

# 浙江大学 2021 年研究生入学考试高等代数试题

1. 当  $t$  为何值时,  $f(x) = x^3 + 6x^2 + tx + 8$  有重根? 并求出重根.

2. 已知  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ , 记  $A_{ij}$  是矩阵  $A$  的  $(i, j)$  元对应的代数余子式, 求

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 i A_{ij}.$$

3. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是  $Ax = 0$  的基础解系, 令  $\beta_i = \alpha_{i+1} + \alpha_i, i = 1, 2, \dots, s-1, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$ . 问:  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  何时是  $Ax = 0$  的基础解系; 若  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  不是  $Ax = 0$  的基础解系, 则求出极大线性无关组, 并且扩充为  $Ax = 0$  的基础解系.

4. 设  $A$  是  $3 \times 2$  矩阵,  $B$  为  $2 \times 3$  矩阵, 并且  $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $(AB)^2$ .

(2) 求  $BA$  的最小多项式.

(3) 求矩阵  $BA$ .

5. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$  满足  $\begin{cases} a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \\ a_{ij} + a_{ji} = 1, 1 \leq i \neq j \leq n \end{cases}$ . 证明:  $\text{rank}(A) \geq n - 1$ .

6. 证明: 实系数线性方程组  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  有解当且仅当  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$

与  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  的解空间正交.

7. 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $\det A = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$  是其两个特征值,  $L_1 = L(\alpha_1, \alpha_2), L_{-1} = L(\alpha_3)$  是其特征子空间, 其中

$$\alpha_1 = (1, 1, -1, -1)^T, \alpha_2 = (1, -1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1, 0)^T.$$

求  $A^*$  以及  $A$  的正交相似标准型.

- 
8. 设  $V$  是线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换, 并且其特征多项式为  $(\lambda - 2)^6(\lambda + 2)^4$ . 试将  $V$  分解为两个非平凡的  $\varphi$ -不变子空间的直和, 并证明你的结论.

9. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (1)  $x, y$  取何值时,  $A$  可相似对角化.
- (2) 当  $x = 0, y = 1$  时, 求  $A$  的不变因子、初等因子以及 Jordan 标准型.
10. 设  $V, W$  分别为有限维线性空间,  $\varphi$  是  $V$  到  $W$  的线性映射, 证明:
- (1)  $\varphi$  是满射当且仅当存在线性映射  $\psi: W \rightarrow V$  使得  $\varphi\psi = \text{Id}_W$ .
- (2)  $\varphi$  是单射当且仅当存在线性映射  $\psi: W \rightarrow V$  使得  $\psi\varphi = \text{Id}_V$ .
- (3)  $\varphi$  是同构当且仅当存在线性映射  $\psi: W \rightarrow V$  使得  $\varphi\psi = \text{Id}_W, \psi\varphi = \text{Id}_V$ .