## 题目地址（464. 我能赢么）

https://leetcode-cn.com/problems/can-i-win/

## 入选理由

1. 我们要讲的 DP 最后一个类型： 状压 DP。 其他的 dp（比如数位 dp，由于时间关系，暂时不讲了）

## 标签

- 动态规划

## 难度

- 中等

## 题目描述

在 "100 game" 这个游戏中，两名玩家轮流选择从 1 到 10 的任意整数，累计整数和，先使得累计整数和达到或超过 100 的玩家，即为胜者。

如果我们将游戏规则改为 “玩家不能重复使用整数” 呢?

例如，两个玩家可以轮流从公共整数池中抽取从 1 到 15 的整数（不放回），直到累计整数和 >= 100。

给定一个整数 maxChoosableInteger （整数池中可选择的最大数）和另一个整数 desiredTotal（累计和），判断先出手的玩家是否能稳赢（假设两位玩家游

你可以假设 maxChoosableInteger 不会大于 20， desiredTotal 不会大于 300。

示例:

```
输入:
maxChoosableInteger = 10
desiredTotal = 11

输出:
false

解释:
无论第一个玩家选择哪个整数，他都会失败。
第一个玩家可以选择从 1 到 10 的整数。
如果第一个玩家选择 1，那么第二个玩家只能选择从 2 到 10 的整数。
第二个玩家可以通过选择整数 10（那么累积和为 11 >= desiredTotal），从而取得胜利.
同样地，第一个玩家选择任意其他整数，第二个玩家都会赢。
```

## 前置知识

- 动态规划[1]
- 回溯

## 公司

- 阿里
- linkedin

## 暴力解（超时）

### 思路

题目的函数签名如下：

```
def canIWin(self, maxChoosableInteger: int, desiredTotal: int) -> bool:
```

即给你两个整数 maxChoosableInteger 和 desiredTotal，让你返回一个布尔值。

#### 两种特殊情况

首先考虑两种特殊情况，后面所有的解法这两种特殊情况都适用，因此不再赘述。

- 如果 desiredTotal 是小于等于 maxChoosableInteger 的，直接返回 True，这不难理解。
- 如果 [1, maxChoosableInteger] 全部数字之和小于 desiredTotal，谁都无法赢，返回 False。

#### 一般情况

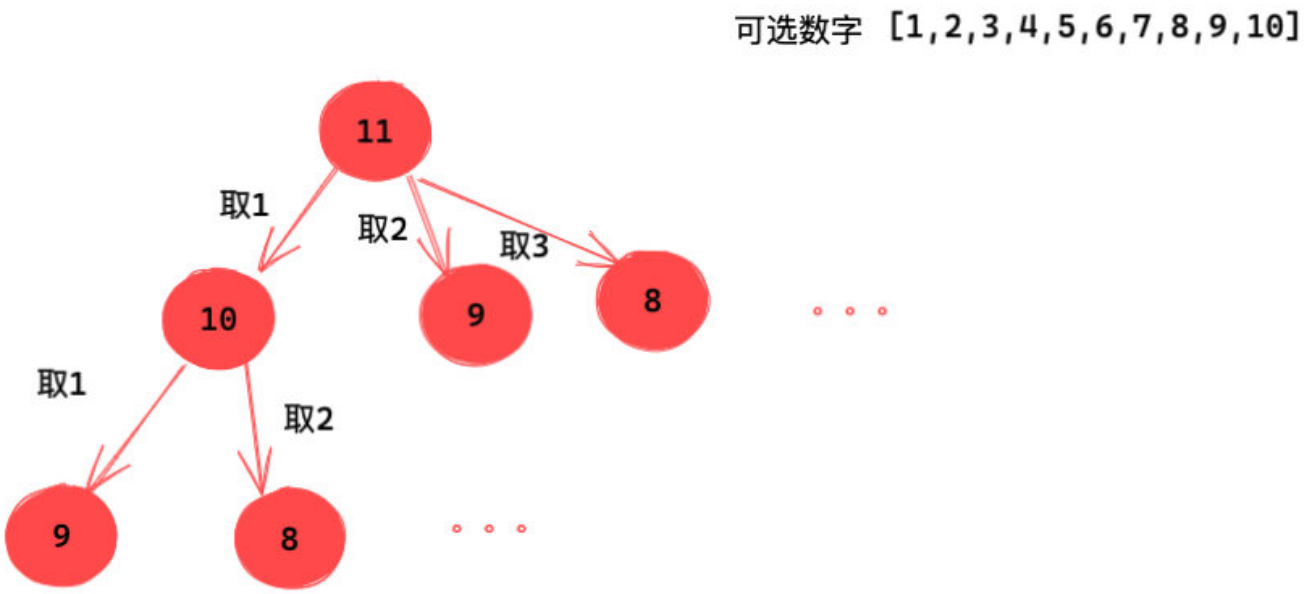
考虑完了特殊情况，我们继续思考一般情况。

首先我们来简化一下问题， 如果数字可以随便选呢？这个问题就简单多了，和爬楼梯没啥区别。这里考虑暴力求解，使用 DFS + 模拟的方式来解决。

注意到每次可选的数字都不变，都是 [1, maxChoosableInteger] ，因此无需通过参数传递。或者你想传递的话，把引用往下传也是可以的。

> 这里的 [1, maxChoosableInteger] 指的是一个左右闭合的区间。

为了方便大家理解，我画了一个逻辑树：




接下来，我们写代码遍历这棵树即可。

**可重复选**的暴力核心代码如下：

```
class Solution:
    def canIWin(self, maxChoosableInteger: int, desiredTotal: int) -> bool:
        # acc 表示当前累计的数字和
        def dfs(acc):
            if acc >= desiredTotal:
                return False
            for n in range(1, maxChoosableInteger + 1):
                # 对方有一种情况赢不了，我就选这个数字就能赢了，返回 true，代表可以赢。
                if not dfs(acc + n):
                    return True
            return False

        # 初始化集合，用于保存当前已经选择过的数。
        return dfs(0)
```

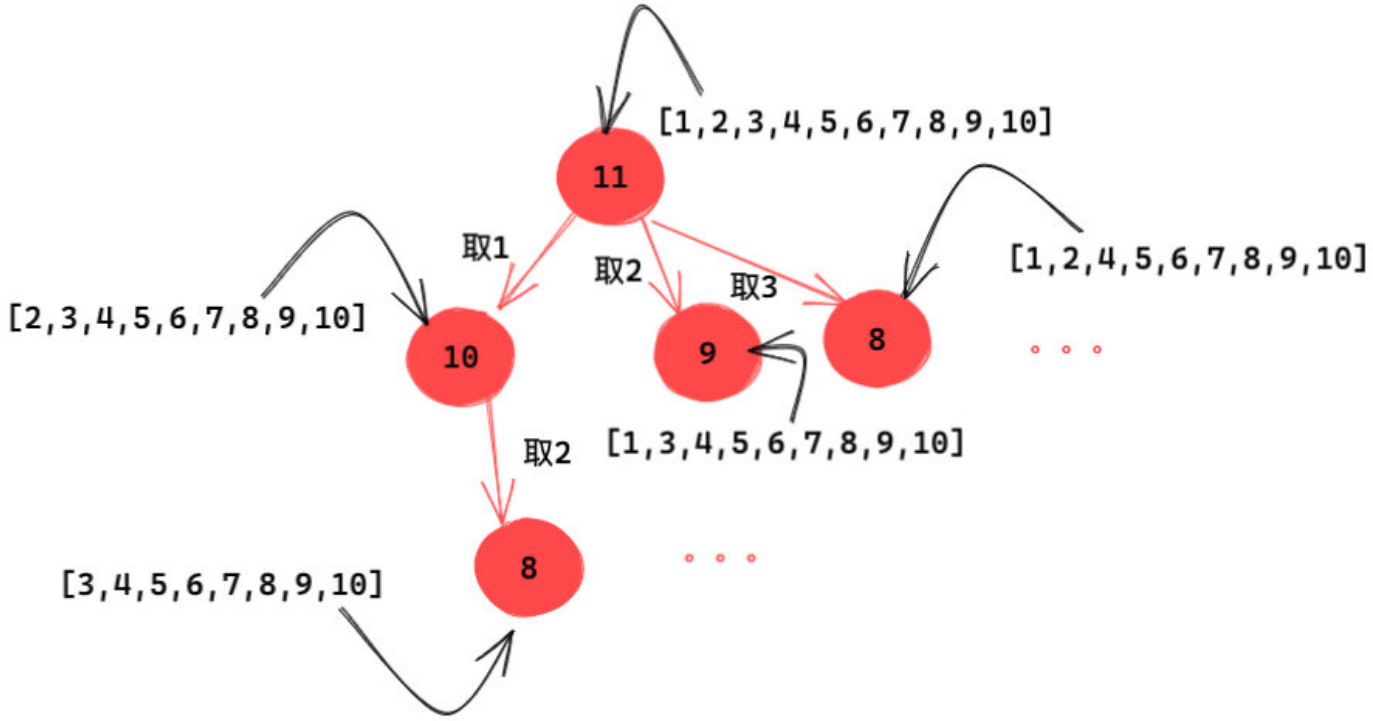
上面代码已经很清晰了，并且加了注释，我就不多解释了。我们继续来看下**如果数字不允许重复选** 会怎么样?

一个直观的思路是使用 set 记录已经被取的数字。当选数字的时候，如果是在 set 中则不取即可。由于可选数字在**动态变化**。也就是说上面的逻辑树部分，每个树节点的可选数字都是不同的。

那怎么办呢？很简单，通过参数传递呗。而且：

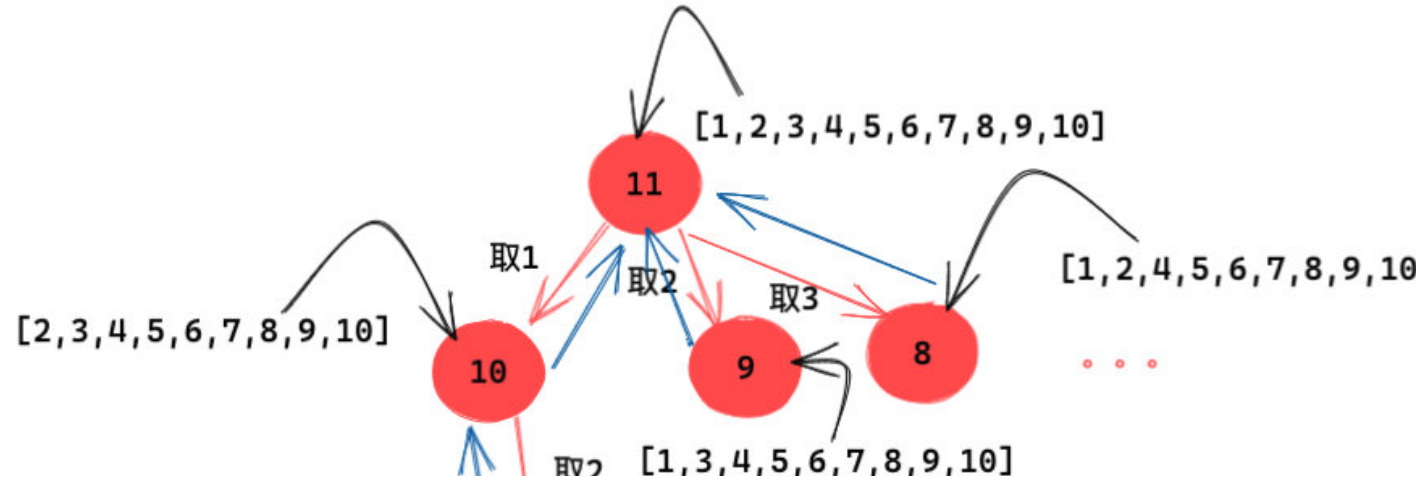
- 要么 set 是值传递，这样不会相互影响。
- 要么每次递归返回的是时候主动回溯状态。 关于这块不熟悉的，可以看下我之前写过的**回溯专题**[2]。

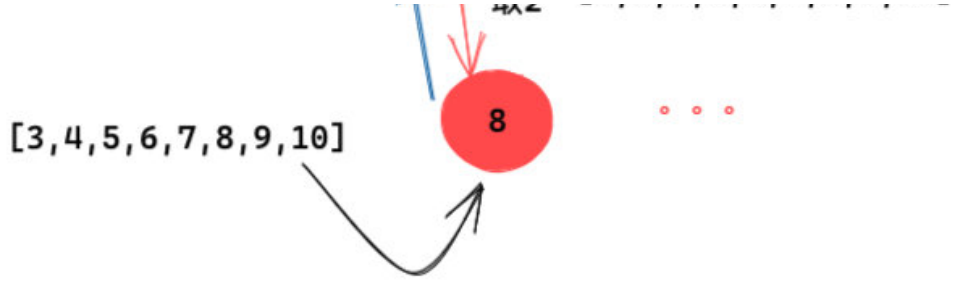
如果使用值传递，对应是这样的：




每一个 set 引用地址都是不同的

如果在每次递归返回的是时候主动回溯状态，对应是这样的：






每一个 set 引用地址都是一样的

注意图上的蓝色的新增的线，他们表示递归返回的过程。我们需要在返回的过程**撤销选择**。比如我选了数组 2， 递归返回的时候再把数字 2 从 set 中移除。

简单对比下两种方法。

- 使用 set 的值传递，每个递归树的节点都会存一个完整的 set，空间大概是 **节点的数目** X **set 中数字个数**，因此空间复杂度大概是 $O(2^{m}axChoosableInteger * maxChoosableInteger)$， 这个空间根本不可想象，太大了。

- 使用本状态回溯的方式。由于每次都要从 set 中移除指定数字，时间复杂度是 $O(maxChoosableIntegerX节点数)$，这样做时间复杂度又太高了。

这里我用了第二种方式 - 状态回溯。和上面代码没有太大的区别，只是加了一个 set 而已，唯一需要注意的是需要在回溯过程恢复状态（picked.remove(n)）。

## 代码

代码支持：Python3

Python3 Code:

```
class Solution:
    def canIWin(self, maxChoosableInteger: int, desiredTotal: int) -> bool:
        if desiredTotal <= maxChoosableInteger:
            return True
        if sum(range(maxChoosableInteger + 1)) < desiredTotal:
            return False
        # picked 用于保存当前已经选择过的数。
        # acc 表示当前累计的数字和
        def backtrack(picked, acc):
            if acc >= desiredTotal:
                return False
            if len(picked) == maxChoosableInteger:
```

```
            # 说明全部都被选了，没得选了，返回 False， 代表输了。
            return False
        for n in range(1, maxChoosableInteger + 1):
            if n not in picked:
                picked.add(n)
                # 对方有一种情况赢不了，我就选这个数字就能赢了，返回 true，代表可以赢。
                if not backtrack(picked, acc + n):
                    picked.remove(n)
                    return True
                picked.remove(n)
        return False

    # 初始化集合，用于保存当前已经选择过的数。
    return backtrack(set(), 0)
```

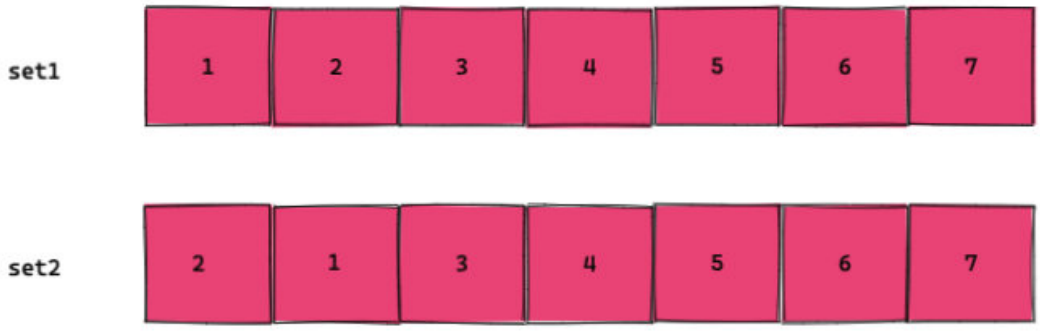
## 状态压缩 + 回溯

### 思路

有的同学可能会问， 为什么不使用记忆化递归？这样可以有效减少逻辑树的节点数，从指数级下降到多项式级。这里的原因在于 set 是不可直接序列化的，因此不可直接存储到诸如哈希表这样的数据结构。

而如果你自己写序列化，比如最粗糙的将 set 转换为字符串或者元祖存。看起来可行，set 是 ordered 的，因此如果想正确序列化还需要排序。当然你可用一个 orderedhashset，不过效率依然不好，感兴趣的可以研究一下。

如下图，两个 set 应该一样，但是遍历的结果顺序可能不同，如果不排序就可能有错误。




至此，问题的关键基本上锁定为找到一个**可以序列化且容量大大减少的数据结构**来存是不是就可行了？

注意到 **maxChoosableInteger 不会大于 20** 这是一个强有力的提示。由于 20 是一个不大于 32 的数字， 因此这道题很有可能和状态压缩有关，比如用 4 个字节存储状态。力扣相关的题目还有不少， 具体大家可参考文末的相关题目。

我们可以将状态进行压缩，使用位来模拟。实际上使用状态压缩和上面**思路一模一样，只是 API 不一样**罢了。

假如我们使用的这个用来代替 set 的数字名称为 picked。

- picked 第一位表示数字 1 的使用情况。

- picked 第二位表示数字 2 的使用情况。
- picked 第三位表示数字 3 的使用情况。
- 。。。

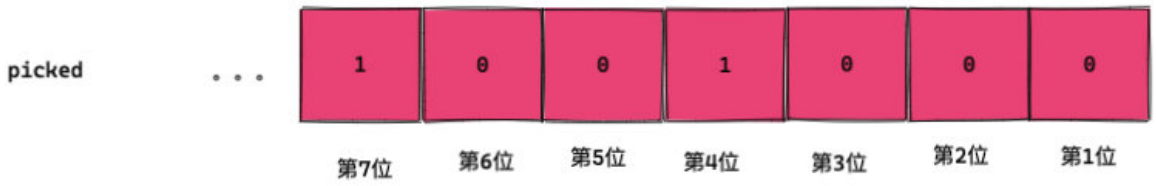
比如我们刚才用了集合，用到的集合 api 有：

- in 操作符，判断一个数字是否在集合中
- add(n) 函数， 用于将一个数加入到集合
- len()，用于判断集合的大小

那我们其实就用位来模拟实现这三个 api 就罢了。详细可参考我的这篇题解 - **面试题 01.01. 判定字符是否唯一** [3]

### 如果实现 add 操作?

这个不难。 比如我要模拟 picked.add(n)，只要将 picked 第 n 为置为 1 就行。也就是说 1 表示在集合中，0 表示不在。

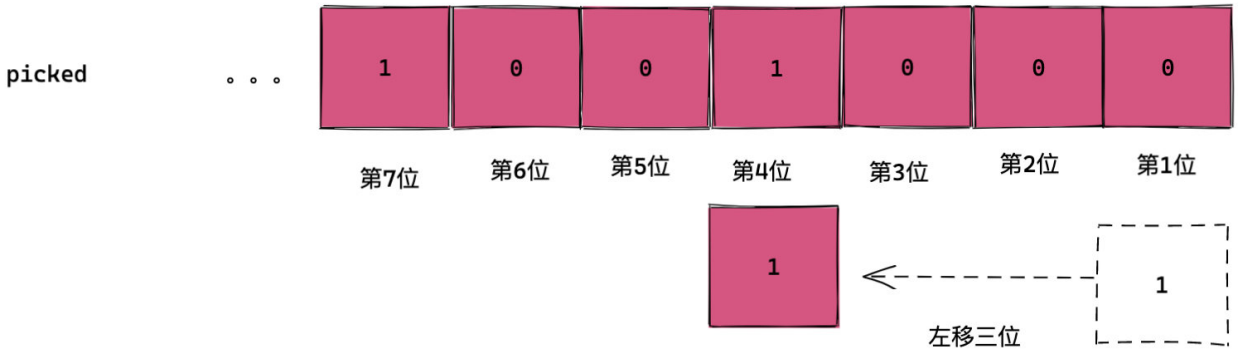



使用**或运算和位移运算**可以很好的完成这个需求。

**位移运算**

```
1 << a
```

指的是 1 的二进制表示全体左移 a 位， 右移也是同理



**| 操作**

```
a | b
```

指的是 a 和 b 每一位都进行或运算的结构。 常见的用法是 a 和 b 其中一个当成是 seen。 这样就可以当**二值**数组和哈希表用了。 比如：

```
seen = 0b0000000
a = 0b0000001
b = ob0000010

seen |= a 后,   seen 为 0b0000001
seen |= b 后,   seen 为 0b0000011
```

这样我就可以知道 a 和 b 出现过了。 当然 a， b 以及其他你需要统计的数字只能用一位。 典型的是题目只需要存 26 个字母，那么一个 int( 32 bit) 足够了。 如果是包括大写，那就是 52， 就需要至少 52 bit。

### 如何实现 in 操作符?

有了上面的铺垫就简单了。比如要模拟 n in picked。那只要判断 picked 的第 n 位是 0 还是 1 就行了。如果是 0 表示不在 picked 中，如果是 1 表示在 picked 中。

用**或运算和位移运算**可以很好的完成这个需求。

**& 操作**

```
a & b
```

指的是 a 和 b 每一位都进行与运算的结构。 常见的用法是 a 和 b 其中一个是 mask。 这样就可以得指定位是 0 还是 1 了。 比如：

```
mask = 0b0000010
a & mask == 1 说明 a 在第二位（从低到高）是 1
a & mask == 0 说明 a 在第二位（从低到高）是 0
```

### 如何实现 len

其实只要逐个 bit 比对，如果当前 bit 是 1 则计数器 + 1，最后返回计数器的值即可。

这没有问题。而实际上，我们只关心集合大小是否等于 maxChoosableInteger。也就是我只关心**第 maxChoosableInteger 位以及低于 maxChoosableInteger 的位是否全部是 1**。

这就简单了，我们只需要将 1 左移 maxChoosableInteger + 1 位再减去 1 即可。一行代码搞定：

```
picked == (1 << (maxChoosableInteger + 1)) - 1
```

上面代码返回 true 表示满了， 否则没满。

至此大家应该感受到了，使用位来代替 set 思路上没有任何区别。不同的仅仅是 API 而已。如果你只会使用 set 不会使用位运算进行状态压缩，只能说明你对位 的 api 不熟而已。多练习几道就行了，文末我列举了几道类似的题目，大家不要错过哦~

## 关键点分析

- 回溯
- 动态规划
- 状态压缩

## 代码

代码支持：Java,CPP,Python3,JS

Java Code:

```
public class Solution {
    public boolean canIWin(int maxChoosableInteger, int desiredTotal) {

        if (maxChoosableInteger >= desiredTotal) return true;
        if ((1 + maxChoosableInteger) * maxChoosableInteger / 2 < desiredTotal) return false;

        Boolean[] dp = new Boolean[(1 << maxChoosableInteger) - 1];
        return dfs(maxChoosableInteger, desiredTotal, 0, dp);
    }

    private boolean dfs(int maxChoosableInteger, int desiredTotal, int state, Boolean[] dp) {
        if (dp[state] != null)
            return dp[state];
        for (int i = 1; i <= maxChoosableInteger; i++){
            int tmp = (1 << (i - 1));
            if ((tmp & state) == 0){
                if (desiredTotal - i <= 0 || !dfs(maxChoosableInteger, desiredTotal - i, tmp|state, dp)) {
                    dp[state] = true;
                    return true;
                }
            }
        }
```

```
        dp[state] = false;
        return false;
    }
}
```

C++ Code:

```
class Solution {
public:
    bool canIWin(int maxChoosableInteger, int desiredTotal) {
        int sum = (1+maxChoosableInteger)*maxChoosableInteger/2;
        if(sum < desiredTotal){
            return false;
        }
        unordered_map<int,int> d;
        return dfs(maxChoosableInteger,0,desiredTotal,0,d);
    }

    bool dfs(int n,int s,int t,int S,unordered_map<int,int>& d){
        if(d[S]) return  d[S];
        int& ans = d[S];

        if(s >= t){
            return ans = true;
        }
        if(S == (((1 << n)-1) << 1)){
            return ans = false;
        }

        for(int m = 1;m <=n;++m){
            if(S & (1 << m)){
                continue;
            }
            int nextS = S|(1 << m);
            if(s+m >= t){
                return ans = true;
            }
            bool r1 = dfs(n,s+m,t,nextS,d);
            if(!r1){
                return ans = true;
            }
        }
        return ans = false;
    }
};
```

Python3 Code:

```python
class Solution:
    def canIWin(self, maxChoosableInteger: int, desiredTotal: int) -> bool:
        if desiredTotal <= maxChoosableInteger:
            return True
        if sum(range(maxChoosableInteger + 1)) < desiredTotal:
            return False

        @lru_cache(None)
        def dp(picked, acc):
            if acc >= desiredTotal:
                return False
            if picked == (1 << (maxChoosableInteger + 1)) - 1:
                return False
            for n in range(1, maxChoosableInteger + 1):
                if picked & 1 << n == 0:
                    if not dp(picked | 1 << n, acc + n):
                        return True
            return False

        return dp(0, 0)
```

JS Code:

```javascript
var canIWin = function (maxChoosableInteger, desiredTotal) {
  // 直接获胜
  if (maxChoosableInteger >= desiredTotal) return true;

  // 全部拿完也无法到达
  var sum = (maxChoosableInteger * (maxChoosableInteger + 1)) / 2;
  if (desiredTotal > sum) return false;

  // 记忆化
  var dp = {};

  /**
   * @param {number} total 剩余的数量
   * @param {number} state 使用二进制位表示抽过的状态
   */
  function f(total, state) {
    // 有缓存
    if (dp[state] !== undefined) return dp[state];

    for (var i = 1; i <= maxChoosableInteger; i++) {
      var curr = 1 << i;
      // 已经抽过这个数
```

```
      if (curr & state) continue;
      // 直接获胜
      if (i >= total) return (dp[state] = true);
      // 可以让对方输
      if (!f(total - i, state | curr)) return (dp[state] = true);
    }

    // 没有任何让对方输的方法
    return (dp[state] = false);
  }

  return f(desiredTotal, 0);
};
```

## 相关题目

- 面试题 01.01. 判定字符是否唯一 纯状态压缩，无 DP
- 698. 划分为 k 个相等的子集
- 1681. 最小不兼容性

大家对此有何看法，欢迎给我留言，我有时间都会一一查看回答。更多算法套路可以访问我的 LeetCode 题解仓库：https://github.com/azl397985856/leetcode 。 目前已经 37K star 啦。 大家也可以关注我的公众号《力扣加加》带你啃下算法这块硬骨头。


## 参考资料

[1] 动态规划: *https://github.com/azl397985856/leetcode/blob/master/thinkings/dynamic-programming.md*

[2] 回溯专题: *https://github.com/azl397985856/leetcode/blob/master/thinkings/backtrack.md*

[3] 面试题 01.01. 判定字符是否唯一: *https://github.com/azl397985856/leetcode/issues/432*

上一页 下一页