Variables Aléatoires / Loi binomiale

T$^{\text{le}}$ STMG

Table des matières

---

1 Espérance d'une variable aléatoire

1.1 Définition : Espérance mathématique d'une variable aléatoire

L'**espérance mathématique** de X est :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \times P\left(X = x_1\right) + x_2 \times P\left(X = x_2\right) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i) \end{aligned}$$

1.2 Méthode : Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

— Si on tire un **coeur**, on gagne 2€.
— Si on tire un **roi**, on gagne 5€.
— Si on tire une **autre carte**, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

(a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.

En effet, si on tire le **roi de coeur**, on gagne 5(roi) + 2(coeur) = 7€.

— Si la carte tirée est un coeur (autre que le roi de coeur), $X = 2 \quad \Rightarrow P(X = 2) = \dfrac{7}{32}$.
— Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de coeur), $X = 5 \quad \Rightarrow P(X = 5) = \dfrac{3}{32}$.
— Si la carte tirée est le roi de coeur, $X = 7 \quad \Rightarrow P(X = 7) = \dfrac{1}{32}$.
— Si la carte tirée n'est ni un coeur, ni un roi, $X = -1 \quad \Rightarrow P(X = -1) = \dfrac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

(b)

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1) \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} \\ &= \frac{15}{32} \end{aligned}$$

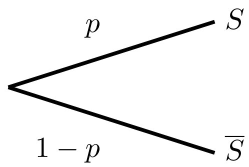
L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

L'espérance est égale à $\dfrac{15}{32} \approx 0,50$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 0,50 €.

2 Schéma de Bernoulli, loi binomiale

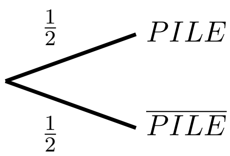
2.1 Définition : Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".



Exemples

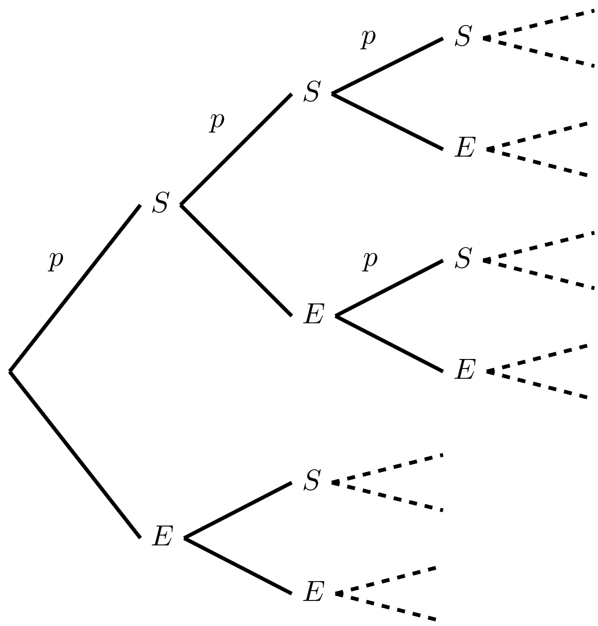
a) Le jeu du pile ou face : On considère comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". La probabilité d'un succès est égale à $p = \frac{1}{2}$.



b) On lance un dé et on considère comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". La probabilité d'un succès est égale à $p = \frac{1}{6}$.

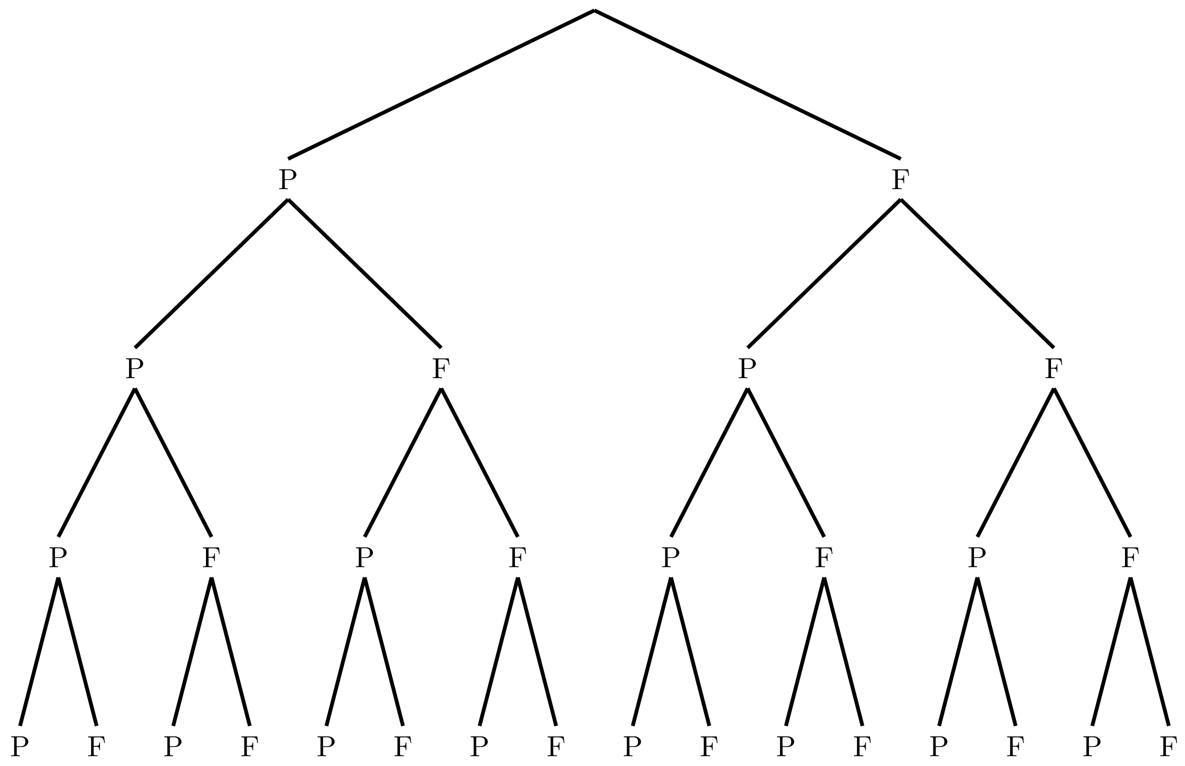
2.2 Définition : Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.



Exemple

La répétition de 4 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{1}{2}$.



Remarque

Si dans un schéma de Bernoulli, on répète la même expérience n fois, alors il est possible d'obtenir 0 succès, 1 succès, 2 succès, $\ldots$ ou n succès.

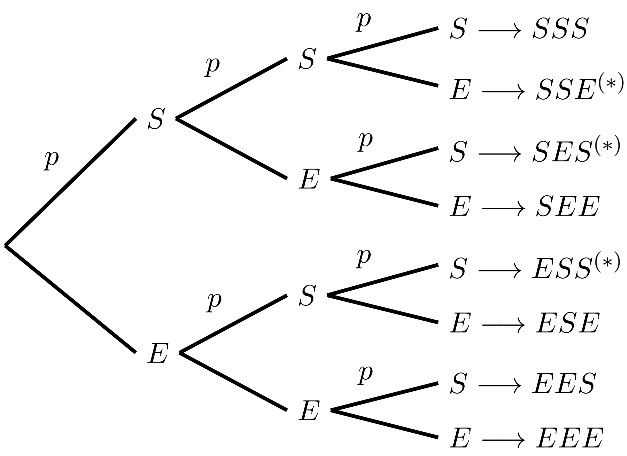
2.3 Définition : Loi binomiale

On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Une **loi binomiale** est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque

n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p)$.

Exemple



On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.

On a :

- $P(X = 3) = p^3$.

En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de $p \times p \times p = p^3$.

- $X = 2$ correspond aux suites d'issues suivantes :
  - (Succès ; Succès ; échec)
  - (Succès ; échec ; Succès)
  - (échec ; Succès ; Succès)

Donc $P(X = 2) = 3 \times p^2 \times (1 - p)$

En effet, les branches qui correspondent à 2 succès et 1 échec, donne une probabilité de $p \times p \times (1 - p) = p^2 \times (1 - p)$.

Il y a 3 branches de ce type, soit : $3 \times p^2 \times (1 - p)$

2.4 Méthode : Calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide d'un arbre

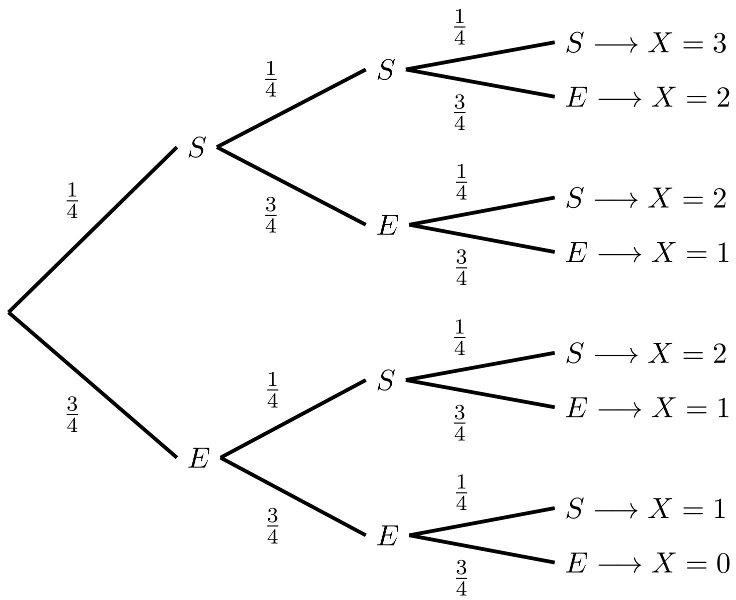
On tire trois fois de suite avec remise une carte parmi les 4 As. On considère comme succès l'événement "Obtenir l' **As de coeur**."

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

a) Calculer $P(X=2)$. Interpréter le résultat.

(a) La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{4}$.

On représente dans un arbre de probabilité les issues de l'expérience composée de 3 tirages et à l'issue de chaque chemin, on comptabilise le nombre de succès.



On cherche à calculer $P(X=2)$, on repère donc les chemins présentant deux succès $\Rightarrow$ 3 chemins.

Chacun de ces chemins correspond au calcul de probabilité : $\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Et donc :

$$\begin{aligned} P(X=2) &= 3 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{9}{64} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir deux fois la carte *As de coeur* sur 3 tirages est égale à $\frac{9}{64}$.

2.5 Méthode : Calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité $P(X = 5)$.
c) Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$.
d) Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$.

(a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : $\{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et $\{1 ; 2\}$.

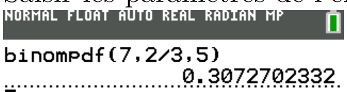
Le **succès** est d'obtenir $\{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres : $n = 7$ et $p = \frac{2}{3}$. $\quad X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(7; \frac{2}{3}\right)$

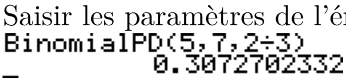
(b) $P(X = 5)$

— [Avec Texas Instruments :]

1. Touches **`2nd`** et **`VAR`** puis choisir **`binomFdP`** (ou **`binompdf`**).
2. Saisir les paramètres de l'énoncé : **`binomFdP(7,2/3,5)`**


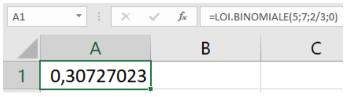
3.

— [Avec Casio :]

1. Touche **`OPTN`** puis choisir **`STAT`**, **`DIST`**, **`BINM`** et **`Bpd`**.
2. Saisir les paramètres de l'énoncé : **`BinominalePD(5,7,2/3)`**


3.

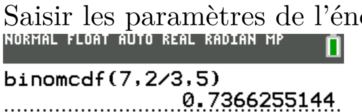
— [Avec le tableur :]

1. Saisir dans une cellule : **`=LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)`**
2. 

On trouve $P(X = 5) \approx 0,31$. La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

(c) $P(X \leq 5)$

— [Avec Texas Instruments :]

1. Touches **`2nd`** et **`VAR`** puis choisir **`binomFRép`** (ou **`binomcdf`**).
2. Saisir les paramètres de l'énoncé : **`binomFRép(7,2/3,5)`**


3.

— [Avec Casio :]

1. Touche **`OPTN`** puis choisir **`STAT`**, **`DIST`**, **`BINM`** et **`Bcd`**

2. Saisir les paramètres de l'énoncé : `BinominaleCD(5,7,2/3)`
   ```
   BinomialCD(5,7,2÷3)
                0.7366255144
   ```
3. ▯

— [Avec le tableur :]

1. Saisir dans une cellule : `=LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)`
2. A1 =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)

	A	B	C
1	0,73662551		

On trouve $P\left(X \leq 5\right) \approx 0,74$.

La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

(d) $P(X \geq 3)$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,045$ (à l'aide de la calculatrice ou du tableur)

$P(X \geq 3) \approx 0,955$.

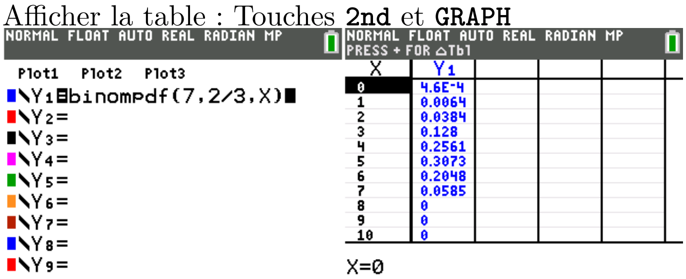
2.6 Méthode : Établir une loi binomiale avec une calculatrice ou un tableur

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,4$.

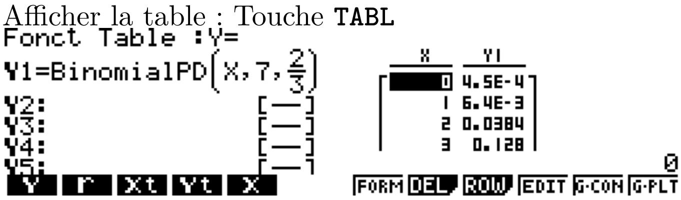
Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant $P(X = k)$ pour k entier, $0 \leq k \leq 5$.

— [Avec Texas Instruments :]

1. Touche **Y=** et saisir comme dans le paragraphe précédent
2. Afficher la table : Touches **2nd** et **GRAPH**
3. 

— [Avec Casio :]

1. Dans **MENU**, choisir **TABLE** et saisir comme dans le paragraphe précédent
2. Afficher la table : Touche **TABL**
3. 

— [Avec le tableur :]

1. Saisir dans la cellule B1 : `=LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)`
2. Copier cette formule vers le bas
3.

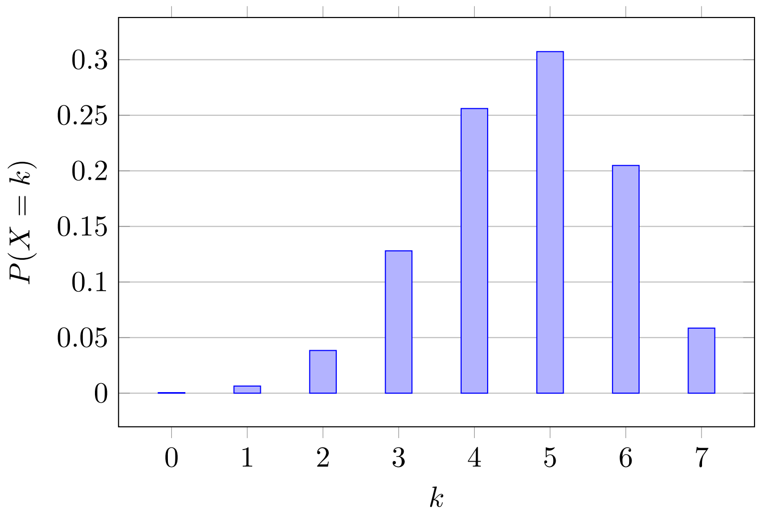
	A	B	C
1	0	=LOI.BINOMIALE(A1;7;2/3;0)	
2	1	0,00640	
3	2	0,03841	
4	3	0,12803	
5	4	0,25606	
6	5	0,30727	
7	6	0,20485	
8	7	0,05853	

2.7 Représentation graphique de la loi binomiale

On peut, représenter une loi binomiale à l'aide d'un diagramme en bâtons. On représentera

- En abscisse, le nombre de succès k
- En ordonnée, $P(X = K)$

Voici la représentation de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(7, \frac{2}{3}\right)$



2.8 Propriété : Espérance de la loi binomiale

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. On a :

$$E(X) = n \times p$$

Exemple

On lance **5 fois** un dé à six faces.

On considère comme **succès** le fait d'**obtenir 5 ou 6**.

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès.

On a donc : $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.

Ainsi : $E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1,7$

On peut espérer obtenir environ $1,7$ fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

2.9 Méthode : Calculer l'espérance d'une loi binomiale

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte. On répond au hasard à chaque question.

a) Combien de bonnes réponses peut-on espérer obtenir ?

(a) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.

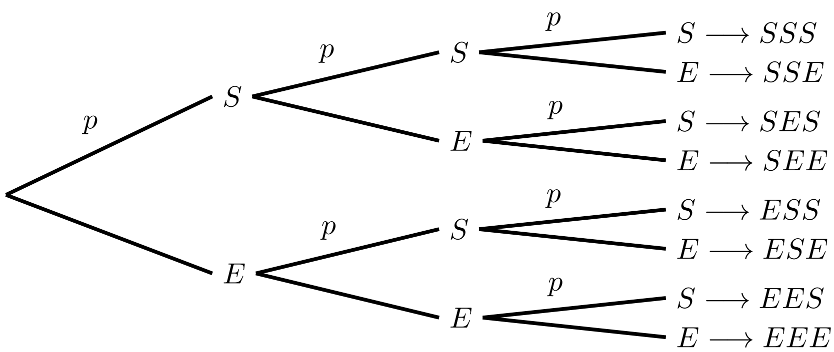
X suit une loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = \frac{1}{3}$.

$$E(X) = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

On peut espérer obtenir $\frac{8}{3}$ bonnes réponses en répondant au hasard.

3 Coefficients binomiaux

Exemple :



On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.

Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ?

On dit aussi : “Combien existe-t-il de **combinaisons** de 2 parmi 3 ?”

— (Succès ; Succès ; Échec)
— (Succès ; Échec ; Succès)
— (Échec ; Succès ; Succès)

Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note : $\binom{3}{2} = 3$.

3.1 Définition : Coefficient binomial

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de** k **parmi** n, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.

3.2 Propriétés : Coefficients binomiaux remarquables

(a) $\binom{n}{0} = 1$

$\longrightarrow$ Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès parmi n épreuves : **(Échec, Échec, . . . , Échec)**

(b) $\binom{n}{n} = 1$

⟶ Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à n succès parmi n épreuves : **(Succès, Succès, ... , Succès)**

(c) $\binom{n}{1} = n$

⟶ Il n'y a n chemins correspondant à 1 succès parmi n épreuves :

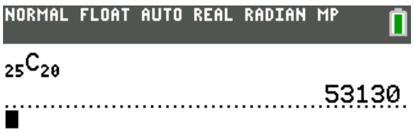
- **(Succès, Échec, Échec, ... , Échec)**
- **(Échec, Succès, Échec, ... , Échec)**
- **(Échec, Échec, Succès, ... , Échec)**
- **...**
- **(Échec, Échec, Échec, ... , Succès)**

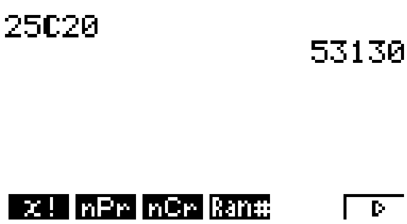
3.3 Méthode : Déterminer un coefficient binomial à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur

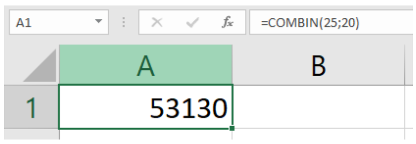
Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

Pour calculer $\binom{25}{20}$, on saisie : `25 combinaison 20` ou `25 nCr 20` suivant le modèle de calculatrice.

- [Avec Texas Instruments :] Pour accéder à `nCr` , il faut appuyer sur `MATH` > Avec un tableur, la fonction se nomme `COMBIN`.
- [Avec Excel :] Pour calculer $\binom{25}{20}$, on saisie : `=COMBIN(25;20)`







Texas Instruments TI-84 CE	Casio Graph 85	Tableur

3.4 Triangle de Pascal

Le tableau ci-dessous permet de déterminer un coefficient binomial. Pour construire ce tableau, il faut remarquer que le nombre présent dans une case est égale à la somme de **la case d'au-dessus** et de **la case d'au-dessus à gauche**.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	...	...	...	...	...	...

Exemple :

On peut lire dans le tableau $\binom{4}{2} = 6$

$n\backslash k$	0	1	**2**	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	**6**	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	...	...	...	...	...	...

En effet, $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$

3.4.1 Propriété : Coefficients du triangle de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration pour $n = 5$, $k = 3$:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

Il y a deux **types de chemins** comportant 3 succès parmi 5 épreuves :

- Ceux qui commencent par un **succès** : il y en a 2 parmi 4, soit $\binom{4}{2}$.
  - En effet, dans l'arbre, il reste à dénombrer 2 succès parmi 4 expériences.

— Ceux qui commencent par un **échec** : il y en a 3 parmi 4, soit $\binom{4}{3}$.

— En effet, dans l'arbre, il reste à dénombrer 3 succès parmi 4 expériences.

Ces deux types de chemins sont disjoints, donc : $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

3.5 Propriété : Application à la loi binomiale

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

3.6 Méthode : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

a) Prouver que X suit une loi binomiale.

b) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

(a) On répète 4 fois une expérience à deux issues : boules gagnantes (5 issues) ; boules perdantes (7 issues).

Le **succès** est "obtenir une boule gagnante".

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$.

Les paramètres de la loi binomiale sont donc : $n = 4$ et $p = \frac{5}{12}$.

(b) $P(X = 3)$

$$\begin{aligned}
P(X = 3) &= \binom{4}{3} \times \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{4-3} \\
&= \binom{4}{3} \times \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \left(\frac{7}{12}\right)^{4-3} \\
&= \binom{4}{3} \times \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \frac{7}{12} \\
&= \binom{4}{3} \times \frac{125}{1728} \times \frac{7}{12} \\
&= \binom{4}{3} \times \frac{875}{20736}
\end{aligned}$$

On détermine la valeur de la combinaison $\binom{4}{3}$ à l'aide du triangle de Pascal.

$n\backslash k$	0	1	2	**3**	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	**4**	1		
5	1	5	10	10	5	1	

On a donc $\binom{4}{3} = 4$, et donc :

$$P(X = 3) = 4 \times \frac{875}{20736} = \frac{875}{5184} \approx 0,17.$$