

## 1. Электрические цепи

### • 1.1. ТОК, НАПРЯЖЕНИЕ, МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ

Электричество в физике характеризуется большим числом различных характеристик и параметров. В радиоэлектронике основных, первичных понятий только два — электрический ток и напряжение. Электрический ток протекает в электрической цепи, напряжение возникает на элементах электрической цепи.

Электрической цепью называют совокупность связанных между собой электрических элементов, по которым протекает электрический ток. Электрическую цепь, например, представляют узлы и детали компьютера, по которым протекает ток от сети питания. Ток и напряжение полностью характеризуют состояние электрической цепи. В радиоэлектронных устройствах и в компьютерах ток и напряжение выполняют, в основном, функцию передачи информации.

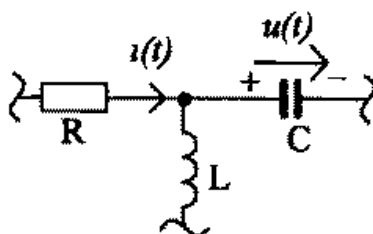


Рис . 1

Электрическим током называют упорядоченное, направленное движение заряженных частиц в цепи. Ток характеризуется величиной и направлением. Направление тока определяется направлением движения положительных зарядов. Ток в радиоэлектронике обозначается латинскими буквами  $I$  или  $i$  (рис. 1). Если  $q(t)$  — заряд, прошедший через заданное сечение элемента цепи к моменту времени  $t$ , то величина тока рассчитывается по формуле

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Ток в приведенной формуле измеряется в амперах (А), заряд в кулонах и время в секундах. В радиоэлектронике наиболее часто используются меньшие величины тока: миллиамперы, микроамперы, наноамперы и пикоамперы:  $1\text{mA} = 10^{-3}\text{A}$ ,  $1\text{mA} = 10^{-6}\text{A}$ ,  $1\text{nA} = 10^{-9}\text{A}$ ,  $1\text{pA} = 10^{-12}\text{A}$ . Например, материнские платы персональных компьютеров потребляют от источника питания постоянный ток, как правило, не менее 5 ампер. Микросхемы, находящиеся на материнской плате, потребляют токи, измеряемые в миллиамперах.

Направление тока  $i(t)$  указывается на схеме электрической цепи (рис. 1). Перед расчетами направление неизвестного тока выбирается произвольно. Если после расчетов в заданный момент времени получено положительное значение тока, то фактическое направление тока будет соответствовать указанному на схеме. Если получена отрицательная величина тока, то в действительности ток протекает в противоположном направлении (относительно указанного на схеме). Однако изменять направление тока и заново проводить расчет в последнем случае

не требуется, так как одновременное указание величины и направления тока (даже если направление тока не угадано) однозначно описывает ток в цепи.

Электрическое напряжение рассматривается как физическая причина, обуславливающая возникновение тока в цепи. Электрическое напряжение определяется как отношение энергии  $dW$ , необходимой для перемещения положительного заряда  $dq$  из одной точки цепи в другую, к величине этого заряда

$$u = \frac{dW}{dq}.$$

Напряжение может быть как положительным, так и отрицательным. Знак величины напряжения связан с направлением напряжения, за которое принимается направление сил электрического поля, действующего на положительный заряд в цепи (рис. 1). Направление указывается стрелкой или знаками + и -.

Перед расчетом направление неизвестного напряжения выбирается произвольно. Если величина напряжения после расчетов получилась положительной, то направление указано правильно. В противном случае полученное значение напряжения меньше нуля и напряжение в действительности направлено в противоположную сторону. Однако, как и в случае с током, и в первом, и во втором случаях напряжение описано точно.

Напряжение измеряется в вольтах (В). Часто в радиоэлектронных устройствах встречаются милливольты и микровольты, реже киловольты:  $1\text{мВ} = 10^{-3}\text{ В}$ ,  $1\text{мкВ} = 10^{-6}\text{ В}$  и  $1\text{кВ} = 1000\text{ В}$ . Например, для работы цветного кинескопа монитора компьютера требуется напряжение питания не менее 20 киловольт, а для питания современных микропроцессоров требуется напряжение менее 3 вольт. Причем если первое напряжение является опасным для жизни человека, то второе напряжение считается неопасным (в лабораторных условиях безопасным считается напряжение 36 вольт и менее).

Ток и напряжение в радиоэлектронных устройствах и компьютерах, в основном, используются для передачи информации. В этом случае их называют сигналами (или колебаниями).

Кроме основных характеристик состояния цепи — тока и напряжения, на практике часто требуется знать энергию и мощность электрического тока. Энергия и мощность используются в радиоэлектронике для оценки не основных (но важных) энергетических параметров цепи. С их помощью определяются требования к источникам питания радиоэлектронной аппаратуры и компьютеров, рассчитывается КПД устройства, выясняется необходимость в системе охлаждения и т. п.

В радиоэлектронике мощность определяется через основные электрические характеристики — напряжение и ток. Так как  $u = dW/dq$ , то энергия  $dW = u dq$  и, с учетом того, что  $dq = i dt$ , после интегрирования получим формулу для расчета электрической энергии, потребляемой данным участком цепи к моменту времени  $t$

$$W = \int_{-\infty}^t u(\tau) i(\tau) d\tau.$$

Дифференцируя полученное выражение по времени  $t$ , получим формулу для расчета *мгновенной мощности*, потребляемой цепью

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t) i(t).$$

При  $p(t) > 0$  энергия, потребляемая участком цепи, увеличивается, а при  $p(t) < 0$  — уменьшается. Мощность измеряется в ваттах (Вт).

При постоянном напряжении и постоянном токе в цепи мгновенная мощность постоянна. Например, мощность постоянного тока, потребляемая от источника питания персонального компьютера, является положительной величиной, не превышающей, как правило, 350 Вт.

## • 1.2. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Если снять крышку (корпус) с компьютера и с других радиоэлектронных устройств, то внутри обнаружим большое число разнообразных радиоэлементов, имеющих различные размеры, разную форму, большое или малое число выводов. Оказывается, что с использованием идеализации, обобщения и абстрагирования все многообразие реальных радиоэлементов компьютера или любого другого радиоэлектронного устройства можно описать с помощью только лишь пяти базовых элементов.

*Идеальный резистор* — это элемент, в котором электрическая энергия превращается в тепло. В идеальном резисторе даже частично энергия тока не превращается в энергию электрического поля, как в конденсаторе, или в энергию магнитного поля, как в катушке индуктивности. Для обозначения резистора используются буквы  $R$  или  $r$ . В дальнейшем для краткости прилагательное "идеальный" будем часто опускать, когда из контекста ясно, о каком элементе идет речь. В области низких частот к идеальному резистору по своим свойствам близки: лампочка накаливания (если пренебречь превращением части энергии в свет), радиотехнический резистор, электронагревательные приборы и т. п.

*Идеальный конденсатор* — это элемент, в котором энергия электрического тока превращается только в энергию электрического поля. Для обозначения конденсатора используется буква  $C$ . В области низких частот к идеальному конденсатору близок радиотехнический конденсатор.

*Идеальная катушка индуктивности* — это элемент, где энергия электрического тока превращается в энергию магнитного поля. Для обозначения катушки используется буква  $L$ . В области низких частот к идеальной катушке близки обмотки трансформаторов источников питания, обмотки электрических двигателей (например, электродвигателей вентиляторов в ЭВМ) и радиотехнические катушки.

*Идеальный источник напряжения* — это устройство, на зажимах которого поддерживается заданное напряжение при любом конечном токе через него. Случай подключения к источнику нагрузки с нулевым сопротивлением считается невозможным. Для обозначения источника напряжения используются буквы  $E$  и  $e$ . К идеальному источнику напряжения при малых токах близки аккумуляторы, батареи, электрическая сеть 220 В/50 Гц.

*Идеальный источник тока* — это элемент, генерирующий заданный ток через любую нагрузку, сопротивление которой конечно. Случай, когда сопротивление

нагрузки бесконечно велико, считается невозможным. Для обозначения источника тока используются буквы  $I$  и  $i$ . К идеальному источнику тока близки свойства выходных цепей транзисторов и некоторых микросхем.

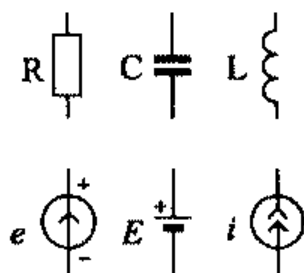


Рис. 1.

Условные обозначения идеальных элементов, используемые в дальнейшем, приведены на рис. 1. Для обозначения источников напряжения используется два символа с буквами  $E$ . Второе обозначение источника напряжения на рис. 1, похожее на обозначение конденсатора, используется, в основном, для источников постоянного напряжения. Отметим, что для обозначения реальных резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности, аккумуляторов, батарей питания и т. п. используются такие же значки, как и для идеальных элементов. Обычно из контекста ясно, какие элементы используются — реальные или идеальные.

Все элементы делятся на *пассивные* и *активные*. К активным элементам относятся источники тока и напряжения, а к пассивным элементам — резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности.

Различают линейные, параметрические и нелинейные элементы. Элемент называется *линейным*, если его параметры не зависят от протекающего тока или от приложенного напряжения. Параметры *параметрического* элемента зависят от времени. Параметры *нелинейного* элемента зависят от тока или напряжения. Свойства нелинейных и параметрических элементов будут рассмотрены в главах 7, 8. Ниже будут рассмотрены только линейные элементы.

Свойства пассивных идеальных элементов описываются с помощью *уравнений элементов*, которые задают взаимосвязь тока и напряжения на элементе. Связь между током и напряжением на линейном резисторе описывается *законом Ома*

$$u = R i,$$

где  $R$  — *сопротивление* резистора, причем  $R > 0$ . Данная формула справедлива при согласованных стрелках тока и напряжения на резисторе (рис. 2, а).

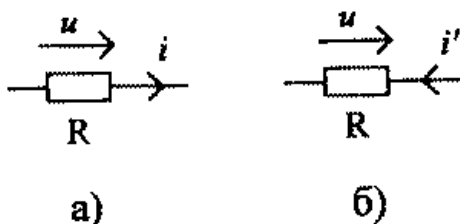


Рис. 2

Если стрелки не согласованы (рис. 2, б) и  $i = - V$ , то в формуле закона Ома появляется знак минус:

$$u = -R i'.$$

Сопротивление резистора измеряется в омах (Ом), В радиоэлектронике чаще встречаются килоомы и мегаомы:  $1 \text{ кОм} = 10^3 \text{ Ом}$ ,  $1 \text{ МОм} = 10^6 \text{ Ом}$ . Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью* резистора:  $G = 1/R$ . Проводимость измеряется в сименсах (См), С использованием проводимости при согласованных токах и напряжениях закон Ома записывается в виде  $i = Gu$ .

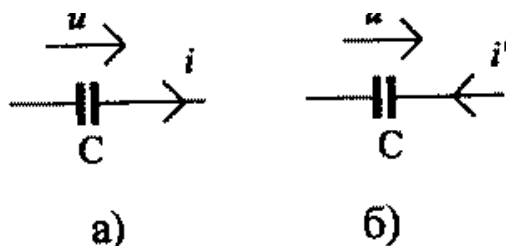


Рис. 3

Линейный конденсатор (рис. 3) описывается линейной вольт- кулонной характеристикой:  $Q = Cu$ , где  $Q$  — заряд, накопленный конденсатором,  $C$  — *емкость* конденсатора, причем  $C > 0$ . Дифференцируя это выражение по времени, получим *уравнение конденсатора* для согласованных стрелок тока и напряжения (рис. 3, а)

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

Если стрелка тока  $i$  не согласована со стрелкой напряжения  $u$  и ток  $i = - i'$ , то получим формулу со знаком минус (рис. 3, б)

$$i' = - C \frac{du}{dt}.$$

Емкость измеряется в фарадах (Ф). В радиоэлектронике чаще используют микрофарады, нанофарады и пикофарады:  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Физическим параметром линейной катушки индуктивности (рис. 4) является полный магнитный поток  $\Phi = L i$ , где  $L$  — *индуктивность* катушки, причем  $L > 0$ .

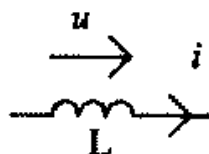


Рис.4

При изменении полного магнитного потока на зажимах катушки возникает напряжение. Дифференцируя по времени формулу для полного магнитного потока при согласованных стрелках тока и напряжения, получим *уравнение катушки индуктивности*

$$u(t) = L \frac{di}{dt},$$

Если стрелки тока и напряжения на катушке не согласованы, то в формуле появляется знак минус. Индуктивность катушки измеряется в генри (Гн). На практике часто используют миллигенри и микрогенри:  $1\text{мГн} = 10^{-3}\text{ Гн}$ ,  $1\text{мкГн} = 10^{-6}\text{ Гн}$ .

Реальные резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности\* как правило, близки по своим свойствам к идеальным элементам. Однако в области высоких частот, при повышенных напряжениях, при воздействии неблагоприятных факторов окружающей среды реальные элементы необходимо представлять в виде сложной схемы, содержащей идеальные резисторы, катушки и конденсаторы. Эти схемы учитывают индуктивности выводов элементов, паразитные емкости между выводами, наличие потерь в диэлектриках и проводниках и т. п.

Источники напряжения и тока — это активные элементы электрических цепей. С их помощью задают сигналы в цепи. Основная характеристика источника напряжения (рис. 5) — *электродвижущая сила (ЭДС)*. ЭДС равна отношению энергии сторонних сил  $dW_M$  необходимой для перемещения положительного заряда  $dq$ , к величине

этого заряда:  $E = dW_M/dq$ . За положительное направление ЭДС принимается направление действия сторонних сил на положительный заряд.

Из анализа схемы рис. 5 и из определения напряжения следует, что напряжение и ЭДС источника направлены в разные стороны, но всегда равны друг другу:  $E = U$ . Поэтому источник напряжения можно также характеризовать с помощью напряжения  $u$ . Если напряжение источника уменьшить до нуля, то это всегда будет соответствовать короткому замыканию узлов, к которым подключен источник. Следовательно, собственное *внутреннее сопротивление* идеального источника напряжения равно нулю.

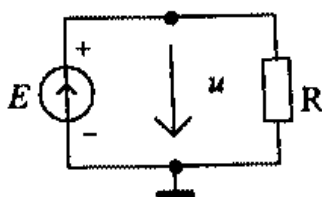


Рис. 5

Напряжение реальных источников ЭДС при подключении нагрузки, как правило, уменьшается. Поэтому реальные источники представляются с помощью последовательного соединения идеального источника напряжения и резистора (рис. 6, а). Этот резистор называется *внутренним сопротивлением* реального источника напряжения. Например, аккумулятор для питания часов персонального компьютера с напряжением 3 вольт должен иметь внутреннее сопротивление не более 1 Ом.

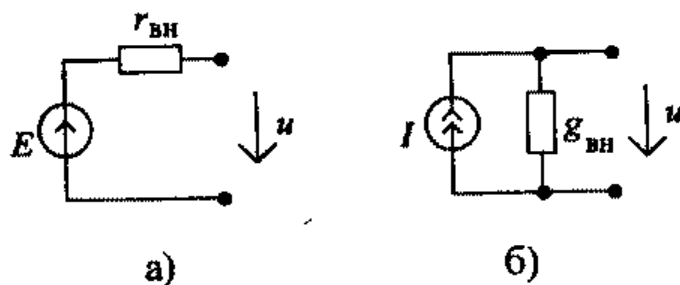


Рис. 6

Реальные источники напряжения отдают максимум мощности только в определенную нагрузку. Действительно, пусть к зажимам источника напряжения, изображенного на рис. 6 а, подключена нагрузка с сопротивлением  $r$ . Мощность, отдаваемая в эту нагрузку, равна

$$P = \left( \frac{E}{r_{\text{вн}} + R_{\text{H}}} \right)^2 R_{\text{H}}$$

Из анализа этой формулы следует, что условие передачи максимума мощности определяется равенством

$$R_{\text{H}} = r_{\text{вн}}.$$

Источник тока (рис. 6, б) описывается функцией  $I/(/)$ . Если ток источника равен нулю, то это соответствует разрыву выводов источника. Следовательно, внутреннее сопротивление идеального источника тока бесконечно велико. Это свойство источника нашло отражение в его условном изображении (рис. 6, б).

Ток реального источника тока при увеличении сопротивления нагрузки уменьшается. Поэтому в схему вводят *внутреннюю проводимость* реального источника тока (рис. 6, б).

Реальные источники тока и напряжения взаимозаменяемы. Найдем формулы взаимосвязи параметров таких источников. Пусть к зажимам реальных источников, изображенных на рис. 6, подключены одинаковые нагрузки с сопротивлением  $L_{\text{H}}$ . Для взаимозаменяемых, эквивалентных источников выходные напряжения на нагрузках будут одинаковыми. Для схем рис. 6, а и рис. 6, б соответственно получим

$$u = \frac{E R_{\text{H}}}{r_{\text{вн}} + R_{\text{H}}}, \quad u = \frac{I \frac{1}{g_{\text{вн}}} R_{\text{H}}}{\frac{1}{g_{\text{вн}}} + R_{\text{H}}}.$$

Из анализа этих формул следует, что напряжения на нагрузках в этих формулах при изменяющемся сопротивлении  $Y_{\text{H}}$  будут одинаковы только при выполнении следующих равенств:

$$E = I r_{\text{вн}}, \quad r_{\text{вн}} = 1/g_{\text{вн}}.$$

Полученные формулы используются при переходе от источника тока к источнику напряжения и наоборот. При решении задач выбор вида источника

определяется способом и удобством представления реальных цепей с помощью идеальных элементов.

### • 1.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

*Электрической схемой* цепи называется рисунок, изображающий соединения реальных радиоэлементов (рис. 1). Электрические схемы используются при производстве радиоэлектронной аппаратуры. Для проведения расчетов используются эквивалентные схемы.

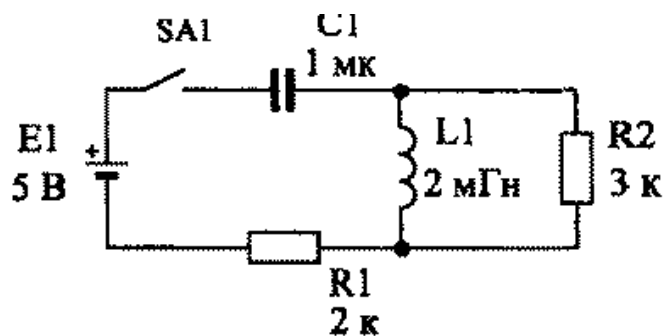


Рис. 1.

*Эквивалентная схема* — это представление соединения и взаимосвязи реальных элементов с помощью идеальных элементов. Если паразитные взаимосвязи в схеме малы и все элементы цепи используются в заданных пределах частот, напряжений и токов, то, как правило, эквивалентная схема будет совпадать с электрической схемой. Ниже для простоты эти схемы будут полагаться одинаковыми.

Структуру, конфигурацию цепи, порядок соединения элементов называют *топологией* электрической цепи. Анализируя схему цепи, можно выделить следующие топологические элементы.

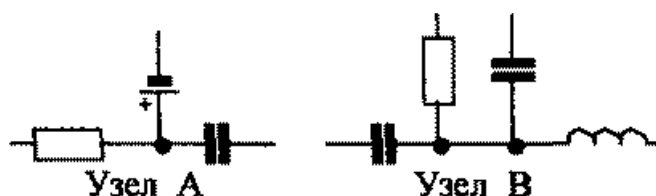


Рис. 2.

*Узел* — это место (точка) соединения нескольких элементов цепи. Два узла, А и В, показаны на рис. 2. Узел, возникающий при соединении двух элементов, часто называется *устранимым узлом*, — такие два элемента можно при расчетах объединить в один элемент.

*Ветвь* — это часть цепи, которая включена между узлами (рис. 3). Ветвь может состоять из одного элемента. Ветвь обозначают отрезком линии. Как правило, несколько ветвей при расчетах можно объединять в одну ветвь (рис. 3).

Представление цепи в виде совокупности ветвей и узлов называется *графом* цепи. Граф цепи отражает топологию или структуру цепи. Пример графа цепи, содержащего пять ветвей и четыре узла, показан на рис. 4. Как правило, узел, к которому подключается максимальное число ветвей, считается нулевым узлом.



*Контур* цепи — это замкнутый путь из ветвей. Например, в цепи на рис. 4 имеется три контура, образованных следующими наборами ветвей: (a, b, c), (c, d, e) и (a, b, d, e).



Рис. 3

Для расчета цепей недостаточно знать рассмотренные выше три уравнения элементов. В сложной цепи в общем случае токи и напряжения на элементах оказываются связанными друг с другом. Для описания взаимосвязи токов и напряжений на разных ветвях используются *уравнения соединений* (законы Кирхгофа).

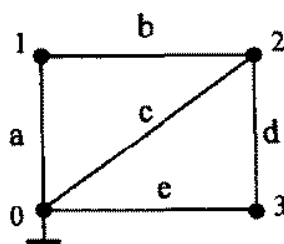


Рис. 4.

Первое уравнение соединений (*первый закон Кирхгофа*) устанавливает взаимосвязь токов в узле (рис. 5).

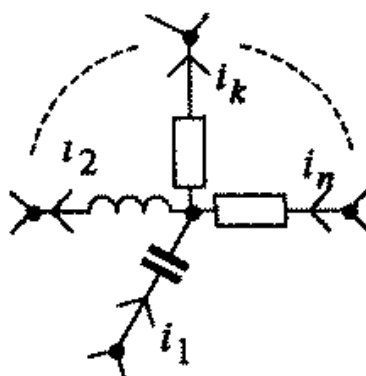


Рис. 5.

В узле заряды не могут накапливаться или исчезать. Для узла выполняется закон сохранения заряда — сколько зарядов переносится к узлу втекающими токами, столько же зарядов выходит из узла. После дифференцирования по времени уравнений, описывающих заряды, получаем первый закон Кирхгофа (первое уравнение соединений): сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из узла. Для узла, объединяющего  $n$  ветвей, по которым

протекают токи  $i_k$ , используется следующая математическая запись первого закона Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n \pm i_k = 0,$$

где втекающие токи берутся со знаком плюс, а вытекающие — со знаком минус или наоборот.

Второе уравнение соединений (второй закон Кирхгофа) устанавливает взаимосвязь напряжений и ЭДС в контурах цепи. Рассмотрим прохождение положительного заряда по контуру (рис. 6).

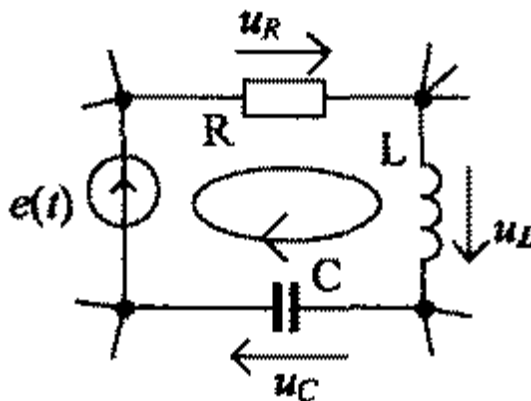


Рис. 6.

По закону сохранения энергии работа сторонних сил в этом контуре должна быть равна работе сил электрического поля. Продифференцировав уравнение, связывающее эти энергии (работы), по заряду, получим соотношение:  $e = u_R + u_L + u_C$ , — второй закон Кирхгофа. Если стрелка напряжения или ЭДС противоположна направлению обхода, то эти ЭДС или напряжение должны записываться в формулу со знаком минус.

Обобщая полученное соотношение для сложного контура, содержащего произвольное число элементов, получим следующую формулировку второго закона Кирхгофа (второго уравнения соединения): в любом контуре цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжений. Если стрелки ЭДС или напряжения не совпадают с направлением обхода, то в соответствующую сумму они записываются со знаком минус. Для контура, включающего  $n$  ЭДС и  $p$  ветвей, используется следующая математическая запись второго закона Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n \pm e_k = \sum_{m=1}^p \pm u_m,$$

где при согласованных стрелках направления обхода и напряжения на ветви или ЭДС ставится плюс, а при несогласованных — минус.

Для расчета линейной электрической цепи любой конечной сложности достаточно использовать два уравнения соединений и рассмотренные в предыдущем параграфе уравнения элементов.

Рассмотрим использование этих уравнений для описания процессов в цепи, схема которой изображена на рис. 7.

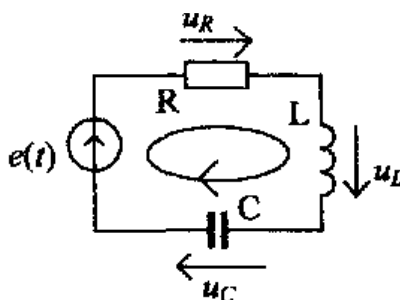


Рис. 7

Записывая для контура этой цепи второй закон Кирхгофа:  $e(t) = u_R + u_L + u_C$ , и учитывая уравнения элементов, получим интегро-дифференциальное уравнение цепи

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau.$$

Дифференцируя это выражение, получим дифференциальное уравнение электрической цепи для одной из неизвестных величин — тока цепи:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}$$

Коэффициенты этого уравнения являются константами и определяются параметрами элементов схемы. В правой части таких уравнений записываются члены, содержащие заданные токи или напряжения. Полученное выражение называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением цепи. Легко убедиться в том, что процессы в любой другой линейной электрической цепи также описываются неоднородными линейными дифференциальными уравнениями. Общие методы решения этих уравнений излагаются в курсе математического анализа. Отдельные, наиболее часто используемые в радиоэлектронике методы решения этих уравнений рассматриваются ниже.

Если в цепи имеется хотя бы один нелинейный элемент, то цепь становится нелинейной. Нелинейная цепь описывается нелинейным дифференциальным уравнением. Для параметрической цепи, содержащей, по крайней мере, один параметрический элемент, получим параметрическое дифференциальное уравнение. Некоторые способы решения этих уравнений будут рассматриваться ниже.

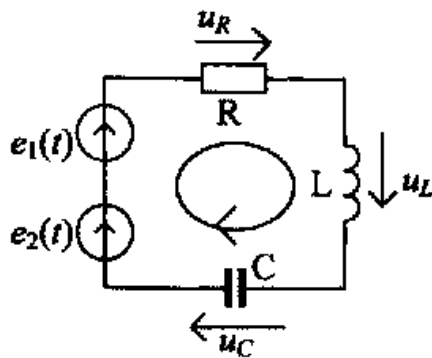


Рис. 8

Для линейной электрической цепи справедлив *принцип суперпозиции (наложения)*. Поясним этот принцип на примере цепи, схема которой изображена на рис. 8. В цепи, включающей последовательно соединенные резистор, катушку и конденсатор, действуют два сигнала:  $e_1(t)$  и  $e_2(t)$ . В контуре цепи как реакция на эти два сигнала возникает результирующий ток  $i(t)$ .

Пусть на цепь воздействует только один сигнал  $e_1(t)$  (сигнал  $e_2(t)$  равен нулю). Дифференциальное уравнение для тока  $i_1(t)$ , возникающего под действием ЭДС  $e_1(t)$ , имеет вид

$$e_1(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_1(\tau) d\tau.$$

Пусть теперь напряжение  $e_1(t)$  равно нулю и на цепь воздействует сигнал  $e_2(t)$ . Дифференциальное уравнение для тока  $i_2(t)$ , возникающего под действием ЭДС  $e_2(t)$ , имеет аналогичный вид

$$e_2(t) = Ri_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau.$$

Суммируя левые и правые части этих уравнений и используя известные свойства интеграла и производной — интеграл или производная от суммы функций равны сумме интегралов или производных от каждой из функций, окончательно получим

$$e_1(t) + e_2(t) = R(i_1 + i_2) + L \left( \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \right) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t (i_1 + i_2) d\tau.$$

Из анализа формулы следует, что воздействие суммы сигналов  $e_1(t) + e_2(t)$  вызывает появление реакции — результирующего тока  $i(t)$ , равного сумме токов + возникающих от каждого из сигналов в отдельности. Обобщая полученные результаты на сложные линейные цепи при воздействии нескольких источников, получим принцип суперпозиции: реакция на сумму воздействий в линейной цепи равна алгебраической сумме реакций на каждое из воздействий в отдельности. Заметим, что для нелинейных цепей принцип суперпозиции несправедлив.

Принцип суперпозиции часто используется для расчета цепей, содержащих несколько источников тока и (или) напряжения. Неиспользуемые источники при расчете реакции на одно воздействие исключаются следующим образом: источники напряжения — методом замыкания выводов (короткого замыкания), а источники тока — методом разрыва ветви (холостого хода).

## 2. Цепи при гармоническом воздействии

### • 2.1. ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ И КОМПЛЕКСНАЯ АМПЛИТУДА

Широкое применение в радиоэлектронных устройствах и в ЭВМ нашли гармонические токи и напряжения. Колебания гармонического вида используются в радиовещании, в устройствах связи, в источниках питания компьютеров, в модемах и т. д. Гармонические токи вырабатываются в промышленных электрогенераторах, создающих сетевое напряжение с частотой 50 Гц. Синусоидальные колебания возникают при самовозбуждении электрических цепей. Единственные сигналы, форма которых при прохождении через линейные цепи не будет искажаться, — это гармонические сигналы.

Гармоническое колебание, или гармонический сигнал, описывается выражением:  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Здесь  $S_m$  — амплитуда,  $\omega$  — круговая частота, измеряемая в рад/с,  $\varphi$  — начальная фаза,  $t$  — время. Иногда используется другая форма записи гармонического сигнала с синусом:  $s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Далее в качестве основной будет использоваться косинусная форма записи гармонического сигнала.

График гармонического сигнала с нулевой начальной фазой приведен на рис. 1.

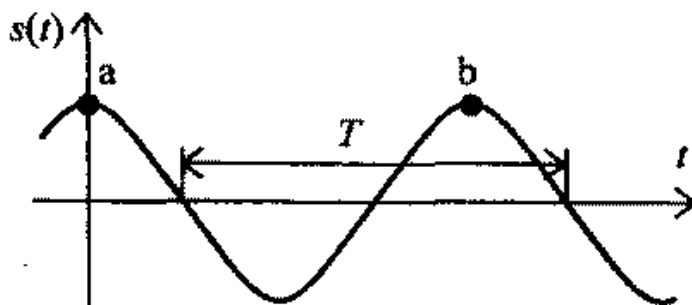


Рис. 1

Кроме амплитуды для описания гармонического сигнала используется величина, называемая среднеквадратичным, действующим или эффективным значением сигнала:  $S_d = S_m / \sqrt{2}$ . Например, для сети переменного тока с частотой 50 Гц указывается среднеквадратичное значение напряжения 220 вольт. Амплитуда напряжения в этой сети будет в  $\sqrt{2}$  раз больше. Среднеквадратичное значение гармонического напряжения численно равно такой величине постоянного напряжения, при которой нагрев резистора соответствует его нагреву переменным током.

Аргумент косинуса  $\Phi(t) = \omega t + \varphi$  называют (полной) фазой колебания. Круговая частота  $\omega$  определяет скорость возрастания фазы гармонического

сигнала. Так как одному кругу соответствует  $2\pi$  радиан, то, разделив  $\omega$  на  $2\pi$ , получим число кругов, наблюдаемых за 1 секунду. Чем выше частота  $\omega$ , тем больше встречается максимумов (экстремумов) сигнала за единицу времени. Расстояние между точками а и б на рис. 1, равное *периоду колебания*  $T$ , при этом уменьшается. Величина, обратно пропорциональная периоду, называется циклической или просто *частотой* гармонического сигнала:  $f = 1/T$ .

Частота  $f$  равна числу периодов колебания (циклов), зафиксированных за 1 секунду. Частота  $f$  измеряется в герцах (Гц). Из описания круговой частоты следует, что  $\omega = 2\pi f$ . На практике часто используются частоты, измеренные в килогерцах, мегагерцах и гигагерцах:  $1 \text{ кГц} = 1000 \text{ Гц}$ ,  $1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$ ,  $1 \text{ ГГц} = 10^9 \text{ Гц}$ .

Чтобы упростить расчеты с использованием гармонических колебаний, введем комплексное представление гармонического сигнала. Используя формулу Эйлера:  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ , где  $j = \sqrt{-1}$ , получим  $\cos x = \operatorname{Re}\{e^{jx}\}$ , где  $\operatorname{Re}$  — обозначение взятия вещественной части комплексного числа. Поэтому гармонический сигнал с использованием формулы Эйлера можно записать в виде  $s(t) = S_m \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\}$ . Внося вещественную амплитуду  $S_m$  в фигурные скобки и представляя экспоненту со сложным показателем в виде произведения двух экспонент, получим

$$s(t) = \operatorname{Re}\{S_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\dot{S}_m e^{j\omega t}\}.$$

Комплексную величину  $S_m e^{j\varphi}$  в (1) называют комплексной амплитудой гармонического сигнала. Комплексная амплитуда содержит информацию о двух важнейших параметрах гармонического сигнала — об амплитуде и о начальной фазе.

Например, комплексная амплитуда гармонического напряжения

$$u(t) = 311 \cos(2\pi 50t - 45^\circ) \text{ равна } \dot{U}_m = 311 e^{-j45^\circ} \text{ В.}$$

При расчетах удобно использовать комплексное гармоническое колебание  $\dot{s}(t) = \dot{S}_m e^{j\omega t}$ . Экспоненту в этом выражении называют оператором вращения. Реальное колебание  $s(t)$  находится как вещественная часть комплексного сигнала. Мнимая часть комплексного гармонического колебания используется при анализе сложных сигналов.

Комплексные амплитуды нескольких сигналов удобно изобразить на комплексной плоскости (рис. 2). В этом случае легко проводить

сравнение параметров сигналов. Для двух сигналов вводится разность начальных фаз. Разность начальных фаз двух сигналов, комплексные амплитуды которых приведены на рис. 2, равна  $(\varphi + 45)$  градусов.

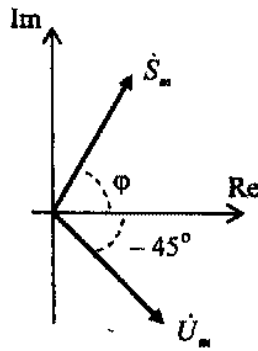


Рис. 2

## • 2.2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Пусть через резистор протекает гармонический ток  $i(t) = \tilde{I}_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Закон Ома для резистора с сопротивлением  $R$  справедлив для любых токов и напряжений:  $u(t) = i(t) R$  (рис. 1).

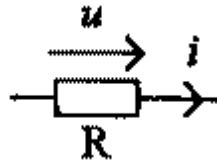


Рис.1.

Следовательно, напряжение на резисторе определяется формулой  $u(t) = R I_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Представляя в этой формуле ток в комплексной форме, получим  $u(t) = \text{Re}\{R \dot{I}_m e^{j\omega t}\}$ . Первые два множителя в фигурных скобках дают комплексную амплитуду напряжения  $\dot{U}_m$ . Соотношение

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m \quad (1)$$

называют законом Ома для резистора в комплексной форме.

Пусть, например, ток через резистор с сопротивлением  $R=2$  Ом равен  $i(t) = 1 \cos(2\pi 1000t + 60^\circ)$ . Записывая комплексную амплитуду тока в виде  $\dot{I}_m = 1e^{j60^\circ}$

А, рассчитываем по формуле (1) напряжение на резисторе  $\dot{U}_m = 2e^{j60^\circ}$  В (рис. 2).

При необходимости определяем  $u(t) = 2 \cos(2\pi 1000t + 60^\circ)$ .

Из анализа формулы (1) и приведенного примера следует, что начальные фазы напряжения и тока через резистор совпадают, а форма

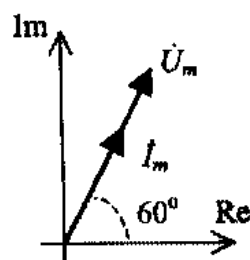


Рис. 2

напряжения на резисторе совпадает с косинусоидальной формой тока.

При использовании проводимости резистора  $G = 1/R$  закон Ома имеет вид  $\dot{I}_m = G \dot{U}_m$ .

Если направления тока и напряжения на резисторе не совпадают, то в соотношении (I) закона Ома появляется знак минус:

$$\dot{U}_m = -R \dot{I}_m$$

Рассмотрим гармоническое воздействие на конденсатор (рис. 3).

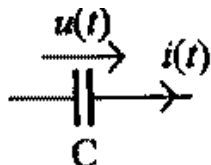


Рис. 3

Пусть к конденсатору приложено гармоническое напряжение  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ , Используя уравнение конденсатора  $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$  и представляя напряжение в комплексной форме  $u(t) = \text{Re}\{\dot{U}_m e^{j\omega t}\}$ , получим  $i(t) = \text{Re}\{j\omega C \dot{U}_m e^{j\omega t}\}$ . В этом выражении все сомножители, расположенные перед экспонентой, дают комплексную амплитуду тока через конденсатор

$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m.$$

Это уравнение называют законом Ома для конденсатора в комплексной форме. Если направления тока и напряжения на конденсаторе не совпадают, то закон Ома записывается со знаком минус:  $\dot{I}_m = -j\omega C \dot{U}_m$ . Используя введенное выше понятие проводимости резистора, по аналогии, величину  $\dot{Y}_c = j\omega C$  назовем комплексной проводимостью конденсатора. Уравнение конденсатора в комплексной форме теперь можно переписать в виде  $\dot{I}_m = \dot{Y}_c \dot{U}_m$ . Если ввести комплексное сопротивление конденсатора  $\dot{Z}_c = 1/\dot{Y}_c$ , то получим следующую форму закона Ома для конденсатора:

Применение закона Ома для конденсатора в комплексной форме проиллюстрируем следующим примером. Пусть напряжение на конденсаторе равно  $u(t) = 10 \cos(2\pi 1000t + 30^\circ)$ . Комплексная амплитуда напряжения имеет вид  $\dot{U}_m = 10e^{j30^\circ}$  В (рис. 4).

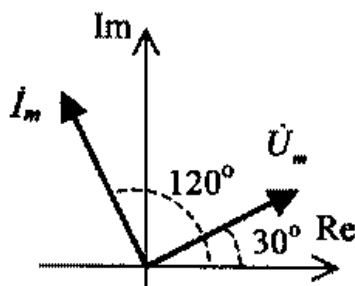


Рис. 4



При емкости конденсатора  $C = 1 \text{ мкФ}$  комплексная проводимость  $\dot{Y} = j2\pi 10^{-3}$  См. По формуле закона Ома рассчитаем комплексную амплитуду тока через конденсатор:  $I_m = \dot{Y} U_m = 2\pi \cdot 10^{-2} e^{j120^\circ} \text{ А}$  (рис. 4). Теперь ток можно записать в виде вещественной функции времени  $i_m = \dot{Y} \dot{U}_m = 2\pi \cdot 10^{-2} e^{j120^\circ} \text{ А}$ .

Из диаграммы на рис. 4 и из анализа формулы (2) следует, что ток через конденсатор будет опережать напряжение на конденсаторе на 90 градусов. Причем напряжение и ток через конденсатор имеют гармоническую форму.

Рассмотрим гармонический ток через катушку индуктивности (рис. 5). Напишем выражение для тока в комплексной форме:  $i(t) = \text{Re}\{\dot{I}_m e^{j\omega t}\}$ , где  $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$  — комплексная амплитуда тока. Используя

уравнение катушки  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , после дифференцирования получим  $u(t) = \text{Re}\{j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t}\}$ .

Из анализа выражения в фигурных скобках следует закон Ома для катушки индуктивности в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m. \quad (3)$$

Обозначая комплексное сопротивление катушки индуктивности в виде  $\dot{Z}_L = j\omega L$ , закон Ома перепишем в следующем виде  $\dot{U}_m = \dot{Z}_L \dot{I}_m$ .

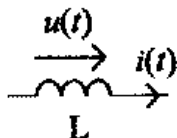


Рис.5.

Величина, обратная сопротивлению, называется комплексной проводимостью катушки:  $\dot{Y}_L = 1/\dot{Z}_L$ . Закон Ома в этом случае имеет вид  $\dot{I}_m = \dot{Y}_L \dot{U}_m$ .

Пример векторной диаграммы токов и напряжений на катушке приведен на рис. 6. Из диаграммы видно, что ток через катушку индуктивности всегда отстает по фазе от напряжения на 90 градусов. При этом и ток, и напряжение имеют гармоническую форму.

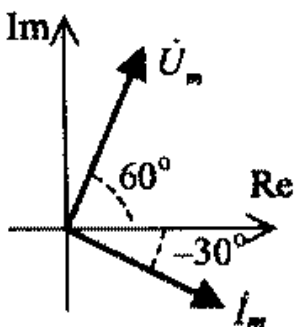


Рис 6

Законы Ома (1), (2), (3) называют *уравнениями элементов в комплексной форме*. Эти уравнения позволяют исследовать характеристики конденсатора и катушки индуктивности при изменении частоты сигнала.

Рассмотрим частотные свойства катушки индуктивности. Возьмем модули от левой и правой частей формулы (3). Учитывая, что  $j\omega L = \omega L e^{j90^\circ}$  и  $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ , получим  $U_m = \omega L I_m$ . Сопротивление  $X_L = \omega L$  называют индуктивным сопротивлением катушки. Обратную величину  $b_L = 1/X_L$  называют индуктивной проводимостью катушки.

Из полученной формулы следует, что сопротивление катушки увеличивается с ростом частоты. Нулевой частоте ( $\omega=0$ ) соответствует постоянный ток, и в этом случае  $X_L=0$ . График зависимости  $X_L$  от частоты  $\omega$  приведен на рис. 7.

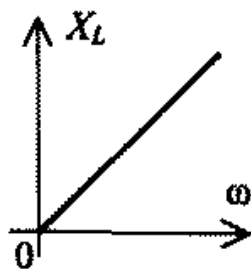


Рис. 7

Из графика видно, что на очень высоких частотах сопротивление катушки велико и ток через катушку будет очень мал. Это свойство катушки индуктивности часто используется при построении следующей простой измерительной цепи. Катушку индуктивности одним выводом подключают к некоторой (контрольной) точке схемы. К другому выводу катушки подключают измеритель постоянного напряжения (вольтметр). Так как сопротивление катушки для постоянного тока практически равно нулю, то через такую катушку индуктивности легко измерить постоянное напряжение в контрольной точке. При этом имеющееся в этой контрольной точке высокочастотное напряжение из-за большого сопротивления катушки, во-первых, не будет изменяться и, во-вторых, не будет мешать процессу измерения, не попадая на вольтметр.

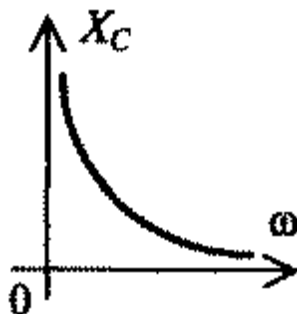


Рис. 8

Рассмотрим частотные свойства конденсатора. Определяя модуль комплексного напряжения на конденсаторе, получим  $U_t = X_C I_m$  где  $X_C = 1/\omega C$  называют реактивным сопротивлением конденсатора. Зависимость сопротивления  $X_C$  от частоты показана на рис. 8. Как видим, сопротивление

конденсатора уменьшается при увеличении частоты. Для постоянного тока сопротивление конденсатора бесконечно велико. Конденсатор можно использовать для измерения высокочастотного напряжения в контрольных точках схемы.

Частотные свойства катушки и конденсатора широко используются при построении фильтров, избирательных усилителей, контролируемых цепей и других узлов устройств передачи информации.

### • 2.3. УРАВНЕНИЯ СОЕДИНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для расчета цепей с гармоническими токами недостаточно знать полученные выше законы Ома в комплексной форме, требуется также учесть соотношения между токами в узлах и напряжениями и ЭДС в контурах. Получим законы Кирхгофа (уравнения соединений) в комплексной форме, предполагая, что цепь линейна и все токи и напряжения в цепи имеют одинаковую частоту  $\omega$ .

Рассмотрим узел, к которому подключено  $n$  ветвей (рис. 1). В соответствии с первым законом Кирхгофа сумма токов в узле равна нулю, причем втекающие токи записываем со знаком плюс, а вытекающие из узла — со знаком минус:  $i_1 - i_2 + i_3 + \dots - i_n = 0$

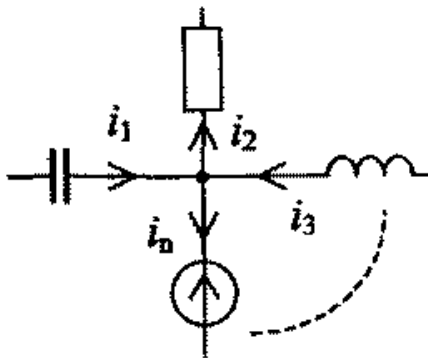


Рис. 1

Представим ток  $k$ -й ветви в комплексном виде  $i_k(t) = \text{Re}\{\dot{I}_k e^{j\omega t}\}$  и сумму токов перепишем в виде

$$\text{Re}\left\{\left(\sum_{k=1}^n \pm \dot{I}_k\right) e^{j\omega t}\right\} = 0$$

В этом выражении при изменении времени  $t$  экспонента будет принимать различные комплексные значения. Получить при всех  $t$  нулевую вещественную часть можно только при выполнении равенства

$$\sum_{k=1}^n \pm \dot{I}_k = 0 \quad (1)$$

Полученное соотношение называют *первым законом Кирхгофа (первым уравнением соединений) в комплексной форме*. Знак плюс в формуле (1) записывается, если ток втекает в узел, а минус — если вытекает (или наоборот).

Получим второй закон Кирхгофа в комплексной форме. Пусть в некотором контуре цепи имеются источники напряжения  $e_k(t)$  и участки с напряжениями

$um(t)$ . Запишем для этого контура второй закон Кирхгофа:  $\sum_{k=1}^n \pm e_k(t) = \sum_{m=1}^p \pm u_m(t)$  где  $n$  — число ЭДС,  $p$  — число напряжений в контуре.

Представляя слагаемые в формуле второго закона Кирхгофа с использованием комплексных амплитуд, получим:

$$\operatorname{Re} \left\{ \left[ \left( \sum_{k=1}^n \pm \dot{E}_k \right) - \left( \sum_{m=1}^p \pm \dot{U}_m \right) \right] e^{j\omega t} \right\} = 0.$$

Это выражение при изменении времени  $t$  будет равно нулю только при выполнении следующего равенства, называемого *вторым законом Кирхгофа (вторым уравнением соединений) в комплексной форме*:

$$\sum_{k=1}^n \pm \dot{E}_k = \sum_{m=1}^p \pm \dot{U}_m. \quad (2)$$

Знак плюс в этой формуле ставится при согласовании направлений ЭДС или напряжений с направлением обхода контура, а знак минус — когда эти направления не согласованы.

Метод анализа цепей с использованием законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме называется *методом комплексных амплитуд (МКА)*.

Отметим, что МКА тесно связан с методами расчета резистивных цепей на постоянном токе. На нулевой частоте все уравнения МКА превращаются в уравнения на постоянном токе. Наоборот, все формулы, полученные на постоянном токе» обобщаются для цепей с гармоническими сигналами, если вместо сопротивлений резисторов ввести комплексные сопротивления элементов, а вместо постоянных токов и напряжений записать комплексные амплитуды.

Используя МКА, введем комплексное сопротивление участка цепи. Пусть задан участок электрической цепи, содержащий пассивные элементы и имеющий только два контакта  $a$  и  $b$  для включения в состав более сложной цепи (рис. 2). Такие цепи называются *двухполюсниками*.

Величина  $\dot{Z} = \dot{U}_m / \dot{I}_m$  называется *комплексным сопротивлением участка цепи*. Обратное отношение  $\dot{Y} = \dot{I}_m / \dot{U}_m$  называется *комплексной проводимостью* участка цепи:

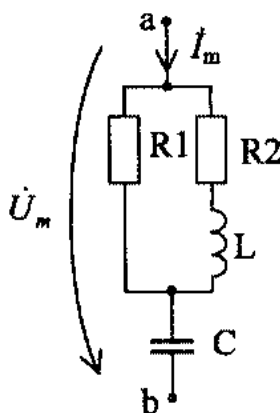


Рис. 2

Используя уравнения соединений (1) и (2), легко показать, что при последовательном соединении резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов комплексное сопротивление участка цепи равно сумме сопротивлений элементов, включенных в цепь. При параллельном

соединении элементов комплексная проводимость участка цепи равна сумме проводимостей элементов цепи. В сложной электрической цепи могут содержаться участки с последовательным и параллельным соединениями элементов. Используя приведенные правила, можно найти комплексное сопротивление сложного участка цепи. Например, сопротивление цепи, изображенной на рис. 2, равно

$$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L}}.$$

Из анализа полученной формулы следует, что в общем случае комплексное сопротивление  $\dot{Z}$  участка цепи содержит две компоненты — вещественную  $R$  и мнимую  $X$ :  $\dot{Z} = R + jX$ . Сопротивление  $z$  можно представить в экспоненциальной форме  $\dot{Z} = Z e^{j\varphi}$ , где  $Z$  — модуль, а  $\varphi$  — начальная фаза комплексного сопротивления участка цепи. Сопротивление двухполюсника на схемах может изображаться в виде прямоугольника — аналогично обозначению резистора.

Отметим, что в сложных схемах иногда содержатся участки с обратными связями или участки, содержащие мостовые схемы. В этом случае для расчета комплексного сопротивления цепи требуются формулы перехода от соединения типа "треугольник" к соединению типа "звезда" и наоборот. Эти формулы можно найти в литературе, указанной в конце пособия. Однако в любом случае сопротивление участка сложной цепи можно найти, записывая законы Ома и Кирхгофа.

## • 2.4. МГНОВЕННАЯ, АКТИВНАЯ, ПОЛНАЯ И РЕАКТИВНАЯ МОЩНОСТИ

Мощность, потребляемая цепью, — не основная, но важная характеристика радиоэлектронного устройства. При увеличении потребляемой мощности увеличиваются размеры и масса источников питания, аккумуляторов, батарей или гальванических элементов. От величины потребляемой мощности зависит использование вентиляторов и радиаторов охлаждения. Минимальные и максимальные мощности принимаемого и передаваемого сигналов — важнейшие параметры приемников и передатчиков соответственно.

Пусть через участок цепи протекает гармонический ток и на этом участке возникает напряжение. Рассмотрим для этой цепи мгновенную мощность  $p(t) = u(t)i(t)$

(рис. 1). При гармоническом токе  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$  и напряжении  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  выражение для мгновенной мощности будет иметь вид  $p(t) = I_m U_m \cos(\omega t + \varphi_i) \cos(\omega t + \varphi_u)$ .

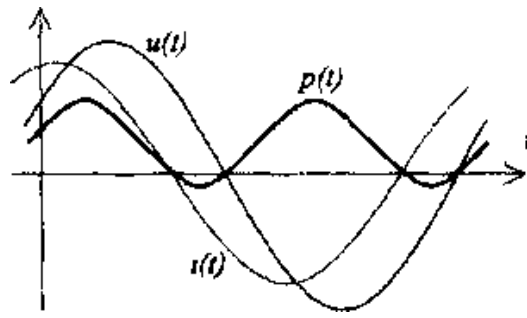


Рис 1

Из анализа кривых рис. 1 видно, что мгновенная мощность может быть как быть положительной, так и отрицательной. Так как  $p(t) = \frac{dW}{dt}$ , где  $W$  — энергия, потребляемая участком цепи, то при  $p(t) > 0$  энергия, поступающая в участок цепи, возрастает, а при  $p(t) < 0$  энергия из участка цепи отдается во внешнюю цепь. Энергия накапливается в двухполюснике при наличии реактивных элементов: в конденсаторе энергия может накапливаться в виде энергии электрического поля, а в катушке индуктивности — в виде энергии магнитного поля. Эта накопленная энергия может, превращаясь в энергию электрического тока, передаваться во внешнюю цепь.

Перепишем формулу для мгновенной мощности следующим образом:  

$$p(t) = \frac{1}{2} I_m U_m \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u) + \frac{1}{2} I_m U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

Из анализа полученного выражения следует, что мгновенная мощность содержит постоянную составляющую. Эту составляющую называют *средней (активной) мощностью*, потребляемой электрической цепью:

$$P_0 = \frac{1}{2} I_m U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i).$$

Коэффициент  $k = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$  называется *коэффициентом мощности*. Он имеет большое значение при оценке качества различных радиоэлектронных устройств: компьютеров, приемников, передатчиков и др. Радиоэлектронное устройство считается плохо спроектированным, если его коэффициент  $k$  существенно меньше единицы. При этом устройство потребляет мало активной мощности, но по цепям питания такого устройства протекают увеличенные токи и для питания такого устройства нужно использовать электрические генераторы, вырабатывающие увеличенные напряжения.

Радиоэлектронное устройство потребляет максимум активной мощности, если  $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = 1$ . На рис. 2 приведена векторная диаграмма напряжений и токов в цепи, для которой коэффициент  $k$  равен 1. Реактивная составляющая сопротивления этой

цепи равна нулю, разность фаз  $(\varphi_u - \varphi_i) = 0$  и поэтому  $P_0 = \frac{1}{2} I_m U_m$ .

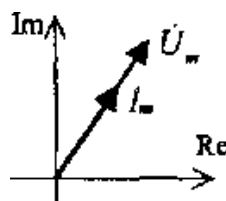


Рис. 2

Перепишем последнее выражение в форме  $P_0 = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} = I_0 U_0$  и учтем, что при постоянном токе  $P_0 = IU$ . Из сравнения формул для постоянного и переменного тока следует, что при гармоническом токе потребляемая мощность определяется действующими значениями токов и напряжений. Поэтому, например, напряжение в сети переменного тока с частотой 50 Гц, имеющее амплитуду, примерно равную 311 В, характеризуется в документах действующим значением 220 В. Действующие значения являются неким эквивалентом постоянных токов или напряжений.

При расчете мощности переменного тока удобно использовать следующее выражение, называемое *полной комплексной мощностью*:

$$\dot{S}_m = \frac{1}{2} \dot{I}_m^* \dot{U}_m,$$

где \* — означает комплексную сопряженность. Представляя комплексные амплитуды тока и напряжения в виде  $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$  и  $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$  получим

$$\dot{S}_m = \frac{1}{2} I_m U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \frac{1}{2} I_m U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i).$$

Вещественная составляющая этого выражения равна средней мощности  $P_0$  цепи, а мнимая компонента обозначается  $Q$  и называется реактивной мощностью участка цепи:

$$Q = \frac{1}{2} I_m U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i).$$

Реактивная мощность характеризует "реактивность" цепи, то есть наличие в ней реактивных элементов — катушек индуктивности или конденсаторов. Чем больше реактивность цепи, тем ближе  $|\sin(\varphi_u - \varphi_i)|$  к единице и тем больше значение модуля  $Q$ . Если цепь содержит только резисторы, то между токами и напряжениями на любых участках этой цепи фазовые сдвиги равны нулю и  $Q = 0$ . Если цепь содержит только конденсаторы или только катушки индуктивности, то  $|\sin(\varphi_u - \varphi_i)| = 1$  и значения  $|Q|$  максимальны.

Реактивная мощность измеряется в варах (ВАр). Максимально допустимая реактивная мощность указывается в технических данных на конденсаторы и на некоторые катушки индуктивности.

Полную комплексную мощность можно представить на комплексной плоскости в виде треугольника мощностей (рис. 3).

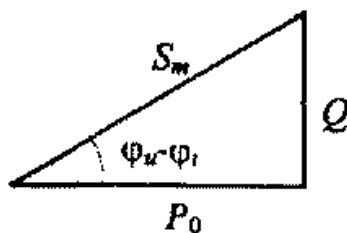


Рис. 3

Величина  $S_m = |\dot{S}_m|$  называется *полной мощностью* цепи. Полная мощность измеряется в вольт-амперах (ВА). Полная мощность понимается как максимальное значение реактивной или активной мощности, которую может потреблять цепь. Полную мощность указывают в технических данных на электрогенераторы переменного тока.

В электрической цепи есть две разновидности элементов: активные, которые генерируют электрическую энергию (источники тока и источники напряжения), и пассивные, которые потребляют энергию. Отметим, что катушка и конденсатор могут часть периода отдавать энергию во внешнюю цепь, но генераторами не являются, так как отдают энергию, накопленную за предыдущую часть периода.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 4.

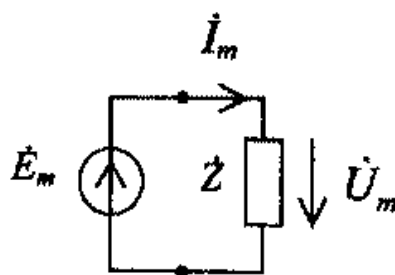


Рис. 4

Полная комплексная мощность источника равна  $\dot{S}_E = \frac{1}{2} \dot{I}_m^* \dot{E}_m$ . Полная комплексная мощность двухполюсника с сопротивлением  $\dot{Z}$  равна  $\dot{S}_m = \frac{1}{2} \dot{I}_m^* \dot{U}_m$ . Так как  $\dot{E}_m = \dot{U}_m$ , то получаем равенство:  $\dot{S}_m = \dot{S}_E$ , называемое уравнением баланса полных комплексных мощностей. Это уравнение выражает закон сохранения энергии в цепи.

В сложных цепях с несколькими источниками напряжения и тока и с большим количеством пассивных элементов также действует закон сохранения энергии, а уравнение баланса полных комплексных мощностей записывается следующим образом:

$\sum_k \dot{S}_{mk} = \sum_p \dot{S}_{Ep}$ , где  $\dot{S}_{Ep}$  — полная комплексная мощность  $p$ -го источника, а  $\dot{S}_{mk}$  — полная комплексная мощность, потребляемая  $h$ -м двухполюсником.

Уравнение баланса мощностей можно разбить на два уравнения — для активных и реактивных мощностей:

$$\sum_k P_{mk} = \sum_p P_{Ep}, \quad \sum_k Q_{mk} = \sum_p Q_{Ep}.$$

В цепях с реактивными элементами используются источники с комплексными внутренними сопротивлениями (рис. 5).



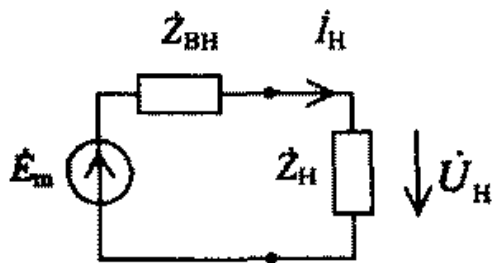


Рис. 5

Ток в такой цепи будет наибольшим, если реактивности нагрузки и внутреннего сопротивления имеют разный характер и емкостная составляющая нагрузки компенсируется индуктивной составляющей внутреннего сопротивления или наоборот. Поэтому в цепи с реактивными элементами условие передачи максимума активной мощности в нагрузку записывается в виде  $\dot{Z}_H = \dot{Z}_{BH}^*$ . Источник и нагрузка при этом считаются согласованными.

Полученное условие часто используется для обеспечения согласования модема с телефонной линией, сетевой платы — с коаксиальной линией передачи, антенны — с радио- или телеприемником и т. п.

### 3. Методы анализа сложных электрических цепей

#### • ОСОБЕННОСТИ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ

Метод токов ветвей основан на применении законов Кирхгофа для расчета токов в сложных цепях. Пусть, например, в схеме на рис. 1 содержится  $q$  узлов ( $q = 5$ ) и  $p$  ветвей ( $p = 8$ ). Число неизвестных то-

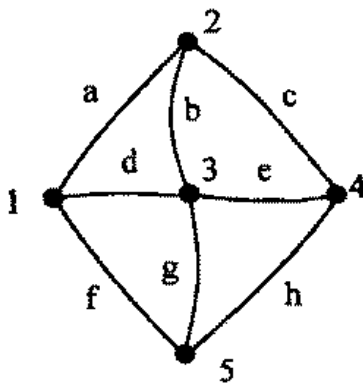


Рис. 1

ков равно числу ветвей цепи  $p$ . Из анализа схемы видно, что по первому закону Кирхгофа можно составить  $q$  узловых уравнений. Однако легко заметить, что последнее  $q$ -е уравнение получается из предыдущих уравнений. Действительно, все токи последнего  $q$ -го уравнения уже входили по одному разу в ранее записанные уравнения и сумма  $(q - 1)$  предыдущих уравнений после умножения на  $-1$  будет давать  $q$ -е зависимое уравнение (проверьте самостоятельно для двух, трех и т. д. узлов).

Основными недостатками рассмотренного метода токов ветвей являются увеличенный порядок системы уравнений, разнородность этих уравнений и, как следствие, сложность их решения. Методы узловых напряжений и контурных токов позволяют уменьшить число уравнений и упростить расчет сложных цепей.

### • МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Этот метод базируется на понятии узлового напряжения. На рис. 1 по-

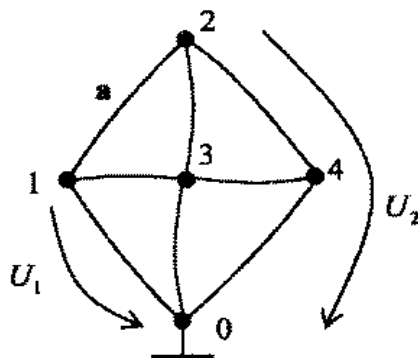


Рис 1

казан граф некоторой электрической цепи с выделенным нулевым узлом — корпусом (заземлением).

*Узловое напряжение* — это напряжение между заданным узлом и корпусом. Узловые напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  показаны на рис. 1. Стрелки узловых напряжений всегда направлены к корпусу. Узловое напряжение может совпадать, а может и не совпадать с напряжением ветви. Например, узловое напряжение  $\dot{U}_2$  не совпадает ни с одним напряжением ветви. Так как потенциал нулевого узла, как правило, равен нулю, то узловое напряжение часто называют *узловым потенциалом*. Из анализа цепи следует, что после определения узловых напряжений можно рассчитать напряжения на всех ветвях. Например, зная  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , напряжение на ветви *a* (рис. 1) рассчитываем по формуле:  $\dot{U}_a = \dot{U}_2 - \dot{U}_1$ . Предполагается, что направление стрелки напряжения ветви *a* совпадает с направлением стрелки напряжения  $\dot{U}_2$ .

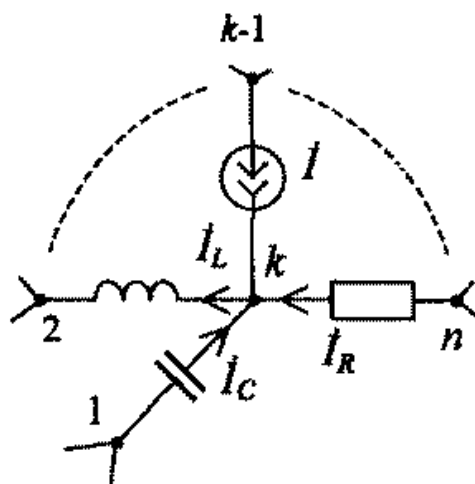


Рис. 2

### • МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод основан на понятии контурного тока. *Контурный ток* — это ток, протекающий по всем ветвям контура независимо от других токов. Контурные токи показаны на рис. 1. Контурный ток — более сложное понятие по сравнению с узловым напряжением. Часто контурный ток невозможно экспериментально измерить, поскольку в контуре может не оказаться элементов, где протекал бы только один контурный ток. Например, в цепи на рис. 1 невозможно измерить ток  $i_{k1}$ . Контурные токи в отличие от узловых напряжений, как правило, нельзя измерить в интегральных микросхемах.

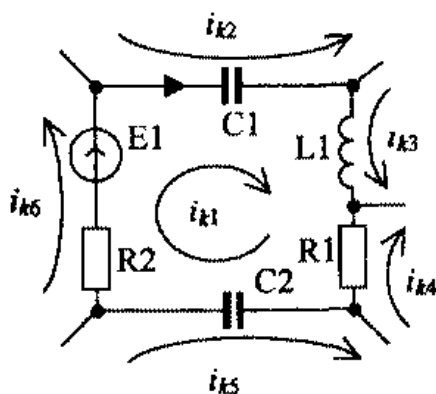


Рис. 1



Кроме принципа суперпозиции при расчетах сложных цепей часто используют *теоремы об эквивалентных источниках*. Различают теорему об эквивалентном источнике напряжения и теорему об эквивалентном источнике тока.

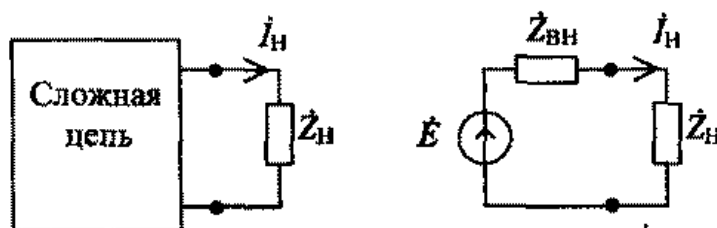


Рис.3

Теорема об эквивалентном источнике напряжения (рис. 1) формулируется следующим образом. Любую по сложности электрическую цепь, имеющую два зажима для подключения нагрузки, можно заменить эквивалентным источником напряжения. ЭДС этого источника равна напряжению холостого хода на зажимах цепи, а внутреннее сопротивление равно сопротивлению между зажимами цепи при исключении из цепи источников (методами короткого замыкания для ЭДС и холостого хода для источников тока).

Теорема об эквивалентном источнике тока (рис. 3): любую по сложности электрическую цепь, имеющую два зажима для подключения нагрузки, можно заменить эквивалентным источником тока. Ток этого источника равен току короткого замыкания цепи, а внутренняя проводимость равна проводимости между зажимами цепи при исключении из цепи источников (методами короткого замыкания для ЭДС и холостого хода для источников тока).

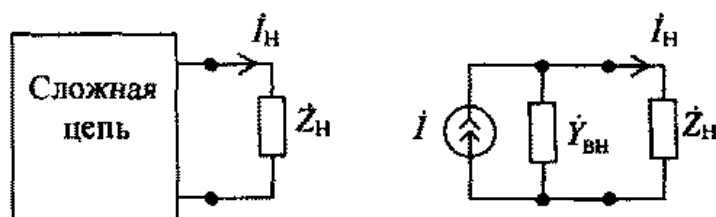


Рис.3.

Теорема *обратимости* (взаимности): если ЭДС, включенная на входе линейной цепи, вызывает некоторый ток на выходе, то та же ЭДС, перенесенная на выход, вызывает на входе цепи ток такой же величины и фазы.

**Теорема компенсации:** токи в электрической цепи не изменятся, если любой участок цепи заменить "компенсационной" ЭДС, равной по величине напряжению на данном участке и направленной навстречу этому напряжению. Доказательство этой теоремы следует из рассмотрения уравнений цепи, записанных с использованием второго закона Кирхгофа. Напряжения в этих уравнениях, если их перенести в другую часть равенства, можно рассматривать как ЭДС. Отметим, что эти компенсационные ЭДС, включаемые в цепь, будут зависимыми источниками напряжения.

#### 4. Четырехполюсники, фильтры и длинные линии

##### • ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

**Четырехполюсник** — это устройство, имеющее четыре контакта: два входных контакта используются для подключения источника сигнала и два выходных — для подключения нагрузки. Четырехполюсники широко применяются в системах передачи информации. Четырехполюсниками являются линии связи в компьютерной сети, телефонные линии, усилители, фильтры и т. д.



Рис.1

Четырехполюсник, содержащий линейные элементы, называется *линейным*. Если внутри четырехполюсника есть нелинейные или параметрические элементы, то четырехполюсник будет *нелинейным* или *параметрическим*. Различают также пассивные и активные четырехполюсники. *Активные* четырехполюсники содержат источники, *пассивные* источников не содержат. Активные четырехполюсники в свою очередь делятся на автономные и неавтономные. *Автономные* четырехполюсники содержат независимые источники, а *неавтономные* содержат только зависимые источники.

Полученную систему уравнений можно представить в матричной форме

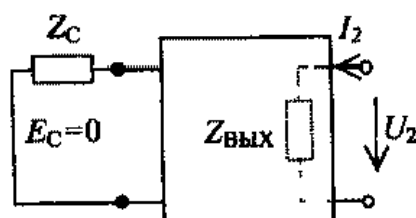
$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I},$$

где  $\mathbf{I} = (I_1, I_2)^T$  — матрица-столбец заданных токов,  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$  — матрица-столбец напряжений на зажимах четырехполюсника,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица сопротивлений четырехполюсника.

Выходное сопротивление четырехполюсника находится как сопротивление между выходными зажимами при уменьшении до нуля входной ЭДС (рис. 3). Из анализа схемы рис. 3 следует, что выходное



сопротивление можно найти по формуле (5) как входное сопротивление со стороны выходных зажимов. Для этого в формуле вместо  $Y_{11}$  нужно записать  $Y_{22}$ , вместо  $Y_{22}$  —  $Y_{11}$ , вместо  $Y_{12}$  —  $Y_{21}$ , вместо  $Y_{21}$  —  $Y_{12}$  и, наконец, вместо проводимости нагрузки нужно записать внутреннюю проводимость источника сигнала:

$$Y_{\text{вых}} = Y_{22} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{11} + Y_c},$$

## • ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

*Электрический фильтр* — это устройство, предназначенное для пропускания сигналов только в определенной полосе частот; сигналы, частоты которых не попадают в эту полосу, подавляются. Фильтры

По диапазону пропускаемых частот фильтры делятся на фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры высоких частот (ФВЧ), полосовые (ПФ) и заграждающие (ЗФ) (или режекторные (РФ)) фильтры. Условные обозначения этих фильтров показаны на рис. 1. ФНЧ пропускают сигналы с низкими частотами и подавляют сигналы с высокими частотами. ФВЧ, наоборот, пропускают сигналы с высокими частотами и подавляют сигналы с низкими частотами. ПФ пропускают сигналы только в определенной полосе частот вблизи некоторой центральной

частоты, расположенной, как правило, в области относительно высоких частот. ПФ не пропускает сигналы с низкими и высокими частотами. Наконец, ЗФ пропускает сигналы с низкими и высокими частотами и задерживает сигналы с частотами, расположенными вблизи центральной частоты заграждающего фильтра.

Фильтр является четырехполюсником. Поэтому для описания свойств фильтра используются функции четырехполюсника, из которых в первую очередь — комплексный коэффициент передачи по напряжению  $\dot{K}_u = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ , где  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  — входное и выходное напряжения фильтра соответственно. Этот коэффициент передачи позволяет получить основную характеристику фильтра — *амплитудно-частотную характеристику (АЧХ)*. АЧХ определяется как модуль комплексного коэффициента передачи фильтра:  $|\dot{K}_u| = |\dot{U}_2| / |\dot{U}_1|$ . АЧХ легко определить экспериментально, измеряя с помощью вольтметра входное и выходное напряжения и рассчитывая отношение этих напряжений на разных частотах. По значению модуля комплексного коэффициента передачи  $K_u = |\dot{K}_u|$  можно судить о подавлении или пропускании сигнала. Если  $K_u(\omega_1) \approx 1$ , то выходное напряжение примерно равно входному напряжению и, следовательно, сигнал с частотой  $\omega_1$  пропускается фильтром. Наоборот, при малых значениях АЧХ, когда  $K_u(\omega_2) \rightarrow 0$ , получим подавление сигнала с частотой  $\omega_2$ .



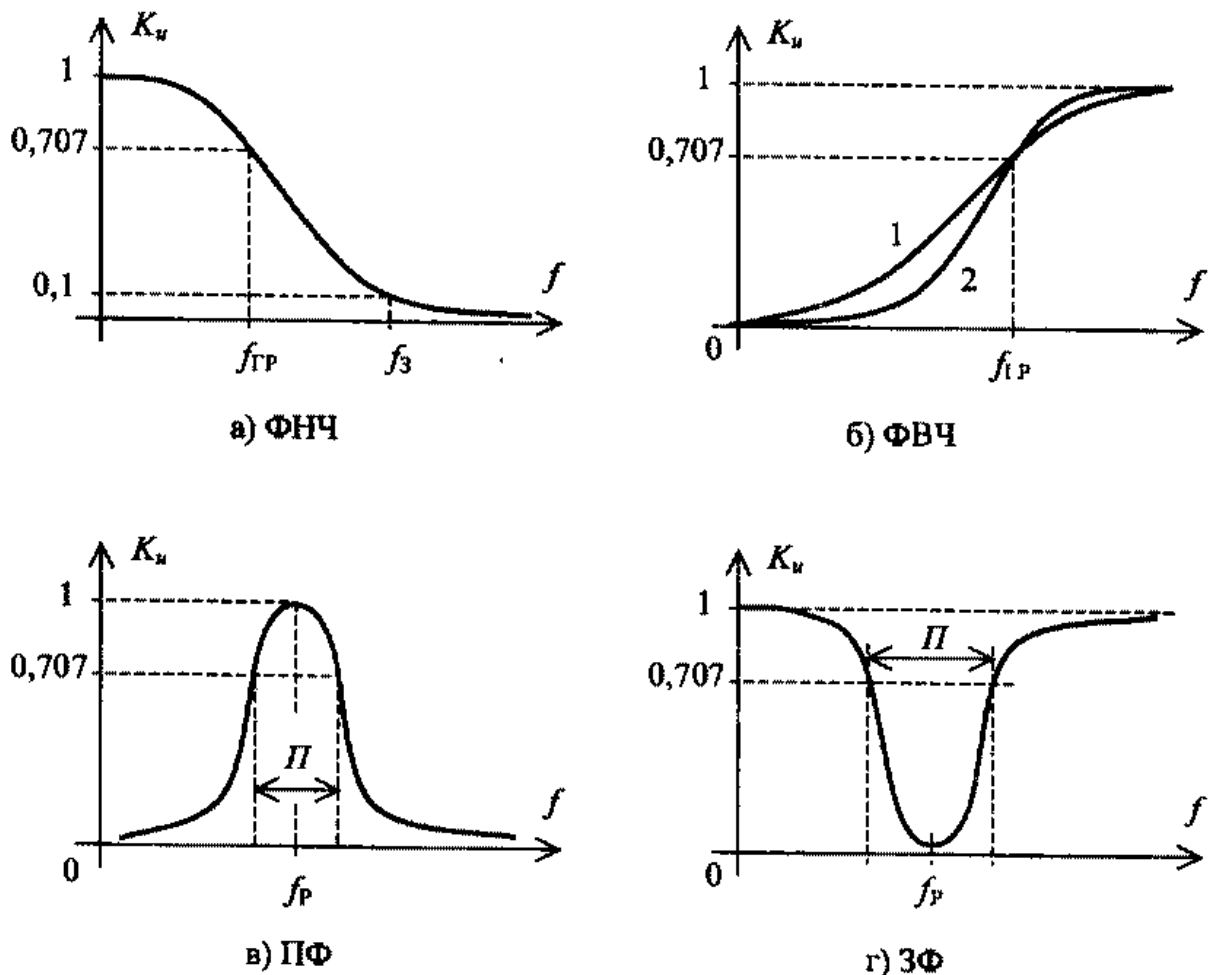


Рис.3

Простейшие схемы однозвенных ФНЧ Г-типа, широко используемых на практике, приведены на рис. 4. Избирательные свойства этих фильтров объясняются свойствами катушки и конденсатора. Как из-

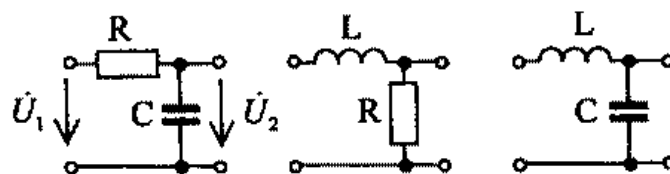


Рис.4

Часто используемые на практике простейшие схемы однозвенных ФВЧ приведены на рис. 6. Работа этих фильтров также объясняется частотными свойствами катушки и конденсатора. Как и для ФНЧ, использование П- и Т-звеньев улучшает прямоугольность амплитудно-частотных характеристик фильтров.

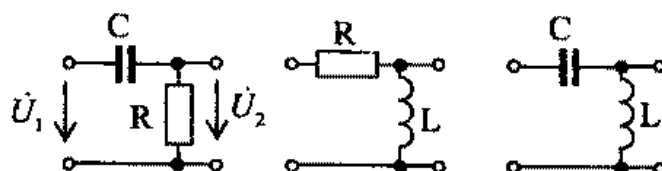
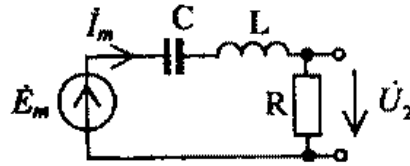
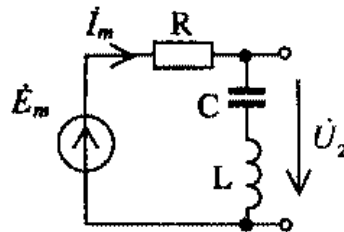


Рис.6

При проектировании полосовых и заграждающих фильтров используются последовательный и параллельный колебательные контуры.



Последовательный колебательный контур используется для построения заграждающих фильтров. Простейшая схема ЗФ приведена на рис. 8. Здесь на резонансной частоте сопротивление последова-



На резонансной частоте  $\omega_p$  напряжение на контуре будет максимально большим. Если частота отклоняется от резонансной, то выходное напряжение уменьшается. Зависимость амплитуды выходного напряжения от частоты будет аналогична АЧХ полосового фильтра

$$U_2 = \frac{I_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{R'}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \cong \frac{I_m R'}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta f}{f_p} Q\right)^2}}$$

#### • ДЛИННЫЕ ЛИНИИ И ТЕЛЕГРАФНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цепи, которые рассматривались выше, относятся к классу цепей с *сосредоточенными параметрами*. Практически все магнитные поля в таких цепях сосредоточены в катушках, все электрические поля — в конденсаторах, а потери — в резисторах.

В цепях с *распределенными параметрами* потери, емкость и индуктивность распределены в пространстве. В дальнейшем будем рассматривать распределение только вдоль одной пространственной координаты. В этом случае цепи с распределенными параметрами называют *длинными линиями*.

Для количественной оценки распределенных параметров используются следующие *погонные параметры* длиной линии.

1.  $R_0$  — погонное сопротивление потерь в проводниках линии. Определяется как сопротивление проводников короткозамкнутого отрезка линии длиной 1 метр. Единица измерения — Ом/м.
2.  $L_0$  — погонная индуктивность. Определяется как индуктивность короткозамкнутого отрезка линии длиной 1 метр. Единица измерения — Гн/м.
3.  $C_0$  — погонная емкость. Определяется как емкость между проводами разомкнутого на конце отрезка линии длиной 1 метр. Единица измерения — Ф/м.
4.  $G_0$  — погонная проводимость изоляции. Определяется как проводимость между разомкнутыми на конце проводами отрезка линии длиной 1 метр. Единица измерения — См/м.

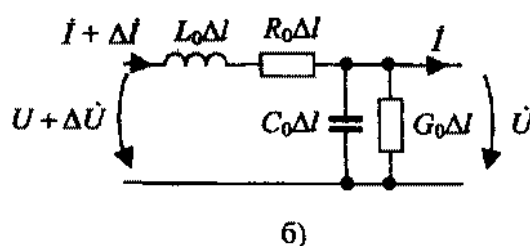
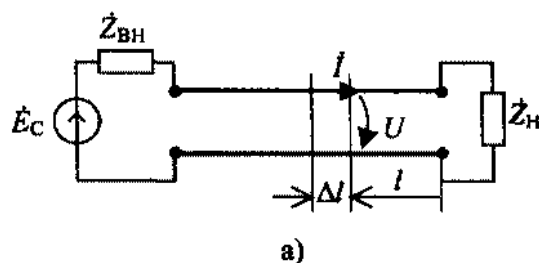


Рис.2

Из анализа цепи (рис. 2, б) следует, что изменение напряжения  $\Delta \dot{U} = (R_0 \Delta l + j\omega L_0 \Delta l)(\dot{I} + \Delta \dot{I})$ . Раскрывая круглые скобки и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим следующее выражение:  $\Delta \dot{U} \approx (R_0 + j\omega L_0) \dot{I} \Delta l$ . Разделив правую и левую части равенства на  $\Delta l$  и переходя к пределу при  $\Delta l \rightarrow 0$ , получим *первое телеграфное уравнение* длинной линии

$$\frac{d\dot{U}}{dl} = Z_0 \dot{I}, \quad (1)$$

где  $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$  — погонное комплексное сопротивление.

Используя первый закон Кирхгофа для выходного узла отрезка длинной линии (рис. 2, б), получим  $\Delta \dot{I} = (G_0 \Delta l + j\omega C \Delta l) \dot{U}$ . Разделив правую и левую части равенства на  $\Delta l$  и переходя к пределу при  $\Delta l \rightarrow 0$ , получим *второе телеграфное уравнение* длинной линии

$$\frac{d\dot{I}}{dl} = \dot{Y}_0 \dot{U}, \quad (2)$$

где  $\dot{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  — погонная комплексная проводимость длинной линии.

Таким образом, в длинной линии устанавливаются две бегущие волны напряжения. Первая волна — падающая бегущая волна напряжения, переносит энергию от генератора к нагрузке. Вторая — отраженная волна. Появление отраженной волны объясняется тем, что не вся энергия падающей волны поглощается в нагрузке. Часть энергии отраженная волна возвращает генератору.

Из анализа решения телеграфных уравнений для тока следует, что ток в произвольном сечении линии также представляется в виде двух слагаемых. Первое слагаемое соответствует бегущей падающей, а второе — бегущей отраженной волне тока. Однако у этих волн будут другие, по сравнению с напряжениями, начальные фазы.

Распространение волн напряжения и тока характеризуют *волновые параметры* длинной линии:

$\gamma = \alpha + j\beta$  — коэффициент распространения;

$\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$  — коэффициент затухания;

$\beta = \text{Im}\{\gamma\}$  — коэффициент фазы;

$\dot{Z}_C = \sqrt{\dot{Z}_0 / \dot{Y}_0}$  — волновое сопротивление;

$v_\phi = \omega / \beta$  — фазовая скорость;

$\lambda_n = 2\pi / \beta$  — длина волны в длинной линии.

## • КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ, СТОЯЧИЕ И СМЕШАННЫЕ ВОЛНЫ

Появление отраженных волн при передаче сигналов с использованием длинных линий, как правило, является нежелательным явлением. Для оценки интенсивности отраженных волн вводится *коэффициент отражения* (по напряжению)

$$\dot{P} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}}, \quad (1)$$

где  $\dot{U}_{\text{отр}}$  и  $\dot{U}_{\text{пад}}$  — комплексные амплитуды отраженной и падающей волн напряжения в произвольном сечении линии. Так как токи и напряжения в линии связаны с помощью волнового сопротивления, то коэффициент отражения для токов не вводится.

$$\dot{P}_n = \frac{\dot{Z}_n - \dot{Z}_c}{\dot{Z}_n + \dot{Z}_c}. \quad (2)$$

Из выражения (2) получаем условие передачи сигналов без отраженной волны:  $\dot{Z}_n = \dot{Z}_c$ . В этом случае  $p_n = 0$  и в линии имеется только одна падающая бегущая волна. Соотношение  $\dot{Z}_n = \dot{Z}_c$  называют *условием согласования* длиной линии и нагрузки, а получающееся при этом состояние линии — *режимом бегущей волны*. Для линий с малыми потерями волновое сопротивление равно вещественной величине  $W$ . Например, на практике для построения компьютерных сетей широко используются двухпроводные линии с волновым сопротивлением, равным  $W = 100$  Ом. Следовательно, для передачи всей энергии от генератора (сервера) в нагрузку (рабочую станцию) сопротивление нагрузки должно быть равно 100 Ом.

Волна, полученная в результате наложения падающей и отраженной волн при полном отражении, называется *стоячей волной*. Аналогичный вывод можно получить для тока в линии: при полном отражении возникает стоячая волна тока. Распределение амплитуды тока вдоль линии показано на рис. 2 пунктирной линией.

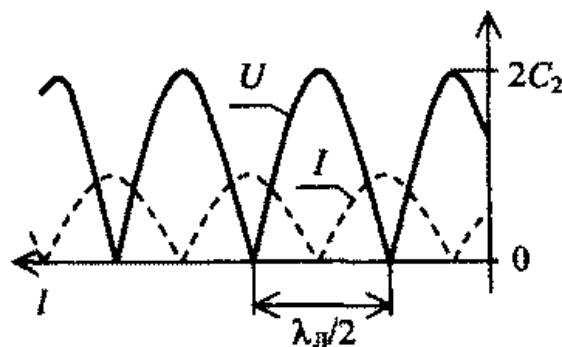


Рис.2

Волна, образованная суммой бегущей волны и стоячей волны, называется *смешанной волной*.

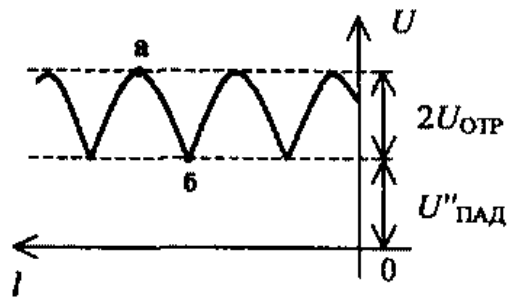


Рис.3

Распределение вдоль линии амплитуды напряжения в смешанной волне показано на рис. 3. В точке **а** имеется пучность, а в точке **б** — узел напряжения в линии.

Для описания смешанной волны используются *коэффициент стоячей волны (КСВ)* и *коэффициент бегущей волны (КБВ)*:

$$\text{КСВ} = \frac{U_{\text{макс}}}{U_{\text{мин}}}; \quad \text{КБВ} = \frac{U_{\text{мин}}}{U_{\text{макс}}} = \frac{1}{\text{КСВ}}$$

## 5. Сигналы и их спектры

### • ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СИГНАЛОВ И ПОНЯТИЕ СПЕКТРА

Аналитическое описание сигнала дается некоторой вещественной (или комплексной) функцией времени.

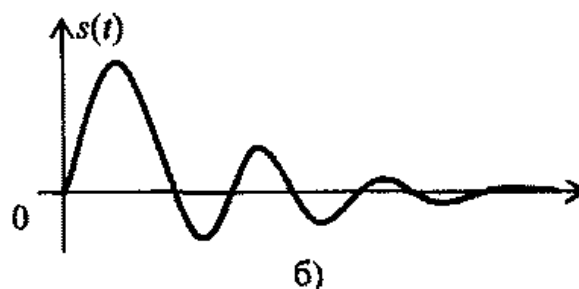
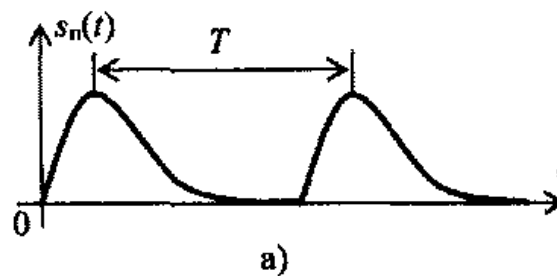


Рис.1

Детерминированные сигналы делятся на несколько классов. *Аналоговые* сигналы (рис. 1) имеют значения в любой точке временной оси. Например, последовательность импульсов (рис. 1, а) является аналоговым сигналом. В промежутках между импульсами значение сигнала задано и равно нулю.

*Периодические* сигналы (рис. 1, а), в отличие от *непериодических*, имеют повторяющиеся через интервал времени  $T$ , называемый периодом, значения:  $s_n(t) = s_n(t + T)$ .

На рис. 2, а, б показаны графики смещенных на время  $\tau$  единичной и дельта-функции соответственно.

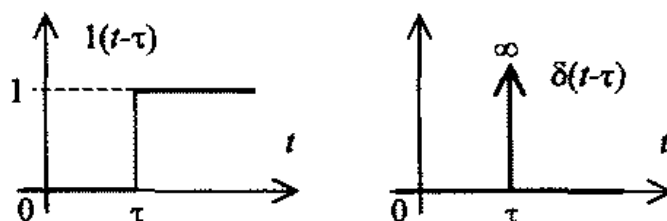


Рис.2

Разложим произвольный сигнал в ряд по ортонормированному базису

$$s \approx \sum_{n=0}^{\infty} S_n u_n.$$

Представление (1) называется *обобщенным рядом Фурье* для сигнала  $s$  в заданном пространстве. Коэффициенты  $S_n$  ряда Фурье находятся просто. Умножим скалярно обе части (1) на базисную функцию  $u_i$

$$(s, u_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, u_i) S_n, \quad i=0, 1, 2, \dots$$

#### • РЯД ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Если использовать в качестве ортогональных базисных функций  $1, \cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t)$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , то получим ряд Фурье. Ряд Фурье используется, если сигнал  $s(t) \in L_2(T)$  представлен на ограниченном временном отрезке  $[0, T]$ , либо сигнал является периодиче-

ским с периодом  $T$ . Ряд Фурье записывается в разных формах. Исходной является *математическая форма* ряда, приводимая в справочниках по математике в виде

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)), \quad (1)$$

где  $\Omega = 2\pi/T$  — частота основной (первой) гармоники, а коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\Omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\Omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Односторонний (физический) амплитудный спектр, возникающий при использовании радиотехнической формы ряда Фурье, показан на

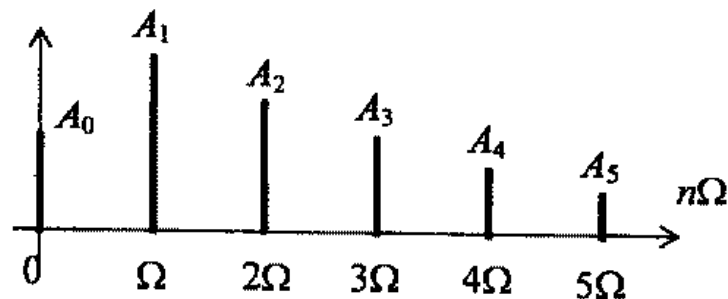


Рис.1

Двусторонние амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала показаны на рис. 3, а и рис. 3, б соответственно. В амплитудном спектре содержится постоянная составляющая, величина которой равна  $C_0 = S_m \tau / T$ , и бесконечно большое число гармоник с кратными частотами. Амплитуды некоторых гармоник могут быть равны нулю, если на частоте  $n\Omega$ , синус в формуле (5) равен нулю. Начальные фазы гармоник или равны нулю, если  $\dot{C}_n > 0$ , или равны  $\pm 180$  градусам, если  $\dot{C}_n < 0$ .



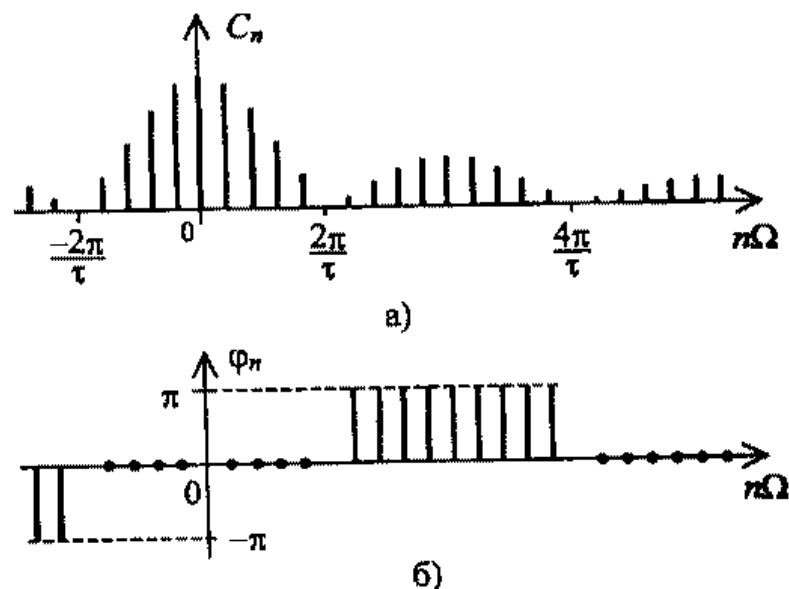


Рис.3

Для анализа сигналов  $s(t)$ , заданных на всей временной оси  $t \in \mathbb{R}$ , в настоящее время часто используются негармонические базисные функции — *вейвлеты* (wavelet) [5, 20]. Название "вейвлет", переводится на русский язык как "маленькая волна". Вейвлет представляется функцией  $\psi(t)$ , осциллирующей в некотором временном интервале подобно волне и быстро затухающей вне него. При этом функция  $\psi(t) \in L_2(\mathbb{R})$  должна иметь нулевое среднее значение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

На рис. 4 показаны графики двух вейвлетов: мексиканская шляпа  $\psi_m(t)$  и Хаара  $\psi_h(t)$ .

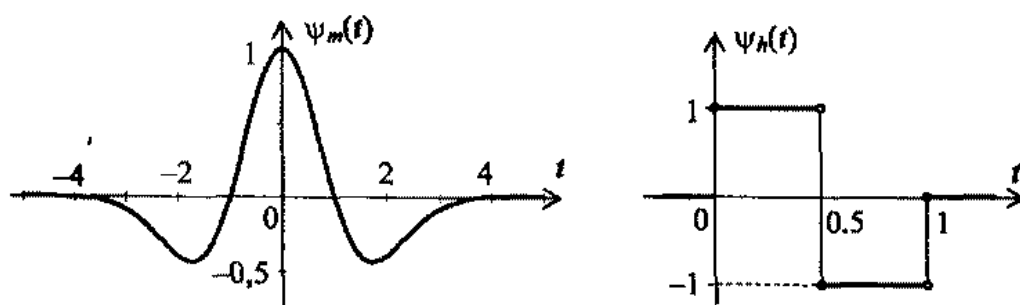


Рис.4.

Общий принцип построения базиса на основе вейвлета состоит в использовании масштабирования (сжатия или растяжения) базисной функции во времени и сдвига (смещения) ее по временной оси. Таким образом, вейвлеты — это функции  $a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ , где:  $a$  — масштаб,  $b$  — сдвиг. Коэффициент  $a^{-1/2}$  перед функцией  $\psi(t)$  введен для сохранения нормы сигнала в  $L_2(\mathbb{R})$ .

- НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Гармонический анализ можно распространить на *непериодические сигналы* (рис. 1, а), принадлежащие  $L_2(\mathbb{R})$ . Для этого используется предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.

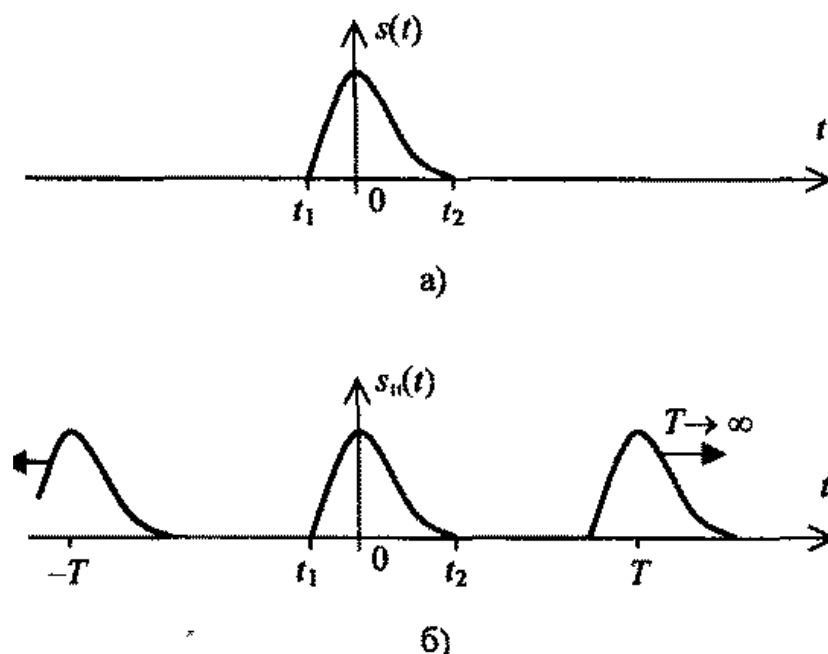


Рис.1

Спектральная плотность амплитуд прямоугольного импульса приведена на рис. 3, а. Особенность спектра — наличие нулей спектральной плотности. Эти нули располагаются на частотах  $\omega$ , на которых в (3) имеем  $\sin(\omega, \tau/2) = 0$ . Несколько таких частот указано на рис. 3. Основная мощность сигнала сосредоточена в главном "лепестке" спектральной плотности амплитуд (вблизи начала координат). Спектр фаз одиночного импульса показан на рис. 3, б. Отрицательным значениям спектральной плотности соответствуют начальные фазы, равные  $\pm 180^\circ$ .

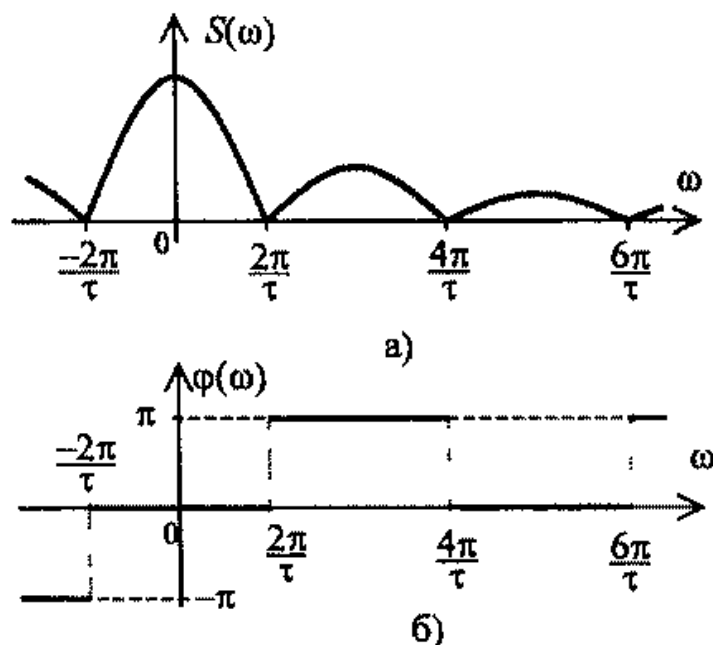


Рис.3

При проведении теоретических исследований и при решении задач удобно использовать *преобразование Лапласа*. Это преобразование вводится для всех сигналов  $s(t)$ , тождественно равных нулю при  $t < 0$  и возрастающих не быстрее  $e^{\alpha t}$ , где  $\alpha$  — вещественное число, причем  $\alpha > 0$ .

**Преобразование Лапласа имеет следующие свойства:**

$$1) \quad s(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ где } \alpha > 0;$$

$$2) \quad s(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-p\tau} S(p), \text{ где } \tau > 0;$$

$$3) \quad e^{-at} s(t) \Leftrightarrow S(p + a);$$

$$4) \quad \frac{ds(t)}{dt} \Leftrightarrow pS(p) - s(0);$$

$$5) \quad \int_0^t s(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{S(p)}{p}.$$

Для абсолютно интегрируемых сигналов при использовании подстановки  $p = j\omega$  первым трем свойствам преобразования Лапласа в частотной области соответствуют три теоремы о спектрах:

- 1) сигналу  $s(\alpha t)$  с измененным масштабом времени соответствует спектральная плотность  $\frac{1}{\alpha} \dot{S}\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$  с растяжением спектра при  $\alpha > 1$  или сжатием спектра при  $\alpha < 1$ ;
- 2) сигналу  $s(t - \tau)$ , задержанному на время  $\tau$ , соответствует спектральная плотность  $\dot{S}(j\omega) e^{-j\omega\tau}$  (с дополнительным фазовым сдвигом, равным  $-\omega\tau$ );
- 3) при умножении сигнала  $s(t)$  на комплексный гармонический сигнал  $e^{j\Omega t}$  результирующему сигналу  $e^{j\Omega t} s(t)$  соответствует смещенная по оси частот спектральная плотность  $\dot{S}[j(\omega - \Omega)]$ .

#### • ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Рассмотрим линейную цепь (четыреполюсник), на которую воздействует сигнал  $s(t)$ . На выходе цепи возникает реакция — выходной сигнал  $y(t)$  (рис. 1). Известно, что при воздействии на линейную цепь гармонического сигнала  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$  на выходе цепи устанавливается сигнал, форма которого также гармоническая:  $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi_y)$ . Комплексную амплитуду этого выходного сигнала можно найти по формуле

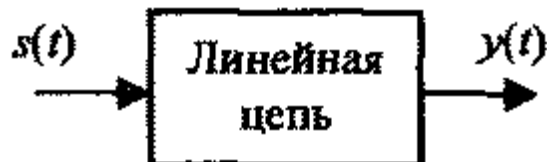
$$\dot{Y}_m = K(j\omega) \dot{S}_m$$


Рис. 1

В соответствии с типом используемого спектра (дискретного или непрерывного), различают спектральные методы для периодических и непериодических сигналов. Пусть на входе цепи действует периодический сигнал  $s(t)$ . Представим его в виде ряда Фурье  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_n e^{j n \Omega t}$ , где  $\dot{C}_n$  — комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники.

Для расчета выходного сигнала при сложных входных сигналах наиболее удобно использовать обобщение преобразования Фурье — преобразование Лапласа. Формулу (3) с учетом взаимосвязи преобразований Фурье и Лапласа можно переписать следующим образом

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)K(p)e^{-pt} dt, \quad (5)$$

где  $S(p)$  — изображение входного сигнала  $s(t)$ ,  $K(p) = Y(p)/S(p)$  — операторный коэффициент передачи цепи,  $Y(p)$  — изображение выходного сигнала. На основании формулы (5) имеем

$$Y(p) = S(p)K(p). \quad (6)$$

Наконец, используя соотношение между током и напряжением на конденсаторе  $i(t) = C(du(t)/dt)$  при нулевых начальных условиях, получим закон Ома в операторной форме для конденсатора

$$U(p) = (1/pC) I(p), \quad (9)$$

где  $1/pC$  — операторное сопротивление конденсатора.

#### • МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

В устройствах связи и в компьютерных сетях широко используется *частотный принцип* разделения сигналов. В соответствии с этим принципом сигналам отводятся неперекрывающиеся узкие полосы частот из всего диапазона частот, занимаемого системой передачи информации. С помощью узкополосных сигналов легко организовать передачу информации от большого числа источников к большому числу получателей, при этом источники не будут мешать друг другу.

При *амплитудной модуляции (АМ)* амплитуда сигнала изменяется прямо пропорционально информационному сигналу  $s(t)$ :

$$U_m(t) = U_{m0} + k_{AM}s(t). \quad (1)$$

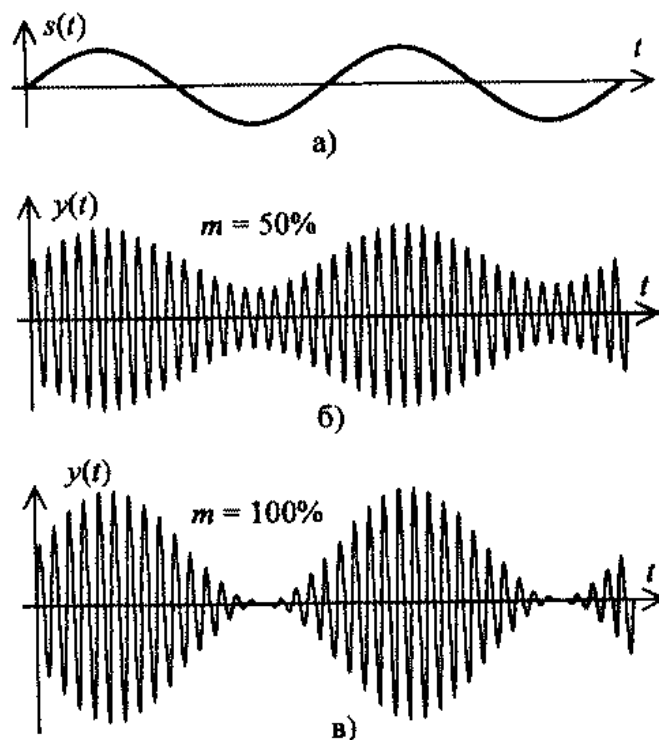


Рис. 1

Если модуляция осуществляется сложным периодическим сигналом, в спектре которого содержится много гармоник, то каждая из этих гармоник даст две боковые составляющие в спектре модулированного сигнала. В спектре появляются верхняя и нижняя боковые полосы (рис. 2, б). Ширина спектра будет определяться модулирующей гармоникой с максимально высокой частотой. Аналогичные результаты получим для сложного непериодического сигнала, используя теорему о спектре сигнала, умноженного на комплексный гармонический сигнал.

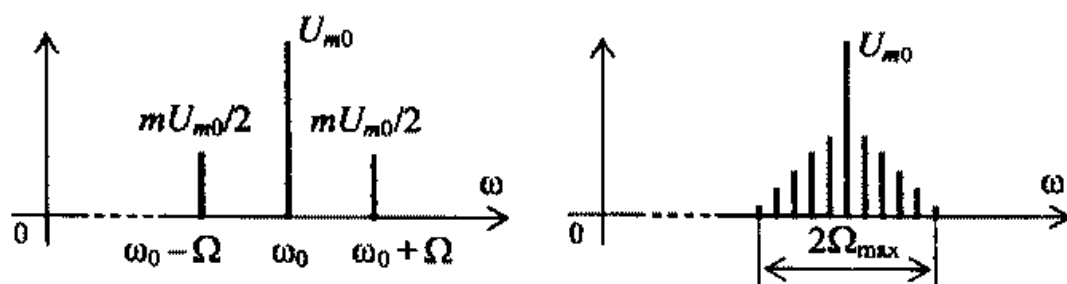


Рис. 2

## 6. Полупроводниковые приборы

### • ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫЙ ПЕРЕХОД И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДИОДЫ

К *полупроводникам* относят материалы, проводимость которых больше проводимости диэлектриков, но меньше проводимости проводников. Обычно это кристаллический материал с шириной запрещенной зоны от 0,5 до 2 эВ. В радиоэлектронике в качестве полупроводников наиболее часто используются кремний, германий, арсенид галлия, селен и др. Химически чистые или *i-полупроводники* имеют небольшую собственную проводимость, обусловленную свободными электронами и дырками теплового происхождения.

*Полупроводник n-типа* — это полупроводник с преобладающей электронной проводимостью. Преобладающая электронная проводимость возникает при добавлении донорных примесей, например пятивалентных сурьмы, мышьяка и т. п. к четырехвалентному кремнию. Атом примеси легко ионизируется, добавляя электрон к электронам собственной проводимости.

*Полупроводник p-типа* возникает при добавлении к химически чистому полупроводнику акцепторных примесей, например, при добавлении трехвалентных бора, алюминия и др. к четырехвалентному кремнию. Атом примеси ионизируется, принимая электрон от соседнего атома основного полупроводника и создавая тем самым дырку в полупроводнике. Примесные полупроводники называются *легированными*.

Наибольшее применение нашли полупроводники, одна часть которых легирована акцепторными примесями, а другая — донорными. Переход между двумя областями полупроводника с разными типами электропроводности называется *электронно-дырочным* или *p-n-переходом* (рис. 1).

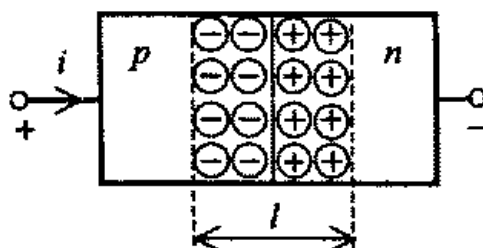


Рис.1

Пусть к  $p$ - $n$ -переходу подключен источник небольшого постоянного напряжения, причем плюс этого напряжения прикладывается к  $p$ -области (рис. 1). Электрическое поле, создаваемое этим источником, накладывается на внутреннее поле в  $p$ - $n$ -переходе, созданное ионами примесей. Результирующее поле в переходе уменьшается. Возникает дополнительная диффузия основных носителей заряда. Диффузионный ток через переход становится больше дрейфового. Причем, чем больше прикладываемое напряжение, тем больше диффузионный ток через переход. Напряжение, при котором ток через  $p$ - $n$ -переход быстро увеличивается, называется *прямым (открывающим) напряжением*. Возникающий при этом большой ток называется *прямым током* (рис. 2). Сопротивление  $p$ - $n$ -перехода при подаче прямого напряжения резко уменьшается.

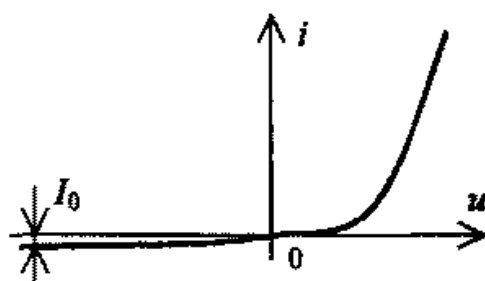


Рис.2

Теоретическая зависимость тока  $i$  через переход от подаваемого напряжения  $u$  имеет вид

$$i = I_0(e^{\gamma u} - 1), \quad (1)$$

где  $I_0$  — обратный ток перехода при большом обратном напряжении, обусловленный небольшим дрейфовым током,  $\gamma$  — коэффициент, равный примерно 39 1/В. За положительное направление тока  $i$  и согласованного с током направления напряжения  $u$  принято направление прямого тока диода.

На основе выпрямляющих переходов изготавливаются полупроводниковые диоды. *Полупроводниковый диод* — это прибор с одним выпрямляющим переходом и двумя выводами. Наибольшее распространение получили диоды, использующие  $p$ - $n$ -переход (рис. 3). Электрод, подключенный к  $p$ -области, часто называют анодом, а электрод, соединенный с  $n$ -областью — катодом. На рис. 3 показано условное

обозначение полупроводникового диода и полярность прямого напряжения.



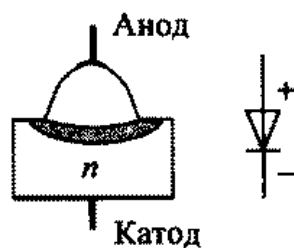


Рис.3

Реальные вольтамперные характеристики диода приведены на рис.4.

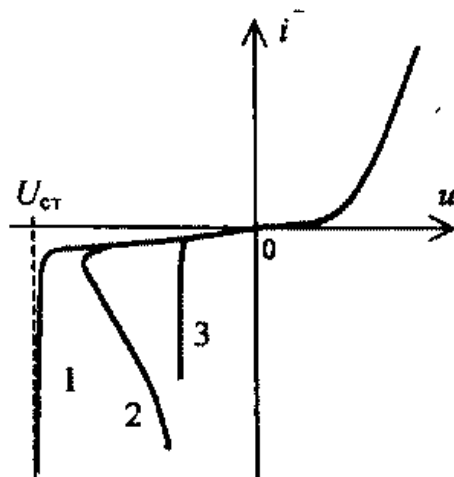


Рис.4

**Стабилитрон** — полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого имеет участок лавинного пробоя. Стабилитроны широко используются в источниках питания для получения стабильных выходных напряжений. Например, они используются в источниках питания компьютеров для создания высокостабильных напряжений питания микропроцессоров, микросхем на материнской плате, устройств внешней памяти и т. п.

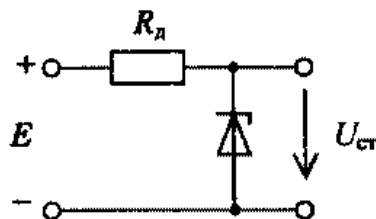


Рис.5

**Варикап** — полупроводниковый диод, в котором используется зависимость барьерной емкости  $p$ - $n$ -перехода от обратного напряжения (рис. 6).

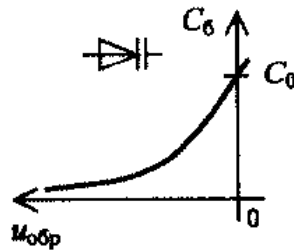


Рис.6

**Туннельный диод** — это полупроводниковый прибор, вольт-амперная характеристика которого при прямом напряжении имеет падающий участок 1–2 (рис. 7). Наличие такого участка объясняется возникновением туннельного эффекта.

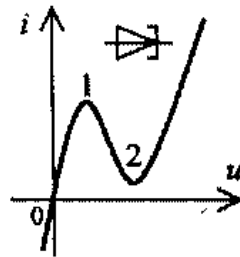


Рис.7

**Импульсные диоды** предназначены для работы с быстро изменяющимися импульсными сигналами. Такие диоды применяются в компьютерах, в мониторах и телевизорах, в радиолокационных передатчиках и приемниках. Эти диоды должны иметь малые емкости, а также выдерживать большие прямые импульсные токи и увеличенные обратные импульсные напряжения.

При малых переменных токах и напряжениях используется *линейная эквивалентная схема диода*, показанная на рис. 9. Здесь  $r_0$  — объемное сопротивление  $p$ - и  $n$ -областей полупроводника, равное единицам или десяткам ом,  $R_d$  — дифференциальное сопротивление диода,  $C_b$  и  $C_d$  — барьерная и диффузионная емкости. Параметры  $R_d$ ,  $C_b$  и  $C_d$  существенно зависят от величины и полярности постоянного напряжения, приложенного к диоду. На низких частотах емкости диода можно не учитывать. Линейная эквивалентная схема диода используется в программах машинного моделирования при расчете цепей методом комплексных амплитуд.

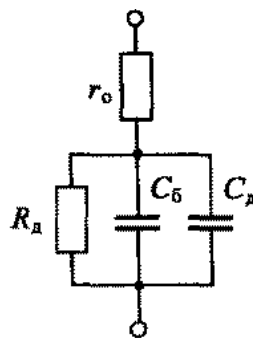


Рис.9

### • БИПОЛЯРНЫЕ ТРАНЗИСТОРЫ

*Биполярный транзистор* — это полупроводниковый прибор с двумя взаимодействующими  $p$ - $n$ -переходами и с тремя выводами (рис. 1). В зависимости от чередования легированных областей различают транзисторы  $n$ - $p$ - $n$ -типа (рис. 1, а) и  $p$ - $n$ - $p$ -типа (рис. 1, б).

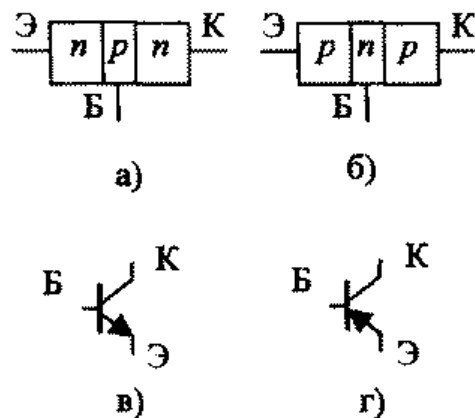


Рис.1

На рис. 2 приведена схема включения транзистора с подключенными источниками постоянного напряжения и коллекторным резистором. В этой схеме с корпусом соединен вывод базы транзистора. Поэтому эту схему называют *схемой включения транзистора с общей базой (ОБ)*.

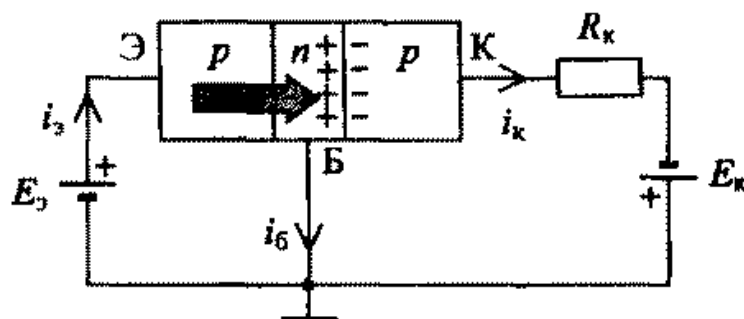


Рис.2

Соотношения между токами в транзисторе характеризуются двумя параметрами: коэффициентом передачи тока эмиттера  $\alpha = i_x / i_z$ , и коэффициентом передачи тока базы  $\beta = i_x / i_b$ . Используя (1), получим формулу взаимосвязи коэффициентов передачи:

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Кривые рис. 5 называются *выходными характеристиками* транзистора. Их используют для определения коллекторного тока транзистора. Увеличению коллекторного тока на рис. 5 соответствует увеличение управляющего напряжения на базе транзистора:  $u_{бз4} > u_{бз3} > u_{бз2} > u_{бз1}$ .

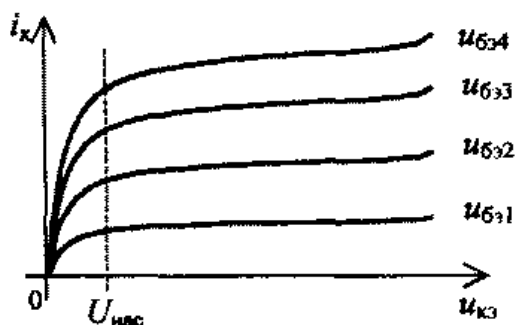


Рис.5

## • ПОЛЕВЫЕ ТРАНЗИСТОРЫ

*Полевой транзистор* — это трехэлектродный полупроводниковый прибор, работа которого основана на использовании электрического поля для изменения сопротивления полупроводникового канала. Полевые транзисторы называют *униполярными*, так как регулируемый ток в них создается основными носителями заряда, движущимися в канале с одним типом проводимости.

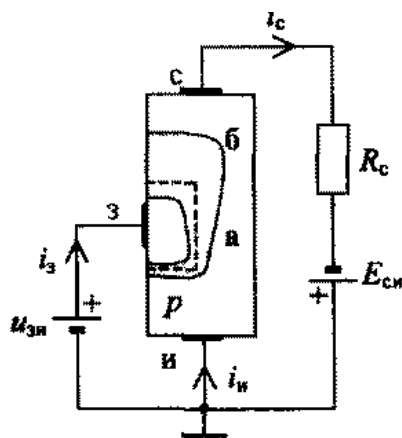


Рис.1

На рис. 3 приведены выходные вольт-амперные характеристики полевого транзистора с  $n$ -каналом. Правее линии  $H$  на этом рисунке расположена область насыщения. В области насыщения ток стока практически не зависит от напряжения на стоке транзистора. Такой

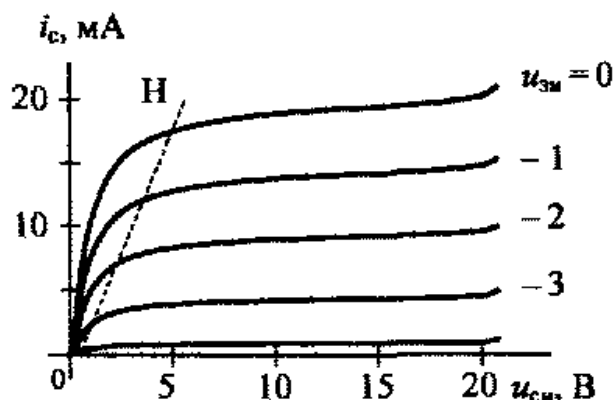


Рис.3

Полевые транзисторы с изолированным затвором (МДП-транзисторы) изготавливаются с каналами  $p$ - и  $n$ -типов. Структура полевого МДП-транзистора с  $n$ -каналом показана на рис. 5. Металлический затвор надежно изолирован от канала диэлектриком (Д), в качестве которого часто используются окислы кремния (в этом случае получим МОП-транзистор). Из полупроводника  $n$ -типа изготовлены области стока и истока. От области основного полупроводника  $p$ -типа изготавливается дополнительный вывод, называемый выводом подложки (п).

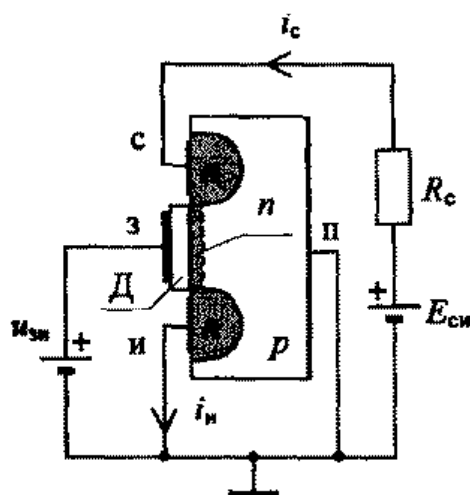


Рис.5

Кроме полевых транзисторов с индуцированным каналом широко используются МДП-транзисторы с *встроенным каналом*. Условные обозначения МДП-транзисторов с встроенными каналами *n*- и *p*-типов приведены на рис. 7, а, б соответственно. Встроенный канал изготавливается при производстве транзисторов в виде тонкого слоя полупроводника *n*- или *p*-типа, размещаемого под затвором. Тип проводимости областей стока, истока и канала должен быть одинаков. Конструкция МДП-транзистора с встроенным *n*-каналом аналогична конструкции рассмотренного выше полевого транзистора, показанного на рис. 5, при условии, что ограниченный пунктиром *n*-канал создан при изготовлении транзистора.

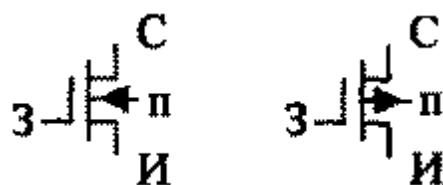


Рис.7