


057 | 计算：现代数学研究什么（3）

卓克 11小时前

——概念08：计算——

数学是科学的灵魂，而科学又是技术的源头，技术又是生产力增加、生活条件提升的必要条件。



057 | 计算：现代数学研究...
08:12 3.84MB

↓

| 卓克亲述 |

——迟来的认可——

现代科学的发展是不平衡的，在400多年的时间里，世界科学中心曾经换过4次地方，其中第3次中心就是德国，维持了90多年。这次作为核心的就是哥廷根大学，希尔伯特主导了那次科学中心盛世的最后几十年，但非常可惜，随着一战的开打，德国作为科学中心的时代就此落幕了。

在1900年的时候，希尔伯特在数学界可以算是绝对的领军式的人物。也因为他的威望足够大，甚至连大数学家庞加莱听到希尔伯特这么评论康托，也重新端正了态度，把集合论重新研究了一遍，突然就顿悟了。

几年前他还在调侃集合论是有趣的病理现象，但是在1900年之后，他也认识到这是一个太伟大的成果了，也就加入到研究的行列当中。

我们作为旁观者，是多希望这些顶级的数学家在20多年后给出的这些高度的认可，能让康托从精神分裂症中走出来，因为当初康托就是因为这些数学圈的恶评和谩骂病倒的。

但是后来，从他的家人的描述中，我们才知道，那些鼓励，那些认可，并没有起到一丝一毫的安慰作用。康托人生的最后几年，因为一战的原因生活贫困，基本吃不饱饭。1918年1月6号，他在一家精神病医院去世了。

——第三次数学危机——

虽然生活对康托是极不公平的，但他的成果完整地留下来了，也在康托生病20年后被世人接受了，一九零几年，新成长起来的数学家已经确认，只要从算数公理出发，借助集合论的概念，就可以打造整个数学大厦，数学分支完全不用按照从前的用途来分类了，而是可以依照研究对象所在的集合的特征来定义。所以，集合论建成之后，可以说现代数学的大厦可以按照一个新的结构来研究。

但就在集合论刚刚打好基础，又有一些不怕事大的数学家出现了，在1902年，32岁的英国数学家罗素给病中的康托写了一封信，康托看信的时候还处于间歇神经分裂症中的清醒的时间，但是看了这个问题之后，又让他睡不着觉了。

这封信的内容被戏剧化了不少，但仍然可以说明问题，据说罗素举了一个例子：

村子里有一个理发师，脾气很怪，他工作起来有一条规矩，就是只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子。这听上去挺有道理的，因为自己给自己刮胡子了，就不用不着找理发师了。

但罗素写信问康托的问题是：

这个理发师如果遵循这条原则，那他要不要给自己刮胡子呢？

你只要稍微想一下就知道，无论怎么回答都是矛盾的。

- 如果理发师不给自己刮胡子，他就属于那类“不给自己刮胡子的人”，所以照规矩，他应该给自己刮胡子，于是矛盾产生了。

- 如果他给自己刮胡子呢？他又属于“给自己刮胡子的人”，所以他就不该给自己刮胡子。

所以怎么回答都是矛盾的。

这跟康托研究的集合有什么关系呢？

因为刚刚的过程，如果用集合的语言表述就是，设集合S是由一切不属于自身的集合所组成的，那么问题是，S包含于S是否成立呢？这就是集合论的表述。

按康托之前的定义，S应该包含S，但在这个问题下，S又不包含S了，所以定义出现了矛盾。罗素这封信里描述的矛盾后来被称为罗素悖论，也叫做理发师悖论。

那你说，这个问题严重吗？

当然非常严重，因为这起码说明康托在搭建集合论体系的时候，这个体系内部就包含了互相矛盾的内容。所以依照这些基础继续推导出的东西一定是不稳妥的。所以本来以为可以利用集合论来构造新的数学体系，结果发现集合论的地基有问题，于是第三次数学危机由罗素的这封信开始爆发了。

——羊圈里的狼——

接下来又有一众的数学家投身其中，他们的目标就是要重新完善集合论的基础，规范出一个严格的，没有自相矛盾的集合论出来，这个过程叫做公理化集合论的过程。

公理化是什么意思呢？

就是要从尽量少的基本概念，基本命题出发，要求这些东西基础得不能再基础了，这些东西也是没法去证明的，我们天生就要规定它们是正确的，然后从这些基础再出发，目标是推演出后续整个数学大厦。这样的公理系统，后来真的设计出来几套。

在那里都包含了哪些最基础的概念和命题呢？

为了让大家切身感受一下，我挑几个最简单的说，比如：

- 空集存在公理，说的是存在一个集合，它里面没有元素，完了。
- 无穷公理，说的是存在一个集合，它里面有无穷多的元素，完了。
- 集合相等公理，一个集合完全由它的元素决定，如果两个集合含有相同的元素，那么两个集合是相等的。

你看，都是这样最最基本的认知道理。当然，除了这些还有很多，比如正则公理、选择公理、替换公理、幂集公理等等，因为说起这些来就比较麻烦了，就不在这里具体描述了。

在第三次数学危机爆发之后30多年，集合论的公理化就完成了，听上去好像问题是解决了，但实际上这次公理化的过程更像是一种修修补补的方法，把漏洞给堵上了。

有一个非常形象的比喻，就是之前养了一群羊，集合公理化就相当于修建了一圈篱笆，把羊圈在里边了。你以为这个很稳妥吗？但其实不完全这样。因为我们不知道我们修的这一圈篱笆里有没有狼。

在1938年的时候，哥德尔出现了，补了一刀，他指出羊圈里是有狼的。

你应该还记得数学系列最开始我们说的，爱因斯坦最爱跟谁一起下班呢？就是这个哥德尔。

哥德尔就证明了，在集合公理化系统中，连续统假设是不能确定它是正确还是错误的，这就涉及到集合公理是不完备的这种性质。如果一个逻辑系统从里面那些正确的结论一步一步地推演，结果却被人证明最后至少可以出现一些结论是无法判定对

仅供学习免费使用 请勿用作商业用途

防断更微信：699250

61

请朋友读