中国科学院大学 2021 年研究生入学考试数学分析试题

1. 计算极限：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$;

   (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

2. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微，且 $f(0)=0, f(1)=1$; 证明：

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|\mathrm{d}x \geq \frac{1}{e}$$

3. 设

$$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n,\ (n=2,3,\cdots.)$$

   证明：$f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内有唯一解 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. 计算

   (1) $I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

   (2) $J=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内有界可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

6. 判断

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

   的敛散性，其中 x_n 是有界递增的正数列.

7. 设 u 关于 x,y 的偏导数存在，且 $u=x+y\sin u$, 证明：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

8. 求

$$I=\int_D \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\geq 2, x\leq 1\}$.

9. 设 $a>0$. 证明：$\left|\int_a^{a+1}\sin t^2\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{a}$.