华南师范大学2021年高等代数试题解析

1.证明：x^2+x+1整除$x^{2021}+x^{1021}+x^{21}$.

证明. 设a是x^2+x+1的根，则$a^3=1$,从而

$$a^{2021}+a^{1021}+a^{21}=a^2+a+1=0$$

而x^2+x+1有两个不同的根，因此$x^2+x+1\mid x^{2021}+x^{1021}+x^{21}$.

2.计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

解. 记$A=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则

$$\det(\lambda I_n-A)=\lambda^{n-1}(\lambda-x_1-x_2-\cdots-x_n)$$

从而A的特征值为$0(n-1重),x_1+x_2+\cdots+x_n$,从而$A-mI_n$的特征值为$-m(n-1重),x_1+x_2+\cdots+x_n-m$.因此

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}=(-m)^{n-1}\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n-m)$$

3.已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

(1)证明：$A^n=A^{n-2}+A^2-I_3,(n\geq 3)$

(2)计算A^{2021}.

证明. 容易计算

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}$$

从而$A^3=A+A^2-I_3$,而

$$A^{n+1}=A(A^{n-2}+A^2-I_3)=A^{n-1}+A^3-A=A^{n-1}+A^2-I_3$$

因此由归纳法可知结论成立.

(2)利用第一题结论

$$A^{2021}=\sum_{k=1}^{1010}(A^{2k+1}-A^{2k-1})+A=1010A^2+A-1010I_3.$$

或者，注意到A的特征多项式为$f(x)=x^3-x^2-x+1$.由带余除法

$$x^{2021}=p(x)f(x)+ax^2+bx+c.$$

由于$f(1)=f(-1)=0,f'(1)=0$.则

$$\begin{cases}a+b+c=1\\a-b+c=-1\\2a+b=2021\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1010\\b=1\\c=-1010\end{cases}$$

从而

$$A^{2021}=1010A^2+A-1010I_3$$

4.已知$\alpha_1=(1,-1,1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,1)^T,\alpha_3=(3,1,1,2)^T$,求一齐次线性方程组以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为基础解系.

解. 记$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,设$Ax=0$的基础解系为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则$AB=0$,从而$B^TA^T=0$,即$A^T$的列向量是$B^Tx=0$的解.求解$B^Tx=0$的基础解系为

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

则可取$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\-1&1&2&0\end{pmatrix}$.

5.已知A为$m\times n$的矩阵，B为$k\times n$的矩阵，证明，A与B行等价当且仅当方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解.

证明. 必要性是显然的；下证充分性，若$Ax=0$与$Bx=0$同解，则$Ax=0$与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$也是同解的，因此

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

因此B的行向量组可由A的行向量线性表示，同理A的行向量可以由B的行向量线性表示，因此A与B行等价.

6.已知矩阵$A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$.

(1)证明：A为正定矩阵.

(2)证明：存在正定矩阵B，使得$A=B^2$.

(3)求矩阵B.

解析. 直接计算A的特征值为：$8,2,2$.故A是正定的，再求正交矩阵P使得

$$A=P\begin{pmatrix}8&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}P^T$$

则取$B=P\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&&\\&\sqrt{2}&\\&&\sqrt{2}\end{pmatrix}P^T$即可.

7.已知A,B,C,D均为n阶方阵.

(1)$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$是否成立？

(2)若上述等式不成立，那满足什么条件等式成立，并证明.

解析. (1)不成立，反例如下:

$$A=B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},C=D=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

则等式左边是0，右边为-1.

(2)当$AC=CA$时，等式成立.证明利用降阶公式即可，存在无限多个t使得tI_n+A可逆，则 由降阶公式

$$\begin{vmatrix}tI_n+A&B\\C&D\end{vmatrix}=\det(tI_n+A)\cdot\det(D-C(tI_n+A)^{-1}B)=\det((tI_n+A)D-CB).$$

两边均为关于t的多项式，并且有无限个t使得等式成立，从而对任意的t都成立，取$t=0$即可.

8.回答下列问题：

(1)正交矩阵的定义.

(2)已知A是特征值全为实数的n阶方阵.

(i)证明：存在正交矩阵T使得$T^{-1}AT$为上三角矩阵.

(ii)若A为正交矩阵，则A为对称方阵.

解析.(2)对n进行归纳，设λ_1是A的特征值，取A的属于特征值λ_1单位特征向量ξ_1,并将其扩充为$\mathbb{R}^n$的标准正交基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$.令$T_1=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,则

$$T_1^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&A_1\end{pmatrix}$$

其中A_1为特征值全为实数的$n-1$阶方阵，由归纳假设，存在正交方阵T_2使得$T_2^{-1}A_1T_2$为上三角矩阵，取$T=T_1\begin{pmatrix}1&0\\0&T_2\end{pmatrix}$,则$T^{-1}AT=S$为上三角矩阵.

若A为正交矩阵，则S为上三角的正交矩阵，从而S为对角矩阵，进而$A=TST^T$为对称矩阵.

9.已知A是线性空间V上的线性变换$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵，证明：$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2)$当且仅当$V=\ker\mathscr{A}\oplus\mathrm{Im}\mathscr{A}$.

证明.先证明： $\dim(\mathrm{Im}\mathscr{A}\cap\ker\mathscr{A})=\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}-\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^2$.

考虑$\mathscr{A}|_{\mathrm{Im}\mathscr{A}}:\mathrm{Im}\mathscr{A}\to V$,则由维数公式

$$\dim\mathrm{Im}(\mathscr{A}|_{\mathrm{Im}\mathscr{A}})+\dim\ker(\mathscr{A}|_{\mathrm{Im}\mathscr{A}})=\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}.$$

即得

$$\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^2+\dim(\mathrm{Im}\mathscr{A}\cap\ker\mathscr{A})=\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}$$

故

$$V=\ker\mathscr{A}\oplus\mathrm{Im}\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathrm{Im}\mathscr{A}\cap\ker\mathscr{A}=0\Leftrightarrow\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^2=\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2)$$