浙江大学 2021 年研究生入学考试高等代数试题

1. 当 t 为何值时，$f(x)=x^3+6x^2+tx+8$ 有重根? 并求出重根.

2. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&2&1&-2\\1&4&1&4\\-1&8&1&-8\end{pmatrix}$，记 A_{ij} 是矩阵 A 的 (i,j) 元对应的代数余子式，求 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}iA_{ij}$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，令 $\beta_i=\alpha_{i+1}+\alpha_i, i=1,2,\cdots,s-1.\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$. 问：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 何时是 $Ax=0$ 的基础解系；若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 不是 $Ax=0$ 的基础解系，则求出极大线性无关组，并且扩充为 $Ax=0$ 的基础解系.

4. 设 A 是 3×2 矩阵，B 为 2×3 矩阵，并且 $AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$.

   (1) 求 $(AB)^2$.

   (2) 求 BA 的最小多项式.

   (3) 求矩阵 BA.

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $\begin{cases}a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n.\\ a_{ij}+a_{ji}=1, 1\le i\ne j\le n\end{cases}$. 证明：$\operatorname{rank}(A)\ge n-1$.

6. 证明:实系数线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,(i=1,2,\cdots,n)$ 有解当且仅当 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 与 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0(i=1,2,\cdots,n)$ 的解空间正交.

7. 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\det A=2,\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 是其两个特征值，$L_1=L(\alpha_1,\alpha_2),L_2=L(\alpha_3)$ 是其特征子空间，其中

$$\alpha_1=(1,1,-1,-1)^T,\alpha_2=(1,-1,1,1)^T,\alpha_3=(0,1,1,0)^T.$$

   求 A^* 以及 A 的正交相似标准型.

8. 设 V 是线性空间，φ 是 V 上的线性变换，并且其特征多项式为 $(\lambda-2)^6(\lambda+2)^4$. 试将 V 分解为两个非平凡的 $\varphi-$ 不变子空间的直和，并证明你的结论.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & x & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & y\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

(1) x,y 取何值时，A 可相似对角化.

(2) 当 $x=0,y=1$ 时，求 A 的不变因子、初等因子以及 Jordan 标准型.

10. 设 V,W 分别为有限维线性空间，φ 是 V 到 W 的线性映射，证明：

(1) φ 是满射当且仅当存在线性映射 $\psi: W\longrightarrow V$ 使得 $\varphi\psi=\mathrm{Id}_W$.

(2) φ 是单射当且仅当存在线性映射 $\psi: W\longrightarrow V$ 使得 $\psi\varphi=\mathrm{Id}_V$.

(3) φ 是同构当且仅当存在线性映射 $\psi: W\longrightarrow V$ 使得 $\varphi\psi=\mathrm{Id}_W,\psi\varphi=\mathrm{Id}_V$.