夕 奈 🗔 🔳 92% 7:14

\leftarrow 056 | 计算: 现代数学研 究什么(2)



点。

的必要条件。

056 | 计算: 现代数学研究... 12:17 5.76MB

|卓克亲述|

昨天我们为了感受一下康托的研究对象,

用的是一条线段和线段上的点来举例的, 而实际上, 康托在研究无穷集合的时候, 也是在类似情景下做研究的。

上能不能建立起——对应的关系呢? 结果是,它们不是一一对应的。正整数是 可数的, 实数是不可数的。而且还得出了 另外几条结论,咱们先直接说。

比如,一切代数是可数的,任何线段上的 实数是不可数的,超越数是不可数的,无 穷集合里,有些集合是可数的,有些是不

可数的。这些结论咱们不能——地解释, 但是我挑几个最简单的,你肯定可以听 懂。

比如现在,我来给你解释什么叫做有限, 什么叫做可数,什么叫做不可数。 那么咱们作一个比喻:

计很少人能知道答案, 但是我告诉你, 它

确实有一个数,你可以猜,于是你就顺着

一个包含140个元素的集合,这个集合是 有限的,它一共140个元素,这就叫做集 合是有限的。

但是可数的。

猜, 比如说2种、3种、4种、5种, 别猜了, 猜对了,就是5种。 正多面体,就是说这一个立体形状中每一

的条件,很难很难满足。所以像正5面体, 正7面体,9、10、11、13、14、15、16、 17, 这些正多面体都是统统不存在的, 而

以刚才咱们问正多面体有多少种这种问题 来看,它的概念都是包含在正整数里的, 所以正整数是可数集。正整数还对应着负 整数,然后跟0加在一起就组成了整数。所 以,整数集合也是可数的。

那么有理数呢?

集合是不是可数的。

怎么思考呢?

面。

想出来了。

可能你现在都忘了有理数的定义是什么

了,有理数的定义就是整数和分数统称为

有理数。那么你可以考虑一下, 有理数的

3/6

5/6

6/6

7/6

8/6

5/7

6/7

7/7

5/5

6/5

7/5

8/5

有理数集

5/4

6/4

7/4

8/4

6/3

8/3

3/8

4/8

5/8

6/8

7/8

8/8

合是可数的。

我想大家只要按照上面这张图的数字猜下 去,不会漏掉任何一个有理数。所以结论 就是有理数也是可数的。

遗漏地排列出来的一个方法, 然后又构造 出来另外一个特别精巧的小数,结果这个 小数竟然不能通过刚刚这种排列筛选出 来,就是这个答案假如真的是他精心构造 出的这个奇怪的小数的话,那么通过这种

所以矛盾就出现了。

个特殊的小数身上。

具,咱们之前提过。

问题在哪呢? 那肯定是这个前期假设是错的,也就是 说,并不存在这样一种猜数的方法。所以, 实数集合是不可数的。

儿说了。

集合论定义无穷。 再接下来, 康托思考的另一个问题, 就是 如果把自然数的集合当作是势最小的无穷

势"。

大。

比如我现在问, 偶数跟奇数谁多呢? 你可 能说一样多,对吧。那我继续问,偶数跟整 数谁多呢?那传统思维肯定是整数多呀,

因为整数里头一半是奇数,一半是偶数, 整体大于部分嘛,但实际上在集合论中,

是一样多的。

覆式的思想还有很多例子。 所有的点,和一个三维空间里所有的点,

谁多呢? 答案是一样多。用专业的词汇说,这些定 义下的集合具有相同的势。因为它们已经 找到了一一对应的映射关系。

写留言

```
概念08: 计算
```

数学是科学的灵魂,而科学又是技术的源 头,技术又是生产力增加、生活条件提升

他研究的东西,就是数轴上不同类型的 第一个问题,就是正整数和实数,在数轴

我现在问你,我的年龄是多少,你就是乱 猜, 只要猜140次就够了, 因为人不可能 活过这么长的年龄, 所以140次总能猜

对。那么你猜我的年龄,这个候选答案一 共有多少呢? 最多就是1到140, 每一个 数字都是一个单独的元素,它们组成了 那我们接下来说,什么叫做集合是无限, 比如问,正多面体一共有多少种,这个估

个面都是正多边形组成的,这种立体形状 才能叫做正多面体。其实这是一个很严格 你猜的这些数字, 如果能按照一定顺序推 进下去, 你根本不知道它的正确答案是5, 但是你按照一个一个数位这么递增下去 猜,终归有一个时刻你能猜到正确答案, 那我们就可以说, 候选答案形成的这个集

就是我们还按照刚才的思路, 假设有一个 问题的答案就藏在有理数集合的数中,我 们能不能找到一种猜数字的顺序,这种方 法一步一步进行下去,早晚能把这个答案 猜出来,不论这个答案是在前面还是在后 就在考虑这个问题,而且把顺序 1/8 -

这个标准呢? 还是我刚刚说的那个思路, 就是我们假设 有一个答案藏在实数集里, 我们能不能定 义出一种顺着猜数的方法, 一步一步走下 去, 最终遇到这个答案呢? 康托最初的突

破就是在这里,他用了反证法这种思维工

他假设存在这么一种猜数的方法,然后他

找出了一种能把0到1之间所有的实数都不

不会遗漏的排查方法,仍然会把它遗漏,

那么现在的错误,一个是不可能出现在构

造排列的方法上,另外也不可能出现在这

当然,这个方法如果大家感兴趣,可以在

维基百科上搜索实数,你可以仔细研究一

下,因为涉及太多的细节,咱们就不在这

虽然我们现在讨论的是集合论, 这些都是

大学数学专业才学的,但实际上,这里出

现的符号、规律都是小学生可以掌握的。

它类似于一种下棋的游戏,所以我倒是推

荐有能力的小同学或大同学试试,你至少

是无穷大, 也就是实数轴上可数的部分占

所以,虽然像12345这些是可数的,这些整

数是无穷多的,但实数级是另外一种比无

穷多的整数还多了无穷倍的集合的存在。

换句话说,大家都是无穷多,但是有的人

的无穷多比其他人的无穷多更加剧烈,这

种剧烈程度,康托就称它为"无穷集合的

那么实数集合的情况怎么样呢? 它可数

不可数呢?我们有没有什么尺子来衡量

等康托推进到这一步,实际上已经发现, 实数中不可数的这部分远远多于可数的那 一部分。

比几乎为0%。

可以看懂康托的这段反证法。

它们的比值是多少呢?

集合, 实数集合的势肯定比自然数这

这是一种非常不同的思维方式, 它跟传统

的部分小于整体的概念完全不兼容。

那么存在不存在另外一

处于两者之间呢?

偶数跟整数是一样多的,因为任意一个偶 数总能对应一个整数的数字。只不过它们 是2倍的关系。但因为偶数又是无穷无尽 的,总是能以2倍这样一一对应整数写下 去,这种一一对应关系保证了偶数跟整数 在集合论中,部分可以等于整体,这种颠 比如说一条直线上所有的点,和一个平 面上所有的点, 谁多呢? 或者一条直线上

请朋友读

2