Fonction dérivée

1ère STMG

Table des matières

1 Fonction dérivée

1.1 Définition : Fonction dérivée

La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note $f^{'}$.

1.2 Formules de dérivation de fonctions usuelles :

Fonction f	Dérivée $f^{'}$
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f^{'}(x) = 0$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f^{'}(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f^{'}(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f^{'}(x) = 3x^2$

1.3 Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$	
$(k \times f)^{'} = k \times f^{'}$	avec $k \in \mathbb{R}$

1.4 Méthode : Calculer des fonctions dérivées

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :

a) $f(x) = 3x$
b) $f(x) = x^2 + 5$
c) $f(x) = 5x^3$
d) $f(x) = 3x^2 + 4x$

(a) $f(x) = 3x$

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 3 \times (x)^{'} \\ &= 3 \times 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$f(x) = 3x \Rightarrow f^{'}(x) = 3$$

(b) $f(x) = x^2 + 5$

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \left(x^2\right)^{'} + (5)^{'} \\ &= 2x + 0 \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 + 5 \Rightarrow f^{'}(x) = 2x$$

(c) $f(x) = 5x^3$

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 5 \times \left(x^3\right)^{'} \\ &= 5 \times 3x^2 \\ &= 15x^2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 5x^3 \Rightarrow f^{'}(x) = 15x^2$$

(d) $f(x) = 3x^2 + 4x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times \left(x^2\right)' + 4 \times (x)' \\ &= 3 \times 2x + 4 \times 1 \\ &= 6x + 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = 3x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = 6x + 4$$

2 Fonction dérivée d'une fonction polynôme

2.1 Définition : Dérivée d'une fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$.

Remarque :

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.

Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

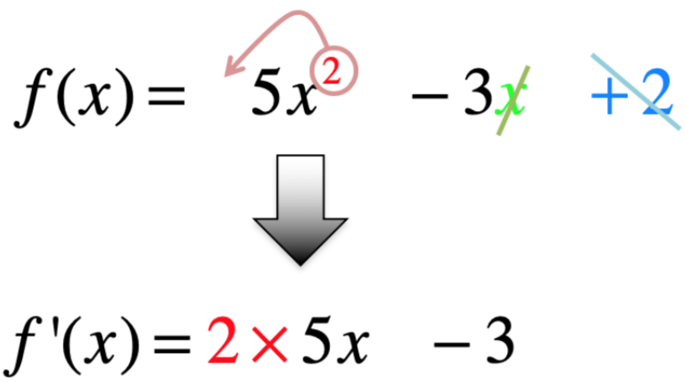

Figure 1 – “Technique” pour dériver une fonction polynôme de degré 2

2.2 Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 2

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$
b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$
c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$
d) $k(x) = x^2 + x + 1$
e) $l(x) = 5x^2 + 5$
f) $m(x) = -x^2 + 7x$

(a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x^2\right)' - (6x)' + (1)' \\ &= 4 \times 2x - 6 \times 1 + 0 \\ &= 8x - 6 \end{aligned}$$

(b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x^2\right)' - (2x)' + (6)' \\ &= 2 \times x - 2 \times 1 + 0 \\ &= 2x - 2 \\ &= 2(x - 1) \end{aligned}$$

Avec la même méthode on trouve :

Fonction	Dérivée
$h(x) = -3x^2 + 2x + 8$	$h'(x) = -3 \times (2x) + 2 = -6x + 2$
$k(x) = x^2 + 1x + 1$	$k'(x) = 2x + 1$
$l(x) = 5x^2 + 5$	$l'(x) = 5 \times 2x = 10x$
$m(x) = -x^2 + 7x$	$m'(x) = -2x + 7$

2.3 Définition : Dérivée d'une fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

.

Remarque

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

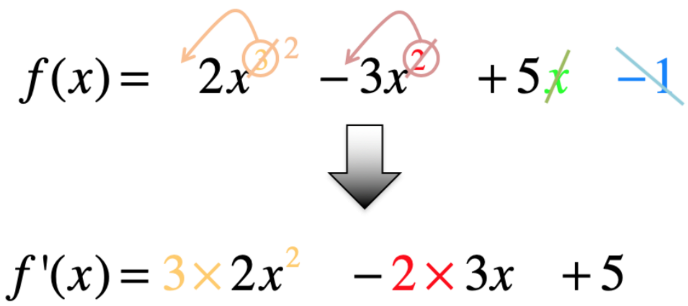

Figure 2 – "Technique" pour dériver une fonction polynôme de degré 3

2.4 Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$
c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$
d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$
e) $l(x) = 4x^3 + 1$
f) $m(x) = -x^3 + 7x$

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + (2x)' - (5)' \\ &= 3 \times x^2 - 3 \times 2x + 2 - 0 \\ &= 3x^2 - 6x + 2 \end{aligned}$$

b) $\mathrm{g}(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(5x^3\right)' + \left(2x^2\right)' + (2x)' - (7)' \\ &= 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 2 - 0 \\ &= 15x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(-2x^3\right)' - \left(3x^2\right)' - (7x)' + (8)' \\ &= -2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 7 + 0 \\ &= -6x^2 - 6x - 7 \end{aligned}$$

Avec la même méthode on trouve :

Fonction	Dérivée
$k(x) = -x^3 + x^2 + 1$	$k'(x) = -3x^2 + 2 \times x = -3x^2 + 2x$
$l(x) = 4x^3 + 1$	$l'(x) = 3 \times 4x^2 = 12x^2$
$m(x) = -x^3 + 7x$	$m'(x) = -3x^2 + 7$

3 Variations d'une fonction polynôme

3.1 Théorème : Signe de la dérivée et variation d'une fonction

— Si $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante**.
— Si $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante**.

3.2 Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

a) Calculer la fonction dérivée de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

(a) On a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.

(b) On commence par résoudre l'équation $f^{'}(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &> 0 \\ 4x - 8 &> 0 \\ 4x &> 8 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

La fonction $f^{'}$ est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis ensuite positive (après $x = 2$).

(c) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f^{'}(x) = 4x - 8$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 2x^2 - 8x + 1$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2) = -7$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f(2) = 2\times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.

La fonction f admet un minimum égal à -7 en $x = 2$.

Vérification :

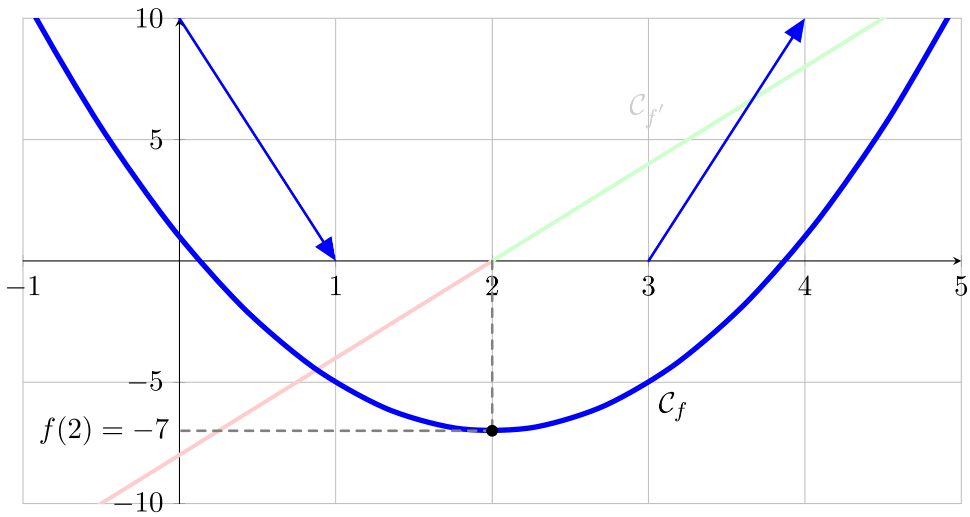

Figure 3 – Représentation graphique $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ et de sa dérivée

3.3 Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme de degré 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

a) Calculer la fonction dérivée de f.
b) Démontrer que $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$.
c) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
d) Dresser le tableau de variations de f.
e) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

(a) On a : $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3\right)' + \left(\frac{9}{2}x^2\right)' - (12x)' + (5)' \\ &= 3 \times x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 + 0 \\ &= 3x^2 + 9x - 12 \end{aligned}$$

On a donc : $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12 \qquad \longleftarrow$ Fonction polynôme de degré 2

(b) Développons $3(x+4)(x-1)$:

$$\begin{aligned} 3(x+4)(x-1) &= (3x+12)(x-1) \\ &= (3x \times x) - (3 \times x) + (12 \times x) - (12 \times 1) \\ &= 3x^2 + 9x - 12 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$.

(c) Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

$$3(x+4)(x-1) = 0$$

$$\begin{aligned} x + 4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

La dérivée s'annule en -4 et 1.

Le coefficient de x^2, égal à 3, est **positif**, donc la parabole est tournée dans le sens **cuvette**. La dérivée est donc **positive** à l'extérieur de ses racines -4 et 1.

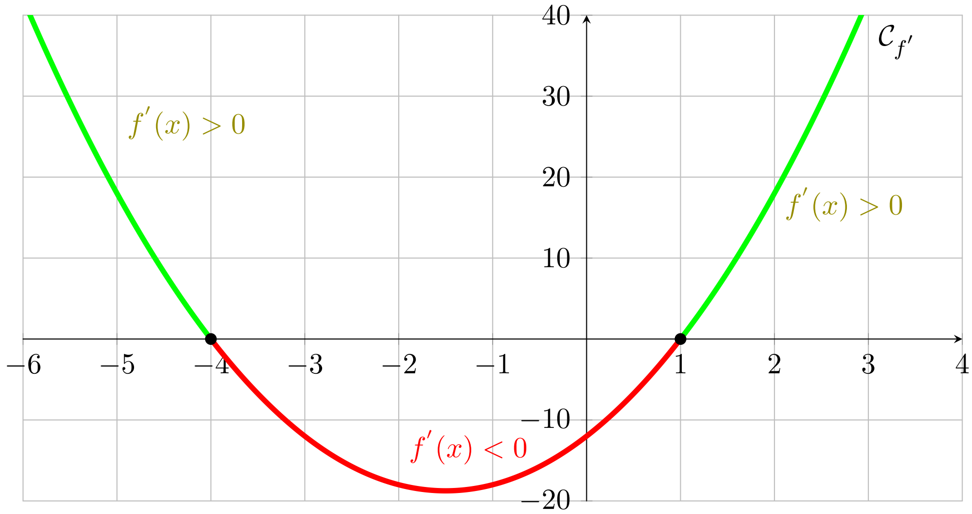

FIGURE 4 – Représentation graphique de la dérivée de $f(x)$

(d) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x) = 3(x+4)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$	$+\infty$	$\nearrow$	$f(-4) = 61$	$\searrow$	$f(1) = -\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

— $f(-4) = (-4)^3 + \dfrac{9}{2} \times (-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$

— $f(1) = 1^3 + \dfrac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\dfrac{3}{2}$

Vérification :

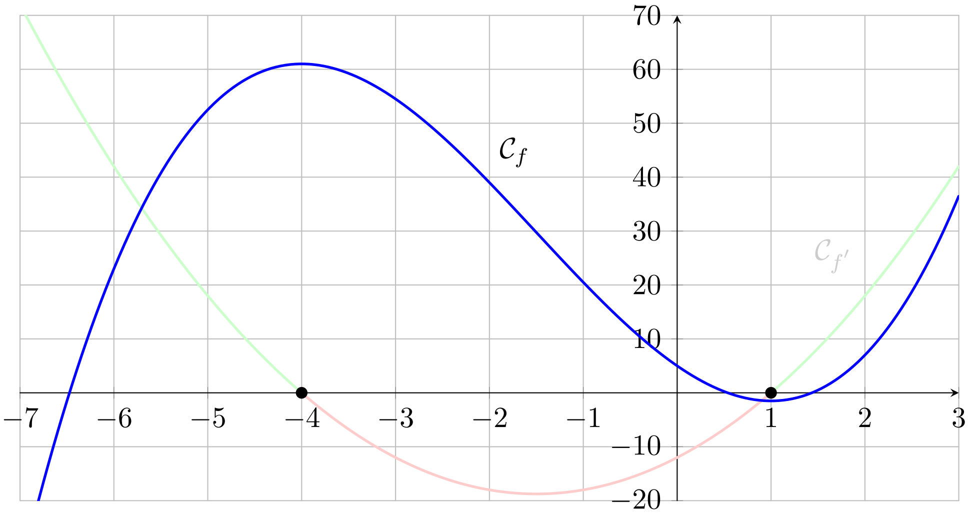

FIGURE 5 – Représentation graphique $f(x)$ et $f^{'}(x)$

(e) Représentation à l'aide de la calculatrice

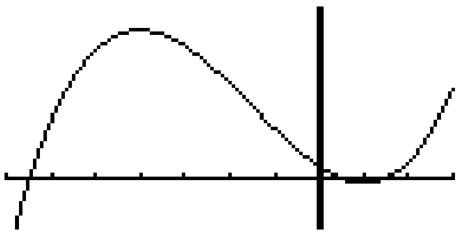

FIGURE 6 – Représentation de $f(x)$ avec la Casio Graph 85

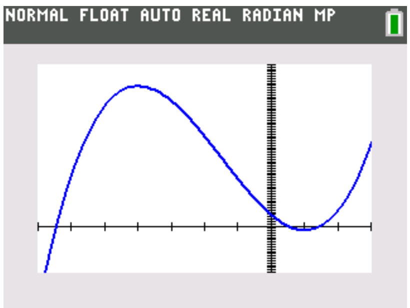

FIGURE 7 – Représentation de $f(x)$ avec la TI-83