Fonctions polynômes du 2^{nd} degré

$1^{\text{ère}}$ STMG

Table des matières

---

1 Définition et représentation graphique

1.1 Définition : Fonctions polynômes du 2nd degré

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto ax^2$ ou $x \longmapsto ax^2 + b$ sont des **fonctions polynômes du 2nd degré**.

Les coefficients a et b sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Exemples et contre-exemples :

— $f(x) = 3x^2 + 3$
— $g(x) = x^2 - 4$ sont des fonctions polynômes du 2nd degré.
— $h(x) = 4 - 2x^2$
— $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
— $n(x) = 5x^4 - x^3 + 6x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

1.2 Représentation graphique

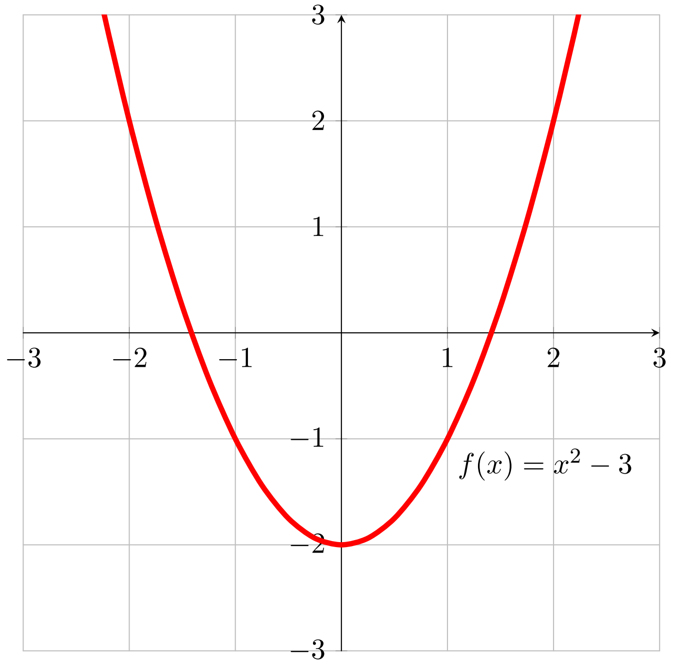


FIGURE 1 – Représentation graphique de $f(x) = x^2 - 2$

La représentation graphique d'une fonction polynôme du 2nd degré s'appelle une **parabole**.

1.3 Propriétés : Variations d'une fonction polynôme du 2nd degré

Soit f une fonction polynôme du 2nd degré, telle que $f(x) = ax^2 + b$.

— Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : **cuvette**.
— Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : **colline**.

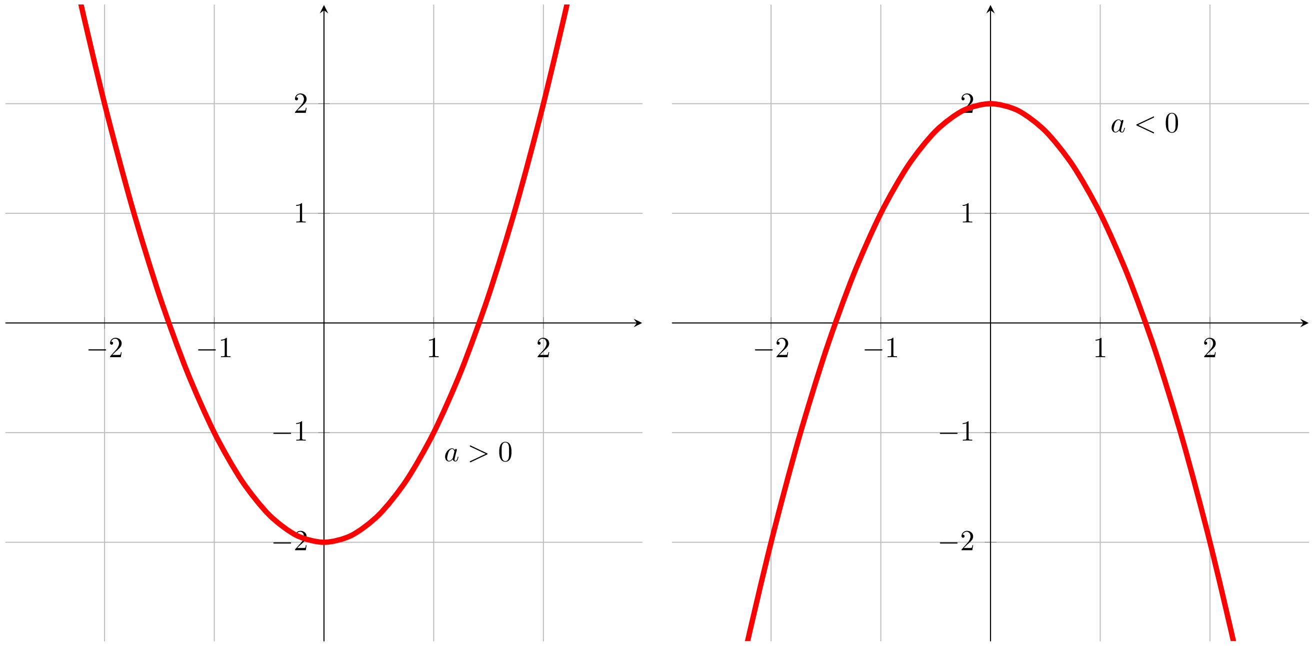


FIGURE 2 – Représentation d'une fonction du 2nd degré suivant le signe de a

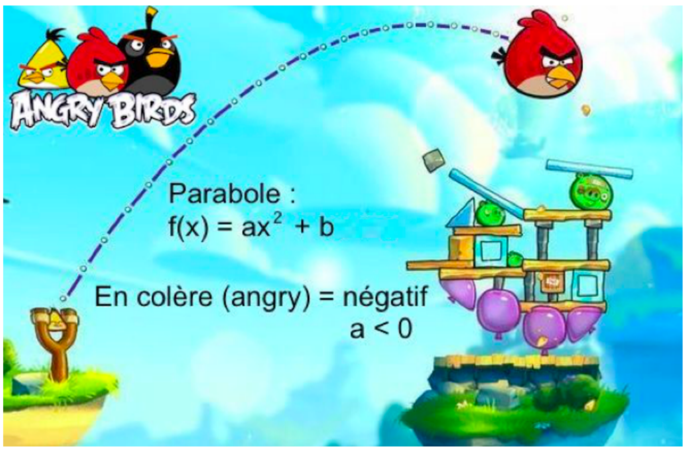


FIGURE 3 – Méthode mnémotechnique pour l'allur de la parabole

1.4 Propriété : Axe de symétrie et sommet

Les paraboles d'équation $y = ax^2 + b$ ont pour axe de symétrie l'**axe des ordonnées** et pour **sommet** le point de coordonnées $(0; b)$.

Exemple

La fonction f telle que $f(x) = -x^2 + 2$ a pour représentation graphique une parabole dont les branches sont tournées vers le bas et dont le sommet est le point $S(0; 2)$. L'axe de symétrie de la parabole est l'axe des ordonnées.

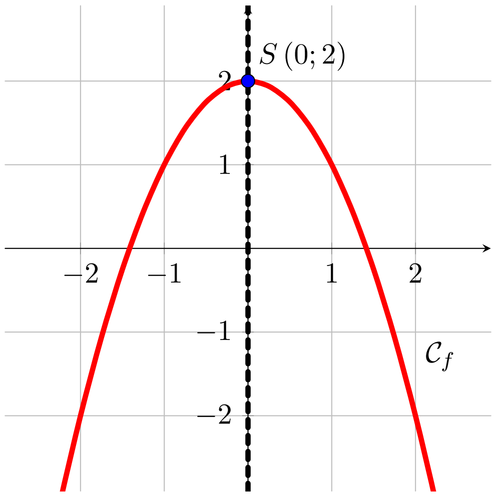
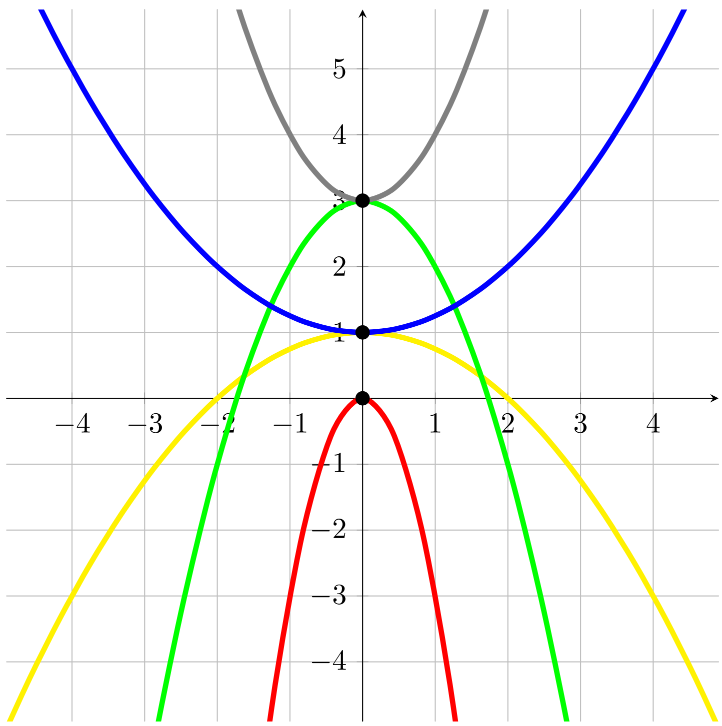


Figure 4 – Représentation graphique de $f(x) = -x^2 + 2$

1.5 Méthode : Associer une fonction du 2nd degré à sa représentation graphique

a) Associer chaque fonction à sa représentation graphique :



$f(x) = -x^2 + 3$

$g(x) = -3x^2$

$h(x) = x^2 + 3$

$p(x) = \dfrac{x^2}{4} + 1$

$q(x) = -\dfrac{x^2}{4} + 1$

(a)

1. La **parabole** rouge est la seule dont le sommet est l'origine $(0\,;0)$. Donc $b = 0$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + b$.

Ainsi, la **parabole** rouge est la fonction g définie par $g\,(x) = -3x^2$.

2. La **parabole** verte et la **parabole** noire ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées $(0\,;3)$. Donc $b = 3$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + b$.

Ainsi, il faut choisir parmi les expressions :

— $f\,(x) = -x^2 + 3$
— $h\,(x) = x^2 + 3$

Les branches de la **parabole** noire sont tournées vers le haut donc $a > 0$.

Donc, la **parabole** noire représente la fonction h pour qui $a = 1 > 0$. $\longrightarrow h(x) = x^2 + 3$

Les branches de la **parabole** verte sont tournées vers le bas donc $a < 0$.

Donc, la **parabole** verte représente la fonction f pour qui $a = -1 < 0$. $\longrightarrow f(x) = -x^2 + 3$

3. La **parabole** bleue et la **parabole** jaune ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées $(0\,;1)$. Donc $b = 1$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + b$.

Ainsi, il faut choisir parmi les expressions :

— $p\,(x) = \dfrac{x^2}{4} + 1$
— $q\,(x) = -\dfrac{x^2}{4} + 1$

Les branches de la **parabole** bleue sont tournées vers le haut donc $a > 0$.

Donc, la **parabole** bleue représente la fonction p pour qui $a = \dfrac{1}{4} > 0$. $\longrightarrow p(x) = \dfrac{x^2}{4} + 1$

Les branches de la **parabole** jaune sont tournées vers le bas donc $a < 0$.

Donc, la **parabole** jaune représente la fonction q pour qui $a = -\dfrac{1}{4} < 0$. $\longrightarrow q(x) = -\dfrac{x^2}{4} + 1$

2 Forme factorisée d'une fonction polynôme du 2^{nd} degré

2.1 Définition : Forme factorisée d'une fonction du 2^{nd} degré

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

sont des fonctions polynômes du 2^{nd} degré.

Les coefficients a, x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$.

2.2 Propriété : Racines d'une fonction du 2^{nd} degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f.

2.3 Propriété : Axe de symétrie et sommet

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

La droite d'équation $x = p$ avec $p = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ est l'**axe de symétrie** de la parabole représentant la fonction f.

Le point S de coordonnées $(p; f(p))$ est le **sommet** de la parabole représentant la fonction f.

Remarque

Plus généralement, on appelle fonction polynôme du 2^{nd} degré, toute fonction qui s'écrit sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Par exemple, la fonction $x \longmapsto 3x^2 - 2x + 1$ est une fonction polynôme du 2^{nd} degré.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 2(x - 2)(x + 2)$ est une fonction du 2^{nd} degré.

En effet, elle s'écrit aussi sous la forme $x \longmapsto ax^2 + b$.

$$f(x) = 2(x - 2)(x + 2) = 2\left(x^2 - 4\right) = 2x^2 - 8$$

2.4 Méthode : Représenter graphiquement une fonction du 2^{nd} degré à partir de sa forme factorisée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-2)(x+4)$ et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère.

a) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
b) Déterminer l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
c) Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.
d) Placer ces éléments géométriques dans un repère puis tracer $\mathcal{C}_f$.

(a) Pour déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Soit : $2(x-2)(x+4) = 0$.

Il s'agit d'une équation-produit. On a donc : $(x-2) = 0$ ou $(x+4) = 0$ soit : $x = 2$ ou $x = -4$.

La courbe de f traverse l'axe des abscisses en $x = -4$ et en $x = 2$.

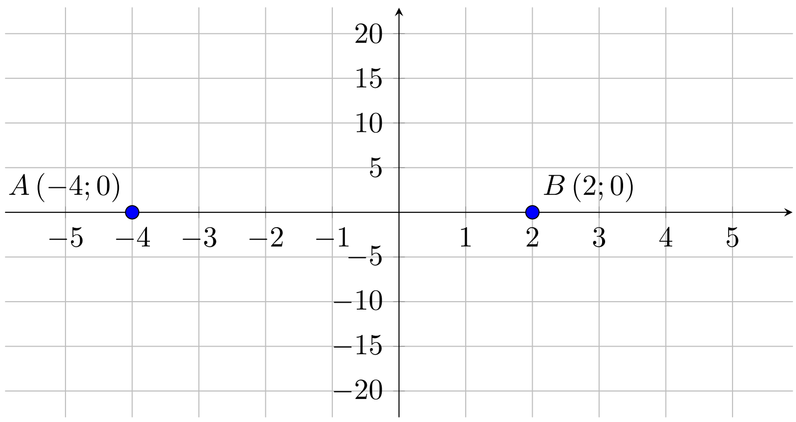


Figure 5 – Points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses

(b) Ici, $f(x) = 2(x-2)(x+4)$ donc $x_1 = 2$ et $x_2 = -4$, et donc $p = \dfrac{2-4}{2} = -1$.

La droite d'équation $x = -1$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f.

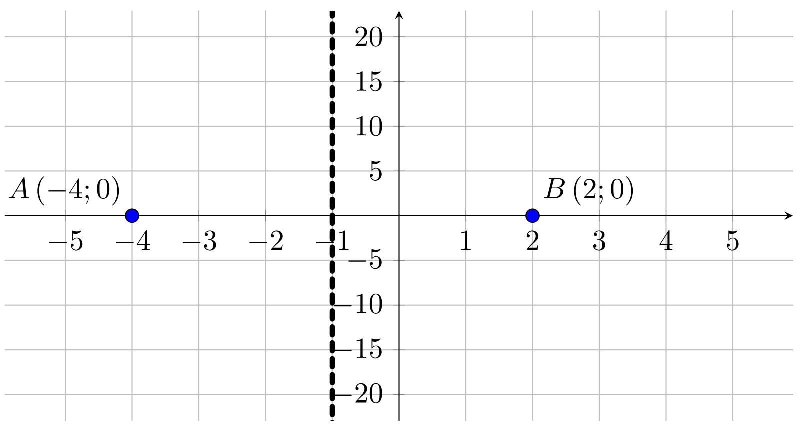


Figure 6 – Axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$

(c) Le sommet S de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie, donc il a pour abscisse $p = -1$ et pour ordonnées :

$$\begin{aligned} f(p) &= f(-1) \\ &= 2(-1-2)(-1+4) \\ &= 2 \times (-3) \times 3 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Le sommet de la parabole S est donc le point de coordonnées $S(-1\,;-18)$.

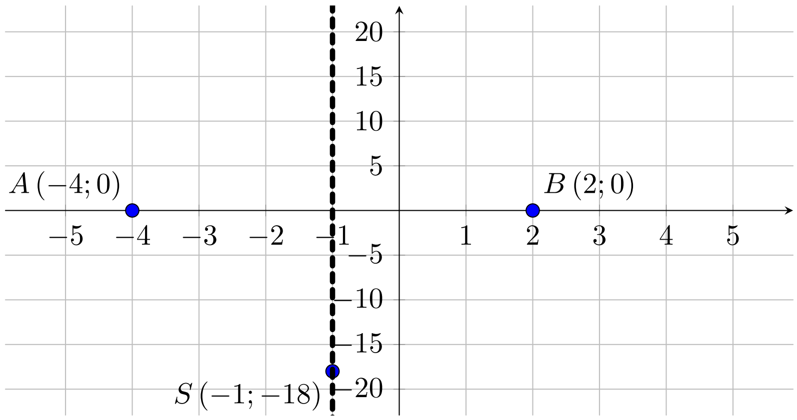


Figure 7 – Sommet de $\mathcal{C}_f$

(d) L'expression de la fonction f est $f(x) = 2(x-2)(x+4)$, donc $a = 2 > 0$.

On en déduit que la parabole représentant la fonction f possède des branches tournées vers le **haut**. Le sommet de la parabole correspond donc **au minimum** de la fonction f.

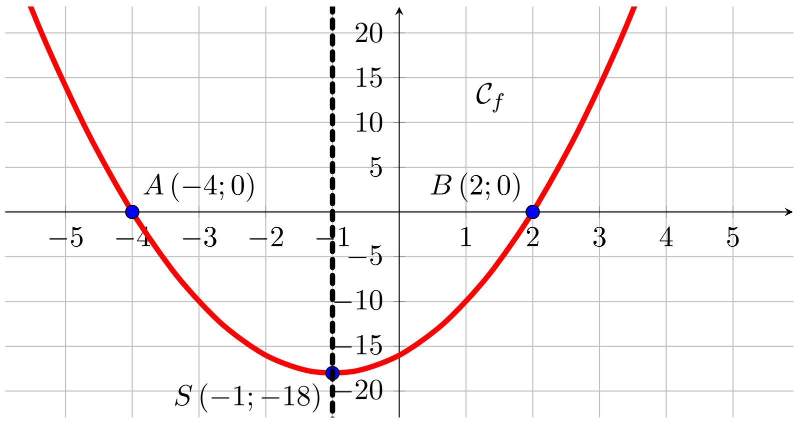
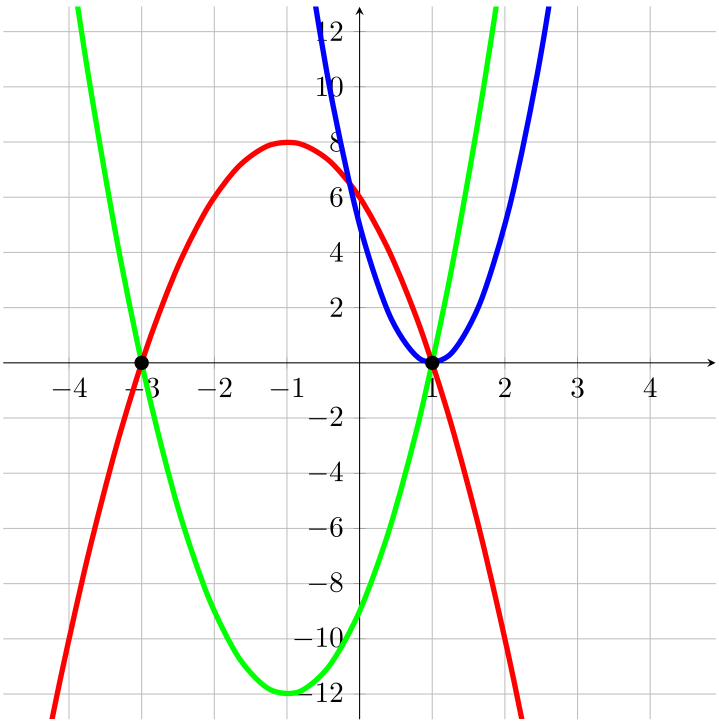


Figure 8 – Représentation graphique de $f(x) = 2(x-2)(x+4)$

2.5 Méthode : Associer une fonction du 2nd degré à sa représentation graphique

a) Associer chaque fonction à sa représentation graphique :



$f(x) = 3(x-1)(x+3)$

$g(x) = -2(x-1)(x+3)$

$h(x) = 5(x-1)^2$

(a) On a : $f(x) = 5(x-1)^2 = 5(x-1)(x-1)$.

1. La fonction h est la seule à posséder une **racine double égale à 1**. Cela signifie que la parabole correspondante ne possède qu'un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.

La **parabole** bleue intercepte l'axe des abscisses en 1 uniquement, c'est donc la représentation graphique de la fonction h. $\longrightarrow h(x) = 5(x-1)^2$

2. On a $f(x) = 3(x-1)(x+3)$ et $g(x) = -2(x-1)(x+3)$.

Ces fonctions possèdent donc toutes les deux les mêmes racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.

On peut donc les associer à la **parabole** rouge et à la **parabole** verte qui passent toutes les deux par les points d'abscisse -3 et 1.

Les branches de la **parabole** verte sont tournées vers le haut donc $a > 0$ donc la **parabole** verte représente la fonction f pour qui $a = 3 > 0$. $\longrightarrow f(x) = 3(x-1)(x+3)$

La **parabole** rouge représente alors la fonction g. $\longrightarrow g(x) = -2(x-1)(x+3)$

2.6 Méthode : Factoriser une expression du 2$^{\text{nd}}$ degré

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Conjecturer une racine de la fonction polynôme f et vérifier par calcul.
b) Factoriser f

(a) On peut conjecturer que 1 est racine de la fonction polynôme f.

En effet, $f(1) = 2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$.

(b) On a $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, on peut affirmer que $a = 2$.

Par ailleurs, 1 est une racine de f. Donc, sous sa forme factorisée, f s'écrit :

$$f(x) = 2(x-1)(x-x_2)$$

Il s'agit donc de déterminer x_2, tel que : $2x^2 + 4x - 6 = 2(x-1)(x-x_2)$.

En prenant par exemple $x = 0$, cette égalité s'écrit :

$$\begin{aligned}
2x^2 + 4x - 6 &= 2(x-1)(x-x_2) \\
2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 6 &= 2(0-1)(0-x_2) \\
-6 &= 2(-1)(-x_2) \\
-6 &= 2x_2 \\
3 &= x_2
\end{aligned}$$

Ainsi, sous sa forme factorisée, la fonction polynôme f s'écrit $f(x) = 2(x-1)(x-(-3))$ ou encore

$$f(x) = 2(x-1)(x+3)$$

2.7 Methode : Démontrer l'égalité de deux fonctions du 2$^{\text{nd}}$ degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

a) Démontrer que $f(x) = 3(x-2)(x+1)$

(a) On developpe l'expression $3(x-2)(x+1)$

$$\begin{aligned}
3(x-2)(x+1) &= 3 \times [(x \times x) + (x \times 1) + (-2 \times x) + (-2 \times 1)] \\
&= 3 \times (x^2 - x - 2) \\
&= 3x^2 - 3x - 6
\end{aligned}$$

3 Signe d'une fonction polynôme du 2nd degré

3.1 Méthode : Étudier le signe d'un polynôme du 2nd degré

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)(x+2)$.

a) Étudier le signe de la fonction polynôme f

(a) Le signe de $-2(x-3)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur -2, $(x-3)$ et $(x+2)$

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$$\begin{aligned} & x-3>0 \\ \Leftrightarrow\ & x>3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & x+2>0 \\ \Leftrightarrow\ & x>-2 \end{aligned}$$

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on peut en déduire le signe du produit

$$f(x) = -2(x-3)(x+2)$$

.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-2				$-$			
$(x-3)$			$-$		0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0		$+$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que :

- $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-2;3]$
- $f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.

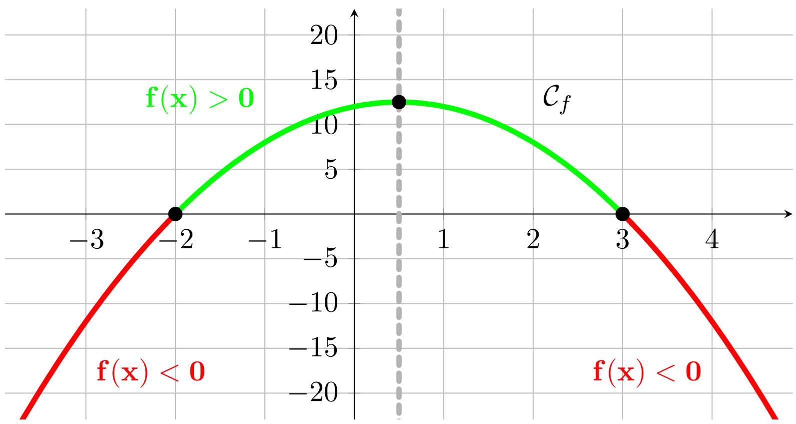


FIGURE 9 – Représentation graphique de $f(x) = -2(x-3)(x+2)$

4 Équation de la forme $x^2 = c$

4.1 Propriété : Solutions de l'équation $x^2 = c$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = c$ dépendent du signe de c.

— Si $c < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
— Si $c = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
— Si $c > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{c}$ et $-\sqrt{c}$.

4.2 Méthode : Résoudre une équation du type $x^2 = c$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x^2 = 16$
b) $x^2 = -8$
c) $2x^2 - 8 = 120$

(a) 16 est positif donc l'équation $x^2 = 16$ admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.

$$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \text{ ou } x = -4$$

(b) -8 est négatif donc l'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

(c) $2x^2 - 8 = 120$

$$\begin{aligned}
& 2x^2 - 8 = 120 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x^2 = 120 + 8 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x^2 = 128 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = 64 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \sqrt{64} \text{ ou } x = -\sqrt{64} \\
\Leftrightarrow \quad & x = 8 \text{ ou } x = -8
\end{aligned}$$

L'équation admet donc deux solutions $x = \sqrt{64} = 8$ et $x = -\sqrt{64} = -8$.