Spectrum Theory

LYQ

2026 年 2 月 9 日

Contents

1 Compact Operators **1**

2 Fredholm Theory **7**

3 Spectrum Set and Resolvent Set **13**

4 Spectrums of Compact Operators **15**

5 自伴紧算子的正交对角化定理 **16**

Abstract

紧算子理论和 Fredholm 算子理论复习。无限维 Hilbert space 中自伴紧算子的正交对角化分解复习。

1 Compact Operators

紧算子是接近“无穷维矩阵”的一种算子。我们先发展紧算子的理论。

Definition 1.1 (紧算子)**.** *X, Y NVS. We say $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ is a compact operator iff for any bounded subset $E \subset X$, $T(E)$ is precompact ($\overline{T(E)}$ is compact).*

Remark 1. 上课时直接定义 X, Y 是 *Banach space*, 这是因为谱理论是在 *Banach Space* 上做的, 所以不太会考虑非 *Banach Space* 上的紧算子的性质。

Example 1.2. *Consider identity map $1_X : X \to X$, When can 1_X become a compact operator?* 也就是说, 何时有界闭集成为紧集？我们知道, 这当且仅当 X 是有限维的。这个例子说明, 无限维赋范空间中, 恒等映射都不是 *compact* 的。换句话说, 直觉上, 若 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ 是紧算子, 那么 X 应该比 Y 小的多。

Example 1.3 (有限秩算子)**. 有限秩算子**给出了一类重要的紧算子。有限秩算子指 *Image* 是有限维子空间的线性算子。设 X, Y 是赋范线性空间, 则 $X \to Y$ 的有限秩的有界线性算子 T 必为紧算子。**根据定义验证***:* 事实上, 由于 T 是有界的, 对于任意 X 中的有界集 A, $T(A)$ 必然是包含在有限维 $ImT = T(X)$ 中的有界集。我们知道在有限维空间中, 有界完全刻画了相对列紧, 因此 T 是紧算子。

Example 1.4 (积分算子)**.** 设 $K(s,t)$ 是 $[a,b] \times [a,b]$ 上的二元连续函数。我们考虑 $C[a,b] \to C[a,b]$ 的算子 F 如下 *(*最大模范数*):*

$$(F\phi)(s) := \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt\,, \forall \phi \in C[a,b].$$

试验证*:* F 是 $C[a,b]$ 上的紧算子 *(*这个算子被称为 ***Fredholm* 算子**或**积分算子***)*。

Proof. 设 A 是 $C[a,b]$ 中的有界集 (i.e. 存在常数 C, s.t. $\forall \psi \in A, \|\psi\| < C$). 我们的目标是验证 $F(A)$ 是 $C[a,b]$ 中的相对列紧集。根据 Arzela-Ascoli thm, 只要验证集合 $F(A)$ 的等度连续性即可。对 A 中的任意一个元素 ψ, 结合积分的三角不等式, 我们有下面的估计:

$$|(F\psi)(s_1) - (F\psi)(s_2)| = |\int_a^b (K(s_1,t) - K(s_2,t))\psi(t)dt| \leq C\int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|dt.$$

由于 K 是紧集 $[a,b] \times [a,b]$ 上的连续函数, 因此一致连续。$\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $s_1, s_2 : |s_1 - s_2| < \delta$, 有 $|K(s_1,t) - K(s_2,t)| < \epsilon (\forall t \in [a,b])$. 因此, 若令我们先前的估计中的 s_1, s_2, 满足距离小于 δ 的条件, 就有:

$$|(F\psi)(s_1) - (F\psi)(s_2)| \leq L\epsilon(b-a), \ \forall \psi \in C[a,b].$$

此即等度连续。 □

Notation 1. 用 $\mathcal{K}(X,Y)$ 表示赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的紧算子全体。

$\mathcal{K}(X,Y)$ 目前仅为一个集合, 我们下一个任务是窥探 $\mathcal{K}(X,Y)$ 的空间结构性质。

Theorem 1.5. *Let $X, Y = NVS$. Then*

1. $\mathcal{K}(X,Y)$ 是 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的线性子空间
2. 若 Y 还是一个 *Banach Space, Then* $\mathcal{K}(X,Y)$ 是 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的闭线性子空间。
3. *Let $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ and Z a NVS. Then for any $S \in \mathcal{B}(Y,Z), S' \in \mathcal{B}(Z,X)$, It holds that $ST \in \mathcal{K}(X,Z)$ and $TS' \in \mathcal{K}(Z,Y)$.*
4. 特别地, 若 X 是一个 *Banach Space*, $\mathcal{K}(X)$ 是 *Banach Algebra* $\mathcal{B}(X)$ 的闭子理想

Proof. 按定义验证即可, 关键是熟悉度量空间的紧性定理。

1. 只要证 $\mathcal{K}(X,Y)$ 关于线性组合封闭。设 $S,T\in\mathcal{K}(X,Y)$, 下证 $T+S\in\mathcal{K}$. 根据定义, for any bounded set A in X, we need to show that $(T+S)(A)$ is precompact in Y. 考虑 $(T+S)(A)$ 中的任意一个点列 $\{(T+S)(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, 由于 $S,T\in\mathcal{K}(X,Y)$, 故根据定义, 点列 $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ 在 Y 中有收敛子列 $\{T(x_{n_k})\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. Similarly, 点列 $\{S(x_{n_k})\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ 在 Y 中有收敛子列 $\{S(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. 因此 $\{(T+S)(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ 存在收敛子列 $\{(T+S)(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. 因此 $T+S$ 的确是一个紧算子。关于数乘封闭同理可证。

2. 当 Y 是 Banach Space 的时候, 好处是此时 $\mathcal{B}(X,Y)$ 是一个 Banach Space. To check that $\mathcal{K}(X,Y)$ is indeed closed in $\mathcal{B}(X,Y)$, we use definition of closedness. Let sequence $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}\subset\mathcal{K}(X,Y)$ converge to $T\in\mathcal{B}(X,Y)$, our goal is to show that $T\in\mathcal{K}(X,Y)$. 对于任意的有界集 A, 我们的目标是证明 $T(A)$ 是一个完全有界集 (从而是相对列紧集)。要证明是完全有界集, 就要证明对于任意的 $\epsilon>0$, $T(A)$ 有有限 ϵ-网。Let $L=sup\{\|x\|:x\in A\}$. For previous ϵ, there exists $N\in\mathbb{N}$, s.t. when $n\geq N$, It holds that
$$\|T_n-T\|\leq\frac{\epsilon}{3L}.$$
由于 $\{T_n\}$ 都是紧算子, 所以 $T_N(A)$ 是相对列紧集, 从而 $T_N(A)$ 有有限 $\frac{\epsilon}{3}$-网 $\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$. 对于任意的 $j=1,2,\cdots,k$, $y_j\in T_N(A)$, 故存在 x_j 实现 $T_N(x_j)=y_j$.

   Claim : $\{T(x_j):j=1,2,3,\cdots,k\}$ is an ϵ-网 for $T(A)$.

   事实上, 对于任意 $y\in T(A)$, 存在 $x\in A$ 使得 $y=T(x)$. 由于 $T_N(x)\in T_N(A)$, 故存在 y_j 使得 $\|y_j-T_N(x)\|\leq\frac{\epsilon}{3}$. 于是,
$$\|y-T(x_j)\|\leq\|T(x)-T_N(x)\|+\|T_N(x)-y_j\|+\|T_N(x_j)-T(x_j)\|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}.$$
此即说明 TA 是完全有界集, 从而根据"完备度量空间中完全有界等价于相对列紧"知: TA 是相对列紧集。

3. 先考虑 $S(T(A))$, T is compact $\Rightarrow T(A)$ is precompact. 而 S is continuous , so $S(T(A))$ 显然 precompact. Then we consider $T(S'(A))$, 有界线性映射把有界集映成有界集, 再由 T 是紧算子直接得到 $T(S'(A))$ is precomapct.

4. 这一条是前三条的直接推论。第二条说明闭子空间, 第三条说明是理想。

□

利用上面的命题, 我们可以考察 $L^2[a,b]$ 上的积分算子的紧性。

Example 1.6. *Let $K(s,t)\in L^2(E)$, where $E:=[a,b]\times[a,b]$. Consider a linear operator K on $L^2[a,b]$:*
$$(K\phi)(s):=\int_a^b K(s,t)\phi(t)dt,\ \ \forall\phi\in L^2[a,b].$$
Claim: K 是 $L^2[a,b]$ 上的紧算子, 称 K 为 ***Fredholm* 型算子**。

Proof. 不加证明地给出下面的估计式, 这是实分析中的一道简单的 Exercise:

$$\|K\| \leq (\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds)^{\frac{1}{2}}.$$

根据实分析的基础知识, $L^2(E)$ 中的函数 $K(s,t)$ 可以被一列阶梯函数 $\{K_n(s,t)\}$ 逼近 (由 $K_n(s,t)$ 定义出的积分算子记为 K_n), 因此,

$$\|K - K_n\| \leq (\int_a^b \int_a^b |K(s,t) - K_n(s,t)|^2 dtds)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

因此, 只要证明每一个 K_n 都是紧算子并结合 $\mathcal{K}$ is closed 即知 K 是紧算子。事实上, 作为阶梯函数, 不妨将 $K_n(s,t)$ 写为:

$$K_n(s,t) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} \chi_i^{(n)}(s,t).$$

其中, 每个 $\chi_i^{(n)}$ 表示某个矩形的特征函数。因此, 根据定义:

$$(K_n\phi)(s) := \int_a^b \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} \chi_i^{(n)}(s,t)\phi(t)dt.$$

我们看到每一个 K_n 都是有限秩算子! 因而是紧算子。 □

下面, 我们进一步给出一些判断算子是否是紧算子的方法, 毕竟每次都用定义还挺烦的。

先回忆弱拓扑理论中的一些事实 (证明请见弱拓扑的笔记):

Lemma 1.7 (Eberlein)**.** *自反空间 X 中的有界序列 $\{x_n\}$ 存在子列在 X 中弱收敛。*

Lemma 1.8. *赋范线性空间 X 中的弱收敛序列 $\{x_n\}$ 是有界的。且 $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$。*

Theorem 1.9 (自反空间中紧算子的刻画)**.** *设 T 是自反空间 X 上的有界线性算子。那么 T 是紧算子***当且仅当***对于 X 中的任意弱收敛序列 $x_n \rightharpoonup x(n \to \infty)$, 都有 $Tx_n \to Tx(n \to \infty)$.*

Proof. $\Leftarrow$: 任给 $A \subset X$, bounded, we need to show that $T(A)$ is precompact. 任给 $T(A)$ 中的点列 $\{Tx_n\}$, 由引理 (1.7), 有界序列 $\{x_n\}$ 存在弱收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 记 $\{x_{n_k}\}$ 的弱极限为 x. 则根据条件, $Tx_{nk} \to Tx$. 这表明 $T(A)$ is precompact.

$\Rightarrow$: 注意到若 $x_n \rightharpoonup x(n \to \infty)$, 则必有 $Tx_n \rightharpoonup Tx(n \to \infty)$(根据定义验证即可). 我们使用反证法证明. 假设 $\{Tx_n\}$ 不范数收敛到 Tx, 则存在某个 $\epsilon_0 > 0$ 和子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \epsilon_0(\forall k)$. 根据引理 (1.8), 我们知道弱收敛的序列是有界的, 那么子列 $\{x_{n_k}\}$ 当然也是有界的。再根据紧算子的定义, $\{Tx_{n_k}\}$ 存在（强）收敛子列 $\{Tx_{n'_k}\}$, 设它的（强）极限是 y. 结合强收敛蕴含弱收敛的事实以及弱收敛极限的唯一性, 我们知道 $y = Tx$. 这和 $\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \epsilon_0(\forall k)$ 矛盾。 □

Remark 2. *一言以蔽之, 紧算子把弱收敛映成强收敛。*

我们再来看另外一种紧算子的刻画, 这种刻画只能在 Hilbert Space 上聊。

Lemma 1.10 (紧算子值域的刻画)**.** *X, Y NVS. $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Then TX is separable in Y.*

Proof. 注意到 $TX = \bigcup_n T(B_n(0))$, 故只需证对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $T(B_n(0))$ 是可分的即可。由于 $B_n(0)$ is bounded 以及 T 紧算子, 故 $T(B_n(0))$ is precompact, thus 完全有界。因此, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 存在有限 $\epsilon-$ 网 W_n. 现在, 我们取一列趋于 0 的精度, 例如 $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^+$)。
对于每一个 k, 存在一个有限集 $A_{n,k} \subset Y$, 使得 $A_{n,k}$ 是 $B_n(0)$ 的 $\frac{1}{k}$-网。Consider $\bigcup_k A_{n,k}$. 这就是我们要找的 Countable dense subset. □

Theorem 1.11 (希尔伯特空间中紧算子的刻画)**.** *Let X be a Banach space and H be a Hilbert Space. Let $T \in \mathcal{K}(X, H)$. 那么, T 可以成为一列有限秩算子 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ 的范数极限.*

Proof. 我们之前已经证明: 紧算子的像 TX 在 H 中是可分的。令 $H_0 = \overline{TX}$ 为 TX 的闭包。则 H_0 是 H 的一个闭子空间, 且是可分的 Hilbert 空间。由于 H_0 可分, 我们可以选取 H_0 的一组可数标准正交基: $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$。这样, 我们定义有限秩算子 T_n 如下:

$$T_n : X \to H,\ T_n(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle Tx, e_i \rangle e_i.$$

Claim: $\|T_n - T\| \to 0$ as $n \to \infty$. For all $x \in X, \|x\| = 1$, one has $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Tx, e_i \rangle e_i$. Therefore, $\|(T_n - T)(x)\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle Tx, e_i \rangle^2$. Since $\|Tx\| = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Tx, e_i \rangle^2 < \|T\|\|x\| = \|T\|$, then $n \to \infty$, $\|(T_n - T)(x)\| \to 0$. □

Remark 3. *这个定理直觉上告诉我们紧算子可以理解为"矩阵的极限", which justifies our intuition that compact operator can be viewed as a "infinite dimensional matrix" in a way.*

Remark 4. *上述结论不可推广到 Banach Space, 反例很复杂。*

最后, 我们来谈论算子的紧性与其共轭算子的紧性的关系。

Theorem 1.12. *X, Y NVS. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若 T 是紧算子, 那么 $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$. 如果进一步假设 Y 是 Banach space, 那么逆命题也成立。*

Proof. "⇒": 若 T 是紧算子, 我们希望证明 T^* 是紧算子。根据定义, 设 $\{\phi_n\}$ 是 Y^* 中的一个有界点列 ($\|\phi_n\| \le M$). 我们希望证明存在 $\{T^*\phi_n\}$ 的在 X^* 中的收敛子列 $\{T^*\phi_{n_k}\}$. 注意到算子依算子范数收敛的定义是在单位球面上看的, 所以我们自然地用下面的方法找这个子列:

设 S 为 X 的单位球面, i.e. $S := \{x : \|x\| = 1\}$. Since T is compact, $\overline{TS}$ is compact in Y by definition. Now we regarded $\{\phi_n\}$ as a sequence of functions defined on $\overline{TS}$. Note that $\|\phi_i(x) - \phi_i(y)\| \le \|\phi_i\|\|x - y\| \le M\|x - y\|$, It is clear that $\{\phi_n\}$ is equicontinuous. By Arzela-Ascoli theorem, $\{\phi_n\}$ is precompact in $C(\overline{TS}, \|\cdot\|_\infty)$, thus having a subsequence $\{\phi_{n_k}\}$ uniformly converges in $\overline{TS}$.

Claim : $\{T^*\phi_{n_k}\}$ 就是我们要找的 X^* 中的收敛点列！事实上, For any $i, j > N$(N 对于任给的 $\epsilon > 0$, 用子列的一致收敛性找), It holds that:

$$|T^*\phi_i - T^*\phi_j(e_\alpha)| = |(\phi_i - \phi_j)(Te_\alpha)| = |\phi_i(Te_\alpha) - \phi_j(Te_\alpha)| \le \epsilon.$$

因此,

$$\|T^*\phi_i - T^*\phi_j\| \le \epsilon.$$

这表明 $\{T^*\phi_{n_k}\}$ 是 X^* 中的 Cauchy sequence, 因而是收敛点列。

"$\Leftarrow$": **(这个方向的证明是一个典型的 trick)** 假设 Y 是 Banach space 且 T^* 是紧算子。根据定义, 想证明 T 是紧算子, 我们取 X 中的有界点列 $\{x_n\}$, 目标是证明 $\{Tx_n\}$ 在 Y 中有收敛点列。由"$\Rightarrow$" 方向的证明, 我们知道此时 $T^{**} \in \mathcal{K}(X^{**}, Y^{**})$. Consider isometric embedding J-map $J_X : X \to X^{**}$, we know $\{J(x_n)\}$ is bounded in X^{**}. So $\{T^{**}(J(x_n))\}$ is precompact in Y^{**}. 下面对 $T^{**}(J(x_n))$ 进行化简变形, Let $h \in Y^*$:

$$T^{**}(J(x_n))(h) = J(x_n)(T^*(h)) = T^*(h)(x_n) = h(Tx_n) = J_Y(Tx_n)(h).$$

因此, $\{J_Y(Tx_n)\}$ is precompact in Y^{**}, 从而是完全有界的。由于 $\|J_Y(Tx_i) - J_Y(Tx_j)\| = \|Tx_i - Tx_j\|$, 因此容易看出 $\{Tx_n\}$ 是完全有界的 ($\{J_Y(Tx_n)\}$ 的有限 ϵ-网直接给出了 $\{Tx_n\}$ 的有限 ϵ-网)。最后, 由 Y 是一个 Banach space, 我们知道 $\{Tx_n\}$ 是相对列紧的。 $\square$

2 Fredholm Theory

在本节的讨论中,X, Y 均指 Banach Space.

Remark 5. *发展 Fredholm Theory(即研究 Fredholm 算子的性质) 的目的是方便后续刻画紧算子的谱。本节的内容可以视为工具上的准备, 难度较大, 事实上,* ***完全不提 Fredholm 算子*** *也可以证明自伴紧算子的"正交对角化"定理。*

本节的证明会反复使用下面的引理, 先不加证明地列在这里。

Lemma 2.1 (Key Lemma)**.** *巴拿赫空间的有限维子空间和有限余维闭子空间是拓扑可补的。*

Definition 2.2 (Fredholm 算子)**.** *Let X, Y be Banach spaces. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. We say T is Fredholm(denoted by $T \in Fred(X, Y)$) iff T satisfies:*

1. *$dim(KerT) < \infty$.*
2. *ImT is closed.* (这条保证 *$CokerT$* 的良定义性。)
3. *$Codim(ImT) := dim(Y/ImT) = dim(CokerT) < \infty$.*

Remark 6. *直观上, Fredholm 算子是一类"差不多"是可逆算子的算子。$KerT$ 有限维说明差不多是一个单射。$CokerT$ 有限维说明差不多是一个满射。*

Exercise 1. **判断题***: 若 Y 是巴拿赫空间, Z 是 Y 的子空间, 且 $dim(Y/Z) < \infty$(作为线性空间), Then Z must be closed in Y.*

Proof. 这是不对的，考虑 Y 是任意无穷维 Banach 空间，我们可以构造一个不连续的线性泛函 $f : Y \to \mathbb{R}$。令 $Z = \mathrm{Ker}(f)$。

- **余维数：** $Y/Z \cong \mathbb{R}$，所以 $\dim(Y/Z) = 1 < \infty$。
- **闭性：** 因为 f 不连续，其核空间 Z 在 Y 中是稠密的，但不是闭的（原因是一个经典的泛函分析练习：NVS X 上的线性泛函 f 有界当且仅当 $Kerf$ 是闭的）。

□

Remark 7. *事实上, 在添加条件 "Z 是某个有界算子 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ 的像" 的情况下，上面的论断就正确了！所以 Fredholm 算子的定义的陈述中的第二条可以去掉。*

Proof. 下面对 Remark 7 中涉及到的命题加以证明, 记 $Z = \mathrm{Im}T$。设 $n = \dim(Y/Z) < \infty$:

因为 Y/Z 是有限维的，根据线性代数知识，我们可以找到 Y 的一个 n 维子空间 W（例如由商空间基底的代表元张成），使得 Y 分解为直和：

$$Y = Z \oplus W \quad \text{(代数直和，暂不知拓扑性质)}$$

由于 T 连续，Ker$T$ 是 X 的闭子空间。考虑商空间 $\tilde{X} = X/\mathrm{Ker}T$。则 $\tilde{X}$ 也是一个 Banach 空间。有界线性算子 T 诱导出一个双射的有界线性算子 $\hat{T} : \tilde{X} \to Z$。

考虑乘积空间 $\tilde{X} \times W$。因为 $\tilde{X}$ 是 Banach 空间，W 是有限维空间（必然完备），所以 $\tilde{X} \times W$ 是 Banach 空间（范数取 $\|(\tilde{x}, w)\| = \|\tilde{x}\| + \|w\|$）。定义算子 $S : \tilde{X} \times W \to Y$ 如下：

$$S(\tilde{x}, w) = \hat{T}\tilde{x} + w$$

我们来考察 S 的性质：

- 线性且有界：显然，因为 $\hat{T}$ 和恒等映射都有界。
- 满射：因为 $Y = Z \oplus W$，且 $\mathrm{Im}(\hat{T}) = Z$。
- 单射：若 $S(\tilde{x}, w) = 0$，即 $\hat{T}\tilde{x} = -w$。左边属于 Z，右边属于 W。由于 $Z \cap W = \{0\}$，故 $\hat{T}\tilde{x} = 0$ 且 $w = 0$。又因 $\hat{T}$ 是单射，故 $\tilde{x} = 0$。

S 是 Banach 空间 $\tilde{X} \times W$ 到 Banach 空间 Y 的双射有界线性算子。根据 Banach 逆算子定理, S 的逆映射也连续, 从而 S 是一个拓扑同胚. 现在考察 $\tilde{X} \times W$ 中的子空间 $M = \tilde{X} \times \{0\}$, M 显然是闭子空间。$Z = \mathrm{Im}T$ 恰好就是 M 在同胚映射 S 下的像：$S(M) = Z$。因为同胚映射保持闭集性质，所以 Z 在 Y 中是闭的。 □

Definition 2.3 (Index)**.** *定义 Fredholm 算子 T 的指标 (Index) $IndT$ 为:*

$$IndT = dimKerT - dim(Y/ImT).$$

Remark 8. *由定义知, $IndT$ 是一个有限整数, 因此指标是良定义的。*

Example 2.4. *设 S, T 是 Hilbert space l^2 上的左平移算子和右平移算子。容易验证:*

1. *$dimKerS = 1$, $dimCokerS = 0$, so $IndS = 1$.*
2. *$dimKerS = 0$, $dimCokerS = 1$, so $IndS = -1$.*

类似于对紧算子的讨论, $Fred(X, Y)$ 目前仅是一个集合，我们来探讨其空间结构性质。

Theorem 2.5. *$Fred(X, Y)$ is open in $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Proof. Let $T \in Fred(X, Y)$. By Lemma(2.1), there exists closed subspaces $X_1 \subset X$ and $Y_1 \subset Y$, s.t.

$$X = KerT \oplus X_1,\ Y = ImT \oplus Y_1.$$

Consider $\tilde{T} : X_1 \oplus Y_1 \to Y, T(x_1 + y_1) := Tx_1 + y_1$. 根据定义不难验证 $\tilde{T}$ 是一个可逆的有界线性算子。根据逆算子定理, $\tilde{T}$ has bounded inverse $\tilde{T}^{-1}$. 我们的目标是: 找到一个 $\epsilon_0 > 0$, 使得对于任意的 $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ satisfying $\|T - S\| \leq \epsilon_0$, $S \in Fred(X, Y)$. 那我们就来考虑这样的 S, 令

$\epsilon_0 = 1 + \|T^{-1}\|^{-1}$. 首先我们注意到, 如果类似地定义 $\tilde{S} : X_1 \oplus Y_1 \to Y, \tilde{S}(x_1 + y_1) := Sx_1 + y_1$, 简单的计算告诉我们 $(\tilde{T} - \tilde{S})(x_1 + y_1) = (T - S)(x_1) \Longrightarrow \|\tilde{T} - \tilde{S}\| \leq \|T - S\|$, 则根据可逆线性算子在 $\mathcal{B}(X, Y)$ 中构成开集这一重要定理（见 (2.14)），我们立刻得到 $\tilde{S}$ 也是可逆线性算子。下面根据定义, 两步走证明 S 是 Fredholm 算子:

1. **(Kernel 有限维):** 我们利用 X 的直和分解 $X = KerT \oplus X_1$。设 $P : X \to KerT$ 是对应的连续投影。**Claim:** 投影算子限制在 $KerS$ 上，即 $P|_{KerS} : KerS \to KerT$，是一个单射。设 $x \in KerS$ 使得 $Px = 0$。根据 P 的定义，我们有 $x \in X_1$. 此时，考察 $\tilde{S}$ 在 $(x, 0)$ 处的值:
$$\tilde{S}(x, 0) = Sx + 0 = Sx.$$
由于 $\tilde{S}$ 是可逆的，因此，$(x, 0) = (0, 0)$，即 $x = 0$。现在，既然 $KerS$ 到 $KerT$ 存在单射线性映射，线性代数告诉我们:
$$dim(KerS) \leq dim(KerT) < \infty.$$

2. （**Cokernel 有限维**）对于任意的 $y \in Y$，由于 $\tilde{S} : X_1 \oplus Y_1 \to Y$ 是满射，存在 $x_1 \in X_1$ 和 $y_1 \in Y_1$ 使得：$\tilde{S}(x_1, y_1) = y$. 代入定义，即:
$$Sx_1 + y_1 = y.$$
这表明，任何 $y \in Y$ 都可以写成 ImS 中的元素（Sx_1）与 Y_1 中元素（y_1）的和。用数学语言表述即:
$$Y = ImS + Y_1.$$
我们的目标是证明 $dim(Y/ImS) < \infty$. 这是显然的，因为 $[y] = Sx_1 + y_1 + ImS = [y_1]$, 从而 Y_1 有限维迫使商空间有限维。

□

Theorem 2.6. *$Ind : Fred(X, Y) \to \mathbb{Z}$ is continuous.* (指标在每一个连通分支上取常数)

Proof. 略。这个证明不太重要。 □

下面的引理是一个关键的引理, 在研究紧算子的谱时, 发挥重要作用。证明也较优美。

Lemma 2.7. *X = Banach space and $K \in \mathcal{K}(X)$. Then $1_X + K$ is Fredholm.*

Proof. 根据定义中的三条 (两条) 验证即可:

1. **零空间有限维:** 我们证明 $Ker(I + K)$ 的单位 (闭) 球是紧的。Consider a sequence $\{x_n\} \subset Ker(I + K)$, where $\|x_n\| \leq 1$, 则 $(I + K)(x_n) = 0$, i.e. $K(x_n) = -x_n$. Since K is a compact operator, there exists subsequence $\{x_{n_k}\}$, s.t. $\{Kx_{n_k}\}$ is convergent. 因此 $\{x_{n_k}\}$ is convergent. 这就证明了 $dimKer(I + K) < \infty$.

2. **Im(I + K) is closed in X:** 我们已经证明了 $Ker(I+K)$ 是 X 中的有限维子空间, 根据 Lemma (2.1), 我们可以把 X 写为 $X = Ker(I+K) \oplus X_1$, where X_1 is a closed subspace of X. 那么, 把 $I+K$ 限制在有效的部分上一定是一个**线性空间的**双射，即:

   $$I + K|_{X_1} : X_1 \to Im(I+K)$$

   是一个双射。

   Claim : $(I+K)|_{X_1}$ **下有界** ($\exists c > 0$, s.t. $\|(I+K)|_{X_1}x\| \geq c\|x\|$)。事实上, 如若不然, we can find a sequence $\{x_n\}$ in X_1, s.t. $\|x_n\| = 1$ and $\|(I+K)|_{X_1}x_n\| \to 0 (n \to \infty)$. 由于 K 是一个紧算子, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\{Kx_{n_k}\}$ 收敛, 不妨记为 $Kx_{n_k} \to y \in X (k \to \infty)$。然而, 由构造知: $(I+K)x_{n_k} \to 0 (k \to \infty)$, 这表明:

   $$x_{n_k} = -Kx_{n_k} + (I+K)x_{n_k} \to -y \in X_1, \text{ as } k \to \infty.$$

   一个显然的推论是 $\|y\| = 1$。然而, 由 $I+K$ 的连续性, 我们知道 $\lim\limits_{k\to\infty}(I+K)(x_{n_k}) = -(I+K)y = 0$, 这表明 $y \in Ker(I+K)$, 从而 $y \in Ker(I+K) \cap X_1 = \{0\}$, 与 $\|y\| = 1$ 矛盾。这样证明了下有界性。在我们学习"Lax-MilGram theorem" 的时候, 我们知道定义在 Banach space 上的有界线性算子的下有界性蕴含闭值域 (这个证明很容易), 这就证明了 $Im(I+K)$ 在 Y 中闭。

3. **(Image 有限余维):** 如若不然, 存在一个“closed subspaces chain”:

   $$Im(I+K) := H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots H_m \subset \cdots,$$

   s.t. $dim(H_{k+1}/H_k) = 1$. By F. Riesz Lemma(描述 NVS 闭子空间与单位球的关系的定理), For any $n \in \mathbb{N}^+$, there exists $x_n \in H_n, \|x_n\| = 1$, s.t.

   $$\|x_n - y\| > \frac{1}{2}, \ \forall y \in H_{n-1}$$

   这样, 我们得到了一个有界点列 $\{x_n\}$。考察 $\{Kx_n\}$, 对于任意两个指标 $i, j \in \mathbb{N}^+ (j > i)$:

   $$\|Kx_i - Kx_j\| = \|(I+K)(x_i - x_j) + x_j - x_i\| = \|x_j - (x_i - (I+K)(x_i - x_j))\| > \frac{1}{2}.$$

   这表明 $\{Kx_n\}$ 不可能有收敛子列, 与 K 是紧算子矛盾!

□

Corollary 2.8. *设 K 是 Banach space X 上的紧算子, 则 $Ind(I+K) = Ind(I) = 0$.*

Proof. Easy! Use a path(单参数变换群) $\Phi_t : [0,1] \to Fred(X)$ to join I and $I+K$, 再由指标在每个连通分支上取常值, 立即得到 $Ind(I+K) = Ind(I) = 0$。 □

为了给出 Fredholm 算子的等价刻画，我们介绍一些额外的定义。

Definition 2.9. *For $T, S \in \mathcal{B}(X,Y)$,*

1. $T \equiv S (mod\, \mathcal{K}(X,Y))$ *means* $T - S \in \mathcal{K}(X,Y)$.
2. T *is invertible modulo compact operators iff* $\exists\, T' \in \mathcal{B}(Y,X)$, *s.t.* $TT' \equiv 1_Y \ mod(\mathcal{K}(Y))$ *and* $T'T \equiv 1_X \ mod(\mathcal{K}(X))$.

Theorem 2.10 (Fredholm 算子的刻画)**.** $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ *is Fredholm* $\Longleftrightarrow$ T *is invertible modulo compact operators.*

Proof. $\Rightarrow$: 设 $T \in Fred(X,Y)$. 根据定义, 我们知道 $dimKerT < \infty$ and $dimCoKerT < \infty$. 因此有拓扑直和:$X = KerX \oplus X_1$, 其中 X_1 是 X 的某个闭子空间。类似的, 我们有 $Y = ImT \oplus Y_1$, 其中 Y_1 是 Y 的某个有限维闭子空间。我们自然得到下面的链:

$$Y \xrightarrow{\pi} ImT \xrightarrow{(T|_{X_1})^{-1}} X_1 \xrightarrow{i} X.$$

在上面的链中, 投影映射 π 和自然的含入映射 i 都显然是有界线性算子, 唯一需要加以说明的是 $(T|_{X_1})^{-1}$. 首先 $T|_{X_1}$ 显然是一个双射, 因此可以考虑逆映射且逆映射也是线性映射, 而 $(T|_{X_1})^{-1}$ 的有界性由逆算子定理保证。Consider $S : Y \to X := i \circ (T|_{X_1})^{-1} \circ \pi$, which is a bounded linear operator. **Claim:** S 是 T 的广义逆。根据定义，我们只要验证下面两点:

- $1_Y - TS \in \mathcal{K}(Y)$: It is easy to check that $1_Y - TS = 1_Y - \pi = \pi_{Y_1}$(第一个等号代入 S 的定义即可, 第二个等号利用拓扑直和的性质). 由于 Y_1 是有限维的, π_{Y_1} 是紧算子。
- $1_X - ST \in \mathcal{K}(X)$: Similarly, It is easy to check that $1_X - ST = \pi_{KerT}$, which is compact.

综上, T is invertible modulo compact operators.

$\Leftarrow$: Assume that T is invertible modulo compact operators. Then by definition, there exists $T' \in \mathcal{B}(X,Y)$ and $K_1 \in \mathcal{K}(X), K_2 \in \mathcal{K}(Y)$ s.t.

$$1_Y - TT' = K_2 \ \ , \ \ 1_X - T'T = K_1.$$

我们的目标是证明: T is Fredholm. 根据定义, 我们只要验证下面三点:

- $dimKerT < \infty$: 显然 $KerT \subset KerT'T = Ker(1_X - K_1)$. Since $1_X - K_1$ is Fredholm(by Lemma (2.7)), then $dimKer(1_X - K_1) < \infty$. 因此, $dimKerT < \infty$.
- $dimCokerT < \infty$: 显然 $ImTT' \subset ImT$, 而 $ImTT' = Im(1_Y - K_2)$. 由于 $1_Y - K_2$ 是 Fredholm 算子 (by Lemma (2.7)), 因此 $ImTT'$ 是有限余维的, 因此 ImT 更有限余维。

$\square$

下面是上面定理的两条推论 (证明都显然), 由于第二条推论很重要, 故写成 “theorem”。

Corollary 2.11. *Fredholm 算子 T_1, T_2 的复合还是 Fredholm 算子, 且*

$$Ind(T_1T_2) = Ind(T_1)Ind(T_2).$$

Theorem 2.12 (Fredholm 算子与紧算子)**.** *设 $T \in Fred(X, Y)$. 那么, 对于任意紧算子 $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, $T + K$ 也是 Fredholm 算子且 $ind(T + K) = ind(T)$.*

In 2025.5.20 18:39:30, Great mathematician Siran.Li gives the following slogan:

Theorem 2.13 (Siran.Li's Slogan)**.** "*Elliptic (differential) operators are Fredholm.*"

下面做一些补充，论述为什么 Banach 代数中的可逆元构成开集。

Theorem 2.14 (Neumann 级数)**.** *设 A 是 Banach 空间之间的可逆有界线性算子，若算子 B 满足 $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$，则 B 也是可逆的。*

下面进入谱定理的学习。我们首先单开一节以熟悉“谱”的概念.

3 Spectrum Set and Resolvent Set

我们熟悉的是特征向量和特征值的概念, 这东西在无穷维空间当然也可以定义。

Definition 3.1 (eigenvalue and eigenvector). *设 X 是复赋范线性空间, λ 为一个复数, $T \in \mathcal{B}(X)$. 如果存在 X 中的非零元素（向量）x, 使得:*

$$Tx = \lambda x.$$

则称 λ 是 T 的特征值, 而称 x 为 T 的相应于特征值 λ 的特征向量。

Definition 3.2 (Eigenvector Space). *记 $E_\lambda := \{x : Tx = \lambda x\} \cup \{0\} = Ker(\lambda 1_X - T)$ 是算子 T 的相应于特征值 λ 的特征向量全体再加入零向量。称 E_λ 为线性算子 T 的相应于特征值 λ 的特征向量空间。显然, E_λ 是闭子空间。*

Definition 3.3. *复平面上特征值的全体称为算子 T 的**点谱**, 记为 $\sigma_p(T)$.*

Example 3.4. *Let $X = L^2[a,b]$. Define a bounded linear operator $T : X \to X$ as follows:*

$$(Tx)(t) := \int_a^t x(s)ds,\ x \in L^2[a,b].$$

What are eigenvalues of T?

Consider $Tx = \lambda x$, i.e.

$$\int_a^t x(s)ds = \lambda x(t),\ x \in L^2[a,b].$$

- *若 $\lambda = 0$, 则上式变为 $\int_a^t x(s)ds = 0$. 有实分析的知识, 变上限积分函数是绝对连续函数, 左右关于 t 求导即知 $x(t) = 0$.*
- *若 $\lambda \neq 0$, 可以类似讨论, 此时我们知道 $x(t)$ 是绝对连续的, 因此对上式求导得到 $x(t) = \lambda x'(t)$. 根据 ode 最基本的知识立即知道 $x(t) = 0$.*

因此, 我们知道算子 T 没有特征值。这说明“特征值”这一概念在无穷维有时没啥用。

为此, 我们引入谱的概念, 这个要求会比特征值“松一些”。

Notation 2. *在不引起混淆的情况下, 1, I, 1_X, I_X 这些东西都一个意思。*

Definition 3.5 (Regular point). *设 X 是复 Banach Space, λ 为一个复数, $T \in \mathcal{B}(X)$. 如果 $\lambda I - T$ 是 X 上的可逆线性算子, 则称 λ 是 T 的正则点, 并称 $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ 为 T 的预解算子。不是正则点的复数 λ 称为 T 的谱点。*

Definition 3.6 (Resolvent Set)**.** *复平面上正则点的全体称为算子 T 的预解集, 记为 $\rho(T)$.*

Definition 3.7 (Spectrum Set)**.** *复平面上谱点的全体称为算子 T 的谱集 (或直接称为谱), 记为 $\sigma(T)$.*

Fact 3.8. *根据定义, 我们注意到下面的事实 (全显然):*

1. $\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$.
2. λ 是算子 T 的特征值当且仅当 $\lambda I - T$ 不是 X 到 X 的单射。
3. λ 是算子 T 的谱点当且仅当 $\lambda I - T$ 不是 X 到 X 的双射。
4. 特征值一定是谱点。

确定一个算子的谱不是一件容易的事情, 但是从定义出发, 我们可以得到一些谱的刻画。

Theorem 3.9 (谱的刻画)**.** *Let X be a Banach space over $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{B}(X)$. Then $\sigma(T)$ is compact in $\mathbb{C}$.*

Proof. 根据第五次作业 **Question 1** 的第三小问, 我们知道 $\rho(T)$ is open in $\mathbb{C}$. 因此, 作为 $\rho(T)$ 的补集, $\sigma(T)$ is closed. 注意到,$\lambda > \|T\|$ 时, $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$, 因此, $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ 是可逆的 (利用 Siran Li 讲的那个冯诺依曼的构造). 这表明, 所有在以原点为球心, $\|T\|$ 为半径的复平面上的闭球以外的点全是正则点。因此 $\sigma(T)$ is bounded. 复平面中的有界闭集是紧集, 故 $\sigma(T)$ is compact. $\square$

Theorem 3.10. *对于复 Banach 空间上的非零有界线性算子 T, 其谱集 $\sigma(T)$ 非空。*

Remark 9. *谱可以在复赋范线性空间上类似地定义。只在巴拿赫空间上研究的好处有二:*

- *谱理论本来就是建立在 Banach space 之上的。*
- *Banach space 的好处是有界算子可逆, 其逆算子自动有界。*

Remark 10. *这里对于谱的刻画 (有界闭集) 太粗糙了! 跟没刻画没啥区别, 后续在研究紧算子的谱的时候, 我们会看到更美丽的刻画。*

引出谱半径的定义作结, 本课程并未深入谱半径的性质。

Definition 3.11 (谱半径)**.** *Let X be a Banach space over $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{B}(X)$. Define the spectrum radius of T to be $r(T) := sup\{\|x\| : x \in \sigma(T)\}$. 由 $\sigma(T)$ 的刻画, 我们知道谱半径有限。*

Theorem 3.12 (Gel'fand)**.** *设 $\mathscr{A}$ 是一个 Banach 代数, $T \in \mathscr{A}$, 则有***谱半径的计算公式:**

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

4 Spectrums of Compact Operators

研究紧算子的谱的过程, 就是把有限维矩阵的特征值理论推广到无穷维 Banach space 的过程。下面是 Riesz-Schauder 关于紧算子的谱、特征值和特征向量空间的刻画, 在这个定理的证明中, 我们会收获在 Fredholm theory 中辛勤劳动的果实。

Theorem 4.1 (Riesz-Schauder)**.** *设 X 是复巴拿赫空间, T 是 X 上的紧算子。则有:*

1. *当 X 是无限维空间时, 0 一定是 T 的谱点。*
2. *T 的非零谱点一定是 T 的特征值。*
3. *当 λ 是 T 的非零特征值时, λ 的特征向量空间是有限维的。*
4. *设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 T 的 n 个不同的特征值, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别是对应的特征向量, 那么, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关.*
5. *对任意的 $R > 0$, 集合 $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq R\}$ 是有限集, 因此, $\sigma(T)$ 的极限点只可能是 0。特别地, $\sigma(T)$ 是有限集或者可列集。*

Proof. 所有证明都很容易。

1. 假设 $0 \notin \sigma(T)$。根据定义, T 可逆, 因此 $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$。由于 $\mathcal{K}(X)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的闭子理想, 故 $1_X \in \mathcal{K}(X)$, 因此 X 的单位球在 X 里 precompact。这表明 X 是有限维的, 矛盾。
2. 设 $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$. Consider $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$, which is a Fredholm operator with **Index 0.** 假设 λ 不是特征值, 那么由 Index 0 即知 $\lambda I - T$ 亦为满射, 从而 $\lambda \in \rho(T)$!
3. 设 λ 是 T 的非零特征值, 记其相应的特征空间为 E_λ (特征空间是闭子空间)。根据定义, $T|_{E_\lambda}$ 是特征值倍的恒同映射, (结合 T 是紧算子) 这迫使 E_λ 是有限维的闭子空间。
4. 数学归纳法, 显然。
5. (与证明 $I + K$ 余维数有限的手法类似) 如若不然, 我们可以从集合 $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq R\}$ 中取出一列互不相同的特征值 $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$. 记 $\{x_n\}$ 为其相应的 eigenvectors. Define a sequence of subspaces of X to be $E_n := \overline{span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}}$. It is easy to see that $dim(E_n) = n$ and $E_n \subsetneqq E_{n+1}$. 根据 F.Rietz Lemma, we can find $\{y_n\}$, s.t.
$$y_n \in E_n,\ \|y_n\| = 1,\ d(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$
显然, $(\lambda_n I - T)y_n \in E_{n-1}$. 因此, 对于任意的指标 n, m(WLOG: $n > m$)
$$\|T\frac{y_n}{\lambda_n} - T\frac{y_m}{\lambda_m}\| = \|y_n - (y_n - T\frac{y_n}{\lambda_n} - T\frac{y_m}{\lambda_m})\| \geq \frac{1}{2}$$
这表明 $\{T\frac{y_n}{\lambda_n}\}$ 没有收敛子列。另一方面，因为我们假设了 $|\lambda| \geq R > 0$，且 $\|y_n\| = 1$，所以 $\|\frac{y_n}{\lambda_n}\| \leq \frac{1}{R}$。综上，这些与 T 的紧性矛盾!

$\square$

5 自伴紧算子的正交对角化定理

本章节在希尔伯特空间上研究, 如无特别说明, H 指的都是 Hilbert space。

Remark 11. 下面做一些关于伴随算子的注记。设 X, Y 是 *Banach* 空间，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$。我们已经足够定义 T 的伴随算子

$$T^* : Y^* \to X^*, \quad f \mapsto T^* f := (x \mapsto f \circ T(x)).$$

当 X, Y 进一步是 *Hilbert* 空间的时候，我们通常使用

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

这一关系唯一定义出 $T^* y$。这种定义通过里斯表示定理的同构 $J_X : X \cong X^*$，$J_Y : Y \cong Y^*$ 与第一种定义一致起来，具体地说，*Hilbert* 伴随算子 $=$ 里斯映射的逆 $\circ$ *Banach* 对偶算子 $\circ$ 里斯映射。值得强调的是，在 *Hilbert space* 的语境下，我们偏好使用第二种定义，且基本只使用第二种定义。

研究自伴紧算子 $(T = T^*)$ 给出的特征空间的正交分解就是对于对称矩阵的正交对角化定理在无穷维的推广。

Proposition 5.1. *Hilbert space* 上的自伴算子 T 的特征值必为实数。

Proof. 取非零向量使得 $Tx = \lambda x$. 由

$$\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2.$$

立刻知道 $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposition 5.2. 设 T 是 *Hilbert space* 上的自伴算子, f_1, f_2 分别为不同特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量. 则 $f_1 \perp f_2$.

Proof. 注意到:

$$\lambda_1\langle f_1, f_2\rangle = \langle Tf_1, f_2\rangle = \langle f_1, Tf_2\rangle = \langle f_1, \lambda_2 f_2\rangle = \lambda_2\langle f_1, f_2\rangle$$

因此 $\langle f_1, f_2\rangle = 0$. □

Proposition 5.3. 设 T 是 *Hilbert space* 上的自伴紧算子。则 $\|T\| = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(T)\}$.

Proof. **Claim:** $r(T) = \|T\|$.

回顾谱半径公式 (Gelfand's Formula): $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 由于 T 是 Hilbert 空间上的自伴算子我们直接通过柯西-施瓦茨不等式可以验证:

$$\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

通过数学归纳法递归，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们有：$\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$. 现在我们在谱半径公式的极限过程中取子列 $n = 2^k$ (由于极限存在，子列极限等于原极限)：

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\|T\|^{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}} = \|T\|.$$

至此 Claim 证毕。这意味着自伴算子的谱半径恰好等于其算子范数。

根据谱半径的定义, 以及前述断言，我们有

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|T\|.$$

由于谱集 $\sigma(T)$ 是复平面上的有界闭集，上述上确界一定能在集合内取到最大值。即：存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，使得 $|\lambda_0| = \|T\|$. 最后，我们还需要说明这个 λ_0 是特征值（属于 $\sigma_p(T)$）。不妨设 $T \neq 0$（$T = 0$ 是 trivial 的），则 $\|T\| > 0$。这意味着我们找到的 λ_0 满足 $|\lambda_0| = \|T\| > 0$，即 $\lambda_0 \neq 0$。Riesz-Schauder 定理告诉我们紧算子的非零谱点一定是特征值。命题证毕。 □

Theorem 5.4 (自伴紧算子的正交对角化)**.** *设 T 是 Hilbert Space H 上的自伴紧算子。则存在 T 的一些特征向量 $\{e_\lambda\}$ 构成 H 的一组标准正交基。*

Proof. 设 $\{\lambda_n\}_{n\in\Gamma}$ 表示 T 的所有非零特征值作成的集合 (Γ 表示指标集, 由于这个集合可能是有限集, 所以写 $\mathbb{N}^+$ 不太合适, 后面当成 $\mathbb{N}^+$ 即可)。则立刻知道对任意的 $n \in \Gamma$, $Ker(\lambda I - T)$ 是有限维子空间, 因此可以取一组标准正交基, 记为 $\{e_{n,1}, e_{n,2}, \cdots, e_{n,k_n}\}$, where $k_n := dimKer(\lambda I - T)$. 由前面对于自伴算子的讨论, 我们清楚地知道:

$$\mathcal{F}_1 := \{e_{n,i} : n \in \Gamma,\ i = 1, 2, 3, \cdots, k_n\}.$$

是 H 的一组 ONS. 若此时 $\mathcal{F}_1$ 已经是 ONB 了, 那么定理直接证毕。因此 WLOG: $\mathcal{F}_1$ 不是完全的。此时, 令 $H_1 := \overline{span\mathcal{F}_1}$. 根据投影定理, 设 H_1 在 H 中的正交补空间 $H_1^\perp$ 为 H_2. 注意到 H_1 是 T 的不变子空间 (显然的, 取闭包了,H_1 也是 Hilbert space), 因此根据自伴的性质,

$$\langle f_1, Tf_2\rangle = \langle Tf_1, f_2\rangle = 0,\ \forall f_2 \in H_2.$$

我们知道 $Tf_2 \in H_2$, 因此 H_2 也是 T 的不变子空间。所以我们可以考虑 T 在 H_2 上的限制 $T|_{H_2}$, 记为 $\tilde{T}$.

Claim 1: $\tilde{T} : H_2 \to H_2$ 是自伴紧算子。由于 $\langle \tilde{T}x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \tilde{T}y\rangle$, 故自伴。由于正交补空间 H_2 是闭子空间, 结合紧性的定义我们很容易得到 $\tilde{T}$ 是紧算子。

Claim 2: $\tilde{T} = 0$. 如若不然, 则 T 的算子范数必然不为零, 根据自伴紧算子的谱半径公式 (5.3), 我们知道 $\tilde{T}$ 必然有非零特征值 $\mu = \|\tilde{T}\|$. 设 $v \in H_2$ 为相应的非零特征向量, 则 $\mu v = \tilde{T}v = Tv$, 这表明 μ 是 T 的非零特征值且 v 是相应的特征向量, 根据 H_1 的构造, 我们知道 $v \in H_1$, 这表明 $v = 0$, 矛盾!

Claim 3: $H_2 = KerT$. 根据 Claim 2, 我们知道 $H_2 \subset KerT$, 只要证反方向的包含。设 $x \in KerT$, 则 $x = h_1 + h_2$, where $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$。只要证 $h_1 = 0$。事实上, 由

$Tx=0$ 立刻得到 $Th_1=0$。对于任意 $h_1\in H_1$，它可以写成傅里叶级数 $h_1=\sum\alpha_{n,i}e_{n,i}$。则 $Th_1=\sum\lambda_n\alpha_{n,i}e_{n,i}$。若 $Th_1=0$，则 $\|Th_1\|^2=\sum|\lambda_n|^2|\alpha_{n,i}|^2=0$。因为这里 λ_n 都是非零特征值，所以迫使所有系数 $\alpha_{n,i}=0$，从而 $h_1=0$。

因此, 在直和分解 $H=H_1\oplus H_2$ 中, 我们知道如果 H_2 非平凡, 那 H_2 不是别人, 正是特征值 0 对应的特征子空间 $KerT$！取其一组标准正交基和 H_1 取好的标准正交基拼在一起, 就得到了 H 的一组 ONB！ □

我们将上面的结果用投影算子的形式改写一下, 便得到了下面的定理:

Theorem 5.5. *设 T 是 Hilbert Space$H$ 上的自伴紧算子。将 T 的非零特征值按照绝对值的大小从大到小排列如下:*

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq|\lambda_3|\geq\cdots\geq|\lambda_n|\geq\cdots.$$

记 $E_n:=Ker(\lambda_nI-T)$ 为 λ_n 的特征空间。那么 (在算子范数的意义下),

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_{E_n}.$$

其中, $P_{E_n}:H\to E_n$ 表示投影算子。

Proof. 有了定理 (5.4) 的准备, 这里的证明基本上就是一些简单的计算验证, 很容易。 □