

055 | 计算：现代数学研究什么（1）

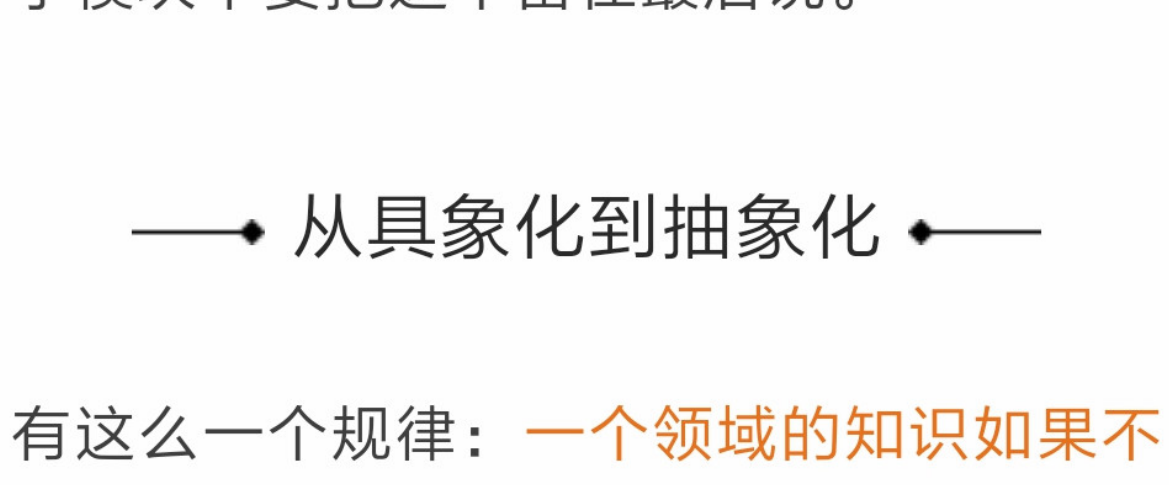


卓克

11小时前

——概念08：计算——

数学是科学的灵魂，而科学又是技术的源头，技术又是生产力增加、生活条件提升的必要条件。



| 卓克亲述 |

现代数学的起源是集合论。这是非数学专业的同学基本不会接触到的领域，但这也是人类文明最前沿的精华，所以我们在数学模块中要把这个留在最后说。

——从具象化到抽象化——

有这么一个规律：**一个领域的知识如果不断地深入发展，都有同一个趋势，那就是从具象化到抽象化。**

比如人类祖先出现了语言，语言实际上就是对具体事物的抽象化表述。在谈论猎物的时候，就不必非得眼前有一只水牛，有一只羚羊，我们就可以用水牛这个词来代替猎物。

数字的出现也反映了事物从具象到抽象化的过程。

比如说人类祖先用弓箭猎取动物的时候，弓箭总是有数量的，他们在谈论手里有多少箭的时候，也许手中真的是有那么多箭，但也有可能没有。但他们要表达的是给我10支箭。那么10这个数字就是弓箭数量的抽象化，作为数字它可以代表10支弓箭，也可以代表10只水牛。总之，10是一个可以脱离实际事物存在的准确的概念。

艺术领域也是这样，曾经古人在绘画上追求的最高极致就是逼真，这就是具象化的追求。大约在1850年之后，绘画继续发展，逼真这种具象化的档次，高度就不够高了。艺术家希望通过颜色、线条、光影表达一种思想理念，也许是一种情绪，或者是一种世界观，抽象派就这样诞生了。画家们就再也不把逼真作为终极目标。音乐也一样有从具象到抽象化的过程。

不光是各个领域，就算是单个的人，他的智力发育过程也存在着从具象到抽象的变化，越成熟的人理解的抽象概念就越多。

比如同样是宇宙跟黑洞，孩子们对黑洞能吸走多少宇宙飞船感兴趣，而成年人对黑洞到底是什么感兴趣。不论是文明的进程，还是个人的智力发育，都在往更抽象化的方向上发展。

数学领域一样存在这个发展过程，数学的各个分支是按使用环境分的，比如：

- 跟图形相关的，丈量土地，剪裁衣服，这些就叫做几何。

- 根据已知数求未知数列算式的就被叫做代数。

- 往空中抛两个银币，有多大的可能它们都是正面呢？这个叫做概率论。

但这些都是具象化的理解。现代数学之后，构建在集合论的基础之上，从前这些分类就显得太弱了。之后的分类就是靠集合的结构，所以这些传统的分类方法虽然对外行来说依然是显而易见，好理解的，但实际最前沿的数学已经不再把它们当作是单独的分类了。它们在集合论的角度看都出现了新的结构，这个是站在2017年的后话。

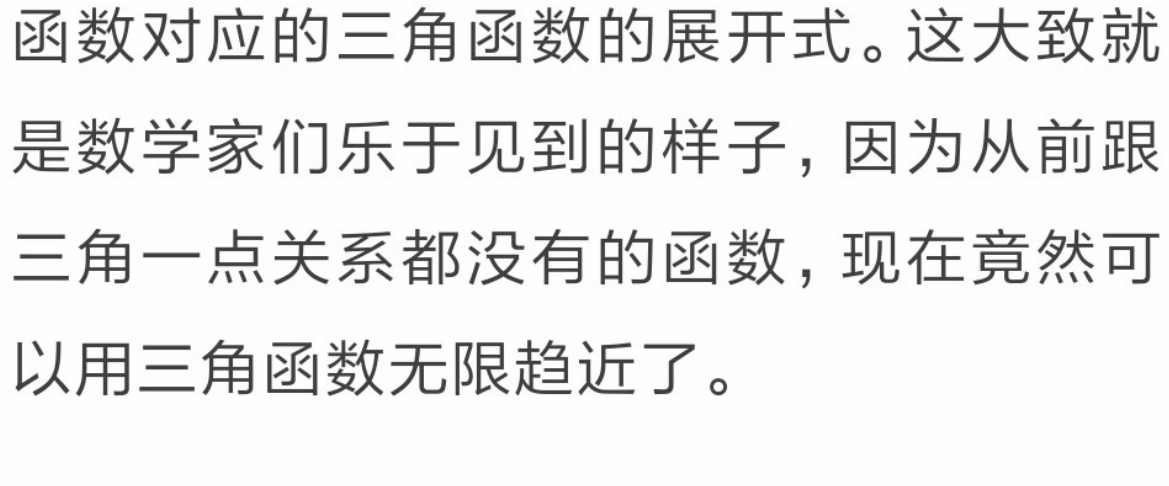
——微积分基础的建成——

之前的课里，我们知道牛顿、莱布尼茨的微积分是以一个解决问题的工具出现的，但是这两个人并不能严格地证明在什么情况下可以使用这个工具，数学界对这个问题也很看重，后来还引发了第二次数学危机，这次的危机简单来说就是质疑微积分的基础不够坚实。

最后的结果，就是给这个工具找到了坚实的理论基础，整个过程经历了130年，也就是在科学家柯西那里告一段落，因为柯西把什么是函数的极限连续做了比较精确的定义，这之后，数学家们开始对各种趋于无穷大，趋于无穷小，或者是趋于某个数值的函数感兴趣，给它们分类。

也因为柯西的工作，数学家们认识到很多类型的函数都可以统一地用 \sin 或者 \cos 这样的三角函数，几个叠加或者是无穷多个三角函数叠加之后表示出来。

这个道理要完全明白，可能要上完大学的基础数学课才可以。



三角级数

12岁以上的同学们大致都可以感受到为什么说几个三角函数叠加在一起就可以把很多函数图像都表示出来了。

在上面的图里，黑色的横杠一会儿维持正1，一会儿维持负1，这部分黑色的线段就是我们目标需要模拟出来的这个函数，而红色的曲线你看它是在不断地变化。为什么变？就是因为我们不断地把更多的三角函数叠加在上面。

最初你看，只有一条波浪线，后来在波浪线上继续叠加波浪，随着波浪不断变多，红色的线条越来越接近黑色横杠的样子。这时候咱们再把注意力放在图片下方，那个几乎看不清的公式上。那个公式每一项每一项都是一级三角函数，那个公式就是把这一级又一级的三角函数不断叠加，图形也会变得不断复杂，每叠加一项，红色的曲线就离黑色目标形状靠近一些。

大家可以数一数，现在这张图是叠加了8项之后的效果，其实理论上它是可以按照特定的规律无限叠加，叠加9项，甚至9万项。叠加的三角函数无限多之后，红色的线段就会无限地接近红色的线段了，我们就管叠加了无限项数之后的式子叫做这个函数对应的三角函数的展开式。这大致就是数学家们乐于见到的样子，因为从前跟三角一点关系都没有的函数，现在竟然可以用三角函数无限趋近了。

但这个时候数学家们也在担心另一个问题，那就是对于一个已知的函数来说，它对应的三角函数的展开式是唯一的吗？还是说有多种不同样式的展开式都可以表示同一种函数呢？

这个问题最早是1854年黎曼提出来的。

在1870年，数学家海涅推进了第一步，但是这一步很有限，他的结论是：只要展开式是一致收敛的，展开式的样式就是唯一的。一致收敛这是一个数学专业的名词，它是比收敛的约束力更强的一种收敛。

那么收敛是什么呢？

你可以理解成三角函数一项一项叠加过程中不会加到后来趋于无限大，那么就可以说它是收敛的。

如果用减肥来作比喻，收敛就相当于要求这个大胖子，你不论怎么长，体重都不要超过300斤。但是一致收敛比这个要求要强得多，它可能是要求这个大胖子不但不能超过300斤，而且还要在一个月内降到200斤以内。

但其实要求整个函数都一致收敛，这是一个限制性太高的要求了，如果只能证明到这种强度的话，那么这个世界上没有多少函数可以平安无事地转化成三角函数的展开式。而实际上去观察，貌似是不用这么强的标准就可以，所以数学家们就得想方设法在更加宽松的条件下继续证明这么展开是可以做的。

一年后，海涅自己又推进了一小步，他证明了除了间断点以外，其他部分如果是一致收敛的，那么展开式的样式就是唯一的。

这次确实是宽松了一点点，但也只是扣去了那几个固定点。

间断点是什么呢？

大家还可以看我上面那张动图，你发现没有，黑色的线条它的高度一会儿是正1维持一段，然后又跳变成负1，又维持一段。由正1跳变到负1，或者是从负1再跳变到正1，这些点都是间断点。

海涅的证明就是可以把这些点不作考虑，只要求剩余的部分是一致收敛的，那展开式它的形式就是唯一的。

但这仍然也够苛刻的，因为扣去它的那些点，它占比原有函数，那相当于是趋近于0%。而且黑色这个函数如果按照现在这个规律无限地延伸下去。

Aa

字号

写字言

73

请朋友读