浙江大学 2021 年研究生入学考试数学分析试题

1. 计算题

   (1) 计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

   (2) 计算含参变量积分

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\mathrm{d}x,\quad |a|<1.$$

   (3) 计算第二型曲面积分

$$\iint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   其中 S 为 $z=5-x^2-y^2, z>1$ 的外侧.

   (4) 求

$$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$$

   在 $x=0$ 的幂级数展开，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

2. (1) 叙述 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\infty)}f(x,y)\neq A$ 的精确定义.

   (2) 按定义证明:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，且 $f(a)>a, f(b)<b$. 试证明存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=c$.

4. 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

5. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，证明：$f(x)\equiv 0$.

6. 设 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, 并且每个 $p_i \in (0,1)$, 证明：对于任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \ln p_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right).$$

7. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，并且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. 记 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, 证明：$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，且 $m \leq f(x) \leq M$, 设 $g(x)$ 在 $[m,M]$ 上连续，证明：$g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

9. 设 f 是 n 元函数，f 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta_0)$ 内二阶可微，$\triangledown f(x_0) = 0$，且对于任意单位向量 $a \in \mathbb{R}^n$ 有 $(a \cdot \triangledown)^2 f(x_0) > 0$. 证明：

(1) 存在 $\delta \in (0,\delta_0)$ 使得

$$((x - x_0) \cdot \triangledown) f(x) > 0, \quad \forall x \in U(x_0,\delta) \backslash \{x_0\}.$$

(2) x_0 是 f 的极小值点.