Fonctions exponentielles

T^le STMG

Table des matières

1 Définition

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$. Elle est définie pour tout entier naturel n.

En prolongeant son ensemble de définition pour tout les nombres réels positifs, on définit la fonction exponentielle de base a.

Exemple :

Pour une suite géométrique de raison $a = 2$ et de premier terme 1, on a :

— $u_0 = 2^0 = 1$
— $u_1 = 2^1 = 2$
— $u_2 = 2^2 = 4$
— $u_3 = 2^3 = 8$
— $u_4 = 2^4 = 16$
— etc ...

Pour la fonction correspondante, on a : $f(4) = 2^4$ mais on a également : $f(1,3) = 2^{1,3}$.

Et de façon générale, $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif. La fonction f est appelée **fonction exponentielle de base 2**.

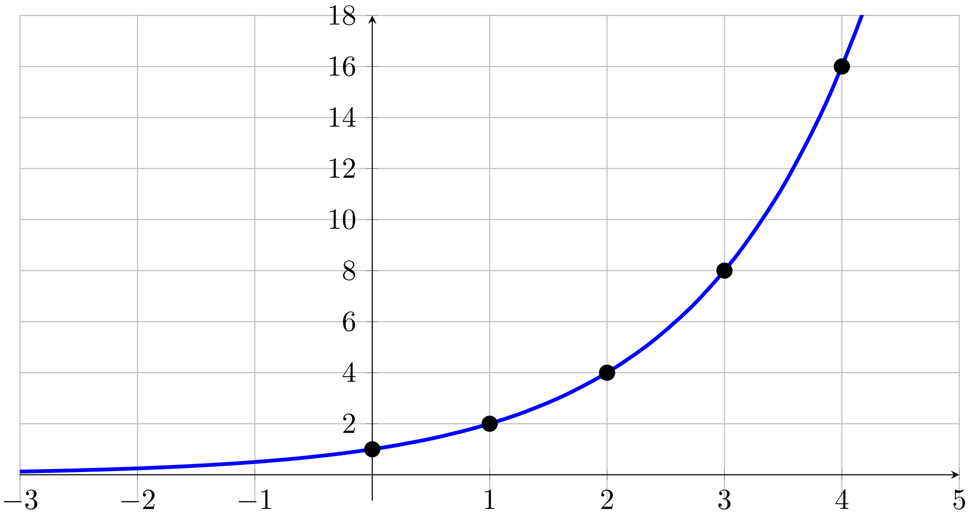

FIGURE 1 – Représentation de la fonction 2^x

Propriété :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de x négatives.

1.1 Définition : Fonction exponentielle de base a

La fonction $f(x) = a^x$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $a > 0$, s'appelle **fonction exponentielle de base a**.

Exemple :

La fonction exponentielle de base $1,2$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,2^x$.

Remarque :

La fonction exponentielle de base a est strictement **positive** sur $\mathbb{R}$ et il est possible de calculer ses valeurs à l'aide de la calculatrice.

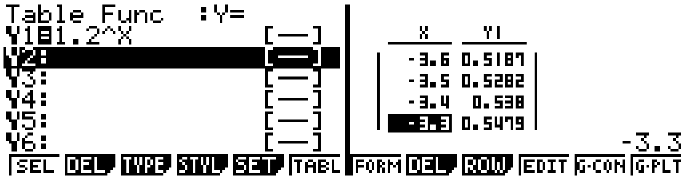

FIGURE 2 – Tableau de valeurs de $f(x) = 1.2^x$ sur CASIO

1.2 Repésentation graphique

Voici la représentation graphique de la fonction $f(x) = a^x$ pour plusieurs valeurs de a :

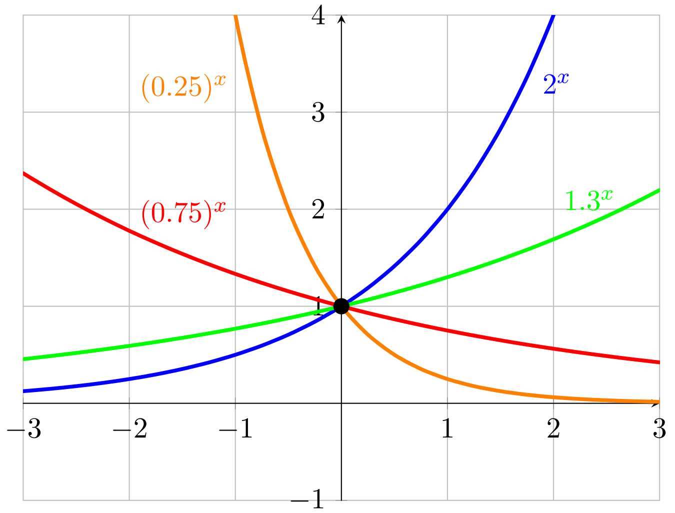

FIGURE 3 – Représentation de a^x pour différentes valeurs de a

2 Propriétés

2.1 Propriétés : Valeurs particulières et relations fonctionnelles

1. $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
2. $a^x \times a^y = a^{x+y}$

Ex : $2^5 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^{5+3} = 2^8$

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Ex : $\dfrac{2^5}{2^3} = \dfrac{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)}{(2 \times 2 \times 2)} = 2^{5-3} = 2^2$

4. $(a^x)^n = a^{nx}$, avec n un entier relatif.

Ex : $(5^3)^2 = (5 \times 5 \times 5)^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^{3\times 2} = 5^6$

2.2 Méthode : Simplifier une expression

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 4^{-3} \times 4^{-5}$

$$\begin{aligned} A &= 4^{-3} \times 4^{-5} \\ &= 4^{-3+(-5)} \\ &= 4^{-8} \end{aligned}$$

2. $B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5} = \frac{3^{3-2,5}}{(3^2)^5} = \frac{3^{0,5}}{3^{10}} \\ &= 3^{0,5-10} \\ &= 3^{-9,5} = \frac{1}{3^{9,5}} \end{aligned}$$

3. $C = \left(4,8^{-2,1}\right)^3 \times 4,8^{6,2}$

$$\begin{aligned} C &= \left(4,8^{-2,1}\right)^3 \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-2,1\times 3} \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-0,1} = \frac{1}{4,8^{0,1}} \end{aligned}$$

2.3 Variations de la fonction exponentielle

- Si $0 < a < 1$ alors $f(x) = a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a > 1$ alors $f(x) = a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

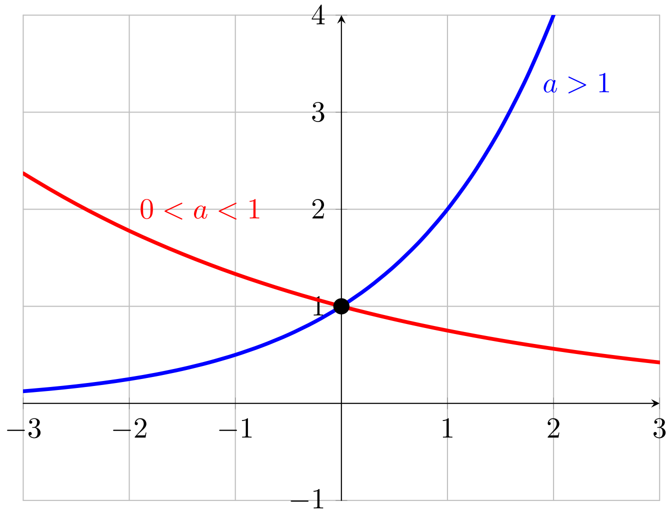

FIGURE 4 – Variations de a^x en fonction de la valeur de a

2.3.1 Remarques :

- On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas, $a^x = 1^x = 1$
- Quel que soit a, la fonction exponentielle passe par le point $(0;1)$. En effet, $a^0 = 1$.

2.4 Méthode : Utiliser une fonction exponentielle pour résoudre un problème

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0;10$ par :

$f(x) = 50000 \times 1,15^x$

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) Déterminer les variations de f sur $[0;10]$.
c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

(a) $f(3) = 50000 \times 1,15^3 \approx 76000$ et $f(5,5) = 50000 \times 1,15^{5,5} \approx 108000$

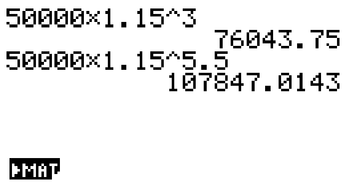

Figure 5 – Calculs avec la CASIO

(b) $a = 1,15 > 1$ donc la fonction $1,15^x$ est strictement croissante sur $[0;10]$. Il en est de même pour la fonction f car 50000 est positif.

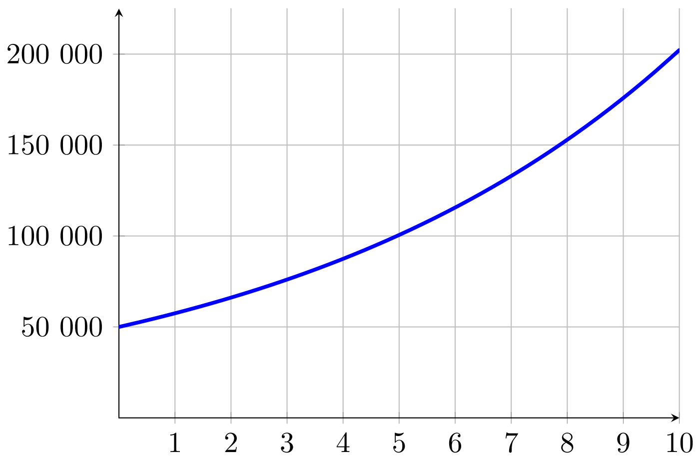

Figure 6 – Représentation de la fonction 50000×1.15^x

(c) A l'aide de la calculatrice on a : $f(4.96) \approx 100007$. Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

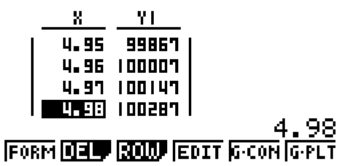

Figure 7 – Tableau de valeurs de $f(x)$

2.5 Méthode : Calculer un taux d'évolution moyen

Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %.

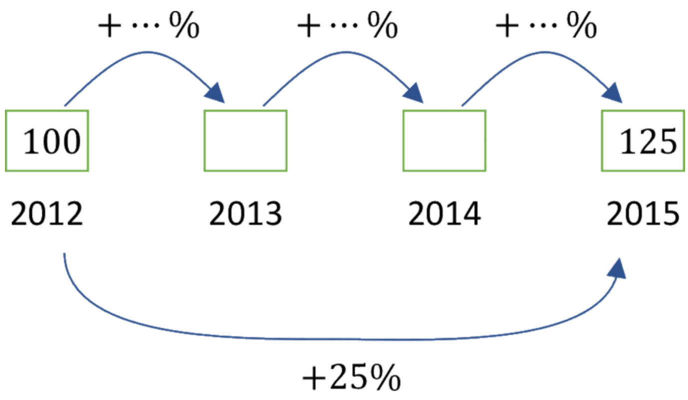

Figure 8 – Tableau de valeurs de $f(x)$

a) Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

(a) On note t le taux d'évolution moyen annuel.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur un an** est égal à :

$$1 + \frac{t}{100}$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur trois ans** (de 2012 à 2015) est égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^3$$

Or, sur trois années, le prix a augmenté de 25 % donc ce coefficient multiplicateur est également égal à : $1,25$.

Il reste à résoudre :

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 &= 1,25 \\
1 + \frac{t}{100} &= 1,25^{\frac{1}{3}} \\
\frac{t}{100} &= 1,25^{\frac{1}{3}} - 1 \\
t &= 100 \times \left(1,25^{\frac{1}{3}} - 1\right) \\
t &\approx 7,72
\end{aligned}$$

Trois augmentations de 7,72% $\Rightarrow$ Une augmentation de 25%. Le taux d'évolution moyen annuel est environ de 7,72%.

Remarque :

$a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la **racine n-ième** de a. On peut également noté $\sqrt[n]{a}$.

On a, par exemple : $x^5 = 56 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{56} \approx 2.2368...$