 F_{\mu\rho}) \\ &= -\frac{1}{4} \partial_0 (F^{\mu\rho} F_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (14.106)$$

其中第二个等号把一部分伪指标改写了一下, 第三个等号对括号里的表达式使用了 Bianchi 恒等式。从最后的结果我们看到一般来说这个微分不是零, 因此上述特殊组合不是能量和能流的合适的定义。不过对上述等式稍加改动我们可得

$$\partial_\mu \left( F^{\mu\rho} F_{\rho 0} + \frac{1}{4} \delta_0^\mu F^{\mu\rho} F_{\mu\rho} \right) = 0. \quad (14.107)$$

进一步利用纯粹静电场中能量密度的表达式定出整体的系数, 我们于是可以定义所谓的**应力张量** (stress tensor)

$$T^\mu{}_\nu = F^{\mu\rho} F_{\rho\nu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (14.108)$$

该张量满足守恒关系

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0. \quad (14.109)$$

其中能量守恒对应于  $\nu = 0$  的情况。一般电磁场在任意一点上的能量密度为上述二阶张量的 00 分量, 具体为

$$\mathcal{E} = T^0{}_0 = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2. \quad (14.110)$$

- 简单观察一下应力张量的结构, 由电磁张量的反对称性不难发现它是无迹的

$$T^\mu{}_\mu = F^{\mu\rho} F_{\rho\mu} + F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0. \quad (14.111)$$

而把它的协变指标提升成为逆变指标所得的二阶逆变张量

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (14.112)$$

则又是一个对称张量。由于该张量是由电磁张量直接通过缩并构造出来的，应力张量在洛伦兹变换下的变换方式遵循其指标的类型

$$T'^{\mu}_{\nu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} T^{\rho}_{\sigma}(x). \quad (14.113)$$

- 前面提到能量密度伴随有能流密度，在三维里类似于电流密度我们把它记做  $\mathcal{S}$ ，这个量也称为**坡印廷矢量** (Poynting vector)。依照上述讨论，它与应力张量间的关系为（这里按惯例我们给它的定义额外乘上一个  $c$ ）

$$\mathcal{S}^i = c T^i_0 = \frac{1}{\mu_0} (\epsilon_{ijk} E^j B^k). \quad (14.114)$$

或者用更为熟悉的三维矢量书写亦即

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (14.115)$$

如此，能量守恒关系  $\partial_{\mu} T^{\mu}_0 = 0$  等价于

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{S} = 0. \quad (14.116)$$

- 由坡印廷矢量的定义我们看到，在任意一点上它的方向总是正比于电场  $\mathbf{E}$  与磁场  $\mathbf{B}$  所张成的平面。即便在不随时间演化的静电与静磁系统中，只要电场与磁场同时存在，电磁场内部同样存在能量的流动，只不过这种流动恰好保持空间各个点的邻域内电磁场所携带的能量稳定不变。在这样的系统中  $\nabla \cdot \mathcal{S} = 0$ ，因此坡印廷矢量作为一种矢量场其场线要么是闭合的，要么延伸到无穷远。
- 接下来我们从第二个角度查看一下电磁场的能量。这个角度的出发点是洛伦兹力公式(14.95)。如果我们所考虑的物质是连续分布的，相应地存在连续的电荷分布  $\rho$  与电流分布  $\mathbf{J}$ ，那么一个点邻域内的受力  $d\mathbf{F}$  为

$$d\mathbf{F} = (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV. \quad (14.117)$$

该点处物质的运动速度  $\mathbf{v}$  与其对应电流  $\mathbf{J}$  的方向是平行的，因此电磁力对这部分物质的做功的功率为

$$\mathcal{P} dV \equiv d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dV = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV. \quad (14.118)$$

这个功率对应于该区域内电磁场能量减少的速率。

- 我们希望用与电磁场自身相关的物理量刻画上述速率，因此用麦克斯韦方程将电流  $\mathbf{J}$  替换掉。我们考虑将这个功率对任意空间区域  $V$  做体积分，于是有（因为现在我们

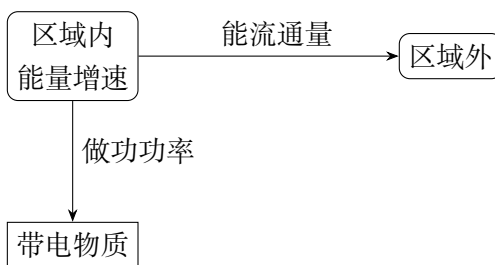
纯粹在三维空间里计算，所以此处涉及的张量符号回到我们最早的简化约定)

$$\begin{aligned}
 \int_V dV \mathcal{P} &= \int_V dV \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \left( \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \epsilon_{ijk} E_i (\partial_j B_k) - \int_V dV \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \partial_j (\epsilon_{ijk} E_i B_k) - \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \epsilon_{ijk} (\partial_j E_i) B_k - \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \left( \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) \\
 &= - \int_{\partial V} \underbrace{\left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right)}_{\mathcal{S}} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \mathbf{B} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{-\partial \mathbf{B} / \partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \left( \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) \\
 &= - \int_{\partial V} \mathcal{S} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \underbrace{\left( \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right)}_{\mathcal{E}}.
 \end{aligned} \tag{14.119}$$

至此我们发现该功率可以完全由我们之前找到的能量密度与能流密度表示出来。它们之间的关系可以写成

$$\int_V dV \left( \mathcal{P} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) + \int_{\partial V} \mathcal{S} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{14.120}$$

这个方程的物理意义是明确的：区域内电磁场自身能量的减少（一个体积分）等于区域内电磁场对物质的做功（另一个体积分）加上透过区域边界流出的能量（一个面积分）。



当然，如果所考察的区域内没有额外的带电物质，那么  $\mathcal{P} = 0$ ，上述方程也就退化为第一个角度所讨论的电磁场自身的能量守恒方程。

- 讨论完能量我们接下来讨论动量。由于我们尚未涉足有关电磁场自身运动的具体问题，我们目前没有足有的基础直接讨论电磁场的动量是什么。不过类比前面第二个角度，我们可以利用电磁场与带电物质之间的作用来间接分析电磁场的动量。这是由于如果动量守恒定律适用于电磁场与带电物质构成的完整系统，那么物质通过电磁作用所获得的动量（或者说电磁力产生的冲量）理应等于电磁场自身损失的动量。
- 如果我们把某点处单位体积内带电物质所获得冲量的速率记为  $\mathcal{I}$ ，那么显然

$$\mathcal{I} dV = d\mathbf{F} = (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV. \tag{14.121}$$

我们同样希望将电荷与电流用电磁场自身的属性替换掉, 于是应用麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_i &= \rho E_i + \epsilon_{ijk} J_j B_k \\
 &= \epsilon_0 E_i (\partial_j E_j) + \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jlm} \partial_l B_m - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t E_j) B_k \\
 &= \epsilon_0 E_i (\partial_j E_j) + \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} (\partial_l B_m) B_k - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathcal{S}_i + \epsilon_0 \epsilon_{ijk} E_j \underbrace{(\partial_l B_k)}_{-\epsilon_{klm} \partial_l E_m} \\
 &= -\epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathcal{S}_i + \epsilon_0 E_i (\partial_j E_j) - \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \left( \epsilon_0 E_j (\partial_l E_m) - \frac{1}{\mu_0} B_j (\partial_l B_m) \right) \\
 &= -\epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathcal{S}_i + \epsilon_0 E_i (\partial_j E_j) - \epsilon_0 E_j (\partial_i E_j) + \epsilon_0 E_j (\partial_j E_i) + \frac{1}{\mu_0} B_j (\partial_i B_j) - \frac{1}{\mu_0} \underbrace{B_j (\partial_j B_i)}_{\partial_j (B_j B_i)} \\
 &= -\frac{1}{c^2} \partial_t \underbrace{\mathcal{S}_i}_{-c T^0_i} + \partial_j \underbrace{\left( \epsilon_0 \left( E_j E_i - \frac{1}{2} \delta_{ji} E_k E_k \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( B_j B_i - \frac{1}{2} \delta_{ji} B_k B_k \right) \right)}_{F_{ji}}.
 \end{aligned} \tag{14.122}$$

我们看到最后的结果同样都可以用应力张量的分量表示出来。其中最后一项是个散度, 因此在对任意体区域做积分的时候都可以通过高斯定理转化成边界积分。由此第一项应当与区域内电磁场自身的动量增减有关, 而第二项应当与透过区域边界交换的动量有关。

- 结合上述讨论, 我们可以得出结论, 一般电磁场在一个点处的动量密度  $\mathcal{P}$  正比于同一点上的坡印廷矢量 (能流密度)

$$\mathcal{P} = \frac{1}{c^2} \mathcal{S}. \tag{14.123}$$

而当区域内不存在带电物质时, 不存在电磁场动量的流失, 因此上述方程退化为电磁场自身的动量守恒方程

$$\partial_\mu T^\mu_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14.124}$$

这个方程正是我们之前独立证明过的 (只不过它与能量守恒方程属于同一个四维张量方程的不同分量), 至此我们明确了它的物理意义。相应地, 我们也确切看到电磁场的应力张量实际包含了有关电磁场能量和动量的分布与交换的完整信息!

- 在上述讨论里细心的同学也会留意到一个有别于牛顿经典力学中我们所熟知的结论。在牛顿力学中物质的动能是与其动量呈二次相关的。然而在上面的讨论里我们看到同一个坡印廷矢量即作为动量密度出现又作为能流密度出现, 这意味着对于电磁场而言其能量与动量大体是呈线性相关的。此外, 由于应力张量在惯性参考系变换下其各个分量之间可以发生混合, 我们也能看到虽然在同一个参考系下一个系统的能量具有守恒性, 但是其总量并没有绝对的意义。有关能量与动量之间的一般关系我们后续将在介绍狭义相对论的时候进一步探讨。





15.1	动力学变量与规范不变性 . . . . .	145
15.2	真空中电磁场的波动方程 . . . . .	148
15.3	平面波 . . . . .	149

- 这一讲里我们在最简单的情形下讨论电磁场的运动。我们假设所考察的时空区域内仅存在电磁场而不存在额外的物质。该条件下麦克斯韦方程组退化为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (15.1a)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (15.1b)$$

- 在该情形下我们需要了解的一大类现象是**电磁波** (electromagnetic wave)。电磁波是电磁场可以作为一种物质独立于通常所说的带电物质而存在的一大特征，在历史上电磁波的发现也为麦克斯韦方程组的确立提供了直接的实验证明。电磁波也是电磁场在时空里传递能量与动量的方式。在现代的生产生活中它当然也构成了无线通信、无线输电甚至动力传输的基础。因此我们有必要专门了解一下电磁场的这类运动形式。
- 作为麦克斯韦方程组的解，一系列电磁波的具体构形当然会依赖于我们给时空区域设置的一些边界条件与初始条件。在这一讲里我们暂且抛开这个复杂性，仅讨论麦克斯韦方程组在任意时空邻域内的通解。

## 15.1 动力学变量与规范不变性

- 在切入具体问题之前，我们先简要讨论下什么是用以研究电磁场运动的合适的动力学变量。我们以往相对熟悉的动力学变量，例如对于一个不受限制的质点来说，无非就是它的坐标  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 。这组坐标之所以对于质点来说是好的动力学变量，在于：
  - 在任意时刻的等时间面上它们的值决定了质点系统在该时刻的构形。并且这些变量是相互独立且可以自由取值的。
  - 加上它们各自关于时间的一阶导数（亦即速度）的信息，这些变量完全确定了系统在给定时刻的运动状态。这个初始的运动状态通过系统的运动方程可以预言未来任意时刻上系统的运动状态。
  - 系统的运动方程关于这些变量是一个对时间的二阶微分方程。

当然笛卡尔坐标对于单个质点来说不是唯一可以选择的动力学变量。在理论力学的课程中我们知道这种概念最一般地可以推广为所谓的广义坐标：任何相互独立的并

且可以用以表征系统构形的物理量理论上都可以作为系统的动力学变量来使用。但无论我们选择什么样的广义坐标，它们都具有上述特征。

- 如果以上述标准思考我们到目前为止用以直接描述电磁场的场强分布  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  与  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ 。它们当然决定了电磁场在给定时刻  $t$  上的构形，毕竟这些是我们在实验上能够直接测量的。麦克斯韦方程组直接看来是有关时间的一阶方程，因此在给定时刻上知道电场与磁场的构形后我们应该足以预测电磁场在未来的演化。不过这样的演化规律与我们通常在经典牛顿力学中遇到的情况似乎不太一样。事实上如果从之前静电或静磁问题中的边界条件类比的话，电场与磁场场强其实更类似于某种“速度”的概念：在狄利希里条件中我们指定的是势的构形，而场强的构形是作为势的一阶导数在诺依曼条件中指定的。此外，在上一讲中我们看到电磁场的能量直接正比于场强的平方，而不是类似于经典力学中我们经常看到的坐标关于时间导数的平方。
- 基于上述考量，直接在场强的层面讨论电磁场的演化未尝不可，不过这样的做法不适于让我们在一个更加统一的力学框架下把电磁场作为一种物质来研究。在一般的运动分析中其相应带来的不便在于， $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  在任意给定时刻上不是可以完全自由指定的。哪怕单单看  $\mathbf{B}$  的散度方程，这里不包含对时间的导数，但是它已经说明  $\mathbf{B}$  在给定时刻任意空间点上的值不是可以任意选取的。因此如果以  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  作为动力学变量来分析电磁场，一方面它们包含了过多的信息，另一方面这些信息又受到了很强的约束。
- 于是现在的问题在于什么样的量才适合用作电磁场的动力学变量。为此我们首先观察其中一半的麦克斯韦方程（Bianchi 恒等式）

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d\mathcal{F} = 0. \quad (15.2)$$

回想在静电与静磁问题中我们其实见过类似的方程：电场的旋度以及磁场的散度

$$\epsilon_{ijk}\partial_j E_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = 0, \quad (15.3a)$$

$$\partial_i B_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = 0. \quad (15.3b)$$

在之前的讨论里我们讲过，由于  $d^2 = 0$ ，在三维欧氏空间  $\mathbb{R}^3$  里上述方程意味两种微分形式都等于某个低一阶微分形式的外微分，于是有

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = d(-\phi) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (15.4a)$$

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (15.4b)$$

同理在闵氏时空  $\mathbb{R}^{3,1}$  中电磁张量  $\mathcal{F}$  等于某个一阶张量  $\mathcal{A}$  的外微分。不失一般性我们令

$$\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu. \quad (15.5)$$

那么

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = (dx^\mu \partial_\mu) \wedge (A_\nu dx^\nu) = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (15.6)$$

在张量层面亦即

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (15.7)$$

如此得到的电磁张量对于任意的  $A_\mu(x)$  都自动满足 Bianchi 恒等式，因而解决了一半的麦克斯韦方程组。在这个意义上  $A_\mu(x)$  是可以用来描述电磁场构形的真正独立的动力学变量，或者也可以称为**场变量** (field variable)。借鉴静电学中的语言我们亦可把它称为电磁场的**势** (potential)。

- 为了与静电与静磁问题定义的标势与矢势自恰，我们把四维矢量场  $A_\mu$  的具体分量记为

$$A_\mu = (\sqrt{\epsilon_0}\phi, -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\mathbf{A}). \quad (15.8)$$

如此在不随时间变化的情况下，电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  与场变量之间的关系退化为(15.4)中给出的形式。而在一般的情况下我们有

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) - \nabla\phi(t, \mathbf{x}), \quad (15.9a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}). \quad (15.9b)$$

- 需要稍加注意的是，当我们讨论场的动力学自由度时，空间（以及时间）坐标本身并不像描述质点运动时分析的那样作为可以随时间演化的动力学变量而存在。对于场而言，真正的动力学自由度是每个时空事件点上场的取值，而空间坐标仅仅是用来指示我们到底在讨论哪个自由度的一个标记。
- 由于动力学变量  $A_\mu$  是一个一阶张量，在四维的观点下它无非是一个矢量。因此在场论中人们往往把电磁场看作是一种**矢量场**而非一个二阶张量场。（电磁场的矢量属性从另一个角度讲也在于它与带电物质的相互作用方式，这个角度将在以后进一步阐述。）将  $A_\mu$  代入剩下的麦克斯韦方程组，我们于是得到了求解电磁场演化的核心的运动方程

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = J^\mu. \quad (15.10)$$

- 当然，虽然在一个给定时刻  $A_\mu$  的分布是可以任意指定的，这样对电磁场的描述实际存在一定冗余。这是因为如果我们对  $A_\mu$  做如下变换

$$A_\mu \longmapsto A_\mu + \partial_\mu f, \quad (15.11)$$

其中  $f(x)$  为任意函数，这个变换显然不会改变  $\mathbf{E}$  以及  $\mathbf{B}$  的值（亦即实验上对电磁场的测量），也同样不会改变上述运动方程的形式。因此这样的变换完全不会包含任何物理效应，我们一般性地把塔称为电磁场的**规范变换** (gauge transformation)。而电磁场的这一不变性称为**规范不变性** (gauge invariance)。

- 规范不变性并不是电磁场这个物理系统的任何对称性，因为如上所述规范变换实际并没有把系统的一个构形变换成另一个不一样的构形。规范不变性的存在意味着，虽然我们看似需要在每个事件点上关联一个独立的四维矢量的方式描述电磁场这个物理系统可能存在的物理构形，但如此得到的所有可能的矢量分布其实比实际存在的物理构形多得多。乍看上去不同的矢量分布，只要它们相互之间可以由一个规范变换相联系，那么它们实际对应于同一个真实的物理构形。或者用数学一点的说法，电磁场的所有可能的物理构形的集合，等价于以  $A_\mu$  为基础通过规范变换所定义的**等价类** (equivalence class) 的集合。所以在这个意义上，规范不变性也称为**规范冗余** (gauge redundancy)。

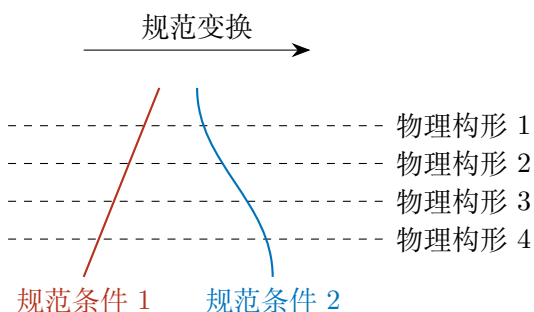
- 举个不完全确切的类比。如果我们用每一个名字唯一指代一个人，当我们把所有不同的名字收集在一起后，这些名字的总数不一定等于它们所指代的所有的人的总数。原因在于每一个除了自己正式的名字之外很可能还会有小名、昵称等等。在等价类的意义上正式名字与小名之间可以看作是差了一个“规范变换”。（当然现实会更加复杂，因为不同的人完全有可能有同样的名字。）

## 15.2 真空中电磁场的波动方程

- 当我们考察的区域里不存在其它物质时， $J^\mu = 0$ ，上述场变量的运动方程退化为

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (15.12)$$

由于规范冗余的存在，直接解这个方程所得的  $A^\mu$  有很大任意性，且方程本身较为复杂。于是在实际求解时，人们往往会根据需要给  $A_\mu$  额外人为指定一个方程作为限制条件，称为**规范条件** (gauge condition, 或简称规范)。规范条件的选择并不唯一，但无论做何种选择，它的目的在于在每一个等价类中筛选出一个具体的  $A_\mu$  分布作为相应物理构形的代表（大体示意如下），同时达到简化问题的目的。



- 对于我们现在所要处理的问题，通常选取所谓的**洛伦茨规范** (Lorenz gauge)

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (15.13)$$

在这样的规范下运动方程的第二项消失，于是运动方程进一步退化为

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0. \quad (15.14)$$

不难看到上述规范条件并不能在严格意义上完全消除规范冗余，因为即便在该条件下我们依然能够考虑受限制的规范变换

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu h, \quad \partial_\mu \partial^\mu h = 0. \quad (15.15)$$

不过这相比于原先任意的  $h$  函数已经限制了不少，并且由上述简化后的方程我们看到它对解决问题已经带来很大的便利，因为现在在运动方程里  $A^\mu$  的不同分量已经不再混合。上述余留的规范冗余造成的影响稍后将进一步讨论。

- 具体查看  $A^\mu$  前面的二阶微分算符

$$\partial_\nu \partial^\nu = -\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}. \quad (15.16)$$

该算符称为**达朗贝尔算符** (d'Alembert operator), 其形式非常类似于三维欧氏空间里的拉普拉斯算符, 只不过由于四维闵氏时空度规的关系其中有一项的符号与其余相反。这使得我们有望通过类似于静电学里讲解的变量分离的方式分析真空中麦克斯韦方程组的波动解。在这一节里我们始终关注随时间具有固定频率  $\omega$  (或固定周期  $2\pi/\omega$ ) 的解。基于上述结构我们总是可以从  $A^\mu$  中提取一个相位因子

$$A^\mu(x) = \Re e^{-i\omega t} \tilde{A}^\mu(\mathbf{x}). \quad (15.17)$$

为方便分析波动现象我们把实数取值的  $A^\mu$  看作是一个复数取值的场的实部。由此  $\tilde{A}^\mu$  满足

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \nabla \cdot \nabla \right) \tilde{A}^\mu(\mathbf{x}) = 0. \quad (15.18)$$

### 15.3 平面波

- 我们首先考察平面波。简单起见我们先假设波动解完全不依赖于坐标  $x^1$  和  $x^2$ , 于是麦克斯韦方程化为

$$\left( k^2 + \frac{d^2}{d(x^3)^2} \right) \tilde{A}^\mu(x^3) = 0, \quad \omega = ck, \quad (15.19)$$

一个典型的一维振动方程。其相应的一般解也是周期性的

$$C_1 e^{+ikx^3} + C_2 e^{-ikx^3}, \quad (15.20)$$

( $C_1$ 、 $C_2$  为待定系数)。其中第一项与第二项的区别仅仅在于所得的波随时间是沿第三轴正向还是反向移动的。不失一般性我们选择正向运动的波, 因此忽略第二项。我们把所得的波动解写为

$$A^\mu(x) = \Re e \zeta^\mu e^{-i\omega t + ikx^3}. \quad (15.21)$$

参数  $k$  表征的是第三轴方向上单位长度内经历了多少个周期, 或者说多少个波的数目, 因此经常称为**波数**。最前面不依赖于事件点的系数  $\zeta^\mu$  称为**偏振矢量** (polarization vector), 或简称偏振 (polarization)。如果我们观察这个波动解的等相位面, 也称**波前** (wave front), 那么在每一时刻上它都是有确切  $x^3$  坐标的平面。因此这样的波动解称为**平面波** (plane wave)。

- 这里我们明确看到了真空麦克斯韦方程组中速度量纲的参数  $c$  的另外一层物理意义: 它是真空中电磁波运动的速度。由于光属于一类常见的电磁波, 这个速度常数通常被称为**光速** (light speed)。前面我们讨论过, 由不同惯性参考系间的洛伦兹变换可以看到四维闵氏时空中任何物质能够拥有的最大速度大小也是光速  $c$ 。如果一个质点

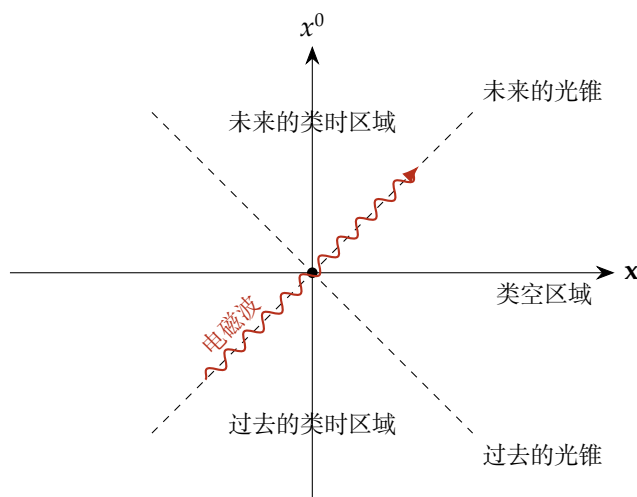
以这个速度大小从某个事件点  $x_A^\mu$  经历时间  $\Delta t$  移动到了事件点  $x_B^\mu$ ，那么两个事件点之间的四维距离显然必定为零

$$-(x_B^0 - x_A^0)^2 + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)^2 = -c^2 \Delta t^2 + (ct_B - ct_A)^2 = 0. \quad (15.22)$$

如果以原点作为参考点，考虑所有满足上述关系的事件点  $x^\mu$ （可以考虑从原点运动到  $x^\mu$  或者从  $x^\mu$  运动到原点），那么它们恰好构成一个“圆锥面”，称为原点所关联的**光锥**（lightcone）。这个原因的名称当然非常显然：任何经过原点的电磁波在四维时空里观察始终被约束在这个光锥上。光锥本身是闵氏时空的一个三维子空间，它的每一个等时间截面都是一个球面，称为**天球**（celestial sphere，等价于我们站在原点处所观察到的整个星空看似所在的球面）。由此闵氏时空以原点为基准可以划分为五个区域：

- **未来的光锥**（future lightcone），满足  $x_\mu x^\mu = 0$  且  $x^0 > 0$  的区域，这是从原点出发以光速能够到达的点构成的区域。
- **未来的类时区域**（future light-like region），满足  $x_\mu x^\mu < 0$  且  $x^0 > 0$  的区域，这是从原点出发以某个小于光速的速度能够到达的所有点构成的区域。
- **过去的光锥**（past lightcone），满足  $x_\mu x^\mu = 0$  且  $x^0 < 0$  的区域，这是作为起点能够以光速到达原点的点构成的区域。
- **过去的类时区域**（past light-like region），满足  $x_\mu x^\mu < 0$  且  $x^0 < 0$  的区域，这是作为起点以某个小于光速的速度能够到达原点的点构成的区域。
- **类空区域**（space-like region），满足  $x_\mu x^\mu > 0$  的区域，闵氏时空除上述区域外剩余的部分。

这几个区域之间的关系大体如下图：



由上述定义不难看到，一个过去的事件如果要在物理上影响原点处的事件，或是被原点处的事件影响，那么它必须位于类时区域内或者是光锥上。它与原点之间是有因果关联的（causal relation）。反之，位于类空区域内的事件与原点处的事件没有任何因果关系。

- 回到电磁波本身。为了确定偏振矢量  $\zeta^\mu$  可能的取值，注意到波动解还需要满足洛伦



兹规范条件。对于上述波动解其具体形式为

$$-\frac{\omega}{c}\xi^0 + k\xi^3 = 0. \quad (15.23)$$

这个方程限制了四维矢量  $\xi^\mu$  的一个自由度，因此我们依然可以做三种独立的选择。不失一般性我们可以选取如下三个相互独立的构形

$$\xi_L^\mu = (1, 0, 0, 1), \quad \xi_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad \xi_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0). \quad (15.24)$$

它们对应于电磁波的三种可能的独立偏振状态。其中后两种偏振完全是空间性质的，且均垂直于电磁波的运动方向（这个特殊例子里为第三轴），因此这两种偏振对应的波称为**横波**（transverse wave）。第一种偏振的空间部分完全沿着电磁波传播方向，因此我们理应把它归为**纵波**（longitudinal wave）。不过注意第一种偏振还具有时间分量，其实它完全正比于

$$\xi_L^\mu \propto k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, k\right). \quad (15.25)$$

由于  $\partial_\mu \exp(ik_\nu x^\nu) = ik_\mu \exp(ik_\nu x^\nu)$ ，可以看到在这个偏振下场强是消失的

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \propto k_\mu \xi_{L\nu} - k_\nu \xi_{L\mu} = 0, \quad (15.26)$$

或者说纵向偏振只是相当于一个纯粹的规范变换

$$\xi_L^\mu e^{-i\omega t + ikx^3} = \partial^\mu \left( \frac{1}{ik} e^{-i\omega t + ikx^3} \right). \quad (15.27)$$

因此在这个平面波的例子我们看到电磁波的偏振模式实际上只包含横向上两个独立自由度，而纵向偏振的电磁波是不存在。这一点与我们常见的机械系统中的大多数波动现象有本质的区别（比如声波和地震波都包含纵波）。对于沿第三轴方向传播的平面波，我们可以选择让偏振矢量  $\xi^\mu$  完全局限在 1-2 平面里。当然，如果我们想在此基础上加上  $\xi_L^\mu$  的任意倍数这显然也是可以的，只不过它完全不会改变实际的物理状态，相应地我们有等价关系

$$\xi^\mu \sim \xi^\mu + \alpha \xi_L^\mu, \quad (15.28)$$

其中  $\alpha$  为任意系数。因此即便对于同一个物理状态，由于规范冗余的存在偏振矢量的具体选择具有一定任意性。

- 一般性地，我们显然可以把平面波解写为

$$A^\mu(x) = \Re \xi^\mu e^{ik_\nu x^\nu}, \quad k_\mu \xi^\mu = 0. \quad (15.29)$$

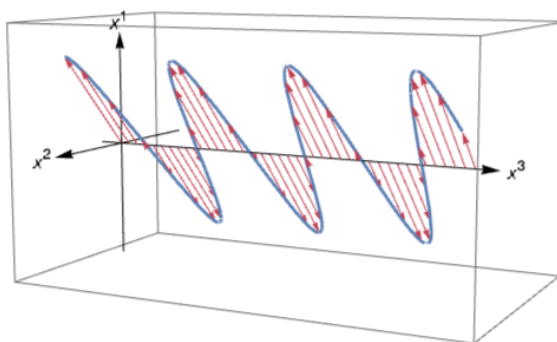
其中  $k_\nu$  的时间分量  $k_0 = -\frac{\omega}{c}$  表征了电磁波的能量，而其余分量  $\mathbf{k}$  组成一个一般的三维矢量，其方向决定的电磁波的传播方向，而其模长对应于电磁波的波数。

- 我们进一步详细查看一下平面电磁波不同偏振构形对应的图像。由于  $\xi^\mu$  可以完全局限在（复数化的）1-2 平面里，我们最一般地可以将其写为

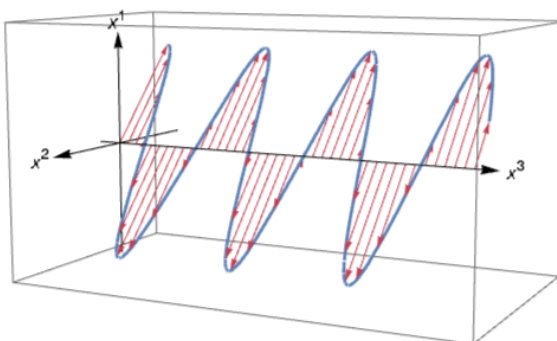
$$\xi^\mu = \left(0, C_1 e^{i(\theta + \frac{\varphi}{2})}, C_2 e^{i(\theta - \frac{\varphi}{2})}, 0\right), \quad (15.30)$$

$C_1$ 、 $C_2$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$  均为实数。其中  $\theta$  仅仅控制平面波整体的相位，因此对具体的偏振构形没有影响，真正有影响的是其余三个参数。 $C_1$ 、 $C_2$  控制的是电磁波偏振在第一轴和第二轴两个方向上投影振幅的绝对大小。角度  $\varphi$  标记两个方向上波动的相对相位。

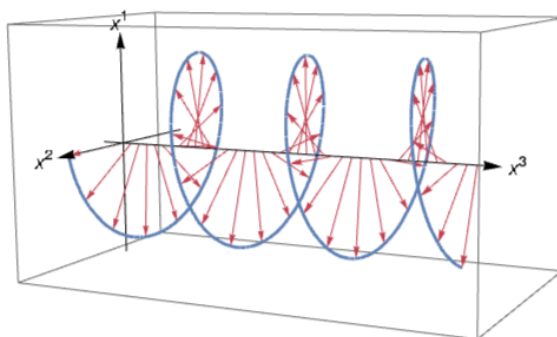
- 当  $\varphi = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 时两个波动分量的步调完全一致 ( $n$  为偶数) 或者恰好相反 ( $n$  为奇数), 于是两个分量之比是一个纯实数。这种情况下我们在电磁波传播方向的横截面上所观察到的偏振矢量随时间的变换完全局限在一根直线上, 这类偏振构形称为**线偏振**。具体地, 当  $n$  为偶数时, 两分量之比为正数, 任意一点上的振动发生在 1-2 平面的第一和第三象限



而当  $n$  为奇数时, 两分量之比为负数, 任意一点上的振动发生在 1-2 平面的第二和第四象限

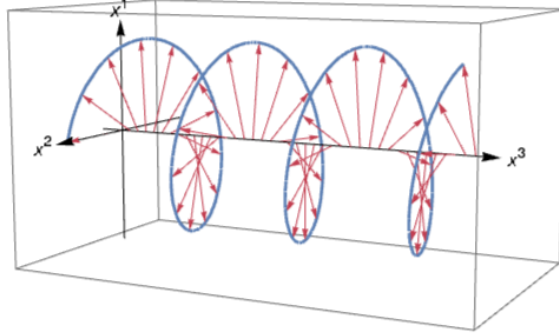


- 当  $\varphi$  为半奇数时, 两个方向上的波动恰好相差  $1/4$  个周期。如果进一步有  $C_1 = C_2$ , 那么在横截面上观察偏振矢量随时间恰好是在一个圆环上运动。这类偏振构形称为**圆偏振**。这里又具体区分两种情形。首先, 当  $\varphi = (2n + \frac{1}{2})\pi$  时, 第一分量的相位比第二分量的相位在时间上滞后了  $\pi/2$ , 所以偏振矢量在 1-2 平面上的转动是顺时针的, 或者说相对于电磁波的传播方向是左旋的。





其次, 当  $\varphi = (2n - \frac{1}{2})\pi$  时, 第一分量的相位比第二分量的相位在时间上提前了  $\pi/2$ , 所以偏振矢量在 1-2 平面上的转动是逆时针的, 或者说相对于电磁波的传播方向是右旋的。



- 对于更一般的参数, 通常来说偏振矢量在横截面上随时间扫出的轨迹是一个椭圆。
- 现在我们考虑参考系的变换。一般性地, 如果把这个变换按之前的约定记做  $\Lambda^\mu_\nu$ , 那么电磁波的变换遵循

$$A'^\mu(x') \equiv \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x), \quad (\Lambda^{-1}x')^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu. \quad (15.31)$$

我们分两种类型的情况讨论:

- 首先, 如果新的参考系相对于原有参考系仅仅是一个空间旋转, 由(15.31)我们可以看到电磁波所发生的变化在于两方面。一方面, 相位因子  $-i\omega t$  的部分不变, 所以电磁波的频率没有改变, 但是空间部分

$$ik_i x^i = ik_i (R^{-1})^i_j x'^j \equiv ik'_j x'^j, \quad (15.32)$$

因此原先的三维波数矢量  $\mathbf{k}$  发生了转动。另一方面, 偏振矢量在保持约束条件  $k_\mu \xi^\mu = 0$  不变的前提下也会发生转动, 并且如果原先的偏振是垂直于传播方向的一个纯空间矢量的话, 那么变换后的偏振矢量也满足同一性质。

- 其次我们考虑新的参考系相对于原有参考系做匀速运动。这里清晰起见我们查看一个典型的例子, 假定原参考系中的平面电磁波就是(15.21)所给出的沿第三轴传播的解, 而参考系变换考虑(14.62)所给的例子。由于原参考系中偏振矢量  $\xi^\mu$  可以选择为只拥有非零的 1、2 分量, 根据变换的具体形式(14.62)我们直接看到这个偏振矢量变换到新的参考系是不变的。然而在相位因子中,

$$ik_\mu x^\mu = ik_\mu (L^{-1})^\mu_\nu x'^\nu = iL^\mu_\nu k_\mu x'^\nu \equiv ik'_\nu x'^\nu. \quad (15.33)$$

由此可知原先的  $k^\mu = (\omega/c, 0, 0, k)$  发生了如下变化

$$k^\mu \mapsto k'^\mu = L^\mu_\nu k^\nu = \left( \frac{\omega}{c} \cosh w - k \sinh w, 0, 0, k \cosh w - \frac{\omega}{c} \sinh w \right). \quad (15.34)$$

如果新坐标系里的频率记做  $\omega'$ , 波数记做  $k'$ , 那么依然有  $\omega' = k'c$ , 且

$$\omega' = \omega(\cosh w - \sinh w) = \omega \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}, \quad (15.35)$$

$v$  为新参考系相对于原参考系的速度大小(在(14.57)中我们得知  $v = c \tanh w$ )。我们于是看到在新的参考系中观测者测量同一列平面电磁波得到的频率相比原参考系变小了, 相应地电磁波波长更长了。这个现象就是我们熟知的**多普勒效应** (Doppler effect)。当然多普勒效应包含两种情况, 这这个例子里新参考系的观测着在原参考系中是背着电磁波运动的, 相应观察到的是**红移** (redshift), 而如果他反过来向着电磁波运动, 那么上式中  $v$  需要替换成  $-v$ , 频率增大, 对应于**蓝移** (blueshift)。上述公式需要与经典牛顿力学中的多普勒效应相区别。当  $v \ll c$  时, 上述表达式用泰勒展开近似

$$\omega' = \omega \left( 1 - \frac{v}{c} + \mathcal{O}(v^2/c^2) \right), \quad (15.36)$$

它则退化到经典牛顿力学的情况。

- 详细讨论过平面电磁波中场变量  $A^\mu(x)$  的性质后, 我们现在查看一下实验中真正能够直接测量的场强

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = \Re e i(k_\mu \xi_\nu - k_\nu \xi_\mu) e^{ik_\rho x^\rho}. \quad (15.37)$$

不失一般性我们还是关注之前沿第三轴正向传播的例子, 并且由于纵向偏振只是一个规范变换, 我们可以把偏振矢量  $\xi_\mu$  完全局限在 1-2 平面上(15.30)。具体到分量, 对于电场部分我们有

$$E^i(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} F_{0i}(x) = \Re e (-i\sqrt{\mu_0}\omega) \xi_i e^{-i\omega t + ikx^3}. \quad (15.38)$$

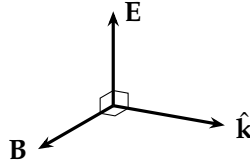
因此电场  $\mathbf{E}(x)$  的偏振完全正比于场变量的空间部分  $A_i(x)$  (当然它们在相位上相差  $1/4$  个周期)。对于磁场部分我们有

$$\begin{aligned} B^i(x) &= -\frac{\sqrt{\mu_0}}{2} \epsilon^{imn} F_{mn} = \Re e (-i\sqrt{\mu_0}) \epsilon^{imn} k_m \xi_n e^{-i\omega t + ikx^3} \\ &= \epsilon^{imn} \frac{k_m}{\omega} E^n(x). \end{aligned} \quad (15.39)$$

如果把平面波传播方向上的单位矢量记做  $\hat{\mathbf{k}}$ , 那么这个式子用三维矢量书写意味着

$$\mathbf{B}(x) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(x). \quad (15.40)$$

因此磁场  $\mathbf{B}(x)$  与电场  $\mathbf{E}(x)$  始终同相位, 其振幅大小与  $\mathbf{E}(x)$  恰好相差一个倍数因子  $c$ 。此外, 在任意事件点上  $\hat{\mathbf{k}}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  两两相互正交, 且它们的方向满足右手法则。



- 前面提到, 同样的结论也很容易直接从麦克斯韦方程组的分量形式得到。首先, 在没有带电物质存在的情况下, 两个散度方程直接退化为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (15.41)$$

其次, 我们对第四个方程进一步求旋度, 有

$$\nabla \times \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (15.42)$$

这里第一项由于电场散度为零实际消失掉, 而最后一项我们可以利用第二个方程加以代换, 最终得到

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (15.43)$$

由类似的方法也可知磁场  $\mathbf{B}$  满足完全相同的方程

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (15.44)$$

这两个方程与四维势矢量  $A^\mu$  遵循的运动方程也具有一致的结构。于是我们很快可以得到结论由这两个方程得到的单色平面波解具有一般的形式

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{E}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (15.45a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{B}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (15.45b)$$

其中  $\omega = c|\mathbf{k}|$ , 且偏振矢量  $\mathbf{A}_E$  与  $\mathbf{A}_B$  有可能包含额外的相位。由电场以及磁场的无源条件很容易知道, 它们各自的偏振矢量必须垂直于  $\mathbf{k}$

$$\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (15.46)$$

再将上述解代入第四个麦克斯韦方程, 得到

$$\Re i \left( (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) - \omega \tilde{\mathbf{B}} \right) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0. \quad (15.47)$$

于是电场与磁场的振幅满足

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}. \quad (15.48)$$

这意味着  $\mathbf{k}$ 、 $\tilde{\mathbf{E}}$ 、 $\tilde{\mathbf{B}}$  三个矢量两两正交且构成右手系, 而电场与磁场振幅之比为光速,  $|\tilde{\mathbf{E}}|/|\tilde{\mathbf{B}}| = c$ 。此外, 它们对应分量的振幅始终保持一致。这些与前面分析的结果都是一致的。

- 由此我们又可以得知平面波的坡印廷矢量正好与  $\hat{\mathbf{k}}$  同向。为方便计算我们令

$$\mathbf{E} = \Re \tilde{\mathbf{E}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{\tilde{\mathbf{E}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{E}}^* e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{2}, \quad (15.49a)$$

$$\mathbf{B} = \Re \tilde{\mathbf{B}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{\tilde{\mathbf{B}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}^* e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{2}. \quad (15.49b)$$

于是

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\mu_0} \left( \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}^* + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{B}} + (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}) e^{-2i\omega t + 2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{B}}^*) e^{2i\omega t - 2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right). \quad (15.50)$$

利用

$$\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{E}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{1}{c} (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \hat{\mathbf{k}} - \frac{1}{c} \underbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{E}})}_0 \tilde{\mathbf{E}}, \quad (15.51)$$

上式可进一步化简为

$$\mathcal{S} = \frac{\hat{\mathbf{k}}}{4c\mu_0} \left( 2|\tilde{\mathbf{E}}|^2 + (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) e^{-2i\omega t + 2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*) e^{2i\omega t - 2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \quad (15.52)$$

由上述表达式我们看到截面上的能流密度包含一个恒定的贡献与一个随时间周期变动的贡献。如果进一步将能流密度对时间做平均

$$\bar{\mathcal{S}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{S} dt, \quad (15.53)$$

那么周期变动的贡献全部抵消。由此得到的平均能流密度

$$\bar{\mathcal{S}} = \frac{|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2c\mu_0} \hat{\mathbf{k}} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*}{2c\mu_0} \hat{\mathbf{k}} \quad (15.54)$$

是一个不依赖于具体截面位置的恒定值。

# 有宏观介质存在时的电磁场

16.1	宏观介质中的电磁场	157
16.2	导体中的电磁场	160

- 在简单了解过真空中电磁场的运动后我们再考察一下宏观介质中电磁场的运动。类似于静电与静磁问题中的讨论，我们区分两种典型的情况：不导电的介质，以及导体。在有宏观物质存在的情况下，我们无论对于物质还是电磁场都采用平均化的观点。

## 16.1 宏观介质中的电磁场

- 前面在静电问题与静磁问题中我们看到，一个宏观电介质可以由连续分布的极化矢量  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  等效替代，而一个宏观磁介质可以由连续分布的磁化矢量  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  等效替代。一般性地，若一个宏观介质即能够对电场产生响应又能够对磁场产生响应，那么它可以等效成  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  与  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  两个矢量场。
- 这里我们默认上述结论直接适用于随时间变化的情况（关于这个结论的合理性这门课程不做展开，有兴趣的同学可查阅 Jackson 相关章节）。
- 在静平衡问题中我们又知道  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{M}$  分别又可以等效替代成束缚电荷  $\rho_{\text{束缚}}$  与束缚电流  $\mathbf{J}_{\text{束缚}}$ ，其具体关系为

$$\rho_{\text{束缚}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{J}_{\text{束缚}} = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (16.1)$$

就图像而言我们自然也期待这两个关系在随时间变化的情况下也成立。

- 不过需要小心的是，在随时间变化的时候单纯  $\rho_{\text{束缚}}$  与  $\mathbf{J}_{\text{束缚}}$  不足以等价于  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  与  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 。其原因在于电荷守恒。当我们把宏观物质完全等效成真空中的电荷与电流后，总的电荷与电流必定要满足守恒关系

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{总}} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{总}} = 0. \quad (16.2)$$

而按照以前我们所知道的，总电荷与总电流中包含

$$\rho_{\text{总}} = \rho_{\text{自由}} + \rho_{\text{束缚}}, \quad \mathbf{J}_{\text{总}} = \mathbf{J}_{\text{自由}} + \mathbf{J}_{\text{束缚}}. \quad (16.3)$$

这其中自由电荷与自由电流是由真实的载流子所导致的，它们自身得满足同样的守恒关系

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{自由}} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{自由}} = 0. \quad (16.4)$$

将这部分减去后，由于  $\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{束缚}} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = 0$ ，我们于是得到  $\partial_t \rho_{\text{束缚}} = 0$ 。然而在随时间变化的情况中这显然是不可能恒成立的。

- 上述问题的解在于一般情形下总的电流实际得拆成三部分

$$\mathbf{J}_{\text{总}} = \mathbf{J}_{\text{自由}} + \mathbf{J}_{\text{束缚}} + \mathbf{J}_{\text{极化}}. \quad (16.5)$$

于是电荷守恒关系等价于

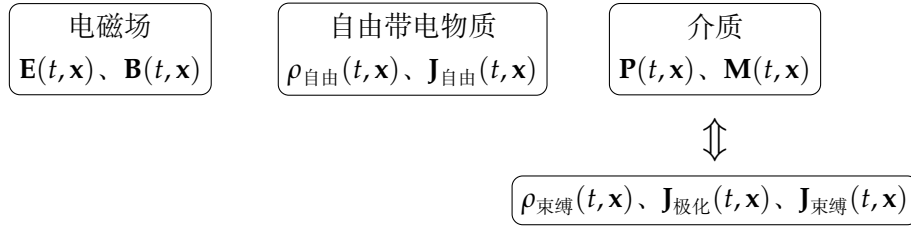
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{束缚}} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{极化}} = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{极化}} \right) = 0. \quad (16.6)$$

于是我们可以把新假设出来的这部分电流定义为

$$\mathbf{J}_{\text{极化}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (16.7)$$

称为**极化电流** (polarization current)。图像上它是由极化矢量随时间变化所等效造成的电流。

- 因此我们要考虑的系统一般由三个独立部分组成：电磁场、自由带电物质、介质。其中电磁场由  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  和  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  表征，自由带电物质由  $\rho_{\text{自由}}(t, \mathbf{x})$  和  $\mathbf{J}_{\text{自由}}(t, \mathbf{x})$  描述。介质可以一般等效成  $\rho_{\text{束缚}}(t, \mathbf{x})$ 、 $\mathbf{J}_{\text{极化}}(t, \mathbf{x})$  和  $\mathbf{J}_{\text{束缚}}(t, \mathbf{x})$  这三个场，而它们与极化矢量  $\mathbf{P}(t, \mathbf{x})$  和磁化矢量  $\mathbf{M}(t, \mathbf{x})$  之间的关系遵循(16.1)及(16.7)。



对于这组等效后的系统我们可以直接应用真空中的麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{自由}} + \rho_{\text{束缚}}), \quad (16.8a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{J}_{\text{自由}} + \mathbf{J}_{\text{束缚}} + \mathbf{J}_{\text{极化}}), \quad (16.8b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (16.8c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (16.8d)$$

- 我们看到，后两个方程由于不涉及电磁场与物质间的相互作用所以实际并没有发生任何改动。于是电磁张量依然满足  $d\mathcal{F} = 0$ ，这意味着它理论上依然能够以相同的方式用四维的势来描述。
- 变化在于前两个方程，现在我们把介质等效成的电荷与电流重新替代回极化矢量与磁化矢量的描述，得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{自由}} - \nabla \cdot \mathbf{P}), \quad (16.9a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left( \mathbf{J}_{\text{自由}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right). \quad (16.9b)$$

结合以前的定义

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (16.10)$$

上述两个方程最终可调整为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}}, \quad (16.11a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{自由}}. \quad (16.11b)$$

其中第二个方程也经常写成

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{自由}} + \mathbf{J}_{\text{位移}}, \quad \mathbf{J}_{\text{位移}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (16.12)$$

$\mathbf{J}_{\text{位移}}$  即为一般介质中的**位移电流**。

- 与静电/磁问题中的情况类似，如果我们已经能够知道所有关于其它物质的信息，包括自由带电物质以及介质，那么麦克斯韦方程组直接可以帮助我们解出电场与磁场。现实是介质的情况往往是没法独立知道的，因此在使用上述修改过的麦克斯韦方程组时，我们还需要知道在给定介质中  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  以及  $\mathbf{H}$  与  $\mathbf{B}$  之间的具体关系。当然这个关系有可能会很复杂。
- 在特定条件下（往往是场强很小时候），如果中  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  以及  $\mathbf{H}$  与  $\mathbf{B}$  之间呈线性关系，我们称这样的介质为线性介质。令

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (16.13)$$

这里的  $\epsilon$  和  $\mu$  为以前我们接触过的介电常数和磁导率。如果这两个参数又不依赖于具体的点，那么介质中的麦克斯韦方程组可以简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{自由}}, \quad (16.14a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{J}_{\text{自由}}, \quad (16.14b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (16.14c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (16.14d)$$

其形式与真空中的麦克斯韦方程组相比仅仅在于把真空介电常数  $\epsilon_0$  和真空磁导率  $\mu_0$  分别替换成了介质中的  $\epsilon$  和  $\mu$ 。于是不难预期电磁场在这类介质中的运动与其在真空中的运动有诸多共性。特别地，它的平面波解与真空里的平面波解应当具有完全相同的形式

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{E}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (16.15a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{B}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (16.15b)$$

且它们的振幅满足

$$\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad \frac{|\tilde{\mathbf{E}}|}{|\tilde{\mathbf{B}}|} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \equiv v. \quad (16.16)$$

这里的  $v$  是电磁波在介质中的传播速度大小。比值

$$n = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \quad (16.17)$$

称为介质的**折射率**。它与折射现象之间的联系将在下一讲进一步讨论。

- 当然，介质的介电常数  $\epsilon$  与磁导率  $\mu$  往往并不是真正的常数，它们甚至会依赖于电磁波的频率。故而同一种介质对于不同频率的电磁波会具有不同的折射率。这是光学中色散现象的基础。不过由于时间限制在这门课程中我们不对此做展开讨论。

## 16.2 导体中的电磁场

- 前面提到我们一般所处理的系统可分为三个部分：电磁场、自由电荷/电流、以及介质。看过介质对电磁场运动产生的影响后，我们现在讨论下自由电荷/电流。在给定的介质区域里如果能够存在自由电荷并且它们能够运动形成自由电流，那么介质还具有额外的导电属性从而成为导体。在电磁学中我们了解过导体的导电一般满足欧姆定律，亦即电流与电压成正比。如果以电流密度与电场的形式书写这个规律则为

$$\mathbf{J}_{\text{自由}} = \sigma \mathbf{E}, \quad (16.18)$$

其中  $\sigma$  称为导体的**电导率**。对于一个理想导体而言  $\sigma = \infty$ ，对于一个理想绝缘体则有  $\sigma = 0$ ，而对于一般的导体  $\sigma$  则为某个有限的正数。接下来我们假定导体也具有均匀的介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$ 。

- 由于自由电荷与电流需要满足守恒定律，将上述欧姆定律带入相应方程我们看到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\text{自由}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{自由}} &= \frac{\partial \rho_{\text{自由}}}{\partial t} + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial \rho_{\text{自由}}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_{\text{自由}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (16.19)$$

这个关于时间的一阶微分方程直接给出了任意一点上自由电荷密度  $\rho_{\text{自由}}$  的解

$$\rho_{\text{自由}}(t, \mathbf{x}) = \rho_{\text{自由}}(0, \mathbf{x}) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}. \quad (16.20)$$

这意味着无论初始时刻导体内部有多少净的电荷，在经历了一段时间以后它们都会扩散到导体的表面从而内部净电荷趋于零。且由于时间前面的系数正比于  $\sigma$ ，对于导电性越好的导体这个变化产生的就越快，而对于理想的导体我们就如静电问题中那样从来不会考虑其内部有电场存在。

- 接下来我们假定在所考虑的时间范围内导体内部的自由电荷已经可以忽略不计（但由于电场的存在依然可以存在净的自由电流），于是在导体内部麦克斯韦方程组可以



写为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (16.21a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu\sigma \mathbf{E}, \quad (16.21b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (16.21c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (16.21d)$$

对第四个方程进一步求旋度并且代入第一和第二个方程可以得到

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (16.22)$$

对第二个方程求旋度并且代入第三和第四个方程又可以得到

$$-\nabla^2 \mathbf{B} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (16.23)$$

- 假设电场与磁场依然具有平面波的解

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \Re \mathbf{E}_E e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (16.24a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \Re \mathbf{B}_B e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (16.24b)$$

代入上述微分方程可得

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \epsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega = 0. \quad (16.25)$$

于是对于固定频率  $\omega$  的单色平面波我们可以解得

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| &= \sqrt{\epsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega} \\ &= \omega \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}}}_{\Re |\mathbf{k}|} + i\omega \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}}}_{\Im |\mathbf{k}|}. \end{aligned} \quad (16.26)$$

因此只要  $\sigma \neq 0$  (亦即材料可导电) 那么  $|\mathbf{k}|$  一定会有正的虚部。相应地, 波动解

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{E}} e^{-(\Im |\mathbf{k}|)\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t + i(\Re |\mathbf{k}|)\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}}, \quad (16.27a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{B}} e^{-(\Im |\mathbf{k}|)\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t + i(\Re |\mathbf{k}|)\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}}, \quad (16.27b)$$

在传播方向  $\hat{\mathbf{k}}$  上除了振荡的部分外还包含了一个随传播距离衰减的因子。它在传播距离

$$d = \frac{1}{\Im |\mathbf{k}|} \quad (16.28)$$

后其振幅大小便衰减为原先的  $1/e$ , 这个距离称为**趋肤深度** (skin depth)。

- 由于与之前一样电场和磁场的散度皆为零, 不难看到两个场的偏振都垂直于平面波的传播方向

$$\tilde{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (16.29)$$

为进一步了解电场偏振与磁场偏振之间的关系，由于第四个麦克斯韦方程的形式完全没有变化，我们依然有

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}. \quad (16.30)$$

不过现在注意这个表达式的意义的变化。首先磁场振幅大小与电场振幅大小之比为

$$\frac{|\tilde{\mathbf{B}}|}{|\tilde{\mathbf{E}}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}\right)^{1/4}. \quad (16.31)$$

其次，电场与磁场的对应分量之间不再是同相位的。明确起见，我们假定  $\hat{\mathbf{k}}$  朝第三轴正向，那么

$$\arg(\tilde{B}^2) - \arg(\tilde{E}^1) = \arctan\left(\frac{\Im|\mathbf{k}|}{\Re|\mathbf{k}|}\right) = \arctan\sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} + 1}} \quad (16.32)$$

- 我们可以在领头阶近似下快速查看上述结论的两个极限情形：
  - 如果材料的导电性非常差， $\sigma \ll \epsilon\omega$ ，那么

$$|\mathbf{k}| \approx \omega\sqrt{\epsilon\mu} + i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (16.33)$$

因此趋肤深度近似线性反比于电导率。而偏振矢量之间的关系近似有

$$\frac{|\tilde{\mathbf{B}}|}{|\tilde{\mathbf{E}}|} \approx \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (16.34)$$

$$\arg(\tilde{B}^2) - \arg(\tilde{E}^1) \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon\omega}. \quad (16.35)$$

- 如果材料具有非常良好的导电性， $\sigma \gg \epsilon\omega$ ，name

$$|\mathbf{k}| \approx (1+i)\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}. \quad (16.36)$$

于是偏振矢量之间的关系近似有

$$\frac{|\tilde{\mathbf{B}}|}{|\tilde{\mathbf{E}}|} \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}}, \quad (16.37)$$

$$\arg(\tilde{B}^2) - \arg(\tilde{E}^1) \approx \frac{\pi}{4}. \quad (16.38)$$

对于理想导体而言， $\sigma \rightarrow \infty$ ，于是由上述关系我们看到在这样的导体内部电场是可忽略的， $|\tilde{\mathbf{E}}| \rightarrow 0$ 。

17.1	一般电磁场的边界条件 . . . . .	163
17.2	电磁波在两种介质界面上的传播	164
17.3	全反射 . . . . .	170
17.4	波导 . . . . .	172

- 在前面对运动电磁场的讨论中我们始终假定了所考察的区域无限大，因而无需担忧任何区域边界所产生的影响。现在我们具体考察有边界存在时电磁场的运动。这一讲里我们首先一般性地讨论下电磁场在边界上需要满足的性质，然后再分别在几种典型的情形中描述电磁场的行为。

## 17.1 一般电磁场的边界条件

- 在以前的讨论中我们一再讲过，有关电磁场的任何微分方程总有其对应的积分方程。当我们把电磁场遵循的规律以三维矢量的形式写下来时，每一次看到微分方程里出现散度，那么对应有关于通量（亦即面积分）的积分方程，而每一次看到方程里出现旋度，那么对应有关于环量（亦即线积分）的积分方程。这种转换是我们了解电磁场在区域边界上行为的基本出发点。
- 前面看到在介质内部电磁场满足麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}}, \quad (17.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{自由}}, \quad (17.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (17.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (17.1d)$$

那么按照上述对应关系在宏观上这些方程依次等价于

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_{\text{自由}} dV, \quad (17.2a)$$

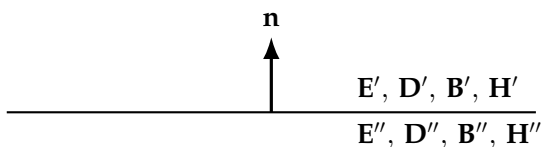
$$\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J}_{\text{自由}} \cdot d\mathbf{S}, \quad (17.2b)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (17.2c)$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (17.2d)$$

- 注意这些方程里的积分是可以分段计算的。如果我们讨论两种介质之间的界面，那

么对于通量方程而言，我们可以在界面上任意一点的邻域内选取一个上下表面分别在两侧紧贴界面的柱形区域。明确起见我们把其中一种介质内的量用一撇标记，把另一种介质内的量用两撇标记，且约定界面上的单位法向量  $\mathbf{n}$  默认方向为从第二个介质指向第一个介质。



那么上述两个通量方程意味着在界面上

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'') = \Sigma_{\text{自由}}, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}' - \mathbf{B}'') = 0, \quad (17.3)$$

其中  $\Sigma_{\text{自由}}$  界面上可能存在的自由电荷的面密度（我们现在用大写的字母以避免与电导率相混淆）。而对于环量方程，我们可以在界面上任意一点的邻域内选取一个紧贴界面的微小矩形回路。注意这样的回路所界出的面积趋于零，因此上述环量方程中的面积分可忽略不计，于是相应的两个方程意味着

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}' - \mathbf{H}'') = \mathbf{K}_{\text{自由}}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = 0, \quad (17.4)$$

其中  $\mathbf{K}_{\text{自由}}$  是界面上可能存在的自由电流面密度。当然，如果介质是绝缘体的话我们不考虑其表面上会存在自由的电流，此时  $\mathbf{K}_{\text{自由}} = \mathbf{0}$ 。此外，如果介质是满足欧姆定律的一般导体，这个面电流密度亦为零。这是因为要能够得到有限的面电流密度，那么如果我们把介质表面看作厚度极小的区域的话该区域内的体电流密度得趋于无穷大，而对于有限的电导率来说这意味着表面出电场场强也得趋于无穷大。

## 17.2 电磁波在两种介质界面上的传播

- 现在我们考虑两种均匀且线性的绝缘介质，且它们的交界处不存在额外净电荷。在它们的交界面上上述边界条件进一步退化为

$$\mathbf{n} \cdot (\epsilon' \mathbf{E}' - \epsilon'' \mathbf{E}'') = 0, \quad (17.5a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = \mathbf{0}, \quad (17.5b)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}' - \mathbf{B}'') = 0, \quad (17.5c)$$

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{B}'}{\mu'} - \frac{\mathbf{B}''}{\mu''} \right) = \mathbf{0}. \quad (17.5d)$$

- 我们考虑一列平面波从介质一中以频率  $\omega$  和波矢  $\mathbf{k}_I$  入射到界面上。依照通常的经验我们知道会有一列新的平面波从界面反射回介质一，又会有另一列新的平面波透过界面进入介质二。由于所有的波动都是由入射波驱动的，我们可以预期无论反射

波还是透射波都会具有相同的频率<sup>1</sup>。我们把反射波的波矢记做  $\mathbf{k}_R$ ，把透射波的波矢记做  $\mathbf{k}_T$ 。由三种波各自所处的区域可知它们的频率与波矢之间需要满足

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon'\mu'}}|\mathbf{k}_I| = \frac{1}{\sqrt{\epsilon'\mu'}}|\mathbf{k}_R| = \frac{1}{\sqrt{\epsilon''\mu''}}|\mathbf{k}_T|, \quad (17.6)$$

或者等价地

$$\omega = \frac{c}{n'}|\mathbf{k}_I| = \frac{c}{n'}|\mathbf{k}_R| = \frac{c}{n''}|\mathbf{k}_T|, \quad (17.7)$$

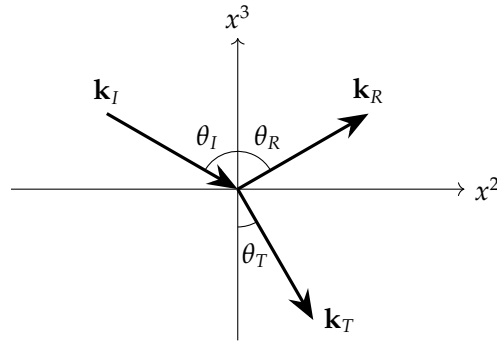
- 不失一般性，我们可以选取合适的空间坐标系，使得两介质的交界面恰好为  $x_3 = 0$  的平面，且界面的法向量（指向介质一）为第三方向上的单位矢量，另外同时使得  $\mathbf{k}_I$  没有第一分量。当我们查看边界条件对三列波所产生的限制的时候，无论我们查看的是哪一个具体的条件，它都具有一般的形式

$$\sharp e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x}} + \sharp e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{x}} - \sharp e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x}} \Big|_{x_3=0} = 0. \quad (17.8)$$

暂且先不论具体的系数（上面用  $\sharp$  表示），为了使这样的等式在任意时刻以及在交界面上任意一点均成立，三个项里依赖于时间和空间坐标的相位因子显然必须完全一致。这意味着

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x} \Big|_{x_3=0} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{x} \Big|_{x_3=0} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x} \Big|_{x_3=0}. \quad (17.9)$$

- 上述等式有如下几点推论：
  - 由于  $\mathbf{k}_I$  没有第一分量， $\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x}$  不依赖于坐标  $x^1$ 。于是不难看出  $\mathbf{k}_R$  与  $\mathbf{k}_T$  的第一分量也都必须为零，或者说三列波的波矢被完全限制在了通过  $\mathbf{k}_I$  且垂直于介质交界面的平面里。这个面也称为**入射面**。它们的构形如下图所示。



- 由于入射波与反射波同处于介质一中，它们的波矢长度相等， $|\mathbf{k}_I| = |\mathbf{k}_R|$ 。于是它们与界面法向量之间所夹的锐角也相等

$$\theta_I = \theta_R. \quad (17.10)$$

- 由(17.7)我们已经看到入射波与透射波的波矢长度之间满足  $n''|\mathbf{k}_I| = n'|\mathbf{k}_T|$ 。(17.9)说明  $\mathbf{k}_I$  与  $\mathbf{k}_T$  在第二方向上的投影长度相等，这意味着它们与界面法向量之间所夹锐角满足

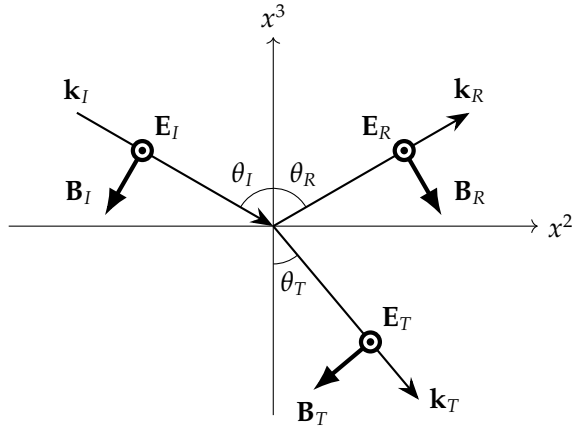
$$\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} = \frac{n''}{n'}. \quad (17.11)$$

<sup>1</sup>我们当然可以在一开始更为谨慎一点，假设三列波分别拥有各自的频率，不过通过要求边界条件在任意的时刻都成立不难看到三列波的频率必须相同。

在定性上, 如果  $n'' > n'$  那么  $\theta_T < \theta_I$ , 反之则  $\theta_T > \theta_I$ 。

上述三个结论我们在几何光学中已经十分熟悉。这里我们看到它们仅仅与平面波相位对时间和空间的依赖关系有关。

- 在电动力学中更加有趣的是了解三列波具体偏振之间的关系。在前面的讨论中我们看到平面波的偏振总是可以分解为垂直于传播方向的两个独立方向的偏振的线性和。方便起见, 以入射波为基准, 我们可以把这两个独立方向分别选取为垂直于入射面以及平行于入射面。
  - 电场偏振垂直于入射面的波称为**TE 波**或者**s 波**, 此时磁场偏振平行于入射面。
  - 电场偏振平行于入射面的波称为**TM 波**或者**p 波**, 此时磁场偏振垂直于入射面。
- 我们首先查看 TE 波, 它的偏振结构如图。



这里我们已经做了一个简化假设, 即反射波和透射波的电场偏振也垂直于入射面。我们先在这个简化假设基础上检验是否能够得到自恰的解。在这个情况下电场没有垂直于界面的分量, 于是有关电场通量的边界条件自动满足。在界面的切方向上电场则需满足

$$|\tilde{\mathbf{E}}_I| + |\tilde{\mathbf{E}}_R| = |\tilde{\mathbf{E}}_T|. \quad (17.12)$$

关于磁场, 由于界面上不存在自由电流, 因此它在界面上也必须是连续的。具体到切向与法向分量有

$$\frac{1}{\mu'} \left( -|\tilde{\mathbf{B}}_I| \cos \theta_I + |\tilde{\mathbf{B}}_R| \cos \theta_R \right) = \frac{1}{\mu''} \left( -|\tilde{\mathbf{B}}_T| \cos \theta_T \right), \quad (17.13)$$

$$|\tilde{\mathbf{B}}_I| \sin \theta_I + |\tilde{\mathbf{B}}_R| \sin \theta_R = |\tilde{\mathbf{B}}_T| \sin \theta_T. \quad (17.14)$$

此外, 由介质中的麦克斯韦方程我们又知道电场振幅大小与磁场振幅大小之间的关系

$$\frac{|\tilde{\mathbf{E}}_I|}{|\tilde{\mathbf{B}}_I|} = \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_R|}{|\tilde{\mathbf{B}}_R|} = \frac{c}{n'}, \quad \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_T|}{|\tilde{\mathbf{B}}_T|} = \frac{c}{n''}. \quad (17.15)$$

将这些关系代入(17.14)可得

$$|\tilde{\mathbf{E}}_I| n' \sin \theta_I + |\tilde{\mathbf{E}}_R| n' \sin \theta_R = |\tilde{\mathbf{E}}_T| n'' \sin \theta_T. \quad (17.16)$$

由反射和折射定律不难发现这个限制条件完全等同于(17.12)。因此我们只要求解(17.13)(17.14)，由此得到

$$|\tilde{\mathbf{B}}_R| = \frac{n'\mu'' \cos \theta_I - n''\mu' \cos \theta_T}{n'\mu'' \cos \theta_I + n''\mu' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{B}}_I|, \quad (17.17a)$$

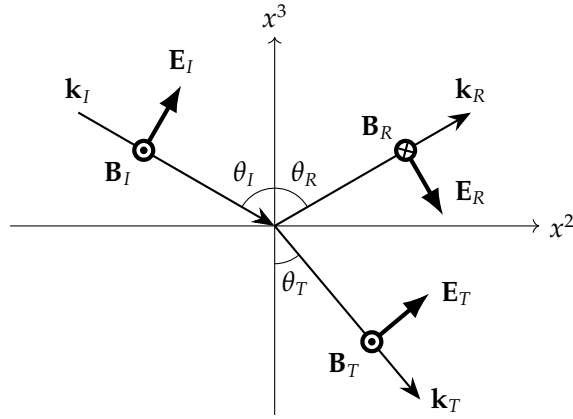
$$|\tilde{\mathbf{B}}_T| = \frac{2n'\mu'' \cos \theta_I}{n'\mu'' \cos \theta_I + n''\mu' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{B}}_I|. \quad (17.17b)$$

于是对于电场又有

$$|\tilde{\mathbf{E}}_R| = \frac{n'\mu'' \cos \theta_I - n''\mu' \cos \theta_T}{n'\mu'' \cos \theta_I + n''\mu' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|, \quad (17.18a)$$

$$|\tilde{\mathbf{E}}_T| = \frac{2n'\mu'' \cos \theta_I}{n'\mu'' \cos \theta_I + n''\mu' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|. \quad (17.18b)$$

- 接下来查看 TM 波，它的偏振结构如图。



由于这里磁场仅有垂直于入射面的分量，有关磁场通量的边界条件是平庸的。考虑到界面上没有自由电流，对于磁场仅需要满足

$$\frac{1}{\mu'} (|\tilde{\mathbf{B}}_I| - |\tilde{\mathbf{B}}_R|) = \frac{1}{\mu''} |\tilde{\mathbf{B}}_T|. \quad (17.19)$$

由于界面上没有自由电荷，电场在平行以及垂直于界面的方向上都分别得连续

$$|\tilde{\mathbf{E}}_I| \cos \theta_I + |\tilde{\mathbf{E}}_R| \cos \theta_R = |\tilde{\mathbf{E}}_T| \cos \theta_T, \quad (17.20)$$

$$\epsilon' (|\tilde{\mathbf{E}}_I| \sin \theta_I - |\tilde{\mathbf{E}}_R| \sin \theta_R) = \epsilon'' |\tilde{\mathbf{E}}_T| \sin \theta_T. \quad (17.21)$$

同样基于(17.15)可知，条件(17.21)与(17.13)是相互等价的。因此我们只要求解(17.20)与(17.21)，由此得到

$$|\tilde{\mathbf{E}}_R| = \frac{-n'\epsilon'' \cos \theta_I + n''\epsilon' \cos \theta_T}{n'\epsilon'' \cos \theta_I + n''\epsilon' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|, \quad (17.22a)$$

$$|\tilde{\mathbf{E}}_T| = \frac{2n''\epsilon' \cos \theta_I}{n'\epsilon'' \cos \theta_I + n''\epsilon' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|. \quad (17.22b)$$

相应地磁场之间满足

$$|\tilde{\mathbf{B}}_R| = \frac{-n'\epsilon'' \cos \theta_I + n''\epsilon' \cos \theta_T}{n'\epsilon'' \cos \theta_I + n''\epsilon' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{B}}_I|, \quad (17.23a)$$

$$|\tilde{\mathbf{B}}_T| = \frac{2\frac{(n'')^2}{n'} \epsilon' \cos \theta_I}{n'\epsilon'' \cos \theta_I + n''\epsilon' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{B}}_I|. \quad (17.23b)$$

- 基于上述结果，我们先查看一个特殊情况。当入射波垂直于界面时候， $\theta_I = \theta_R = \theta_T = 0$ 。此时 TE 波与 TM 波没有任何区别。电场的偏振矢量满足

$$|\tilde{\mathbf{E}}_R| = \frac{n'\mu'' - n''\mu'}{n'\mu'' + n''\mu'} |\tilde{\mathbf{E}}_I| = \frac{n''\epsilon' - n'\epsilon''}{n'\epsilon'' + n''\epsilon'} |\tilde{\mathbf{E}}_I| = \frac{\sqrt{\epsilon'\mu''} - \sqrt{\epsilon''\mu'}}{\sqrt{\epsilon'\mu''} + \sqrt{\epsilon''\mu'}} |\tilde{\mathbf{E}}_I| \quad (17.24)$$

$$|\tilde{\mathbf{E}}_T| = \frac{2n'\mu''}{n'\mu'' + n''\mu'} |\tilde{\mathbf{E}}_I| = \frac{2n''\epsilon'}{n'\epsilon'' + n''\epsilon'} |\tilde{\mathbf{E}}_I| = \frac{2}{\sqrt{\frac{\epsilon''\mu'}{\epsilon'\mu''}} + 1} |\tilde{\mathbf{E}}_I|. \quad (17.25)$$

于是我们看到当条件

$$\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} = \sqrt{\frac{\epsilon''}{\mu''}} \quad (17.26)$$

成立时，无论入射波电场的偏振如何，反射波皆完全消失。当  $\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} > \sqrt{\frac{\epsilon''}{\mu''}}$  时，反射波与入射波完全同相位。而当  $\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} < \sqrt{\frac{\epsilon''}{\mu''}}$  时，反射波与入射波存在相位差  $\pi$ 。

- 对于一般的入射角度，不同偏振的反射波则不会同时消失。现在我们把问题适当简化。在可见光波段大多数自然存在的物质对电磁波不具有显著的磁响应，我们相应考察  $\mu' = \mu'' = \mu_0$  的情况。于是折射定律等价于

$$\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} = \frac{n''}{n'} = \frac{\sqrt{\epsilon''}}{\sqrt{\epsilon'}}. \quad (17.27)$$

对于 TE 波我们有

$$|\tilde{\mathbf{E}}_R| = \frac{n' \cos \theta_I - n'' \cos \theta_T}{n' \cos \theta_I + n'' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|, \quad (17.28a)$$

$$|\tilde{\mathbf{E}}_T| = \frac{2n' \cos \theta_I}{n' \cos \theta_I + n'' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|, \quad (17.28b)$$

而对于 TM 波我们有

$$|\tilde{\mathbf{E}}_R| = \frac{-n'' \cos \theta_I + n' \cos \theta_T}{n'' \cos \theta_I + n' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|, \quad (17.29a)$$

$$|\tilde{\mathbf{E}}_T| = \frac{2n' \cos \theta_I}{n'' \cos \theta_I + n' \cos \theta_T} |\tilde{\mathbf{E}}_I|. \quad (17.29b)$$

接下来我们分两种情况分别讨论。

- 如果光从较低折射率的介质中入射， $n' < n''$ ， $\sin \theta_I > \sin \theta_T$ ， $\cos \theta_I < \cos \theta_T$ 。于是在  $0 \leq \theta_I \leq \frac{\pi}{2}$  的范围内恒有

$$n' \cos \theta_I - n'' \cos \theta_T < 0. \quad (17.30)$$

因此 TE 偏振的反射波始终是不消失的，并且它与入射波之间在相位上始终相差了半个周期。而另一方面，通过解方程

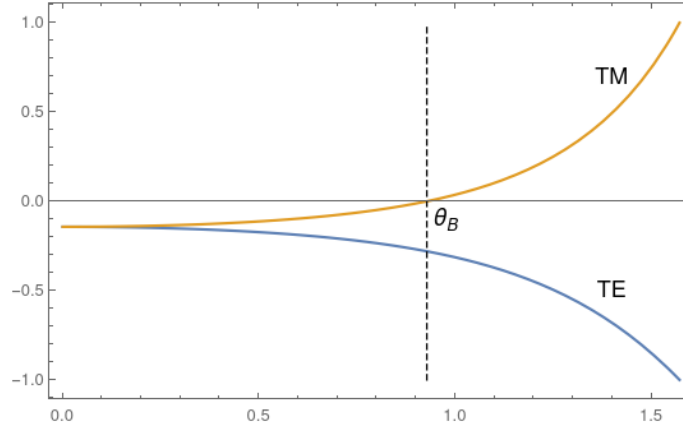
$$-n'' \cos \theta_I + n' \cos \theta_T = -n'' \sqrt{1 - \sin^2 \theta_I} + n' \sqrt{1 - \frac{n'^2}{n''^2} \sin^2 \theta_I} = 0, \quad (17.31)$$

我们可以的到一个特殊的角度

$$\theta_B = \arcsin \sqrt{\frac{1 - (n'/n'')^2}{1 - (n'/n'')^4}} < \frac{\pi}{2}. \quad (17.32)$$



当入射角  $\theta_I = \theta_B$  时 TM 偏振的反射波完全消失，或者说此时反射波中只存在 TE 偏振。这个特殊的角度称为**布鲁斯特角** (Brewster angle)。当  $\theta_I < \theta_B$  时 TM 反射波与入射波的相位相差半个周期，而当  $\theta_I > \theta_B$  时两者同相位。为了对这些变化有个直观认识，当  $\frac{n'}{n''} = \frac{3}{4}$  时 TE 波与 TM 波各自的  $|\tilde{\mathbf{E}}_R|/|\tilde{\mathbf{E}}_I|$  随入射角  $\theta_I$  的变化关系如下图：



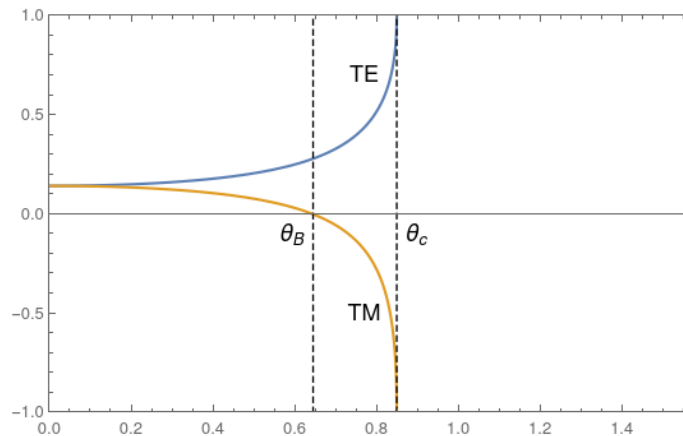
- 如果光从较高折射率的介质中入射， $n' > n''$ ， $\sin \theta_I < \sin \theta_T$ ， $\cos \theta_I > \cos \theta_T$ 。此时入射角  $\theta_I$  有个最大的临界值  $\theta_c$

$$\theta_c = \arcsin \frac{n''}{n'} \quad (17.33)$$

使得  $\theta_T = \pi/2$ 。当  $\theta_I > \theta_c$  时折射角  $\theta_T$  没有可取的实数值，故而不存在长距离上透射的平面波。这个现象称为**全反射**，将在稍后进一步讨论。在  $0 \leq \theta_I \leq \theta_c$  的范围内恒有

$$n' \cos \theta_I - n'' \cos \theta_T > 0. \quad (17.34)$$

因此 TE 偏振的反射波依然始终是不消失的，并且它与入射波始终同相位。另一方面，对于 TM 波前面定义的布鲁斯特角  $\theta_B$  同样存在，且  $\theta_B < \theta_c$ 。当  $\theta_I < \theta_B$  时 TM 偏振的反射波与入射波同相位，而当  $\theta_B < \theta_I < \theta_c$  时它们的相位相差半个周期。为了对这些变化有个直观认识，当  $\frac{n'}{n''} = \frac{4}{3}$  时 TE 波与 TM 波各自的  $|\tilde{\mathbf{E}}_R|/|\tilde{\mathbf{E}}_I|$  随入射角  $\theta_I$  的变化关系如下图：



### 17.3 全反射

- 上一节提及当光从高折射率介质中入射且  $\theta_I > \theta_c$  时会发生所谓的全反射现象。现在我们具体查看该现象中电磁波的运动。首先注意到折射定律本质来源于波矢之间的关系

$$n''^2((k_I^2)^2 + (k_I^3)^2) = n'^2((k_T^2)^2 + (k_T^3)^2), \quad k_I^2 = k_T^2. \quad (17.35)$$

由于  $\mathbf{k}_I$  的各分量均为实数，当  $\theta_I = \theta_c$  时  $\theta_T = \pi/2$ ，意味着此时  $k_T^3 = 0$ 。而当  $\theta_I > \theta_c$  时则  $k_T^3$  只能取虚数值，具体为

$$k_T^3 = i \sqrt{(k_I^2)^2 - \left(\frac{n''}{n'}\right)^2 ((k_I^2)^2 + (k_I^3)^2)} = i |\mathbf{k}_I| \underbrace{\sqrt{\sin^2 \theta_I - \left(\frac{n''}{n'}\right)^2}}_{\kappa}, \quad \theta_I > \theta_c. \quad (17.36)$$

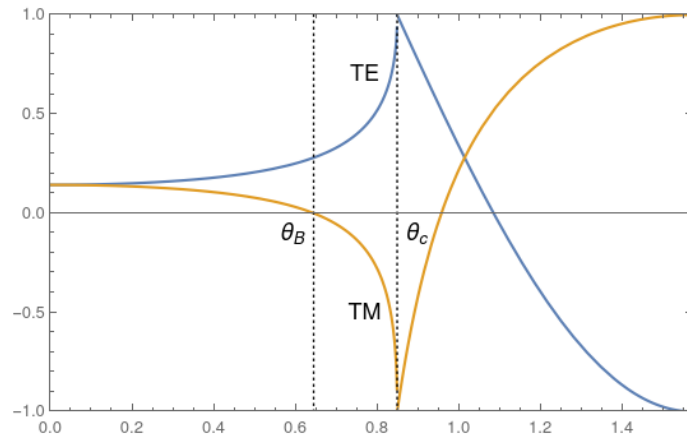
注意开平方一般会给出互为相反数的两个解，不过除了上述解之外另一个解  $k_T^3 = -i\kappa$  会导致电磁场在  $x^3 \rightarrow -\infty$  处发散，因此我们将其舍去。于是在全反射的情况下介质二中的透射波变为

$$\mathbf{E} = \Re \tilde{\mathbf{E}} e^{\kappa x^3} e^{-i\omega t + i|\mathbf{k}_I| \sin \theta_I x^2}, \quad (17.37a)$$

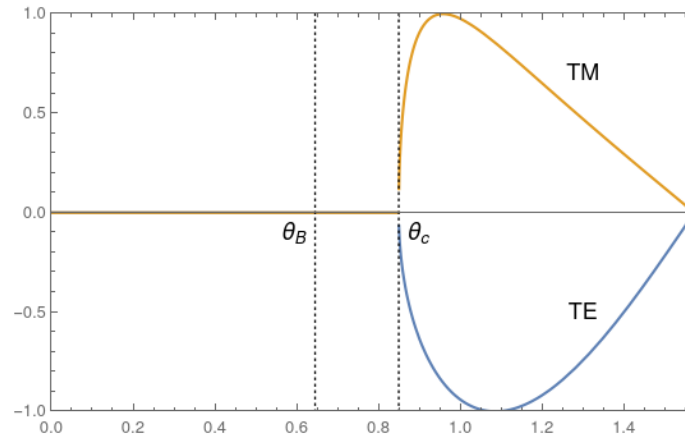
$$\mathbf{B} = \Re \tilde{\mathbf{B}} e^{\kappa x^3} e^{-i\omega t + i|\mathbf{k}_I| \sin \theta_I x^2}. \quad (17.37b)$$

故而此时透射波实际并非完全不存在，只是它的运动方向完全平行于界面，且在垂直于界面的方向上其振幅指数衰减，我们也把它称为**消逝波**。在距离界面厚度约为  $1/\kappa$  的区域内这种消逝波依旧是不可忽略的。

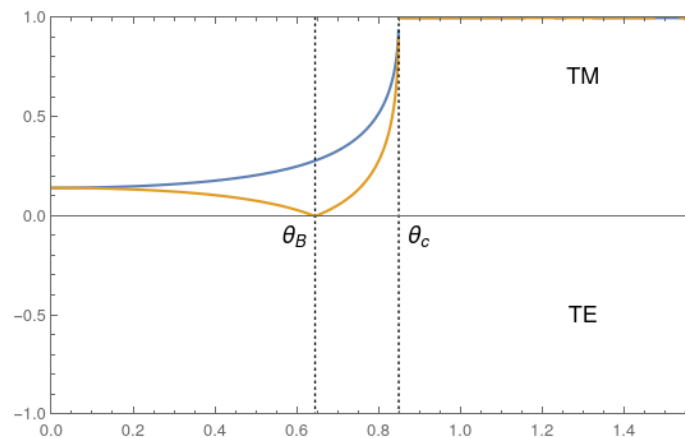
- 关于偏振矢量之间的关系我们依然可以沿用之前的结论，只不过解析延拓后反射波与透射波的偏振在全反射的情况下会有复数的取值。依然以  $\frac{n''}{n'} = \frac{4}{3}$  的参数为例， $\Re \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_R|}{|\mathbf{E}_I|}$  随入射角  $\theta_I$  的变化在整个  $[0, \pi/2]$  区间里为



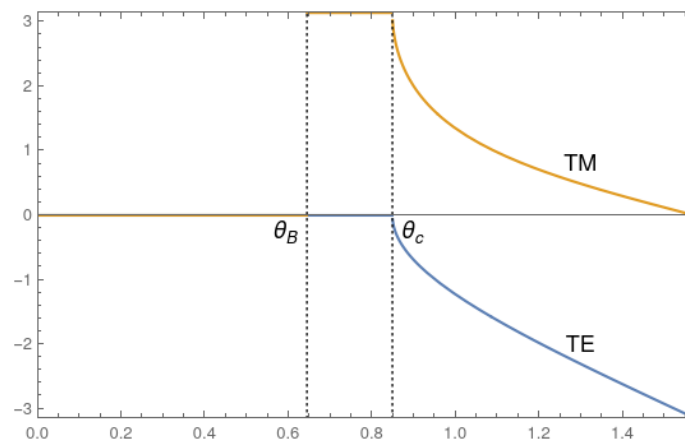
而  $\Im \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_R|}{|\mathbf{E}_I|}$  的变化为



观察上述两幅图，我们看到无论是在 TE 波里还是 TM 波里  $\Re \frac{\tilde{E}_R}{|E_I|}$  在  $\theta_I > \theta_c$  的区域分别都会在某一个点上等于零。不过这并不意味着在这些点上相应的反射波再次消失，因为特别是当偏振矢量有复数取值的时候一列波的振幅是由其偏振矢量的绝对模长决定的。为看清反射波的性质， $\left| \frac{\tilde{E}_R}{|E_I|} \right|$  随  $\theta_I$  的变化为



于是我们看到反射波的振幅在  $\theta_I > \theta_c$  的时候实际是恒定不变的。其真正随  $\theta_I$  发生的变化是在于反射波相对于入射波在相位上的改变，这可由  $\arg \frac{\tilde{E}_R}{|E_I|}$  随  $\theta_I$  的变化关系体现



## 17.4 波导

- 在前面的讨论中我们所考虑的电磁场的运动皆在不受限的区域中。接下来我们了解一下电磁场在由边界围出的有限区域中的运动性质。这类问题的典型是区域在某一个空间方向上具有平移对称性（不失一般性我们把这个方向指定为空间笛卡尔坐标系的第三轴），而在另外两个方向上受限，从而构成一个无限长的柱形。这样的区域称为**波导**（wave guide）。
- 简便起见我们假定这个区域的边界均为理想导体。由前面的讨论我们知道理想导体可以看作电导率  $\sigma \rightarrow \infty$  的极限，因此理想导体内部电场为零（否则导体内部会有无穷大的电流密度），由麦克斯韦方程组进一步可知理想导体内部的磁场只能是一个常数，我们将其直接设为零。由于电场的切向分量与磁场的法向分量在界面上始终保持连续，在上述前提下我们看到波导内的电磁场在贴近边界处需要满足边界条件

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0, \quad \mathbf{B}_{\perp} = 0. \quad (17.38)$$

- 我们考察沿第三轴方向传播的单色波动解，于是可以将电场与磁场设置为

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{E}}(x^1, x^2) e^{-i\omega t + ikx^3}, \quad (17.39a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \Re \tilde{\mathbf{B}}(x^1, x^2) e^{-i\omega t + ikx^3}. \quad (17.39b)$$

假定波导填充有介电常数为  $\epsilon$ 、磁导率为  $\mu$  的均匀线性介质。将上述形式代入麦克斯韦方程组，第一个方程给出

$$\partial_1 \tilde{E}^1 + \partial_2 \tilde{E}^2 + ik \tilde{E}^3 = 0. \quad (17.40)$$

第二个方程给出

$$\partial_2 \tilde{B}^3 - ik \tilde{B}^2 + i\omega \epsilon \mu \tilde{E}^1 = 0, \quad (17.41a)$$

$$ik \tilde{B}^1 - \partial_1 \tilde{B}^3 + i\omega \epsilon \mu \tilde{E}^2 = 0, \quad (17.41b)$$

$$\partial_1 \tilde{B}^2 - \partial_2 \tilde{B}^1 + i\omega \epsilon \mu \tilde{E}^3 = 0. \quad (17.41c)$$

第三个方程给出

$$\partial_1 \tilde{B}^1 + \partial_2 \tilde{B}^2 + ik \tilde{B}^3 = 0. \quad (17.42)$$

第四个方程给出

$$\partial_2 \tilde{E}^3 - ik \tilde{E}^2 - i\omega \tilde{B}^1 = 0, \quad (17.43a)$$

$$ik \tilde{E}^1 - \partial_1 \tilde{E}^3 - i\omega \tilde{B}^2 = 0, \quad (17.43b)$$

$$\partial_1 \tilde{E}^2 - \partial_2 \tilde{E}^1 - i\omega \tilde{B}^3 = 0. \quad (17.43c)$$

- 注意到其中四个方程(17.41a)、(17.41b)、(17.43a)和(17.43b)可以看作是關於  $\tilde{E}^1$ 、 $\tilde{E}^2$ 、

$\tilde{B}^1$  和  $\tilde{B}^2$  四个变量的线性方程组。由此可以解得

$$\tilde{E}^1 = -\frac{i}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} (k\partial_1\tilde{E}^3 + \omega\partial_2\tilde{B}^3), \quad (17.44a)$$

$$\tilde{E}^2 = -\frac{i}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} (k\partial_2\tilde{E}^3 - \omega\partial_1\tilde{B}^3), \quad (17.44b)$$

$$\tilde{B}^1 = -\frac{i}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} (k\partial_1\tilde{B}^3 - \epsilon\mu\omega\partial_2\tilde{E}^3), \quad (17.44c)$$

$$\tilde{B}^2 = -\frac{i}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} (k\partial_2\tilde{B}^3 + \epsilon\mu\omega\partial_1\tilde{E}^3). \quad (17.44d)$$

将此代入剩余的四个方程, 我们可以得到关于  $\tilde{E}^3$  和  $\tilde{B}^3$  的两个独立的二阶微分方程

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \epsilon\mu\omega^2 - k^2)\tilde{E}^3 = 0, \quad (17.45a)$$

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \epsilon\mu\omega^2 - k^2)\tilde{B}^3 = 0. \quad (17.45b)$$

这两个微分方程连同区域的边界条件将决定波导中电磁场的具体构形。

- 从上述微分方程我们看到  $\tilde{E}^3$  与  $\tilde{B}^3$  的选择是相互独立的。我们可以把波导中电磁场的运动模式分为两类: 其中一类满足条件  $\tilde{E}^3(x^1, x^2) = 0$  (从而方程(17.45a)是平庸的), 称为**横电模式** (transverse electric mode) 或 TE 模式; 另一类满足  $\tilde{B}^3(x^1, x^2) = 0$  (从而方程(17.45b)是平庸的), 称为**横磁模式** (transverse magnetic mode) 或 TM 模式。由(17.44)我们看到, 当  $k^2 \neq \epsilon\mu\omega^2$  时, 如果我们同时令  $\tilde{E}^3 = \tilde{B}^3 = 0$  那么整个电磁场都为零。因此如果使这个特殊的条件成立我们至少得要求  $k^2 = \epsilon\mu\omega^2$ , 对应的模式称为 TEM 模式, 关于它我们将在最后讨论。
- 进一步简化问题, 接下来我们具体考虑矩形波导。假定波导的横截面 (任意垂直于第三轴的平面) 是一个由边界

$$x^1 = 0, \quad x^1 = a, \quad x^2 = 0, \quad x^2 = b \quad (17.46)$$

围成的矩形 (不失一般性假定  $a \geq b$ )。那么在  $x^1 = 0, a$  的边界上我们需要考虑  $\tilde{E}^2$ 、 $\tilde{E}^3$  以及  $\tilde{B}^1$  的边界条件, 而在  $x^2 = 0, b$  的边界上我们需要考虑  $\tilde{E}^1$ 、 $\tilde{E}^3$  和  $\tilde{B}^2$  的边界条件。

- 首先讨论 TE 模式的电磁波, 此时有关  $\tilde{E}^3$  的边界条件是平庸的。其余边界条件则等效于

$$\partial_1\tilde{B}^3|_{x^1=0} = \partial_1\tilde{B}^3|_{x^1=a} = 0, \quad \partial_2\tilde{B}^3|_{x^2=0} = \partial_2\tilde{B}^3|_{x^2=b} = 0. \quad (17.47)$$

或者说在四个边界上  $\tilde{B}^3$  均满足诺依曼条件。由此  $\tilde{B}^3$  可以指定为依赖于两个整数参数  $m$ 、 $n$  的表达式

$$\tilde{B}^3(x^1, x^2) = C \cos\left(\frac{\pi m x^1}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right). \quad (17.48)$$

将其代入微分方程(17.45b)得到

$$-\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \epsilon\mu\omega^2 - k^2 = 0. \quad (17.49)$$

由此可得波数  $k$  与频率  $\omega$  之间的依赖关系为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}. \quad (17.50)$$

该表达式称为波导中 TE 模式的**色散关系** (dispersion relation)。不同于真空中或无限均匀介质中的色散关系, 这里  $\omega$  与  $k$  不是线性相关的。不过当  $k \rightarrow \infty$  时,  $m, n$  对应的两项可以忽略不计, 于是我们近似有  $k \approx \sqrt{\epsilon\mu}\omega$ , 该关系退化到无限均匀介质中平面波的色散关系。图像上我们看到这样的极限下电磁波的波长远远小于波导的尺寸, 于是在与波长相当量级的尺度上观察时我们可以近似认为波导的边界位于无穷远处, 因此波导中电磁波的传播问题在领头近似下退化为之前讨论的无限空间中的电磁波传播问题。

- 我们把由  $m, n$  给定的 TE 模式记做  $\text{TE}_{mn}$  模式。对于给定的  $m, n$ , 为了使波数  $k > 0$ , 我们看到频率必须大于一个特定的值

$$\omega > \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \equiv \omega_{mn}. \quad (17.51)$$

这个值称为  $\text{TE}_{mn}$  模式的**截止频率** (cutoff frequency)。由于当  $m = n = 0$  时  $k = \epsilon\mu\omega$ , 由(17.44)我们看到对于非零的  $\tilde{B}^3$  电磁场在第一、第二方向的分量会是无穷大。因此模式  $\text{TE}_{00}$  是不能存在的。于是我们进一步知道对于 TE 模式的电磁波最小的截止频率为

$$\omega_{10} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}a}. \quad (17.52)$$

- 基于上述结果, 我们可以求出  $\text{TE}_{mn}$  模式中电场的所有分量

$$E^1 = \Re \frac{i\omega}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi n}{b} C \cos\left(\frac{\pi m x^1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right) e^{-i\omega t + i k x^3}, \quad (17.53a)$$

$$E^2 = -\Re \frac{i\omega}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi m}{a} C \sin\left(\frac{\pi m x^1}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right) e^{-i\omega t + i k x^3}, \quad (17.53b)$$

$$E^3 = 0, \quad (17.53c)$$

以及磁场的所有分量

$$B^1 = \Re \frac{i k}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi m}{a} C \sin\left(\frac{\pi m x^1}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right) e^{-i\omega t + i k x^3}, \quad (17.54a)$$

$$B^2 = \Re \frac{i k}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi n}{b} C \cos\left(\frac{\pi m x^1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right) e^{-i\omega t + i k x^3}, \quad (17.54b)$$

$$B^3 = \Re C \cos\left(\frac{\pi m x^1}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right) e^{-i\omega t + i k x^3}. \quad (17.54c)$$

如果我们仅仅关注这些场强在第一或第二空间方向上的坐标依赖关系, 可以看到这些方向上电磁波实际是以驻波的方式运动。如果我们引入波矢记号

$$\mathbf{k}_{s_1 s_2} = \left(s_1 \frac{\pi m}{a}, s_2 \frac{\pi n}{b}, k\right), \quad s_1, s_2 = \pm, \quad (17.55)$$

那么将上述表达式里的正弦和余弦因子进一步拆解开来可得电场

$$E^1 = \Re e \frac{\omega}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi n}{b} \frac{C}{4} e^{-i\omega t} (e^{ik_{++}\cdot x} + e^{ik_{-+}\cdot x} - e^{ik_{+-}\cdot x} - e^{ik_{--}\cdot x}), \quad (17.56a)$$

$$E^2 = \Re e \frac{\omega}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi m}{a} \frac{C}{4} e^{-i\omega t} (-e^{ik_{++}\cdot x} + e^{ik_{-+}\cdot x} - e^{ik_{+-}\cdot x} + e^{ik_{--}\cdot x}), \quad (17.56b)$$

$$E^3 = 0, \quad (17.56c)$$

以及磁场

$$B^1 = \Re e \frac{k}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi m}{a} \frac{C}{4} e^{-i\omega t} (e^{ik_{++}\cdot x} - e^{ik_{-+}\cdot x} + e^{ik_{+-}\cdot x} - e^{ik_{--}\cdot x}), \quad (17.57a)$$

$$B^2 = \Re e \frac{k}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi n}{b} \frac{C}{4} e^{-i\omega t} (e^{ik_{++}\cdot x} + e^{ik_{-+}\cdot x} - e^{ik_{+-}\cdot x} - e^{ik_{--}\cdot x}), \quad (17.57b)$$

$$B^3 = \Re e \frac{C}{4} e^{-i\omega t} (e^{ik_{++}\cdot x} + e^{ik_{-+}\cdot x} + e^{ik_{+-}\cdot x} + e^{ik_{--}\cdot x}). \quad (17.57c)$$

也就是说我们上面所得到的解实际上也可以理解为由四种不同的波矢指定的四列不同的平面波的加和。这四列波的区别在于它们在第一和第二空间方向上是沿正向传播还是沿逆向传播。这四种平面波的同时存在性不难理解：但看每一个边界相当于前面所考虑的两种物质界面上的传播问题（只不过其中一种物质现在是理想导体），所以正向与逆向传播的波一个为入射波而另一个为相应的反射波。如果我们把  $\mathbf{k}_{s_1 s_2}$  对应的贡献记做  $\mathbf{E}_{s_1 s_2}$  与  $\mathbf{B}_{s_1 s_2}$ ，那么由上述表达式不难验证

$$\mathbf{E}_{s_1 s_2} \cdot \mathbf{k}_{s_1 s_2} = 0, \quad \mathbf{B}_{s_1 s_2} \cdot \mathbf{k}_{s_1 s_2} = 0. \quad (17.58)$$

于是我们看到这里得到的电磁波解在偏振性质上与前面无限空间里电磁波为横波的结论是相融洽的。

- 得到 TE 模式电磁波的具体结果后我们可以回过来看一下我们尚未用过的两种边界条件（注意界面其中一侧为理想导体，并且假定边界上单位法向量  $\mathbf{n}$  指向波导内部）

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \Sigma_{\text{自由}}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{K}_{\text{自由}}, \quad (17.59)$$

其中  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{H}$  指代边界内侧对应的场矢量，而  $\Sigma_{\text{自由}}$  与  $\mathbf{K}_{\text{自由}}$  为理想导体表面的诱导电荷与电流的面密度。在  $x^1 = 0$  的边界上，这意味着

$$\Sigma_{\text{自由}} = \epsilon E^1|_{x^1=0} = \Re e \frac{i\epsilon\omega}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi n}{b} C \sin\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right) e^{-i\omega t + i k x^3}, \quad (17.60)$$

$$\mathbf{K}_{\text{自由}} = \left(0, -\frac{B^3}{\mu}, \frac{B^2}{\mu}\right)\bigg|_{x^1=0} = \Re e \left(0, -\cos\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right), \frac{i k}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \frac{\pi n}{b} \sin\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right)\right) \frac{C}{\mu} e^{-i\omega t + i k x^3}. \quad (17.61)$$

于是我们看到伴随着电磁波在波导中的传播，波导边界上也存在着面电荷与面电流密度的变化。其余边界上的讨论类似，这里不再赘述。

- 其次讨论 TM 模式的电磁波。对于这类模式，在  $x_1 = 0, a$  的边界上我们有条件

$$\tilde{E}^3|_{x^1=0,a} = \partial_2 \tilde{E}^3|_{x^1=0,a} = 0, \quad (17.62)$$

而在  $x^2 = 0, b$  的边界上我们有边界条件

$$\tilde{E}^3|_{x^2=0,b} = \partial_1 \tilde{E}^3|_{x^2=0,b} = 0. \quad (17.63)$$

对于函数  $\tilde{E}^3(x^1, x^2)$  来说这些条件乍看上去是过多的, 不过我们可以利用其中的狄利希里条件给出

$$\tilde{E}^3(x^1, x^2) = C \sin\left(\frac{\pi m x^1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n x^2}{b}\right). \quad (17.64)$$

如此则另外四个带微分的边界条件是自动满足的 (注意它们并不是诺依曼条件)。将这样的表达式代入微分方程(17.45a)我们得到完全相同的关系(17.50)。我们把由上述  $m, n$  给定的 TM 模式记做  $\text{TM}_{m,n}$  模式。由上述表达式我们看到只要  $m$  或者  $n$  为零那么整个电磁场都会消失。因此对于 TM 模式而言必须有  $m, n \geq 1$ 。相应地, 波导中 TM 模式电磁波的最小截止频率为

$$\omega_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \quad (17.65)$$

- 最后我们再简单讨论下波导中 TEM 模式 ( $\tilde{E}^3 = \tilde{B}^3 = 0$ ) 的存在性。在该情况下我们首先可以观察到其中两个麦克斯韦方程(17.40)与(17.43c)退化为

$$\partial_1 \tilde{E}^1 + \partial_2 \tilde{E}^2 = 0, \quad \partial_1 \tilde{E}^2 - \partial_2 \tilde{E}^1 = 0. \quad (17.66)$$

这意味着电场的两个横向分量均为调和函数, 满足二维的拉普拉斯方程

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2) \tilde{E}^1 = (\partial_1^2 + \partial_2^2) \tilde{E}^2 = 0 \quad (17.67)$$



18.1	推迟势	177
18.2	单个带电质点的电磁辐射	182
18.3	电偶极辐射	189
18.4	磁偶极辐射	189
18.5	辐射的一般性质	189

- 前面几讲中我们考察了真空中电磁场自身的运动以及宏观物质对电磁场运动的影响。在有宏观物质存在的情况下，虽然理论上我们的讨论已经涉及到带电物质通过耦合对电磁场动力学演化产生的影响，但实践上我们看到通过适当等效处理我们看到这类问题可以划归到与真空中电磁场演化类似的问题：决定演化的动力学方程依然是关于电磁场的**齐次方程**。
- 这一讲里我们将真正处理有关带电物质对电磁场的影响的问题，此时麦克斯韦方程里将一般性地多出与物质有关的**非齐次项**。用场变量  $A^\mu$  并且在洛伦茨规范的前提下，我们的基本出发点即为

$$\partial_\rho \partial^\rho A^\mu = J^\mu. \quad (18.1)$$

如同前面曾提及的，这里我们完全不考虑带电物质自身的动力学演化，而仅仅把它的运动当作一个已知的信息（或者说背景）来研究电磁场的演化。

- 在这类问题中我们将接触一类新的现象：**电磁辐射**。这类现象的本质在于带电物质通过相互作用将自身的能量/动量转移给电磁场，并且这些能量/动量以电磁波的形式从带电物质所在的局部空间向外扩散的过程。

## 18.1 推迟势

- 我们首先探讨带电物质影响电磁场的一般公式。换句话说，微分方程(18.1)的解总是可以表述为对应齐次方程（真空中的麦克斯韦方程） $\partial_\rho \partial^\rho A^\mu = 0$  所给出的通解加上(18.1)自身所给出的一个特解。有关通解的形式我们在前几讲中已经着重讨论。现在我们希望寻求这个非齐次方程的特解。
- 可以注意到微分方程(18.1)与静电问题中电势函数  $\phi$  所遵循的微分方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18.2)$$

在结构上有高度的类似。静电问题中在假定空间无限大的前提下，我们通过库仑定

律已经知道(18.2)的解为

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (18.3)$$

有了这样一个表达式我们可以直接证明它满足微分方程(18.2)。关于(18.1)我们完全可以通过类比猜测一个解的形式并通过计算微分尝试证明其正确性（例如格里菲斯书上的处理）。在接下来的讨论里我们换一个角度直接寻找(18.1)的特解。

- 为此我们先回到上述静电问题，回顾一个之前涉及的概念并做进一步讨论，其中所用的方法可以推广到对(18.1)的求解。在讨论一个电荷分布  $\rho(\mathbf{x})$  对电势的影响时我们可以把电荷分布看作是由一个个微小体积元上的“点电荷”构成的，而电势是所有这些点电荷的贡献的总和。注意到

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (18.4)$$

我们可以令

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (18.5)$$

其中  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  为我们之前在静电问题中介绍的格林函数，它满足微分方程

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (18.6)$$

该方程说明格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  描述的是一个位于点  $\mathbf{x}'$  的点电荷在空间位置  $\mathbf{x}$  对应的电势。在所考察区域无限大的前提下，由于微分方程的平移不变性，格林函数可以简化为  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。为了求解上述方程我们使用傅立叶变换

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (18.7)$$

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{G}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \quad (18.8)$$

于是在傅立叶空间中上述微分方程变为

$$-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \tilde{G}(\mathbf{p}) = -4\pi. \quad (18.9)$$

由此可以简单解得  $\tilde{G}(\mathbf{p}) = \frac{4\pi}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$ ，相应地我们也得到了格林函数的一个积分表达式

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (18.10)$$

由于动量  $\mathbf{p}$  是在全动量空间里积分，由等式右侧我们容易看到积分结果只能依赖于  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  所构成的旋转不变的表达式，而这只能是  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2$ 。另一方面，由上述表达式我们也能够预期缩放关系

$$G(\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = \frac{1}{\lambda} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (18.11)$$

于是我们预期

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \propto \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (18.12)$$

我们现在通过具体计算验证这个结果并进一步定出前面的系数。为此我们可以令  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  的方向为第三轴正向, 从而建立球坐标系  $\{p, \theta, \varphi\}$ 。于是我们有

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp p^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta p^{-2} e^{ip|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta} \\ &= \frac{2}{\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \sin(p|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (18.13)$$

其中最后一个等号使用了一般公式  $\int_0^\infty \frac{dp}{p} \sin(pa) = \frac{\pi}{2} \text{sign}(a)$ 。于是我们直接计算出了无限空间中静电问题的格林函数, 将此代入(18.5)我们重新得到了熟悉的库仑公式。

- 借鉴上述计算, 在一般电磁场的动力学问题中我们把描述带电物质属性的四维电流矢量  $J^\mu$  看作是四维闵氏时空中一个个事件点邻域内的微小电流矢量所构成

$$J^\mu(x) = \int d^4x' J^\mu(x') \delta^{(4)}(x - x'). \quad (18.14)$$

相应地我们把四维势矢量表述成对四电流的积分

$$A^\mu(x) = \int d^4x' J_\nu(x') K^{\mu\nu}(x, x'). \quad (18.15)$$

$K^{\mu\nu}(x, x')$  为待求解的积分核。将此代入洛伦茨规范下的麦克斯韦方程, 得到

$$\int d^4x' J_\nu(x') \partial_\rho \partial^\rho K^{\mu\nu}(x, x') = \int d^4x' J_\nu(x') g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x'). \quad (18.16)$$

由于这需要对任意电流分布都成立, 我们于是得到一个关于积分核自身的微分方程

$$\partial_\rho \partial^\rho K^{\mu\nu}(x, x') = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x'). \quad (18.17)$$

考虑到我们现在讨论的依然是完整的时空 (因此上述方程具有平移对称性) 以及指标关系, 我们可以令

$$K^{\mu\nu}(x, x') = g^{\mu\nu} K(x - x'), \quad (18.18)$$

于是待求解的方程最终化为

$$\partial_\rho \partial^\rho K(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (18.19)$$

该方程描述的是带电物质的单个事件点相应的四维势矢量在闵氏时空中的分布。

- 在目前的阶段我们事实上已经足以证明由上述积分给出的四维势矢量一定满足洛伦茨规范条件

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= \int d^4x' J^\mu(x') \partial_\mu K(x - x') \\ &= - \int d^4x' J^\mu(x') \partial'_\mu K(x - x') \\ &= \int d^4x' \underbrace{(\partial'_\mu J^\mu(x'))}_0 K(x - x'). \end{aligned} \quad (18.20)$$

- 接下来求解上述方程。我们还是进入（四维）傅立叶空间

$$\delta^{(4)}(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)}, \quad (18.21)$$

$$K(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{K}(p) e^{ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)}. \quad (18.22)$$

于是傅立叶空间中上述微分方程同样化为一个代数方程，由之解得

$$\tilde{K}(p) = -\frac{1}{p_\rho p^\rho} \equiv \frac{1}{(p^0)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}. \quad (18.23)$$

- 通过上述分析，理论上讲我们已经得到了形式上求解四维势矢量的公式

$$K(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^0)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} e^{ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)}. \quad (18.24)$$

不过在实际计算中这里有个与（静电问题的）三维欧氏空间的本质区别需要注意。在静电问题中格林函数(18.10)的被积函数在一个孤立的点  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  上发散，不过在后续计算中我们看到这个发散不会对格林函数本身构成影响。而在上述积分核的表达式中，由于闵氏时空度规的时间分量与空间分量符号不同，导致其被积函数在整个光锥上皆是发散的。如果我们简单地把上述积分看作是实数空间里的积分，积分域中这个发散子空间如何贡献到最终的函数实际具有一定歧义。

- 为消除上述歧义，通常的做法是暂且冻结住动量空间分量的积分  $\int d^3 \mathbf{p}$ ，并且把剩下时间分量的积分  $\int dp^0$  看作是在  $p^0$  复平面上的线积分。 $p^0$  积分的路径几乎是整个实轴，只不过它在其中两个点

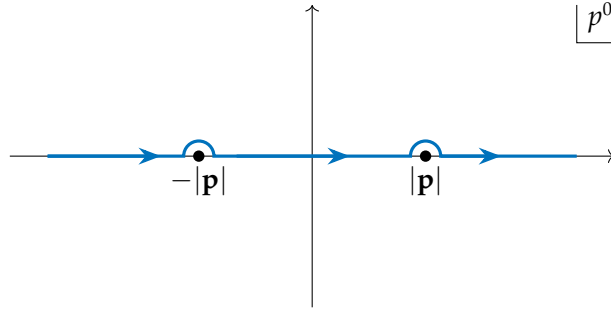
$$p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} \quad (18.25)$$

会遇到发散的被积函数。上述歧义性在于积分路径在这两个点的邻域里应该如何绕过这两个极点，以使得  $p^0$  积分具有良好的定义。

- 接下来有一个物理上的考量：前面在介绍闵氏时空结构的时候我们讲过，一个位于  $x'$  处的事件要能够影响位于  $x$  处的事件，那么  $x$  必须位于  $x'$  的未来光锥之上或者内部，或者反过来说  $x'$  必须位于  $x$  的过去光锥之上或者内部。这个至少要求  $x'^0 \leq x^0$ 。基于上述积分核  $K(x - x')$  的物理意义，它需要满足条件

$$K(x - x') = 0, \quad x^0 < x'^0. \quad (18.26)$$

注意到积分核表达式(18.24)的被积函数中依赖于  $p^0$  的指数因子为  $e^{-ip^0(x^0 - x'^0)}$ 。因此当  $x^0 < x'^0$  时整个被积函数在  $p^0$  的正虚数方向上是指数衰减的，而在  $p^0$  的负虚数方向上是指数发散的。于是在该情况下我们可以将整个积分路径往上半平面合拢从而构成一个闭合的积分围道。柯西定理告诉我们这类积分的结果等价于围道内所有极点上的留数（如果被积函数类似于现在的例子一样只有极点的话）。为了使条件(18.26)得到满足，我们看到在一开始定义  $p^0$  积分路径的时候必须令路径从  $p^0$  上半平面绕过极点(18.25)。



由这种积分路径定义的积分核  $K^{\mu\nu}(x, x')$  称为**推迟格林函数** (retarded Green's function) 或者**推迟传播子** (retarded propagator)。

- 反之, 当  $x^0 > x'^0$  时, 被积函数只有在负虚数方向上是指数收敛的。此时我们能够将  $p^0$  的积分路径向下半平面合拢, 于是整个  $p^0$  积分等价于两个极点所给出的留数的相反数之和。由此我们看到积分核又可写为

$$K(x - x') = -\theta(x^0 - x'^0) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\sin(|\mathbf{p}|(x^0 - x'^0))}{|\mathbf{p}|} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (18.27)$$

剩余的空间分量积分我们采用与静电问题中(18.13)类似的处理方式, 有

$$\begin{aligned} K(x - x') &= -\theta(x^0 - x'^0) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp p^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\sin(p(x^0 - x'^0))}{p} e^{ip|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta} \\ &= -\theta(x^0 - x'^0) \frac{2}{(2\pi)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_0^\infty dp \sin(p(x^0 - x'^0)) \sin(p|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \\ &= \frac{\theta(x^0 - x'^0)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\delta(x^0 - x'^0 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) - \delta(x^0 - x'^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)) \\ &= -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(x^0 - x'^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \end{aligned} \quad (18.28)$$

这里第三个等号的计算里我们将两个正弦函数分别拆开成指数后容易观察到所得的四项恰好可以重组成两种狄拉克  $\delta$  函数的傅立叶分解。其中一种  $\delta$  函数与  $x^0 > x'^0$  的时序不相容, 因此可以直接舍去 (见第四个等号)。于是最后我们看到推迟格林函数完全正比于剩下的  $\delta$  函数。这个  $\delta$  函数告诉我们, 如果一个位于  $x'$  处的事件要能够影响  $x$  处的电磁场, 这两个事件点甚至必须是类光分隔的, 或者说其中一个事件点必定位于另一个事件点的光锥上!

- 将上述结果代入我们最初设置的积分(18.15), 于是最终得到

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^4 x' J^\mu(x') \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{J^\mu((x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (18.29)$$

如此计算出的四维势矢量称为**推迟势** (retarded potential), 它是我们后续分析带电物质对电磁场影响的基本出发点。我们看到这个积分表达式在形式上与库仑势高度类似。其主要的不同在于电流源相对于势矢量所处的事件点在时间上有个提前, 且

提前的量恰好是电磁波在对应两空间点之间传播所需的时间。这进一步印证了电磁相互作用并非超距作用，其传导需要依托电磁波的传播。

- 如果我们需要回到三维空间中所定义的标势  $\phi(t, \mathbf{x})$  与矢势  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ ，回忆之前我们得到的四维势矢量(15.8)以及四电流(14.76)的具体分量

$$A^\mu = (-\sqrt{\epsilon_0}\phi, -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\mathbf{A}), \quad (18.30)$$

$$J^\mu = \left( \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon_0}}, \sqrt{\mu_0}\mathbf{J} \right). \quad (18.31)$$

我们于是分别得到

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (18.32)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (18.33)$$

## 18.2 单个带电质点的电磁辐射

- 利用上一节导出的推迟势，我们现在考察一下单个做任意运动的带电质点所引发的电磁辐射。由推迟势的积分表达式(18.29)我们看到，这里关键是需要找到单个质点运动所对应的四电流分布  $J^\mu(x)$ 。
- 为此我们首先讨论下质点自身的运动。假定质点所带电荷的电量为  $q$ ，且方便起见假定质点的运动可以由参数方程

$$x^\mu = y^\mu(\tau) \quad (18.34)$$

刻画，其中  $y^\mu(\tau)$  为已知的函数。参数  $\tau$  标记质点运动轨迹在四维闵氏时空中的长度刻度。考虑质点在任意时刻上的微小位移，我们有对应关系

$$d\tau = \sqrt{-ds^2}. \quad (18.35)$$

由于我们考虑的是现实的质点，所以恒有  $ds^2 < 0$ ，因此在取定参考零点后  $\tau$  作为一个实数参数具有良好的定义。使用这个参数的好处在于它在惯性参考系变换下是一个不变量。在之前的一个作业中我们看到描述质点在任意时刻的运动状态可以用所谓的四速度  $u^\mu$ （它也是一个逆变矢量）

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (18.36)$$

该矢量在质点经过的任意一个事件点处均与质点在闵氏时空中的轨迹相切，因此它也表征了质点运动的方向与快慢。

- 由上述讨论我们可以了解到：
  - 如果我们要改用四电流的方式描述该质点，那么四电流不可能在整个闵氏时空中都有非平庸的分布：它只能局限于质点运动的轨迹上，因此  $J^\mu$  的表达式必定包含狄拉克  $\delta$  函数。

- 由于  $J^\mu$  在参考系变换下如同  $x^\mu$  以及  $u^\mu$  一样也必须是一个逆变张量, 且它描述的是因质点运动所对应等效出的电流, 因此我们自然期待至少在每个给定时刻  $J^\mu \propto u^\mu$ 。
- 如果质点在空间中是静止的,  $u^\mu$  只有时间分量, 在静电问题中我们了解过相应的电荷密度正比于质点的电荷。于是在一般情形中我们也期待  $J^\mu \propto q$ 。
- 如果我们暂且只考虑由任意一个具体  $\tau$  的值所给定的事件点上带电质点对四电流的贡献, 那么基于上述考虑我们可以猜想

$$J^\mu(x) \propto q \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(x - y(\tau)). \quad (18.37)$$

由于我们需要的是整个闵氏空间中四电流的分布, 因此我们需要遍历质点的整个运动过程。于是实际的四电流应当正比于上述表达式对  $\tau$  的积分

$$J^\mu(x) \propto q \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(x - y(\tau)). \quad (18.38)$$

注意到  $\delta(x)$  的量纲与  $1/x$  相当, 且  $\tau$  也具有长度量纲, 因此上述右侧的表达式的量纲与体电荷密度相当。基于前面我们对四电流定义的约定, 为了补足量纲我们最终将单个质点对应的四电流分布定为

$$J^\mu(x) = \frac{q}{\sqrt{\epsilon_0}} \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(x - y(\tau)). \quad (18.39)$$

- 为了确认上述四电流表达式确实是合理的, 我们做如下两个检验:
  - 如果电荷在空间中是静止的, 那么  $y^\mu(\tau) = (\tau, \mathbf{y})$ , 其中  $\mathbf{y}$  为一个常数三维矢量。因此这时只有分量  $J^0$  非零, 且其具体表达式为

$$J^0(x) = \frac{q}{\sqrt{\epsilon_0}} \int d\tau \delta(x^0 - \tau) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{q}{\sqrt{\epsilon_0}} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (18.40)$$

这准确退化为静电问题中我们曾经看到的单个点电荷的电荷密度分布。

- 上述表达式遵循电荷守恒

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(x) &= \frac{q}{\sqrt{\epsilon_0}} \partial_\mu \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(x - y(\tau)) \\ &= -\frac{q}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \int d\tau \left( \frac{d}{d\tau} \theta(x^\mu - y^\mu(\tau)) \right) \prod_{\nu \neq \mu} \delta(x^\nu - y^\nu(\tau)) \\ &= -\frac{q}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\mu=0}^3 \int d\tau \left( \frac{d}{d\tau} \delta(x^\mu - y^\mu(\tau)) \right) \prod_{\nu \neq \mu} \delta(x^\nu - y^\nu(\tau)) \\ &= -\frac{q}{\sqrt{\epsilon_0}} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \delta^{(4)}(x - y(\tau)) = 0. \end{aligned} \quad (18.41)$$

- 于是我们可以把上述得到的四电流表达式代入推迟势的积分(18.29)里, 得到 (此处我们简写  $\dot{y}^\mu(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau} y^\mu(\tau)$ )

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= -\frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int d\tau \dot{y}^\mu(\tau) \delta(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - y^0(\tau)) \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}(\tau)) \\ &= -\frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|} \int d\tau \dot{y}^\mu(\tau) \delta(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)| - y^0(\tau)). \end{aligned} \quad (18.42)$$

最后剩下的  $\tau$  积分会由余下的  $\delta$  函数限制到  $\tau$  的某个确切值  $\tau_*$  的贡献, 该值满足

$$x^0 - y^0(\tau_*) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_*)| = 0. \quad (18.43)$$

也就是说由  $\tau_*$  给定的点  $y^\mu(\tau_*)$  与我们考察的点  $x^\mu$  之间为类光分隔。由于我们考虑的是实际的质点, 其速度总小于光速, 不难看到上述方程只有一个根, 因此  $\tau_*$  是唯一的。为做完  $\tau$  积分, 我们当然还需要知道  $\delta$  的 Jacobian, 有

$$\frac{d}{d\tau}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)| - y^0(\tau)) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|} - \dot{y}^0(\tau) < 0. \quad (18.44)$$

(该表达式恒负的性质由同学们自行检验。) 因此我们最终得到单个带电质点对应的四维势矢量

$$A^\mu(x) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\dot{y}^\mu(\tau_*)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_*)| \dot{y}^0(\tau_*) - (\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_*)) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\tau_*)}. \quad (18.45)$$

利用  $x^\mu$  与  $y^\mu(\tau_*)$  之间类光分隔的属性(18.43)可以注意到上述表达式的分母实际上也是一个缩并, 因而是一个洛伦兹不变的标量。相应地表达式可以简化为

$$A^\mu(x) = \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\dot{y}^\mu(\tau_*)}{(x - y(\tau_*))_\nu \dot{y}^\nu(\tau_*)}. \quad (18.46)$$

这个势称为**李纳-维谢尔势** (Liénard-Wiechert potential)。

- 如果我们想要回到三维空间的表达式, 假定  $\tau_*$  对应时刻质点的三维速度为  $\mathbf{v}$ 。在之前作业中我们看到

$$\dot{y} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \right). \quad (18.47)$$

考虑到  $A^\mu$  的分量形式(18.30)我们于是可以从(18.45)中读出

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_*)| c - (\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_*)) \cdot \mathbf{v}}, \quad (18.48)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_*)| c - (\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_*)) \cdot \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \phi(t, \mathbf{x}). \quad (18.49)$$

- 接下来我们计算电磁张量  $F_{\mu\nu}$ 。比较理想的出发点是(18.46), 不过这里唯一需要注意的是在我们对  $x^\mu$  求偏导的时候  $\tau_*$  会通过类光分隔条件(18.43)间接依赖于  $x^\mu$  (前面讲过  $y^\mu$  是一个已知的固定函数)。于是我们首先应当查明  $\partial_\mu \tau_*$  的结果。
- 为此我们可以注意到类光分隔条件(18.43)可以写成洛伦兹不变的形式

$$(x - y(\tau_*))_\nu (x - y(\tau_*))^\nu = 0. \quad (18.50)$$

将该方程两侧同时对  $x^\mu$  求偏导, 得到

$$(x - y(\tau_*))_\nu (\delta_\mu^\nu - \dot{y}^\nu(\tau_*) \partial_\mu \tau_*) = 0. \quad (18.51)$$

由此可知

$$\partial_\mu \tau_* = \frac{(x - y(\tau_*))_\mu}{(x - y(\tau_*))_\nu \dot{y}^\nu(\tau_*)}. \quad (18.52)$$



- 利用上述结果, 我们首先可以进一步得到 (为简化书写接下来我们把  $y$  的自变量略去不写)

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu A_\nu &= \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \left( \frac{\ddot{y}_\nu \partial_\mu \tau_*}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)} - \frac{\dot{y}_\nu}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)^2} ((g_{\mu\sigma} - \dot{y}_\sigma (\partial_\mu \tau_*)) \dot{y}^\sigma + (x-y)_\sigma \dot{y}^\sigma \partial_\mu \tau_*) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \left( \frac{(x-y)_\sigma \dot{y}^\sigma \ddot{y}_\nu + (\dot{y}_\sigma \dot{y}^\sigma - (x-y)_\sigma \ddot{y}^\sigma) \dot{y}_\nu}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)^2} \partial_\mu \tau_* - \frac{\dot{y}_\mu \dot{y}_\nu}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)^2} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \left( \frac{(x-y)_\sigma \dot{y}^\sigma \ddot{y}_\nu - (1 + (x-y)_\sigma \ddot{y}^\sigma) \dot{y}_\nu}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)^3} (x-y)_\mu - \frac{\dot{y}_\mu \dot{y}_\nu}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)^2} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \left( \frac{(x-y)^\sigma (\dot{y}_\sigma \ddot{y}_\nu - \dot{y}_\nu \ddot{y}_\sigma) - \dot{y}_\nu (x-y)_\mu}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)^3} - \frac{\dot{y}_\mu \dot{y}_\nu}{((x-y)_\rho \dot{y}^\rho)^2} \right). \tag{18.53}
 \end{aligned}$$

这里我们用到了恒等关系  $\dot{y}_\sigma(\tau) \dot{y}^\sigma(\tau) = -1$ 。于是, 如果我们简记  $r^\mu = x^\mu - y^\mu(\tau_*)$ , 那么有

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
 &= \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \frac{(r_\sigma \dot{y}^\sigma)(r_\mu \ddot{y}_\nu - r_\nu \ddot{y}_\mu) - (1 + r_\sigma \ddot{y}^\sigma)(r_\mu \dot{y}_\nu - r_\nu \dot{y}_\mu)}{(r_\rho \dot{y}^\rho)^3} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^\sigma (\dot{y}_\sigma \ddot{y}_\nu - \dot{y}_\nu \ddot{y}_\sigma) r_\mu - r^\sigma (\dot{y}_\sigma \ddot{y}_\mu - \dot{y}_\mu \ddot{y}_\sigma) r_\nu - (r_\mu \dot{y}_\nu - r_\nu \dot{y}_\mu)}{(r_\rho \dot{y}^\rho)^3}. \tag{18.54}
 \end{aligned}$$

- 接下来我们从上述结果具体读出三维空间中电场与磁场的表达式。首先, 通过关系

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = c \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}} dt \tag{18.55}$$

可知加速度

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_\mu &= \frac{d}{d\tau} \dot{y}_\mu = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left( \frac{-1, \mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \right) \\
 &= \left( -\frac{c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)^{3/2}}, \frac{(c^2 - |\mathbf{v}|^2) \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v}}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)^{3/2}} \right) \\
 &= \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)^{3/2}} \dot{y}_\mu + \underbrace{\frac{(0, \mathbf{a})}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)^{3/2}}}_{z_\mu}. \tag{18.56}
 \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}$  为三维空间中指点的加速度。由上述最后一行不难看到

$$\dot{y}_\mu \ddot{y}_\nu - \dot{y}_\nu \ddot{y}_\mu = \dot{y}_\mu z_\nu - \dot{y}_\nu z_\mu, \tag{18.57}$$

因而  $F_{\mu\nu}$  的表达式(18.54)中的  $\ddot{y}$  皆可用  $a$  替代, 我们将其化为

$$F_{\mu\nu} = \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_0}} \frac{(r_\sigma \dot{y}^\sigma)(r_\mu z_\nu - r_\nu z_\mu) - (1 + r_\sigma z^\sigma)(r_\mu \dot{y}_\nu - r_\nu \dot{y}_\mu)}{(r_\rho \dot{y}^\rho)^3}. \tag{18.58}$$

为进一步简化表达式, 我们令

$$\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (18.59)$$

$\hat{\mathbf{r}}$  为  $\tau_*$  对应时刻质点空间位置到观测位置的空间单位矢量。注意到

$$r_\rho \dot{y}^\rho = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - |\mathbf{r}|c}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}} = \frac{-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}, \quad r_\rho z^\rho = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)}. \quad (18.60)$$

• 接下来计算电场

$$\begin{aligned} E^i(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} F_{0i}(x) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_\sigma \dot{y}^\sigma)(r_0 z_i - r_i z_0) - (1 + r_\sigma z^\sigma)(r_0 \dot{y}_i - r_i \dot{y}_0)}{(r_\rho \dot{y}^\rho)^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}\right) \frac{-|\mathbf{r}|a_i}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)} - \left(1 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)}\right) \frac{(-|\mathbf{r}|v_i + r_i c)}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}}{\left(\frac{-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}\right)^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})|\mathbf{r}|a_i + (c^2 - |\mathbf{v}|^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}))|\mathbf{r}|u_i}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3}. \end{aligned} \quad (18.61)$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\mathbf{r}|}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3} ((c^2 - |\mathbf{v}|^2)\mathbf{u} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\mathbf{r}|}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3} ((c^2 - |\mathbf{v}|^2)\mathbf{u} + \mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})). \end{aligned} \quad (18.62)$$

• 然后计算磁场

$$\begin{aligned} B^i(x) &= -\frac{\sqrt{\mu_0}}{2} \epsilon^{imn} F_{mn} \\ &= -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \epsilon^{imn} \frac{(r_\sigma \dot{y}^\sigma)(r_m z_n - r_n z_m) - (1 + r_\sigma z^\sigma)(r_m \dot{y}_n - r_n \dot{y}_m)}{(r_\rho \dot{y}^\rho)^3} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \epsilon^{imn} \frac{(r_\sigma \dot{y}^\sigma)r_m z_n - (1 + r_\sigma z^\sigma)r_m \dot{y}_n}{(r_\rho \dot{y}^\rho)^3} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \epsilon^{imn} \frac{\left(\frac{-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}\right) \frac{r_m a_n}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)} - \left(1 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)}\right) \frac{r_m v_n}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}}{\left(\frac{-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}}\right)^3} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{r} \times \mathbf{a})^i + (c^2 - |\mathbf{v}|^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}))(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^i}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3} \end{aligned} \quad (18.63)$$

于是

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3} ((c^2 - |\mathbf{v}|^2)(-\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})(-\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{r} \times \mathbf{a})) \quad (18.64)$$

注意到  $\mathbf{r} \times \mathbf{u} = -\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , 将上述表达式与(18.62)中的第一行对比, 不难发现恒等关系

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}). \quad (18.65)$$

因此在任意观测点上磁场  $\mathbf{B}$  总是同时垂直于  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{E}$  (注意  $\mathbf{E}$  一般不垂直于  $\mathbf{r}$ )。此外,  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{E}$  大小之间的比值总是为  $1/c$ , 这一点与我们在真空平面电磁波中得到的结论相同。

- 接下来我们进一步查看一下上述所得电场的结构 (由于磁场与电场之间的联系比较简单, 不必另外分析磁场)。这里我们重点注意一下它对空间距离  $|\mathbf{r}|$  的依赖, 为此我们将这个标度在  $\mathbf{E}$  中显性地提取出来

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^3} \frac{(c^2 - |\mathbf{v}|^2)\mathbf{u}}{|\mathbf{r}|^2}}_{\mathbf{E}_c} + \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^3} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{r}|}}_{\mathbf{E}_r}. \quad (18.66)$$

这里我们看到有两项贡献:

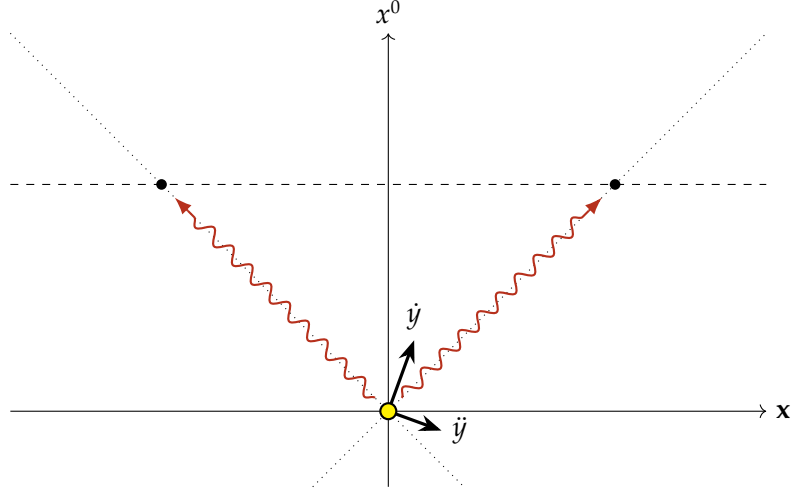
- 第一项与距离是平方反比的关系, 这个性质与静电问题中的库仑公式一致。这一项除了距离之外只依赖于质点的速度 (通过  $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}$ )。它的方向完全由  $\mathbf{u}$  决定。通过  $\mathbf{u}$  的定义我们看到,  $\hat{\mathbf{r}}$  为静电问题中电场的指向, 而非零的速度  $\mathbf{v}$  会给这个方向产生一个正比于  $|\mathbf{v}|/c$  的修正。当  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = c$ , 于是我们看到这一项完全退化为静止质点对应的库仑场。由此我们可以把这一项看作库仑定律的一个直接扩展。
- 第二项则是线性反比依赖于  $|\mathbf{r}|$ , 这样的依赖关系是在动力学问题中全新出现的 (回忆一下之前在静电场的多极展开中我们了解过静电场对距离的依赖最显著的也只能是平方反比)。通过其分子的形式不难看到, 这一项当且仅当  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  时才是非零的 (与速度  $\mathbf{v}$  是否为零无关)。此外, 虽然完整的  $\mathbf{E}$  不垂直于  $\mathbf{r}$ , 但这一项的贡献是垂直的。
- 为理解清楚第二项的物理意义, 我们现在计算一下电磁场的坡印廷矢量

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}) \\ &= \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|\mathbf{E}_c|^2 \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_c) \mathbf{E}_c)}_{\sim |\mathbf{r}|^{-4}} + \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (2(\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_r) \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_c) \mathbf{E}_r - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_r) \mathbf{E}_c)}_{\sim |\mathbf{r}|^{-3}} \\ &\quad + \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|\mathbf{E}_r|^2 \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_r) \mathbf{E}_r)}_{\sim |\mathbf{r}|^{-2}}. \end{aligned} \quad (18.67)$$

在最后一行我们特意将结果同样按照与  $|\mathbf{r}|$  的依赖关系分成了三项。之前我们了解过坡印廷矢量是电磁场的能流矢量, 单位时间内透过指定面积元  $d\mathbf{S}$  流经的电磁场能量为  $\mathcal{S} \cdot d\mathbf{S}$ 。如果我们以质点所在位置为中心在  $\hat{\mathbf{r}}$  方向上取一个固定的微小立体角  $d\Omega$ , 那么在观测点  $\mathbf{x}$  处覆盖这个立体角的面元大小

$$|d\mathbf{S}| \propto |\mathbf{r}|^2 d\Omega. \quad (18.68)$$

我们于是看到(18.67)的三项里头两项对  $\mathcal{S} \cdot d\mathbf{S}$  的贡献随着  $|\mathbf{r}|$  的增大均会衰减, 并且在  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  的极限下衰减到零。只有最后一项的贡献是不依赖于  $|\mathbf{r}|$  的。现在我们在事件点  $y^\mu(\tau_*)$  的未来光锥上取一个任意等时间面的截面, 这个截面本身为以  $\mathbf{y}(\tau_*)$  为球心的球面。



球面上的每一个点处的电磁场均由事件点  $y^\mu(\tau_*)$  上带电质点的运动状态决定。我们计算坡印廷矢量在这个球面上的通量，那么由上述讨论可知(18.67)中第三项对这个通量的贡献是不随等时间面的选择而改变的。注意到这个通量描述的是单位时间内透过球面流出的总能量。于是我们看到第三项贡献所对应的这部分能流可以看作是在事件点  $y^\mu(\tau_*)$  处由质点传递给电磁场并且沿着光锥面向外扩散的，随着时间推移它一直可以扩散到无穷远。这种现象即为**电磁辐射**。由于第三项完全由  $\mathbf{E}_r$  决定，我们也把  $\mathbf{E}_r$  称为带电质点的**辐射场**。由前面的讨论我们知道，只有当带电质点的加速度不为零时才会有能量辐射出去。

- 现在我们具体计算辐射场的能流  $S_r$ 。首先注意到

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_r \propto \hat{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})) = 0. \quad (18.69)$$

于是

$$\begin{aligned} S_r &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_r|^2 \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{q^2 c}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a})^2}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^6 |\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{q^2 c}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a})^2 |\mathbf{u}|^2 - 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^2 |\mathbf{a}|^2)}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^6 |\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (18.70)$$

由该结果我们看到辐射场能流始终垂直于上述球面。特别是如果在所选取的参考系中质点在事件点  $y^\mu(\tau_*)$  上速度为零  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ （我们可以把这样的参考系称为质点在  $y^\mu(\tau_*)$  处的瞬时静止参考系），那么  $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}}$ ， $|\mathbf{u}|^2 = c^2$ ， $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = c$ ，于是上述表达式退化为

$$S_r = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{(|\mathbf{a}|^2 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a})^2)}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (18.71)$$

如果我们以  $\mathbf{a}$  的方向为空间第三轴正方向建立球坐标系，那么上述坡印廷矢量的模长为

$$|S_r| = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{r}|^2} \sin^2 \theta. \quad (18.72)$$

于是我们看到辐射能流大小在靠近球面两极 ( $\theta = 0$  以及  $\theta_\pi$ ) 的地方趋于零, 而在靠近赤道的地方达到最大。以此计算坡印廷矢量在球面上的通量

$$P_r = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \sin^2\theta = \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{6\pi \epsilon_0 c}. \quad (18.73)$$

这个公式称为**拉莫尔公式** (Larmor formula)。它描述的是带电质点在事件点  $y^\mu(\tau_*)$  处对电磁场传递能量的瞬时总功率。

### 18.3 电偶极辐射

---

•

### 18.4 磁偶极辐射

---

•

### 18.5 辐射的一般性质

---





## 动体的电动力学





# ZJU 索引

- A  
爱因斯坦约定 ..... 32
- B  
比安奇恒等式 ..... 137
- C  
场 ..... 9, 37  
    标量场 ..... 37  
    基底空间 ..... 37  
    目标空间 ..... 37  
    矢量场 ..... 9, 37  
磁偶极距 ..... 92
- D  
导体 ..... 63  
等距变换 ..... 134  
等效原理 ..... 123  
电场 ..... 19  
电磁波 ..... 145  
电磁对偶 ..... 121  
电动势 ..... 119  
    动生电动势 ..... 119  
    感生电动势 ..... 119  
电多极距 ..... 87  
电偶极矩 ..... 86  
电偶极子 ..... 86  
电四极距 ..... 87  
狄利希里条件 ..... 60  
度规 ..... 114  
多极展开 ..... 87
- G  
感应电荷 ..... 64  
格林函数 ..... 62
- 规范变换 ..... 97
- H  
Hodge 对偶 ..... 110, 116
- J  
伽利略变换 ..... 128  
介电常数  
    真空介电常数 ..... 19
- K  
Kronecker  $\delta$  ..... 35  
快度 ..... 132  
库仑定律 ..... 19
- L  
拉普拉斯算符 ..... 39  
Levi-Civita 符号 ..... 32  
洛伦兹变换 ..... 14, 132  
洛伦兹力公式 ..... 91
- M  
麦克斯韦方程组 ..... 11, 120  
闵可夫斯基时空 ..... 117
- N  
逆变指标 ..... 115  
诺依曼条件 ..... 60
- P  
坡印廷矢量 ..... 141
- S  
散度 ..... 39  
势 ..... 38  
    等势面 ..... 38

T			
梯度 .....	38	协变指标 .....	115
通量 .....	28	旋度 .....	38
W		Y	
微分形式 .....	39	赝标量 .....	33
阶 .....	40	赝矢量 .....	33
外微分 .....	40	应力张量 .....	140
楔积 .....	39	Z	
位移电流 .....	120	张量 .....	31
X		阶 .....	33
协变张量 .....	115	缩并 .....	32

