中国科学技术大学 2021 年研究生入学考试线性代数与解析几何试题

1. 填空题.

   (1) 已知空间中三个点 $A=(1,1,1), B=(2,1,2), C=(1,-1,0)$, 则三角形 $\triangle ABC$ 的面积为___. 已知点 $(0,a,1)$ 与 A,B,C 共面，则 $a=$___.

   (2) 空间中直线 $l_1: x-1=2-y=z$ 绕 $l_2: y=z=0$ 旋转所得的旋转面的一般方程为___.

   (3) 方阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\3&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为___. 行列式 $\det\begin{pmatrix}I_n&2I_n\\2I_n&2I_n\end{pmatrix}=$___. 其中 I_n 表示 n 阶单位阵.

   (4) 已知实系数二次型 $Q(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2-xy-byz$ 是正定的，则系数 b 的取值范围为___.

   (5) 设 $A=\begin{pmatrix}5&1&1\\9&8&3\\2&7&3\end{pmatrix}$,$|A|$ 第二行元素的代数余子式为 A_{21},A_{22},A_{23}, 则 $A_{21}-A_{22}+2A_{23}=$___.

   (6) 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 为全体次数不超过 2 的实系数多项式及零多项式生成的线性空间，考虑线性变换 $\mathcal{A}=x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}_2[x]$，则 $\mathcal{A}$ 的最小多项式为___.

2. 给定四维向量组

$$\alpha_1=(1,2,-1,1), \alpha_2=(1,3,-1,2), \alpha_3=(2,5,0,5), \alpha_4=(5,12,1,13)$$

   试求出其所有的极大线性无关组.

3. 给定二次曲面在空间直角坐标系下的方程为 $y^2+\sqrt{2}xy+yz-2y+5=0$, 试用正交变换以及平移变换将其化为标准方程，并判断这是什么类型的曲面.

4. 设 $\mathbb{R}_3[x]$ 为由全体次数不超过 3 的实系数多项式以及零多项式生成的线性空间，对任意 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, 定义

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(1) 证明：(f, g) 定义了 $\mathbb{R}_3[x]$ 上的内积结构.

(2) 在上述内积下，对基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 按顺序进行 Gram-Schmidt 正交化，将其变成标准正交基.

5. 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵，其中 A 是正定矩阵，证明：当正实数 a 充分大时，矩阵 $aA + B$ 总是正定矩阵.

6. 设 A 为 n 阶复矩阵，证明：对任意的正整数 $N, M \geq n$, 总有 $\operatorname{rank}(A^N) = \operatorname{rank}(A^M)$.

7. 已知 A, B, C, D 均为 n 阶方阵，且 $BD = DB$. 证明：

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$