中国科学院大学 2021 年研究生入学考试高等代数试题

1. 构造一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$ 满足下列条件：

$$f(1)=0, f'(1)=1, f''(1)=2, f(0)=3, f'(0)=-1.$$

2. 计算 $n(n\geq 2)$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2+a_1c_1+b_1d_1 & a_2c_1++b_2d_1 & \cdots & a_nc_1+b_nd_1 \\ a_1c_2+b_1d_2 & 2+a_2c_2+b_2d_2 & \cdots & a_nc_2+b_nd_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1c_n+b_1d_n & a_2c_n+b_2d_n & \cdots & 2+a_nc_n+b_nd_n \end{vmatrix}$$

3. 用正交变换将下面二次型化为标准型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3.$$

4. 设 A 为 n 阶实对称半正定矩阵，证明：A 的伴随矩阵 A^* 也是实对称半正定矩阵.

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{C})$ 的秩为 r，并且 A 的第 r 个顺序主子式不为零，即

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}\neq 0.$$

证明：如果 $r<n$, 则对任意 $r<i\leq n$, 都存在复数 $x_{i1},\cdots,x_{ir}$ 使得对任意 $1\leq j\leq n$, 有 $a_{ij}=x_{i1}a_{1j}+x_{i2}a_{2j}+\cdots+x_{ir}a_{rj}$.

6. 设 V 是一个有限维复线性空间,$\mathcal{A}:V\longrightarrow V$ 是一个可逆线性变换，如果存在 V 中的一组非零向量 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 使得它们张成线性空间 V，且对所有的 $1\leq i\leq m$, 有 $\mathcal{A}(v_i)\in\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$. 证明：$\mathcal{A}$ 可对角化，并且其特征值都是单位根.

7. 设 $M_n(\mathbb{C})$ 为所有 n 阶复方阵构成的线性空间，$T:M_n(\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}$ 为线性函数，且满足

$$T(AB)=T(BA),\ \ \forall A,B\in M_n(\mathbb{C}).$$

证明：存在常数 $c\in\mathbb{C}$ 使得 $T(A)=c\cdot\mathrm{tr}(A)$, $\forall A\in M_n(\mathbb{C})$.

8. 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵，且 $AB = BA$, 证明：存在 n 阶正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 均为对角矩阵.

9. 设 A, B, J 都是 n 阶复方阵，A, B 为可逆矩阵，J 是元素全是 1 的方阵，设 $m \in \mathbb{C}$ 且 $m \neq 1$, 用 $\sigma(W)$ 表示矩阵 W 的所有元素之和.

   (1) 若 $A + B = mJ$, 证明：

$$[1 - m\sigma(A^{-1})][1 - m\sigma(B^{-1})] = 1.$$

   (2) 问结论 (1) 的逆命题是否成立，若成立，给出证明，若不成立，给出反例.