树

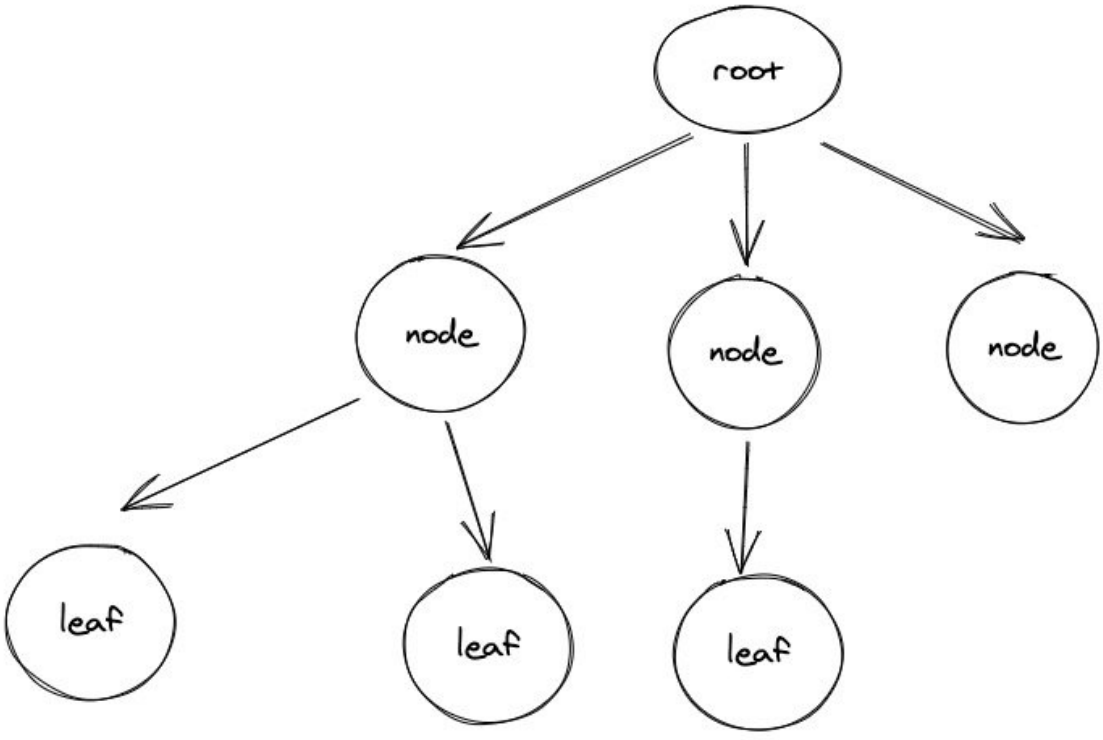
介绍

计算机的数据结构是对现实世界物体间关系的一种抽象。比如家族的族谱，公司架构中的人员组织关系，电脑中的文件夹结构，html 渲染的 dom 结构等等，这些有层次关系的结构在计算机领域都叫做树。

我们平时做题时候的树其实是一种逻辑结构。

基本概念

树是一种非线性数据结构。树结构的基本单位是节点。节点之间的链接，称为分支（branch）。节点与分支形成树状，结构的开端，称为根（root），或根结点。根节点之外的节点，称为子节点（child）。没有链接到其他子节点的节点，称为叶节点（leaf）。如下图是一个典型的树结构：



每个节点可以用以下数据结构来表示：

```
Node {
 value: any; // 当前节点的值
 children: Array<Node>; // 指向其儿子
}
```

其他重要概念：

- 树的高度：节点到叶子节点的最大值就是其高度。
- 树的深度：高度和深度是相反的，高度是从下往上数，深度是从上往下。因此根节点的深度和叶子节点的高度是 0；
- 树的层：根开始定义，根为第一层，根的孩子为第二层。
- 二叉树，三叉树，。。。 N 叉树，由其子节点最多可以有几个决定，最多有 N 个就是 N 叉树。

二叉树

二叉树是树结构的一种，两个叉就是说每个节点最多只有两个子节点，我们习惯称之为左节点和右节点。

> 注意这个只是名字而已，并不是实际位置上的左右

二叉树也是我们做算法题最常见的一种树，因此我们花大篇幅介绍它，大家也要花大量时间重点掌握。

二叉树可以用以下数据结构表示：

```
Node {
 value: any; // 当前节点的值
 left: Node | null; // 左儿子
 right: Node | null; // 右儿子
}
```

二叉树分类

- 完全二叉树
- 满二叉树
- 二叉搜索树
- 平衡二叉树
- 红黑树
- 。。。

二叉树的表示

- 链表存储

- 数组存储。非常适合完全二叉树

二叉树遍历

二叉树的大部分题都围绕二叉树遍历展开，二叉树主要有以下遍历方式：

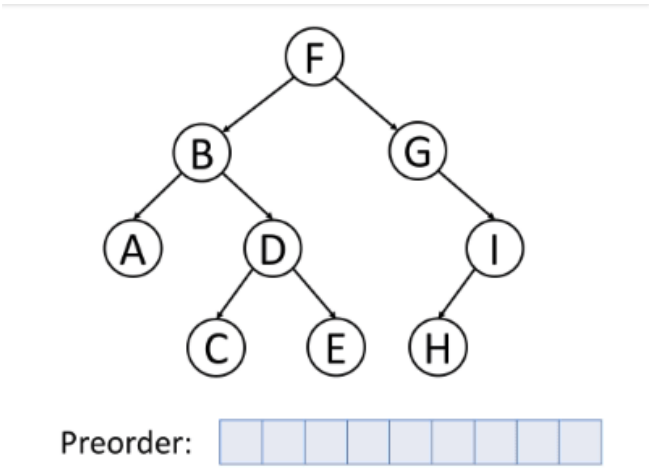
1. 前序遍历
2. 中序遍历
3. 后序遍历
4. 层序遍历(BFS)

> 你如果想锯齿遍历也可以， 不过除非特意考察你这个点，否则我们仅考虑以上的基本遍历方式

前序遍历

- 前序遍历的顺序
    1. 访问当前节点
    2. 遍历左子树
    3. 遍历右子树

如下动图很好地演示了前序遍历算法的过程。



前序遍历的伪代码：

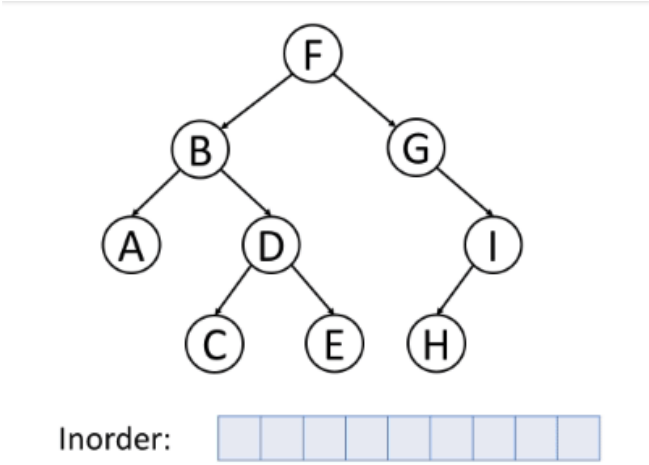
```
preorder(root) {
 if not root: return
 doSomething(root)
 preorder(root.left)
 preorder(root.right)
}
```

中序遍历

- 中序遍历的顺序

  1. 遍历左子树
  2. 访问当前节点
  3. 遍历右子树

如下动图很好地演示了中序遍历算法的过程。



中序遍历的伪代码：

```
inorder(root) {
 if not root: return
 inorder(root.left)
 doSomething(root)
 inorder(root.right)
}
```

后续遍历

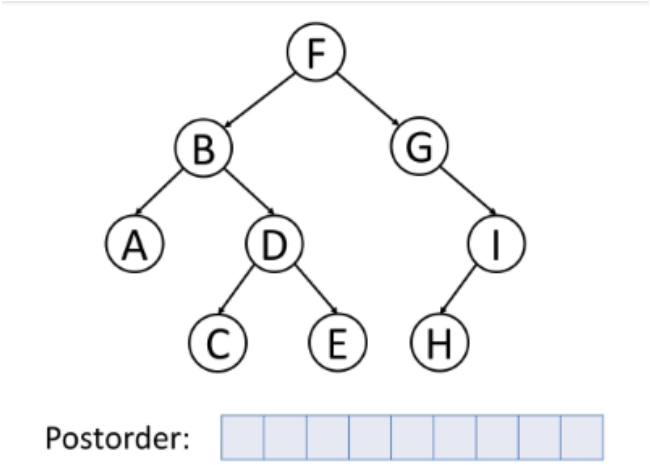
- 后序遍历的顺序

  1. 遍历左子树

2. 遍历右子树

3. 访问当前节点

如下动图很好地演示了后序遍历算法的过程。



后序遍历的伪代码：

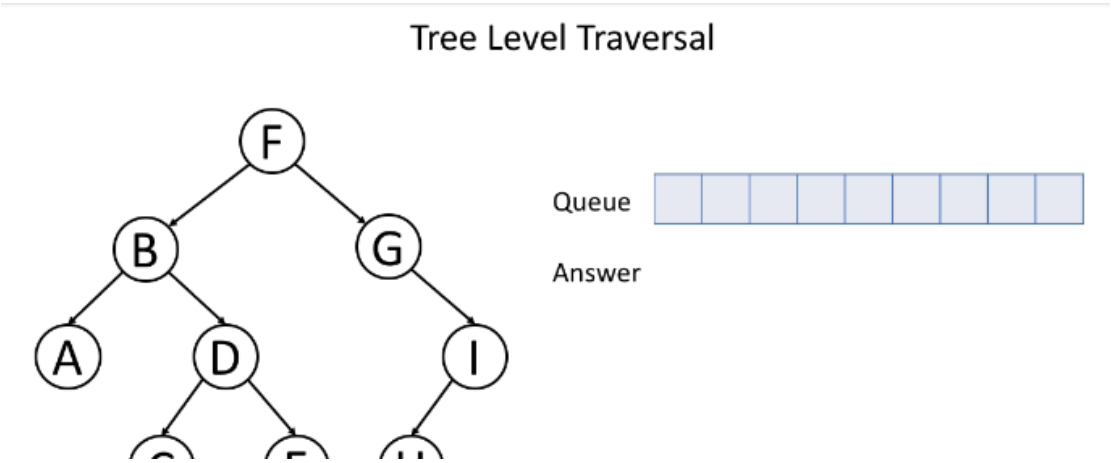
```
postorder(root) {
 if not root: return
 postorder(root.left)
 postorder(root.right)
 dosomething(root)
```

层序遍历(BFS)

层次遍历从直观上会先遍历树的第一层， 再遍历树的第二层，以此类推。

具体算法上，我们可是使用 DFS 并记录当前访问层级的方式实现， 不过更多的时候还是使用借助队列的先进先出的特性来实现。关于队列，我们已经在第一节的时候讲过了。

如下动图很好地演示了层次遍历算法的过程。



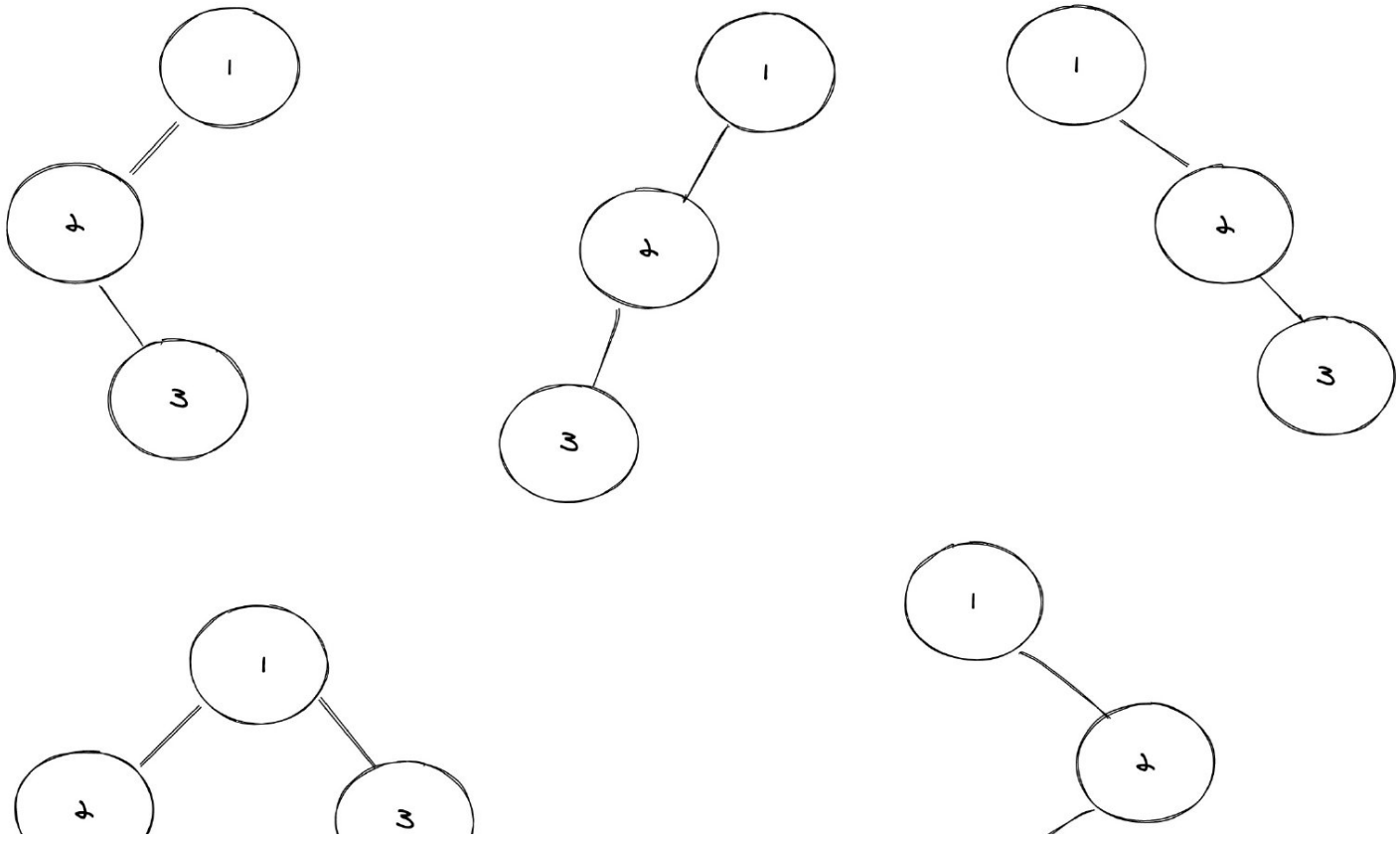
https://cdn.jsdelivr.net/gh/wylu/cdn/post/Algorithm/Tree/%E4%BA%8C%E5%8F%89%E6%A0%91/level-order-traversal.gif

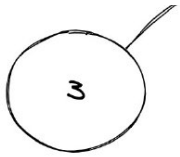
二叉树层次遍历伪代码：

```
bfs(root) {
 queue = []
 queue.push(root)
 while queue.length {
  curLevel = queue
  queue = []
  for i = 0 to curLevel.length {
   doSomething(curLevel[i])
   if (curLevel[i].left) {
    queue.push(curLevel[i].left)
   }
   if (curLevel[i].right) {
    queue.push(curLevel[i].right)
   }
  }
 }
}
```

二叉树构建

二叉树有一个经典的题型就是构造二叉树。注意单前/中/后序遍历是无法确定一棵树，比如以下所有二叉树的前序遍历都为 123





但是中序序列和前、后，层次序列任意组合唯一确定一颗二叉树（前提是遍历是**基于引用**的或者二叉树的**值都不相同**）。

前、后，层次序列都是提供根结点的信息，中序序列用来区分左右子树。

实际上构造一棵树的本质是：

1. 确定根节点
2. 确定其左子树
3. 确定其右子树

比如拿到前序遍历结果 preorder 和中序遍历 inorder，在 preorder 我们可以能确定树根 root，拿到 root 可以将中序遍历切割中左右子树。这样就可以确定并构造一棵树，整个过程我们可以用递归完成。详情见 **构建二叉树专题**

二叉搜索树

二叉搜索树是二叉树的一种，具有以下性质

1. 左子树的所有节点值小于根的节点值（注意不含等号）
2. 右子树的所有节点值大于根的节点值（注意不含等号）

另外二叉搜索树的中序遍历结果是一个有序列表，这个性质很有用。比如 **1008. 前序遍历构造二叉搜索树**。根据先序遍历构建对应的二叉搜索树，由于二叉树的中序遍历是一个有序列表，我们可以有以下思路

1. 对先序遍历结果排序，**排序结果是中序遍历结果**
2. 根据先序遍历和中序遍历确定一棵树

原问题就又转换为了上面我们讲的《二叉树构建》。

类似的题目很多，不再赘述。练习的话大家可以做一下这几道题。

- **94. 二叉树的中序遍历**
- **98. 验证二叉搜索树**
- **173. 二叉搜索树迭代器**
- **250. 统计同值子树**
- **Inorder Successor**

大家如果**碰到二叉搜索树的搜索类题目，一定先想下能不能利用这个性质来做。**

堆

在这里讲堆是因为堆可以被看作近似的完全二叉树。堆通常以数组形式的存储，而非上述的链式存储。

表示堆的数组 A 中，如果 A[1]为根节点，那么给定任意节点 i，其父子节点分别为

- 父亲节点：Math.floor(i / 2)
- 左子节点：2 * i
- 右子节点: 2 * i + 1

如果 A[parent(i)] ≥ A[i]，则称该堆为最大堆，如果 A[parent(i)] ≤ A[i]，称该堆为最小堆。

堆这个数据结构有很多应用，比如堆排序，TopK 问题，共享计算机系统的作业调度(优先队列)等。下面看下给定一个数据如何构建一个最大堆。

伪代码：

```
// 自底向上建堆
BUILD-MAX-HEAP(A)
 A.heap-size = A.length
 for i = Math.floor(A.length / 2) downto 1
  MAX-HEAPIFY(A, i)

// 维护最大堆的性质
MAX-HEAPIFY(A, i)
 l = LEFT(i)
 r = RIGHT(i)
 // 找到当前节点和左右儿子节点中最大的一个，并交换
 if l <= A.heap-size and A[l] > A[i]
  largest = l
 else largest = i
 if r <= A.heap-size and A[r] > A[largest]
  largest = r
 if largest != i
  exchange A[i] with A[largest]
  // 递归维护交换后的节点堆性质
  MAX-HEAPIFY(A, largest)
```

ps: 伪代码参考自算法导论

关于堆的更多内容，请参考：

- **几乎刷完了力扣所有的堆题，我发现了这些东西。。。（上）**
- **几乎刷完了力扣所有的堆题，我发现了这些东西。。。（下）**

递归

简介

最简单的递归是线性递归。

比如我让你求 1 - n 的数字和。大多数我们会这样写：

```
for num in range(1, n + 1):
 sum += num
print(sum) # sum 就是 1 - n 的和
```

如果写成递归。递推公式为 `f(x) = f(x - 1) + x` ，于是代码就可以这样写：

```
def sum(n):
 if n == 1:
  return 1
 return n + sum(n - 1)
sum(n)
```

更复杂一点的是树递归，这里我们主要研究**树递归**。这里的树是多叉树，不一定是二叉树。但是从二叉树入门却是一个不错的选择。

二叉树是一种递归的数据结构， 是最能体现递归美感的结构之一，看到二叉树的题第一反应就应该是用递归去写。

递归就是**方法或者函数调用自身的方式成为递归调用**。在这个过程中，调用称之为**递**，返回成为**归**。

算法中使用递归可以很简单地完成一些用循环实现的功能，比如二叉树的左中右序遍历。递归在算法中有非常广泛的使用，包括现在日趋流行的函数式编程。

有意义的递归算法会把问题分解成规模缩小的同类子问题，当子问题缩减到寻常的时候，就可以知道它的解。然后建立递归函数之间的联系即可解决原问题，这也是我们使用递归的意义。

准确来说， 递归并不是算法，它是和迭代对应的一种编程方法。只不过，由于隐式地借助了函数调用栈，因此递归写起来更简单。

一个问题要使用递归来解决必须有递归终止条件（算法的有穷性）。虽然以下代码也是递归，但由于其无法结束，因此不是一个有效的算法：

```
def f(n):
  return n + f(n - 1)
```

更多的情况应该是：

```
def f(n):
  if n == 1: return 1
  return n + f(n - 1)
```

递归的时间复杂度分析

参考我的新书《算法通关之路》第一章

练习递归

一个简单练习递归的方式是将你写的迭代全部改成递归形式。比如你写了一个程序，功能是“将一个字符串逆序输出”，那么使用迭代将其写出来会非常容易，那么你是否可以使用递归写出来呢？通过这样的练习，可以让你逐步适应使用递归来写程序。

如果你已经对递归比较熟悉了，那么我们继续往下看。

推荐题目

- 求阶乘 （强烈推荐 👍）
- 递归求和（强烈推荐 👍）
- **385. 迷你语法分析器** （强烈推荐 👍）
- **101. 对称二叉树** 判断两个二叉树是否相同的进阶版
- **589. N 叉树的前序遍历**（熟悉 N 叉树）
- **662. 二叉树最大宽度** (请分别使用 BFS 和 DFS 解决，空间复杂度尽可能低)
- **834. 树中距离之和**（谷歌面试题）
- **967. 连续差相同的数字** (隐形树的遍历)

- **1145. 二叉树着色游戏**（树上进行决策）

- **222. 完全二叉树的节点个数** 学习完全二叉树。西法之前写的一个题解里面有一道题(3. 字典序)中的一个小步骤用到了这个题的解法，大家可以参考一下 **字节跳动的算法面试题是什么难度？（第二弹）**

- 汉诺塔问题

- fibonacci 数列

- 二叉树的前中后序遍历

- 归并排序

相关专题

- **专题篇 - 搜索**
- **二叉树的遍历**
- **前缀树专题**
- 二叉树的最大路径和
- 给出所有路径和等于给定值的路径
- 最近公共祖先
- 各种遍历。前中后，层次，拉链式等。

总结

树是一种很重要的数据结构， 而我们研究树又以研究二叉树为主。

二叉树去掉一个子节点就是链表， 增加环就是图。它和很多数据结构和算法都有关联。因此掌握树以及树的各种算法就显得尤其重要。本章提到的内容都是经过我的筛选，去掉那些对刷题不那么重要的内容，因此这剩下的内容大家一定要熟练使用才行。

对于刷题来说，二叉树特别适合练习递归。一方面是其数据结构天生的递归性，另一方面树比链表这种递归数据结构复杂，树是非线性的，因此可以出的题相对比较多。

关于树的题目的几个技巧，请参考 **几乎刷完了力扣所有的树题，我发现了这些东西。。。** 。

参考文献

- 图片参考自 **https://wylu.me/posts/e85d694a/**
- 《算法导论》

上一页 下一页