上海交通大学 2021 年研究生入学考试高等代数试题解析

微信公众号：小小和尚数学考研

1. 解答如下问题：

   (1) 证明：实数域上奇数次多项式必有实根;

   (2) 证明：有理数域上存在任意次不可约多项式.

证明 *(1)* 由于实数域上的奇数次多项式一定有奇数个复根 *(*计算重数*)*，而对于一个实系数多项式，虚根是成对出现的，故奇数次实系数多项式必定有一个实数根.

或者，将奇数次实系数多项式 $f(x)$ 视为实函数 $f(x)$，则 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，注意到 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$, 则可由 *(*推广的*)* 零点定理知，$f(x)$ 至少有一个实根.

(2) 考察有理系数多项式 $p(x) = x^n - 2$, 由于 $2 \nmid 1, 2 \mid 2, 2^2 \nmid 2$, 则由 *Eisenstein* 判别法知整系数多项式 $p(x)$ 是不可约的，从而在有理数域上也不可约，而 $\deg p(x) = n$ 可以为任意次数，故有理数域上存在任意次不可约多项式.

2. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 证明：

   (1) $\operatorname{rank}(A) = m$ 当且仅当存在 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 使得 $AB = I_m$;

   (2) $\operatorname{rank}(A) = 1$ 当且仅当存在 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^{m\times 1}, 0 \neq \beta \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, 使得 $A = \alpha\beta^T$.

证明 *(1)*" $\Rightarrow$ " : 若 $\operatorname{rank}(A) = m$, 则 $\operatorname{rank}(A, I_m) = m = \operatorname{rank}(A)$. 因此 (A, I_m) 的列向量空间与 A 的列向量空间相同，故 I_m 的列向量可由 A 的列向量线性表示，即存在 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 使得 $AB = I_m$;

" $\Leftarrow$: " 由于 $m = \operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A) \leq m$, 故 $\operatorname{rank}(A) = m$.

(2)" $\Rightarrow$ " : 若 $\operatorname{rank}(A) = 1$, 将 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 设 α_k 是非零的，则对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$. 存在 $b_i \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_i = b_i\alpha_k$. 取 $\alpha = \alpha_k, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, 注意到 $b_k = 1$, 则 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 并且 $A = \alpha\beta^T$.

" $\Leftarrow$: " 若存在 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^{m\times 1}, 0 \neq \beta \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, 使得 $A = \alpha\beta^T$. 则

$$1 \leq \operatorname{rank}(\alpha\beta^T) \leq 1 \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 1.$$

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 证明：线性方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $A^Ty=0, y^Tb=1$ 无解.

证明 "$\Rightarrow$"：若存在 y_0 使得 $A^Ty_0=0, y_0^Tb=1$，而 $Ax=b$ 有解，即存在 x_0 使得 $b=Ax_0$, 进而

$$1=y_0^Tb=y_0^TAx_0=(A^Ty_0)^Tx_0=0$$

矛盾！故 $A^Ty=0, y^Tb=1$ 无解.

"$\Leftarrow$:" 若 $A^Ty=0, y^Tb=1$ 无解，则 $\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解，则

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} + 1$$

而

$$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -b^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A^T)+1 \Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A^T)$$

亦即 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)$，故线性方程组 $Ax=b$ 有解.

4. 设 $A=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^{m\times 4}$, 设 $\alpha-\beta+2\gamma+\delta=0, \alpha+2\beta-\gamma-2\delta=0$.

(1) 设 α,β 线性无关，求线性方程组 $Ax=\gamma+\delta$ 的通解；

(2) 设 $\alpha^T\alpha=\beta^T\beta=1$, 且 $\alpha^T\beta=0$, 求矩阵 $P\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 满足下列条件

$$\operatorname{rank}(P)=\operatorname{rank}(A),\ P^T=P=P^2,\ P\gamma=\gamma,\ P\delta=\delta.$$

解 *(1)* 显然 $\xi=(0,0,1,1)^T$ 是 $Ax=\gamma+\delta$ 的一个特解，由题目条件知 γ,δ 可由 α,β 线性表示，又 α,β 是线性无关的，因此 $\operatorname{rank}(A)=2$, 则 $Ax=0$ 的解空间维数是 2, 注意到

$$\eta_1=(1,-1,2,1)^T, \eta_2=(1,2,-1,-2)^T$$

是 $Ax=0$ 两个线性无关的解，因此 $Ax=\gamma+\delta$ 的通解为 $\eta=\xi+k_1\eta_2+k_2\eta_2, k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

(2) 由于 $\begin{cases} \gamma=-\alpha \\ \delta=\alpha+\beta \end{cases}$ ，并且 α 与 β 是正交的，进而是线性无关的，因此 $\operatorname{rank}(A)=2$. 注意到要求的 P 是实对称的幂等矩阵，并且有特征值 1 以及两个线性无关的特征向量 γ 与 δ, 而 $\operatorname{rank}(P)=2$, 因此 P 的特征值为 $1(2$ 重 $),0(m-2$ 重 $)$. 设 P 属于特征值零的特征向量为 θ, 则

$$\theta^T(\gamma,\delta)=(0,0)\Leftrightarrow\theta^T(\alpha,\beta)=0\Leftrightarrow A^T\theta=0.$$

设 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{m-2}$ 是解空间 $A^Tx=0$ 的标准正交基，令 $Q=(\alpha,\beta,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{m-2})$，则 $P=Q\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & 0_{m-2}\end{pmatrix}Q^T$ 满足条件.

5. 定义 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}:\quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix}3x_1+x_2\\x_2+2x_3\\x_2+2x_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 的特征值.

(2) 求 $\mathcal{A}$ 的特征子空间.

(3) 求 $\mathbb{R}^3$ 的一组基使得 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵为 Jordan 标准型 J.

(4) 对任意正整数 k, 计算 J^k

解 记 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则

$$\mathcal{A}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

故 $\mathcal{A}$ 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$.

(1) 矩阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=\lambda(\lambda-3)^2$，因此 $\mathcal{A}$ 的特征值为 $0,3$(二重).

(2) 矩阵 A 属于特征值 0 的特征向量为 $\xi_1=k\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}$，属于特征值 3 的特征向量为 $\xi_2=k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}$，进而 $\mathcal{A}$ 的特征子空间为

$$V_0=\{(2k,-6k,3k)|k\in\mathbb{R}\},\ V_3=\{(k,0,0)|k\in\mathbb{R}\}.$$

(3) 先求 $(3I_3-A)^2x=0$ 的基础解系：$\gamma=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，再取 $\beta=(A-3I_3)\gamma=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，记

$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 下的矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) 由于

$$J = 3\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3^k & k \cdot 3^{k-1} \\ & & 3^k \end{pmatrix}$$

6. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, A^T = A, B^T = B$, 记 $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

(1) 证明：C 可逆当且仅当 $A - B, A + B$ 可逆；

(2) 证明：C 为正定矩阵当且仅当 $A, A - BA^{-1}B$ 都是正定矩阵.

证明 *(1)* 由于

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B & 0 \\ B & A - B \end{pmatrix}$$

两边取行列式得 $\det(C) = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$. 从而 C 可逆当且仅当 $A - B, A + B$ 可逆.

(2) 若 C 是正定矩阵，则 C 的顺序主子式都是大于零的，进而 A 的顺序主子式也都是大于零的，故 A 是正定的，又

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A - BA^{-1}B \end{pmatrix}$$

从而 $A - BA^{-1}B$ 也是正定矩阵.

反之，若 $A, A - BA^{-1}B$ 都是正定矩阵，则由

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A - BA^{-1}B \end{pmatrix}$$

知 C 也是正定矩阵.

7. 设 $V=\mathbb{R}^{n\times m}$, 对任意 $A,B\in V$, 定义 $(A,B)=\operatorname{tr}(A^TB)$.

(1) 证明：函数 $(\cdot,\cdot)$ 是 V 的一个内积.

(2) 试求 V 的一个标准正交基.

证明 *(1)* 由迹的线性性可得函数 $(\cdot,\cdot)$ 是双线性函数，又 $(A,B)=\operatorname{tr}(A^TB)=\operatorname{tr}(B^TA)=(B,A)$. 并且若 $(A,A)=\operatorname{tr}(A^TA)=\sum\limits_{i,j}a_{ij}^2\geq 0$ 其中等号成立当且仅当 $A=0$. 因此 $(\cdot,\cdot)$ 是内积.

(2) 对于 $E_{ij},i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n$. 直接验证即有

$$(E_{ij},E_{kl})=\begin{cases}1 & ,E_{ij}=E_{kl}\\ 0 & ,E_{ij}\neq E_{kl}\end{cases}$$

故 $\{E_{ij}:i=1,2,\cdots n;j=1,2,\cdots,m\}$ 是 V 的标准正交基.

8. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维向量空间 V 上的线性变换，证明：$V=\operatorname{Im}\mathcal{A}^n\oplus\ker\mathcal{A}^n$.

证明 根据维数公式有 $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^n+\dim\ker\mathcal{A}^n=\dim V$，故只需证明 $\operatorname{Im}\mathcal{A}^n+\ker\mathcal{A}^n$ 是直和即可，等价于证明：$\operatorname{Im}\mathcal{A}^n\cap\ker\mathcal{A}^n=0$.

考虑子空间升链：

$$\ker\mathcal{A}\subseteq\ker\mathcal{A}^2\subseteq\cdots\subseteq\ker\mathcal{A}^n\subseteq\ker\mathcal{A}^{n+1}.$$

若 $\ker\mathcal{A}=0$, 则 $\mathcal{A}$ 是单射，从而是同构，此时显然有 $\ker\mathcal{A}^n=\ker\mathcal{A}^{2n}$.

若 $\ker\mathcal{A}\neq 0$，则 $\dim\ker\mathcal{A}\geq 1$, 而 $\dim V=n$, 则存在 $m\leq n$ 使得 $\ker\mathcal{A}^m=\ker\mathcal{A}^{m+1}$. 再设 $x\in\ker\mathcal{A}^{m+2}$, 则 $\mathcal{A}x\in\ker\mathcal{A}^{m+1}=\ker\mathcal{A}$, 故 $\mathcal{A}^{m+1}x=0$, 进而 $\ker\mathcal{A}^{m+1}=\ker\mathcal{A}^{m+2}$, 依次下去有 $\ker\mathcal{A}^m=\ker\mathcal{A}^{m+k},k=1,2,\cdots$. 特别的有 $\ker\mathcal{A}^n=\ker\mathcal{A}^{2n}$.

设 $\alpha\in\operatorname{Im}\mathcal{A}^n\cap\ker\mathcal{A}^n$, 则存在 $\beta\in V$ 使得 $\alpha=\mathcal{A}^n(\beta)$, 进而

$$0=\mathcal{A}^n(\alpha)=\mathcal{A}^{2n}(\beta)\Rightarrow\beta\in\ker\mathcal{A}^{2n}=\ker\mathcal{A}^n\Rightarrow\alpha=\mathcal{A}^n(\beta)=0.$$

即得 $\operatorname{Im}\mathcal{A}^n\cap\ker\mathcal{A}^n=0$. 故 $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}^n\oplus\ker\mathcal{A}^n$.