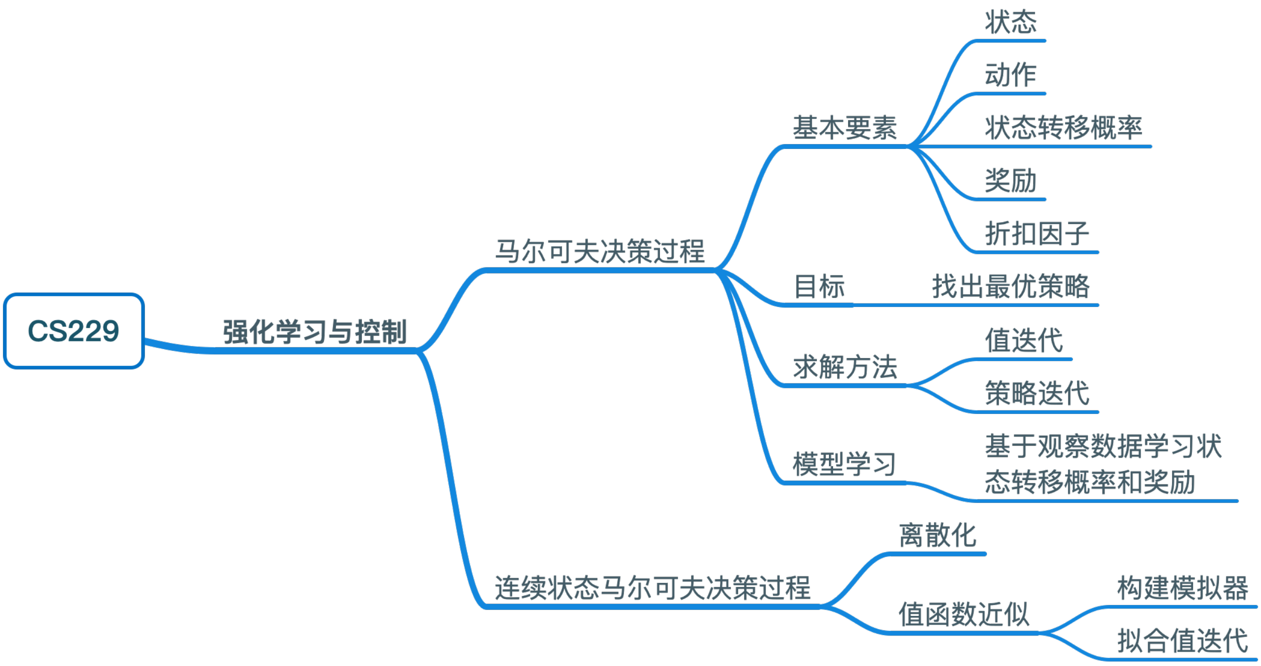
CS229 学习笔记：强化学习与控制



- 本章将开始介绍强化学习与适应性控制
- 在监督学习中，对于训练集我们均有明确的标签
    - 算法只需要模仿训练集中的标签来给出预测即可
- 但对于某些情况，例如序列性的决策过程和控制问题，我们无法构建含有标签的训练集
    - 即无法提供一个明确的监督学习算法来进行模仿
- 在强化学习的框架下，我们只会给出一个奖励函数（reward function）
    - 该函数会告知学习程序（leaning agent）什么时候的动作是好的，什么时候的是不好的
    - 算法的工作是找出随着时间推移如何选择动作来得到最大的奖励
- 强化学习已经成功用于多种场景，包括：
    - 无人直升机的自主飞行
    - 机器人行走
    - 手机网络路由
    - 市场策略选择
    - 工厂控制
    - 高效率的网页索引
- 我们将从**马尔可夫决策过程**开始介绍强化学习，其给出了强化学习问题的常见形式

马尔可夫决策过程

- 一个马尔可夫决策过程是一个五元组 $(S, A, \{P_{sa}\}, \gamma, R)$，其中：
    - S 是一个**状态集**
        - 例如在无人直升机的自主飞行中，S 可以是直升机所有可能的位置与方向
    - A 是一个**动作集**
        - 例如你可以推动直升机控制摇杆的所有方向

- P_{sa} 是状态转移概率
  - 对于每个状态 $s \in S$ 以及动作 $a \in A$，P_{sa} 为状态空间上的分布
  - 简单来说，P_{sa} 给出当我们在状态 s 采取了行动 a 时，下一个状态的分布
- $\gamma \in [0,1)$ 被称为**折扣因子**（discount factor）
- $R: S \times A \mapsto \mathbb{R}$ 为**奖励函数**
  - 有时候奖励函数被写作仅与状态 S 相关，即 $R: S \mapsto \mathbb{R}$

- 马尔可夫决策过程（MDP）的执行如下：
  - 我们从某个状态 s_0 开始，选择某个动作 $a_0 \in A$ 来执行 MDP
  - 作为选择的结果，MDP 的状态将随机转移到某个后继状态 $s_1 \sim P_{s_0 a_0}$
  - 然后，我们需要选择另一个动作 a_1
  - 作为结果，状态会转移至 $s_2 \sim P_{s_1 a_1}$
  - 接下来再选择一个动作 a_2，以此类推
  - 该过程可以用下图表示：

$$s_0 \xrightarrow{a_0} s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} s_3 \xrightarrow{a_3} \ldots$$

- 遍历序列中的所有状态和动作，总的收益为：

$$R\left(s_0, a_0\right)+\gamma R\left(s_1, a_1\right)+\gamma^2 R\left(s_2, a_2\right)+\cdots$$

  - 当将奖励函数仅与状态相关时，收益变为：

$$R\left(s_0\right)+\gamma R\left(s_1\right)+\gamma^2 R\left(s_2\right)+\cdots$$

- 本章将主要使用简单的状态奖励函数 $R(s)$
  - 推广至 $R(s, a)$ 并不难
- 在强化学习中，我们的目标就是找到一组动作，来最大化总收益的期望：

$$\mathrm{E}\left[R\left(s_0\right)+\gamma R\left(s_1\right)+\gamma^2 R\left(s_2\right)+\cdots\right]$$

  - 注意在时间步 t 的奖励通过参数 γ^t 进行了缩减
  - 因此，为了使得期望较大，我们希望尽可能早地积累正奖励，尽可能推迟负奖励
- **策略**（policy）指的是将状态映射为动作的任意函数 $\pi: S \mapsto A$
  - 任意时刻，当我们处在状态 s，我们采取了行动 $a=\pi(s)$，则我们执行了策略 π
- 我们定义一个策略 π 的**值函数**为：

$$V^\pi(s)=\mathrm{E}\left[R\left(s_0\right)+\gamma R\left(s_1\right)+\gamma^2 R\left(s_2\right)+\cdots \mid s_0=s, \pi\right]$$

  - $V^\pi(s)$ 即为从状态 s 开始，根据策略 π 选择动作所积累的折扣奖励函数的期望
    - π 并非随机变量，上述表示只是习惯
- 给定一个策略 π，其值函数满足**贝尔曼等式**：

$$V^\pi(s)=R(s)+\gamma \sum_{s^{\prime} \in S} P_{s \pi(s)}\left(s^{\prime}\right) V^\pi\left(s^{\prime}\right)$$

  - 这表示期望和由两部分组成：
    - 即时奖励 $R(s)$
    - 未来的折扣奖励的期望和（第一步之后）
      - 也可以写作 $\mathrm{E}_{s^{\prime} \sim P_{s \pi(s)}}\left[V^\pi\left(s^{\prime}\right)\right]$

- 贝尔曼等式可以用于求解 V^π
    - 在一个有限状态的 MDP 中，我们可以对于每个状态 s 写出其 $V^\pi(s)$ 的等式
    - 这可以给出一个含有 $|S|$ 个变量的 $|S|$ 个线性方程，可以进行求解
        - 变量即每个状态的未知 $V^\pi(s)$
- 我们定义**最优值函数**为：

$$V^*(s)=\max_\pi V^\pi(s) \tag{1}$$

    - 其表示在所有策略中，可以得到的最大期望和
    - 其也满足贝尔曼等式：

$$V^*(s)=R(s)+\max_{a\in A}\gamma\sum_{s'\in S}P_{sa}\left(s'\right)V^*\left(s'\right) \tag{2}$$

        - 第一部分与之前一样，为即时奖励
        - 第二部分为所有动作中最大的未来期望和
- 我们可以定义策略 $\pi^*: S\mapsto A$ 为：

$$\pi^*(s)=\arg\max_{a\in A}\sum_{s'\in S}P_{sa}\left(s'\right)V^*\left(s'\right) \tag{3}$$

    - $\pi^*(s)$ 给出了动作 a 来使得 (2) 式最大化
- 根据上述定义，我们可以推导出如下事实：对于每一个状态 s 和每一种策略 π，都有：

$$V^*(s)=V^{\pi^*}(s)\geq V^\pi(s)$$

    - 这个公式表明 (3) 式中定义的策略即为最优策略
    - 注意 π^* 有一个有趣的特性：其为所有状态 s 的最优策略
        - 因为其定义为状态集到动作集的映射
        - 这意味着无论 MDP 的初始状态是什么，我们都可以使用同样的最优策略 π^*

值迭代和策略迭代

- 下面介绍求解有限状态 MDP 的两种高效算法
    - 注意：我们目前只考虑有限状态和动作空间的 MDP

值迭代

- 值迭代算法的流程为：
    1. 对于每个状态 s，初始化 $V(s):=0$
    2. 重复下述过程直至收敛：
        - 对于每个状态 s，更新 $V(s):=R(s)+\max_{a\in A}\gamma\sum_{s'}P_{sa}\left(s'\right)V\left(s'\right)$
- 该算法可以理解为不断更新 (2) 式中的值函数
- 算法的内循环有两种更新方法：
    1. 计算所有状态的 $V(s)$，然后全部替换旧的值
        - 这种方法称为**同步**更新
    2. 按某种顺序遍历状态，一次更新一个值
        - 这种方法称为**异步**更新

- 不论是异步还是同步更新，值迭代算法最终都会使 V 收敛至 V^*
  - 得到了 V^*，我们就可以利用 (3) 式来找出最优策略

策略迭代

- 策略迭代的流程为：
  1. 随机初始化 π
  2. 重复下述过程直至收敛：
     - 令 $V := V^\pi$
     - 对于每个状态 s，更新 $\pi(s) := \arg\max_{a\in A} \sum_{s'} P_{sa}\left(s'\right) V\left(s'\right)$
- 可以看到，该算法在内循环中计算当前策略的值函数，然后使用当前值函数更新策略
  - 该步骤中找出的策略也被称为关于 V 的**贪婪策略**
  - 注意：在第一步中值函数的求解方式如之前所述，为含有 $|S|$ 个变量的线性方程组
- 在有限次数的迭代后，V 将收敛至 V^*，π 将收敛至 π^*
- 值迭代和策略迭代是求解 MDP 的标准算法，目前没有好坏之分
  - 一般对于较小的 MDP，策略迭代往往更快，迭代次数较少
  - 而对于较大状态空间的 MDP，求解 V^π 相对较难，通常使用值迭代
    - 在实际应用中，值迭代比策略迭代要使用得更加频繁（因为实际问题中状态通常较多）

马尔可夫过程的模型学习

- 在实际问题中，我们无法得知状态转移概率和奖励函数
  - 因此需要基于数据来进行估计
- 例如我们进行了一系列实验，得到如下所示的一系列马尔可夫过程：

$$
\begin{aligned}
&s_0^{(1)} \xrightarrow{a_0^{(1)}} s_1^{(1)} \xrightarrow{a_1^{(1)}} s_2^{(1)} \xrightarrow{a_2^{(1)}} s_3^{(1)} \xrightarrow{a_3^{(1)}} \ldots \\
&s_0^{(2)} \xrightarrow{a_0^{(2)}} s_1^{(2)} \xrightarrow{a_1^{(2)}} s_2^{(2)} \xrightarrow{a_2^{(2)}} s_3^{(2)} \xrightarrow{a_3^{(2)}} \ldots \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

  - 其中 $s_i^{(j)}$ 表示实验 j 的时间点 i 的状态，其对应的动作为 $s_i^{(j)}$
  - 在实际中，每个实验可以运行至马尔可夫过程终止，或某个较大但有限的时间点
- 基于上述"经验"，我们可以利用极大似然估计来求出状态转移概率：

$$
P_{sa}\left(s'\right) = \frac{\#\text{ times took we action } a \text{ in state } s \text{ and got to } s'}{\#\text{ times we took action a in state } s} \tag{4}
$$

  - 如果比例为 $0/0$，则使用 $1/|S|$ 替代
- 当我们进行更多的实验，得到更多的"经验"时，我们可以用一种较高效的方法来更新状态转移概率：
  - 具体来说，我们可以记录上式的分子与分母值，新的数据直接在旧数据的基础上累加即可
- 类似地，如果奖励函数 R 未知，我们可以用状态 s 的期望即时奖励估计 $R(s)$ 来作为其平均奖励
- 在学习出 MDP 的模型后，我们可以使用值迭代或策略迭代来求解 MDP，找出最佳策略
  - 例如，将模型学习和值迭代结合在一起，我们可以得出下面的算法：

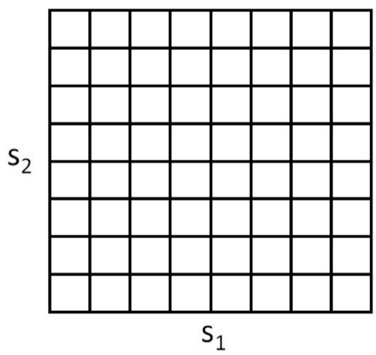
        - 用于未知概率转移矩阵的 MDP 的学习
            1. 随机初始化 π
            2. 重复下述过程：
                - 在 MDP 中执行 π 若干次来得到样本（下一步的状态通过观察得到）
                - 使用 MDP 中的累加经验来估计 P_{sa} (以及 R，如果需要)
                - 基于估计的状态转移概率和奖励函数应用值迭代算法，得到一个新的 V 的估计
                - 更新 π 为关于 V 的贪婪策略
        - 对于该算法，可以通过下述手段来使其运行更快：
            - 在第二步的值迭代的内循环中，每次不初始化 V 为 0，而初始化为上一次外循环中得到的结果

连续状态马尔可夫决策过程

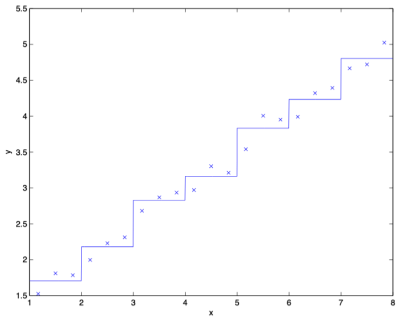
- 到目前为止，我们都在讨论有限数量状态下的 MDP
    - 现在我们将开始讨论无限状态下的 MDP ($S = \mathbb{R}^n$)

离散化

- 求解连续状态 MDP 的最简单的方法就是**离散化状态空间**
    - 然后使用之前提到的值迭代或状态迭代算法
- 例如，对于一个二维状态 (s_1, s_2)，我们可以用一个网格来进行离散化：



    - 每一个网格细胞代表一个独立的离散状态 $\bar{s}$
    - 然后我们就可以用一个离散状态的 MDP $\left(\bar{S}, A, \{P_{\bar{s}a}\}, \gamma, R\right)$ 来估计连续状态下的 MDP
        - 使用值迭代或策略迭代来求解 $V^\star(\bar{s})$ 和 $\pi^\star(\bar{s})$
    - 当实际的系统处于某个连续值的状态 $s \in S$ 时，我们先计算其对应的离散状态 $\bar{s}$，然后执行最优策略 $\pi^\star(\bar{s})$
- 离散化的方法对很多问题都有较好的效果，但其存在两点不足：
    - 对 $V^\star$ 和 $\pi^\star$ 的表达过于天真
        - 即假设其在离散的区段上取值不变
        - 例如下面的线性回归问题，如果使用离散化来表达，则得到如下结果：



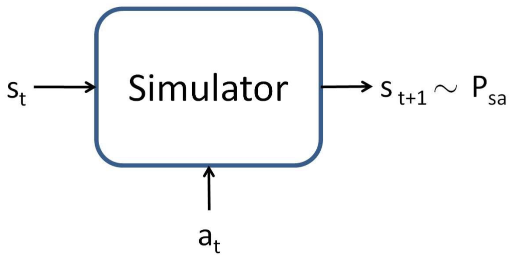
        - 可以看出离散化对光滑数据的拟合并不好
        - 我们可能需要更加精确的离散化（非常小的网格）来获得精确的估计
    - **维度诅咒**（curse of dimensionality）
        - 假设 $S=\mathbb{R}^n$，且我们将每个维度的状态离散化为 k 个值
            - 则总的离散状态数为 k^n
            - 其随着维数的增加呈指数上升趋势，难以推广至大型问题
        - 从经验上来说，离散化对 1 维和 2 维问题的效果最好
            - 如果注意离散化的方法，则其对 4 维以下问题也效果不错
            - 如果你特别牛批，甚至能应用到 6 维问题
                - 再高的话基本上就不行了

值函数近似

- 下面介绍另一种在连续状态 MDP 中寻找最佳策略的方法
    - 该方法中我们直接估计 V^* ，而不去进行离散化
    - 该方法称为**值函数近似**，已经成功应用于许多强化学习问题

使用一个模型或模拟器

- 为了设计一个值函数估计算法，需要先假设我们有一个**模型**（或**模拟器**）
- 对于 MDP，通俗来说，模拟器就是一个黑盒子
    - 接收输入状态 s_t （连续值）和动作 a_t
    - 输出下一个状态 s_{t+1} ，根据状态转移概率 $P_{s_ta_t}$



- 我们有多种方式来得到上述模型
    - 第一种方法是使用物理模拟
        - 使用软件包来对某些问题进行物理描述，进行模拟
    - 第二种方法是从已有的数据中进行学习
        - 例如，假设我们在一个 MDP 中执行 m 次**试验**
            - 每次试验包含 T 个时间步

- 动作的选择可以随机或是执行某种特定的策略，或是其他方式
- 然后，我们会得到如下的 m 个观察序列

$$
\begin{gathered}
s_0^{(1)} \xrightarrow{a_0^{(1)}} s_1^{(1)} \xrightarrow{a_1^{(1)}} s_2^{(1)} \xrightarrow{a_2^{(1)}} \cdots \xrightarrow{a_{T-1}^{(1)}} s_T^{(1)} \\
s_0^{(2)} \xrightarrow{a_0^{(2)}} s_1^{(2)} \xrightarrow{a_1^{(2)}} s_2^{(2)} \xrightarrow{a_2^{(2)}} \cdots \xrightarrow{a_{T-1}^{(2)}} s_T^{(2)} \\
\cdots \\
s_0^{(m)} \xrightarrow{a_0^{(m)}} s_1^{(m)} \xrightarrow{a_1^{(m)}} s_2^{(m)} \xrightarrow{a_2^{(m)}} \cdots \xrightarrow{a_{T-1}^{(m)}} s_T^{(m)}
\end{gathered}
$$

- 我们会使用一个学习算法来将 s_{t+1} 表示为 s_t 和 a_t 的函数
- 一种可能的线性模型如下：

$$
s_{t+1}=A s_t+B a_t \tag{5}
$$

- 我们可以使用试验中收集到的数据来估计参数：

$$
\arg \min_{A, B} \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^{T-1}\left\|s_{t+1}^{(i)}-\left(A s_t^{(i)}+B a_t^{(i)}\right)\right\|^2
$$

- 学习到了 A 和 B 后，一种选择是建立一个**决定性**模型
  - 即给定输入 s_t 和 a_t 后，输出 s_{t+1}，例如式 (5)
- 另一种选择时建立一个**随机**模型，即 s_{t+1} 是输入的随机函数

$$
s_{t+1}=A s_t+B a_t+\epsilon_t
$$

  - 其中 ϵ_t 是噪声项，分布为 $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$
    - Σ 也可以从数据中学习
- 上面我们所说的都是线性模型，非线性模型也可以用于构建模拟器

拟合值迭代

- 下面介绍用于估计连续状态 MDP 值函数的拟合值迭代算法
  - 这里假设状态空间连续，但动作空间较小且离散
    - 一般来说，动作集的离散化相对容易很多
- 在值迭代中，我们会进行如下更新：

$$
\begin{aligned}
V(s) & :=R(s)+\gamma \max_a \int_{s^{\prime}} P_{s a}\left(s^{\prime}\right) V\left(s^{\prime}\right) d s^{\prime} & (6)\\
& =R(s)+\gamma \max_a \mathrm{E}_{s^{\prime} \sim P a}\left[V\left(s^{\prime}\right)\right] & (7)
\end{aligned}
$$

  - 注意这里对于连续值需使用积分
- 拟合值迭代的主要思想就是：基于有限的状态样本 $s^{(1)}, \ldots, s^{(m)}$ 对上述过程进行估计
  - 具体来说，我们会使用一个监督学习算法（线性回归）
    - 将值函数用状态的线性或非线性函数估计

$$
V(s)=\theta^T \phi(s)
$$

    - 其中 ϕ 是状态的某种适当的特征映射
- 对于 m 个有限状态样本中的每一个状态 s

- 拟合值迭代会先计算一个量 $y^{(i)}$
    - 作为对 $R(s)+\gamma \max_a \mathrm{E}_{s' \sim P a}\left[V\left(s'\right)\right]$ 的估计
- 然后使用监督学习算法尝试去让 $V(s)$ 接近 $R(s)+\gamma \max_a \mathrm{E}_{s' \sim P a}\left[V\left(s'\right)\right]$
    - 即接近 $y^{(i)}$
    - 从而学习出参数 θ

- 具体来说，算法的过程如下：
    1. 随机采样 m 个状态 $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots s^{(m)} \in S$
    2. 初始化 $\theta:=0$
    3. 重复下述过程：
        - 对于 $i=1, \ldots, m$
            - 对于每个动作 $a \in A$
                - 基于模型采样 $s_1', \ldots, s_k' \sim P_{s^{(i)} a}$
                - 令 $q(a)=\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k R\left(s^{(i)}\right)+\gamma V\left(s_j'\right)$
                    - 这样 $q(a)$ 就可以看做 $R\left(s^{(i)}\right)+\gamma \mathrm{E}_{s' \sim P_{s^{(i)} a}}\left[V\left(s'\right)\right]$ 的估计
            - 令 $y^{(i)}=\max_a q(a)$
                - 这样 $y^{(i)}$ 可以看做 $R\left(s^{(i)}\right)+\gamma \max_a \mathrm{E}_{s' \sim P_{s^{(i)} a}}\left[V\left(s'\right)\right]$
        - 在原始的值迭代（离散值）中，我们需要更新 $V\left(s^{(i)}\right):=y^{(i)}$
            - 在该算法中，我们希望 $V\left(s^{(i)}\right) \approx y^{(i)}$，使用监督学习算法：

$$
\operatorname{Set} \theta:=\arg \min_\theta \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m\left(\theta^T \phi\left(s^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2
$$

- 上述算法使用了线性回归，实际上其他的回归算法也可以使用
    - 如加权线性回归
- 与离散状态集的值迭代不同，拟合值迭代并不一定总是会收敛
    - 不过在实际应用中，其通常会收敛（或近似收敛）
- 注意：如果我们使用决定性模型（模拟器）
    - 那么算法中 $k=1$
        - 因为下一个状态只有一个确定的值
    - 否则我们需要取 k 个样本并求均值（即随机模型）
- 最终，拟合值迭代输出 V，其为对 $V^\star$ 的估计
    - 当系统处于状态 s 时，可以通过下面的公式来选择动作：

$$
\arg \max_a \mathrm{E}_{s' \sim P_{sa}}\left[V\left(s'\right)\right]
$$

        - 上式计算的过程与算法的内循环类似，对于每一个动作，我们采样 $s_1', \ldots, s_k' \sim P_{sa}$
            - 类似地，如果使用决定性模型，则 $k=1$
    - 在实际应用中，还有其他方法来估计上述值，例如：
        - 如果模拟器的形式为 $s_{t+1}=f\left(s_t, a_t\right)+\epsilon_t$
            - 其中 f 是某个决定性函数（如 $f\left(s_t, a_t\right)=A s_t+B a_t$）
            - ϵ 是 0 均值高斯噪声

- 则可以通过下述公式选择动作：

$$\arg\max_a V(f(s,a))$$

  - 可以理解为令 $\epsilon_t = 0$
  - 也可以通过下述公式推导：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{s'}\left[V\left(s'\right)\right] &\approx V\left(\mathrm{E}_{s'}\left[s'\right]\right) \\ &= V(f(s,a)) \end{aligned}$$

    - 第一步可以参考 Jensen 不等式
      - 只要噪声项很小，则估计一般合理

- 对于无法使用上述估计方法的问题，则可能需要采样 $k|A|$ 个样本
  - 这通常计算量较大