

中国科学技术大学 2021 年研究生入学考试数学分析 试题

1. 计算题

(1) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^2 - \cos x}{\sin^2 x}$;

(2) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} dx$, 其中 n 为正整数.

(3) 设 $z = \frac{1}{x}f(x^2y) + xyg(x+y)$, 其中 f, g 具有二阶连续的导数. 计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(4) 设 $y(x) = \int_x^{4x} \sin((x-t)^2) dt$, 求 $y'(x)$.

(5) 设曲线 γ 由 $y^2 = \frac{1}{3}x^2(1-4x), y \geq 0, x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ 定义, 计算 γ 的弧长.

2. 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S \frac{xdydz + z^4dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

其中 S 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 和平面 $z = -1, z = 1$ 所围成的立体的表面外侧.

3. 求函数 $f(x) = \cos(\alpha x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数, 其中 $\alpha \notin \mathbb{Z}$, 并证明:

(1) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \alpha} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$.

4. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} \cos nx$

(1) 在区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛;

(2) 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上一致收敛.

5. 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 证明: 存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $\int_0^c f(x) dx = (1-c)f(c)$.

6. 求实系数二次多项式 $p(x)$ 使得

$$\left| p(x) - \frac{1}{3-x} \right| < 0.02, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{27}{2}$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)dx > 2021.$$

8. 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的一个有界连续函数, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)| = 0$$

证明: $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续.