# Suites numériques

**T[le] STMG**

## Table des matières

# 1 Suites arithmétiques

## 1.1 Définition : Suite arithmétique

Une suite $u_n$ est une suite **arithmétique** s'il existe un nombre $r$ tel que pour tout entier $n$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

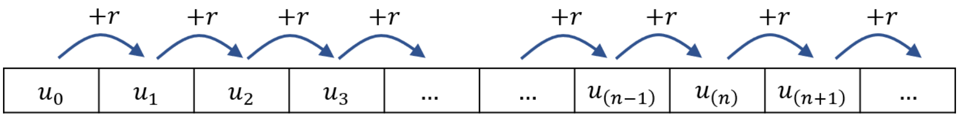



FIGURE 1 – Suite arithmétique de raison $r$

## 1.2 Rappel : Reconnaître une suite arithmétique

### Exemple

On considère la liste des trois nombres suivants : $-2$, 5 et 12. Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Pour y répondre, il faut s'assurer que la **différence** entre deux termes consécutifs reste la même.

$12 - 5 = 7$ et $5 - (-2) = 7$ Cette différence reste égale à 7.

$-2$, 5 et 12 sont bien les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 7.

Si on note $u_n$ cette suite, on a : $u_{n+1} = u_n + 7$.

## 1.3 Méthode : Exprimer une suite arithmétique en fonction de $n$

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive.

Il commence son entraînement au "jour 0" par un petit footing d'une longueur de 3000m. Au "jour 1", il court 3150m. Au "jour 2", il court 3300m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150m de plus que la veille.

On note $u_n$ la distance parcourue au "jour $n$" d'entraînement.

a) Calculer $u_3$ et $u_4$.
b) Quelle est la nature de la suite $u_n$ ? On donnera son premier terme et sa raison.
c) Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
d) Donner la variation de la suite $u_n$.
e) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

---

(a) Calcul de $u_3$ et $u_4$

$u_0 = 3000$

$u_1 = u_0 + 150 = 3000 + 150 = 3150$

$u_2 = u_1 + 150 = 3150 + 150 = 3300$

$u_3 = u_2 + 150 = 3300 + 150 = 3450$

$u_4 = u_3 + 150 = 3450 + 150 = 3600$

(b) $u_n$ est une suite **arithmétique** de premier terme $u_0 = 3000$ et de raison $r = 150$. On parle de **croissance linéaire**.

(c) $u_{n+1} = u_n + 150$

(d) $r = 150 > 0$ donc la suite $u_n$ est croissante.

(e) Expression de $u_n$ en fonction de $n$

Après 1 jour, il parcourt : $u_1 = 3000 + 150 \times 1$

Après 2 jours, il parcourt : $u_2 = 3000 + 150 \times 2$

Après 3 jours, il parcourt : $u_3 = 3000 + 150 \times 3$

De manière générale, après $n$ jours, il parcourt : $u_n = 3000 + 150 \times n$

### 1.4 Propriété : Expression du terme général d'une suite arithmétique

Si $u_n$ est une suite arithmétique de raison $r$, on a :

$$u_n = u_0 + n \times r$$
$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

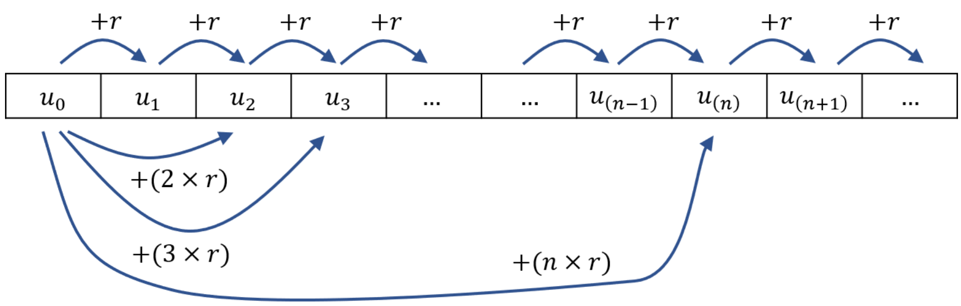



FIGURE 2 – Suite arithmétique de raison $r$

### 1.5 Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Dans l'exemple précédent, $u_n$ représente la distance parcourue par le sportif au jour $n$. Nous avons établit que $u_n = 3000 + 150 \times n$

a) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** lorsqu'il sera au "jour 15" de son entraîneent ?
b) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** entre le "jour 8" et le "jour 12" ?

---

(a) La distance parcourue au total au "jour 15" d'entraînement est :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{15}$$

Pour l'obtenir, on utilise la calculatrice.

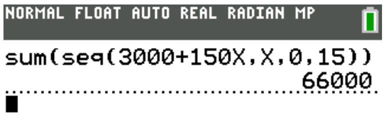
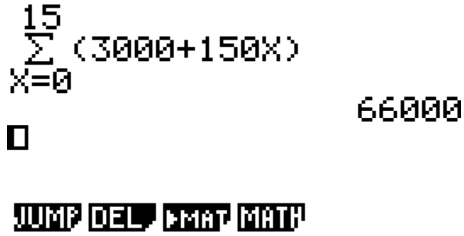
— [Texas Instruments]

1. Pour accéder au catalogue : `2nde` puis `0`.
2. Appuyer sur `ln` pour accéder aux fonctionnalités commençant par `S`.
3. Choisir `som(` ou `somme(` ou `sum(` (suivant les modèles).
4. Procéder de même pour afficher `suite(` ou `seq(` (suivant les modèles).

5. Et compléter pour afficher : `som(suite(3000+150X,X,0,15))`

— [Casio]

1. Pour accéder au catalogue : `SHIFT` puis `4`.
2. Appuyer sur ✕ pour accéder aux fonctionnalités commençant par `S`.
3. Choisir $\Sigma($
4. Et compléter pour afficher : $\displaystyle\sum_{X=0}^{15}(3000+150X)$

| | |
|---|---|
|  |  |
| Somme des termes de $u_n$ avec une TI-84 CE | Somme des termes de $u_n$ avec une Casio Graph 35+ |

La calculatrice affiche 66000. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru 66000m soit 66km au "jour 15" d'entraînement.

Pour noter une telle somme, on peut utiliser le symbole $\sum$:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k = 66000$$

(b) La distance parcourue au total entre le "jour 8" et le "jour 12" d'entraînement est :

$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = \sum_{k=8}^{12} u_k$$

On saisit sur la calculatrice :

— [Sur TI :] `som(suite(3000+150X,X,8,12))`

— [Sur Casio :] $\displaystyle\sum_{X=8}^{12}(3000+150X)$

La calculatrice affiche 22500. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru $22,5$km au total entre le "jour 8" et le "jour 12 "d'entraînement.

$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = \sum_{k=8}^{12} u_k = 22500$$

## 1.6 Propriété : Somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique

Soit $u_n$ une suite arithmétique de raison $r$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0$. La somme des $n$ premiers termes de $u_n$ est :

$$S = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

**Exemple**

Soit $u_n$ une suite arithmétique de raison 150 et de 1^er^ terme 3000. La somme des 16 premiers termes de $u_n$ est :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k$$

$$S = 16 \times \frac{u_0 + u_{15}}{2} = 16 \times \frac{(3000) + (3000 + 150 \times 15)}{2} = 16 \times \frac{8250}{2} = 66000$$

## 1.7 Défition : Moyenne arithmétique de deux nombres

En mathématiques, la **moyenne arithmétique** d'une liste de nombres est la **somme des valeurs** divisée par **le nombre de valeurs**.

## 1.8 Méthode : Calculer une moyenne arithmétique de deux nombres

a) Calculer la moyenne arithmétique des nombres $-3$ et $19$.
b) Peut-on affirmer que chaque terme d'une suite arithmétique est la **moyenne arithmétique** du terme qui le précède et du terme qui le suit ?

---

(a) La moyenne arithmétique d'une suite de valeurs est donc la moyenne que l'on connait depuis le collège.

$$m = \frac{-3+19}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

(b) Si on note $u_n$ le terme d'une suite arithmétique, on a :

$u_{n+1} = u_n + r$, où $r$ est la raison de la suite.

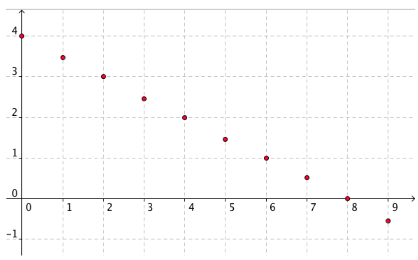
Et on a également : $u_n = u_{n-1} + r$ donc $u_{n-1} = u_n - r$

La moyenne arithmétique du terme qui précède $u_n$ et du terme qui le suit est égale à :

$$\begin{aligned} m &= \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \\ &= \frac{u_n - r + u_n + r}{2} \\ &= \frac{2 \times u_n}{2} \\ &= u_n \end{aligned}$$

Donc $u_n$ est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

## 1.9 Résumé

| Résumé | $u_n$ une **suite arithmétique** de raison $r$ et de 1[er] terme $u_0$ | Exemple : $r = -0.5$ et $u_0 = 4$ |
|---|---|---|
| Définition | $u_{n+1} = u_n + r$ | $u_{n+1} = u_n - 0.5$ |
| Propriété | $u_n = u_0 + n \times r$<br>$u_n = u_1 + (n-1)\, r$ | $u_n = 4 + n \times 0.5$<br>$u_n = 3.5 + (n-1) \times 0.5$ |
| Variation | $r > 0 \Rightarrow u_n$ croissante<br>$r < 0 \Rightarrow u_n$ décroissante | $r = 0.5 < 0 \Rightarrow u_n$ décroissante |
| Représentation graphique | Les points de la représentation graphique sont alignés.<br>On parle de croissance linéaire. |  |

## 2 Suites géométriques

### 2.1 Définition : Suite géométrique

Une suite $u_n$ est une suite **géométrique** s'il existe un nombre $q$ tel que pour tout entier $n$, on a :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

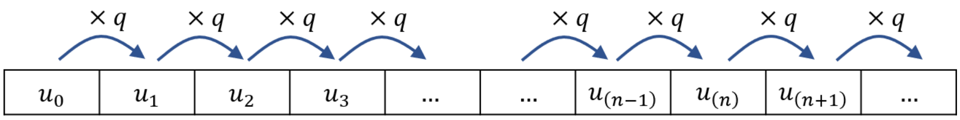



FIGURE 3 – Suite géométrique de raison $q$

### 2.2 Rappel : Reconnaître une suite géométrique

#### Exemple

On considère la liste des trois nombres suivants : 4, 12 et 36. Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Pour y répondre, il faut s'assurer que le **rapport** entre deux termes consécutifs reste la même.

$\frac{36}{12} = 3 \quad$ et $\quad \frac{12}{4} = 3 \quad$ Ce rapport reste égale à 3.

4, 12 et 36 sont bien les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3.

Si on note $u_n$ cette suite, on a : $u_{n+1} = u_n \times 3$.

### 2.3 Méthode : Exprimer une suite arithmétique en fonction de $n$

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4% par an.

On note $u_n$ la valeur du capital après $n$ années.

a) Calculer $u_2$ et $u_3$.
b) Quelle est la nature de la suite $u_n$ ? On donnera son premier terme et sa raison.
c) Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
d) Donner la variation de la suite $u_n$.
e) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

---

(a) Calcul de $u_2$ et $u_3$

Une augmentation de 4% correspond à un coefficient multiplicateur de 1.04

$u_0 = 500$

$u_1 = u_0 \times 1.04 = 500 \times 1.04 = 520$

$u_2 = u_1 \times 1.04 = 520 \times 1.04 = 540.8$

$u_3 = u_2 \times 1.04 = 540.8 \times 1.04 \approx 562.4$

(b) $u_n$ est une suite **géométrique** de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1.04$. On parle de **croissance exponentielle**.

(c) $u_{n+1} = u_n \times 1.04$

(d) $q = 1.04 > 1$ donc la suite $u_n$ est croissante.

(e) Expression de $u_n$ en fonction de $n$

Après 1 an, le capital est : $u_1 = 500 \times 1.04$

Après 2 ans, le capital est : $u_2 = 500 \times 1.04 \times 1.04 = 500 \times 1.04^2$

Après 3 ans, le capital est : $u_3 = 500 \times 1.04^2 \times 1.04 = 500 \times 1.04^3$

De manière générale, après $n$ années, le capital est : $u_n = 500 \times 1.04^n$

### 2.4 Propriété : Expression du terme général d'une suite géométrique

Si $u_n$ est une suite géométrique de raison $q$, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$
$$u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$$

### 2.5 Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

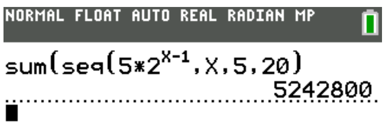
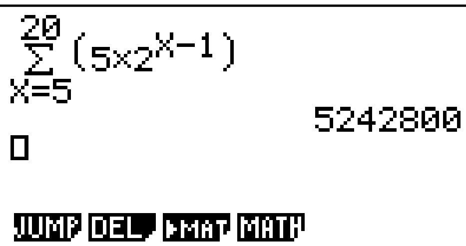
Soit $u_n$ une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $u_1 = 5$.

a) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
b) A l'aide de la calculatrice, calculer la somme des termes de $u_5$ à $u_{20}$.

---

(a) $u_n$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $u_1 = 5$ donc $u_n = 5 \times 2^{(n-1)}$.

(b) Calcul de $\sum_{k=5}^{20} u_k$

| | |
|---|---|
|  |  |
| $\sum_{k=5}^{20} u_k$ avec une TI-84 CE | $\sum_{k=5}^{20} u_k$ avec une Casio Graph 35+ |

$$\sum_{k=5}^{20} u_k = \sum_{k=5}^{20} 5 \times 2^{(k-1)} = u_5 + u_6 + \ldots + u_{20} = 5\ 242\ 800$$

### 2.6 Propriété : Somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique

Soit $u_n$ une suite géométrique de raison $q$ et de $1^{\text{er}}$ terme $u_0$. La somme des $n$ premiers termes de $u_n$ est :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S = \text{1er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nombre de terme})}}{1 - \text{raison}}$$

#### Exemple

Soit $u_n$ une suite géométrique de raison $q = 2$ et de $1^{\text{er}}$ terme $u_1 = 5$.

— La somme des 20 premiers termes de $u_n$ est :

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} \\ &= \sum_{k=1}^{20} u_k \\ &= u_1 \times \frac{1-q^{20}}{1-q} \\ &= 5 \times \frac{1-2^{20}}{1-2} \\ &= 5\ 242\ 875 \end{aligned}$$

— La somme des termes de $u_5$ à $u_{20}$ est :

$$\begin{aligned} S_2 = u_5 + \ldots + u_{20} &= \sum_{k=5}^{20} u_k \\ &= (u_1 + \ldots + u_{20}) - (u_1 + \ldots + u_4) \\ &= \sum_{k=1}^{20} u_k - \sum_{k=1}^{4} u_k \\ &= S_1 - 5 \times \frac{1-2^4}{1-2} \\ &= 5\ 242\ 875 - 75 = 5\ 242\ 800 \end{aligned}$$

## 2.7 Défition : Moyenne géométrique de deux nombres

En mathématiques, la **moyenne géométrique** de deux nombres $a$ et $b$ est :

$$m = \sqrt{a \times b}$$

## 2.8 Méthode : Calculer une moyenne géométrique de deux nombres

a) Calculer la moyenne géométrique des nombres 4 et 36.
b) Peut-on affirmer que chaque terme d'une suite géométrique est la **moyenne géométrique** du terme qui le précède et du terme qui le suit ?

---

(a) La moyenne géométrique de 4 et de 36 est :

$$m = \sqrt{4 \times 36} = \sqrt{144} = 12$$

(b) Si on note $u_n$ le terme d'une suite géométrique de raison $q > 0$ et $u_n > 0$, on a :

$u_{n+1} = u_n \times q$

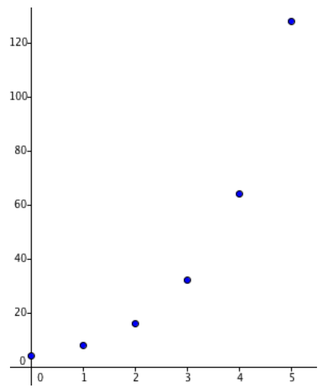
On a également : $u_n = u_{n-1} \times q$ donc $u_{n-1} = \dfrac{u_n}{q}$

La moyenne géométrique du terme qui précède $u_n$ et du terme qui le suit est égale à :

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{u_n}{q}\right) \times (u_n \times q)} \\ &= \sqrt{u_n^2} \\ &= u_n \end{aligned}$$

Donc $u_n$ est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

## 2.9 Résumé

| Résumé | $u_n$ une **suite géométrique** de raison $q$ et de 1er terme $u_0$ | Exemple : $q = 2$ et $u_0 = 4$ |
|---|---|---|
| Définition | $u_{n+1} = u_n \times q$ | $u_{n+1} = u_n \times 2$ |
| Propriété | $u_n = u_0 \times q^n$<br>$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ | $u_n = 4 \times 2^n$<br>$u_n = 8 \times 2^{n-1}$ |
| Variation | $q > 1 \Rightarrow u_n$ croissante<br>$0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ décroissante | $q = 2 > 1 \Rightarrow u_n$ croissante |
| Représentation graphique | Les points de la représentation graphique ne sont pas alignés. On parle de croissance exponentielle. |   |

# 3 Comparaison de suites

## 3.1 Exemple : comparaison de placements proposés par une banque

Une banque propose deux options de placement :

- Placement A : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6% du **capital de départ**.
- Placement B : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4% du **capital de l'année précédente**.

On suppose que le placement initial est de 200€.

L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre.

On note :

- $u_n$ la valeur du capital après $n$ années pour le placement A
- $v_n$ la valeur du capital après $n$ années pour le placement B.

a) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
b) Calculer $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
c) Quelle est la nature des suites $u_n$ et $v_n$ ? On donnera le premier terme et la raison.
d) Exprimer $u_n$ et $u_n$ en fonction de $n$.
e) Déterminer le plus petit entier $n$, tel que $v_n > u_n$. Interpréter ce résultat.

---

(a) Avec le placement A, on gagne chaque année 6% de 200€= 12€.

$u_0 = 200$

$u_1 = u_0 + 12 = 200 + 12 = 212$

$u_2 = u_1 + 12 = 212 + 12 = 224$

$u_3 = u_2 + 12 = 224 + 12 = 236$

(b) Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1.04.

$v_0 = 200$

$v_1 = v_0 \times 1.04 = 200 \times 1.04 = 208$

$v_2 = v_1 \times 1.04 = 208 \times 1.04 = 216.32$

$v_3 = v_2\ times 1.04 = 216.32 \times 1.04 \approx 225$

(c) Nature de $u_n$ et $v_n$

$u_n$ est une suite **arithmétique** de premier terme 200 et de raison 12.

$v_n$ est une suite **géométrique** de premier terme 200 et de raison 1.04.

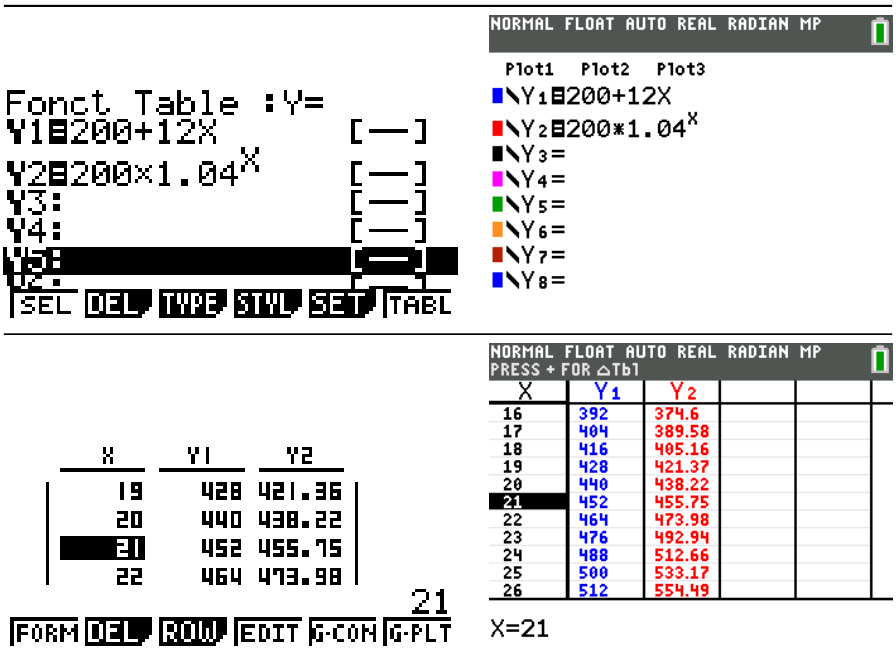
(d) Terme général de $u_n$ et $v_n$

$u_n = u_0 + r \times n = 200 + 12 \times n$

$v_n = v_0 \times q^n = 200 \times 1.04^n$

(e) Tableau de valeurs de $u_n$ et $v_n$

Saisir l'expression du terme général, comme pour une fonction et paramétrer avec un pas de 1.




Casio Graph 32+ TI-84 CE

Le plus petit entier $n$, tel que $v_n > u_n$ est 21.

Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.

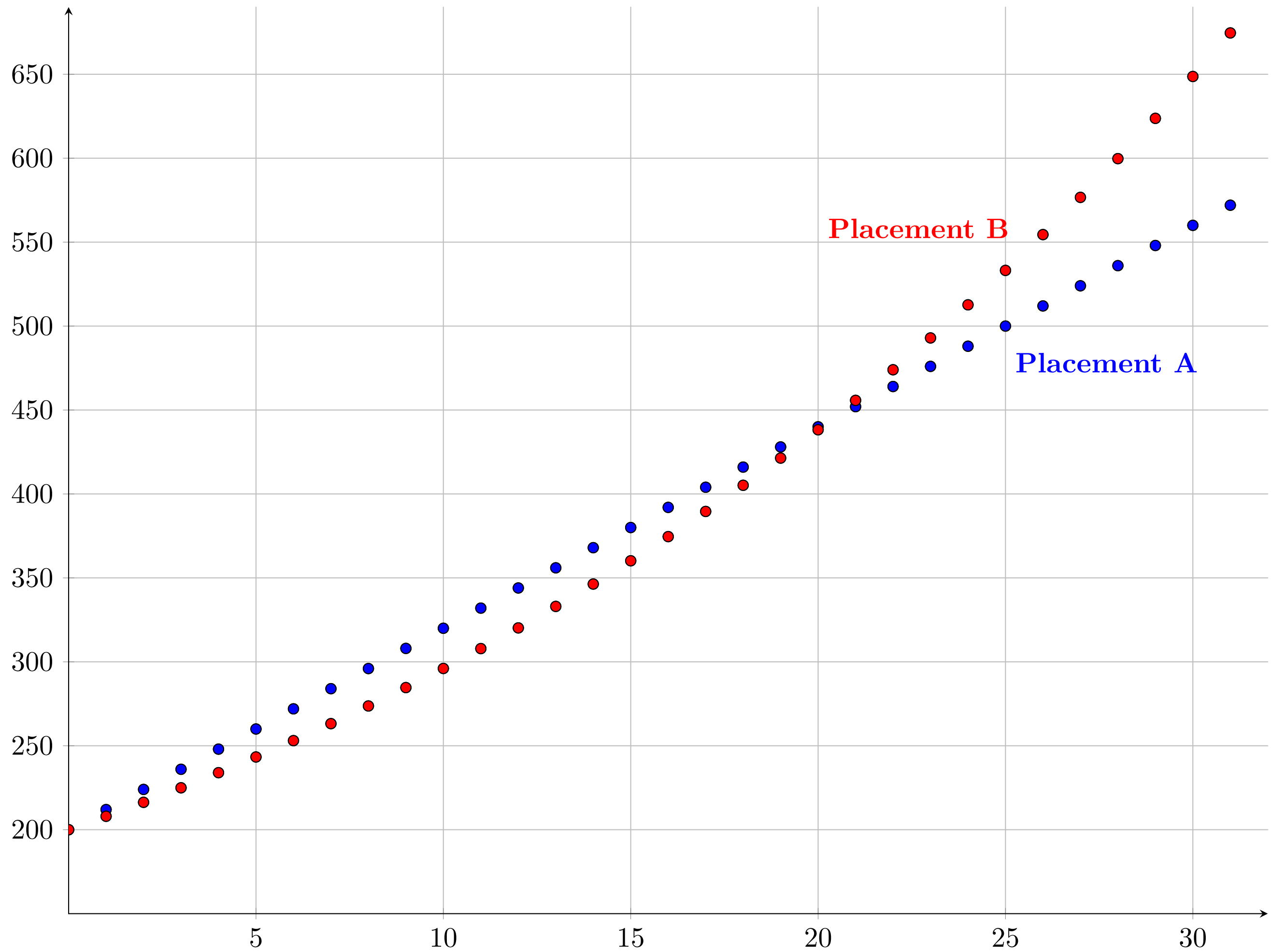



FIGURE 4 – Représentation de l'évolution du capital pour le placement A et B