MIT 18.06 课程笔记:

course 1. 方程组的几何解释:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & \cancel{4}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

① 按行展开 n 维的方程组
几何表示为 n-1 维的向量在该坐标系中的交面.(无解情况: n-1 维 都在某1 n-1 维上, 无解.)

②. 按列展开、为 求解 列向量 $\vec{a}, \vec{b} \dots \vec{x}$ 组合到结果 $\vec{y}$ 的线性关系、解.
(无解条件: 列间并没有相互独立, 而有某1列可以由其他列线性表示.)

计算 $\cancel{\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}}$ $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=b.$

① 按常规行: $\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=b_1=8.$ $\begin{bmatrix}1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=b_2=11$

$\therefore b=\begin{bmatrix}8\\ 11\end{bmatrix}$

②. 按列展开: $1\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 11\end{bmatrix}$

Date: \ \ Page:

course 2. 矩阵消元:

一、高斯消元法: 略

二、消元矩阵:

高斯消元法用消元矩阵实现

行变换为左乘: $E_2E_1A_1=A_2$, 其中次序不可以改变, 但符合结合律 $E_2(E_1A_1)=(E_2E_1)A_1$

特殊的初等变换矩阵:

置换矩阵: $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 可以将二维的行交进行变换

course 3

矩阵乘法与逆矩阵:

三种乘法方式:

1. 整行相乘

$$\begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\ \vdots \\B_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vdots \\ a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{in}B_n\end{bmatrix}$$

~~2. 整列相乘:~~

$$\cancel{\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots \\A_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots b_{i1}+A_1\end{bmatrix}}$$

2. 整列相乘 (不好用)

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & A_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdots & b_{1i} \\ & b_{2i} \cdots \\ & \vdots \\ & b_{ni}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots & b_{1i}A_1+b_{2i}A_2\cdots+b_{ni}A_n \cdots\end{bmatrix}$$

3. 行列相乘

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1 & B_2 \cdots B_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1B_1+A_2B_2+\cdots A_nB_n\end{bmatrix}$$

Date: \ \ Page:

分块乘法：

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ \hline A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{array}\right]$$

该方法在合适的情况下可以简化计算。

逆：矩阵有逆时，左逆等于右逆（方阵）

非方阵的左逆不等于右逆

高斯若尔当法：

使用消元法：使 ~~AE~~ $[A|I]$ 变为 $[I|A^{-1}]$

Course 4. A的LU分解：

LU：上三角矩阵

1. 计算量估计

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

需要进行 $n(n-1)$ 次运算 $\sim n^2$ 次

以此类推，化为LU矩阵需要 $(n-1)^2 \cdots$ 和 1^2 次

$\therefore n^2+(n-1)^2+\cdots 1^2 = O(\frac{n^3}{3})$ 次规模的运算

notebook

Date: \ \ Page:

course 5 ~~转~~换、转置、向量空间 R

对任意可逆矩阵 A 有

$PA = LU$，该 P 称为 A 的转~~置~~换矩阵

n 阶方阵的转~~置~~换矩阵 P 有 $\binom{n}{1} = n!$ 个

置~~转~~换矩阵 P 有：$PP^T = I$　　$P^T = P^{-1}$

转置矩阵：

$A^T(ij) = A(ji)$

对称矩阵：$A^T = A$

~~转置矩阵等于~~：对任意对称矩阵：

$(R^T R)^T = R^T R$

向量空间：vector ~~Matrix~~ space 所有的向量空间都必须包含原点

其中向量空间必然是加法封闭和~~乘~~数乘封闭

course 6. 列空间与零空间.

一、若向量子空间有 S 和 T，则 ~~S∪T~~ $S\cap T$ 也是向量子空间.

二、若有：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b}$$

由A的列向量生成的空间为A的列空间

若 $AX=b$ 有解，条件是 b 属于A的列空间.

A的零空间是 $Ax=0$ 中X的解组成的集合

course 7. 求解 $Ax=0$，主变量与特解.

~~主变量~~ 当矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \text{ 消元得到 } \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

得知秩 $r=2$，~~前两行为主~~

划线所在列为主列，其余为自由列.

给自由列赋予值时，反推主列变量的值，此时为特解. 如例子中 $x_2=1$，$x_4=0$，得 $x_* = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

∴ 特解为 $x=c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ 同理，令 $x_2=0$，$x_4=1$ 时，

特解为 $x=c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 无论如何化简，秩与主变量个数及特解不变

course 8.

Date: \ \ Page:

$Ax=b$ 的可解性与解的结构

~~有~~

同 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ 为A.

则 $Ax=b$ 化简后:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2-2b_1 \\ b_3-b_2-b_1 \end{bmatrix}$$

那 x 有解的必要条件是 $b_3-b_2-b_1=0$.

推广到, 当化简后 $A=0$ 的行中, b 也得为 0.

取所有自由变量为0, 代入原式中,

可得特解. $x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

* 结合 course 7 中. 零空间解.

$Ax=b$ 的解集为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

另有: 对于矩形矩阵 $m\times n$ 的 A, $r(A) \le \min(m,n)$,

当满秩时, 如 $r=n$. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = A$. $Ax=b$, $b\ne 0$,

若有an非零解, 此时. A的零空间必为0.

当满秩时, $r=m$, 如 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$. $Ax=b$.

式中X有无穷解的话, 必有自由变量 $n-r$ 个.

当行列满秩时，即 $m=n=r$. 此时 $Ax=b$ 的零空间只为0.