Fonctions et équations du 2^{nd} degré

$1^{ère}$ Spécialité Math

Table des matières

---

1 Définition et représentation

1.1 Définition : Fonction du 2^{nd} degré

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients **a**, **b** et **c** sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction **trinôme du second degré** ou par abus de langage **"trinôme"**.

Exemples et contre-exemples :

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

f est une fonction du 2^{nd} degré avec $a = 3$, $b = -7$ et $c = 3$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{3}{5}$

g est une fonction du 2^{nd} degré avec $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -5$ et $c = \dfrac{3}{5}$

(3) $h(x) = 4 - 2x^2$

h est une fonction du 2^{nd} degré avec $a = -2$, $b = 0$ et $c = 4$

(4) $k(x) = (x-4)(5-2x)$

k est une fonction du 2^{nd} degré car $(x-4)(5-2x) = (5 \times x) - (2x \times x) - (4 \times 5) + (2 \times 4x)$

Donc $k(x) = -2x^2 + 13x - 20 \Rightarrow a = -2$, $b = 13$ et $c = -20$

(5) $m(x) = 5x - 3$

$m(x)$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

(6) $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$

$n(x)$ est une fonction polynôme de degré 4.

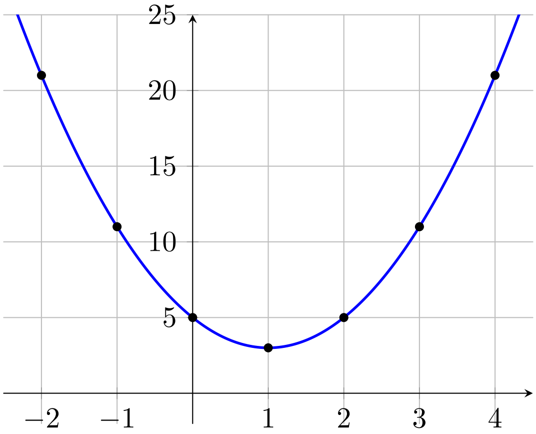
1.2 Variations et représentation graphique

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Pour représenter f dans un repère, nous pouvons calculer quelques valeurs de $f(x)$.

— $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = 21$
— $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 5 = 11$
— $f(0) = 2 \times (0)^2 - 4 \times (0) + 5 = 5$
— ...

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	21	11	5	3	5	11	21



Remarque

— Dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i},\ \vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

1.2.1 Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

— Si $a > 0$, f admet un **minimum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$. Ce **minimum** est égal à $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

— Si $a < 0$, f admet un **maximum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$. Ce **maximum** est égal à $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

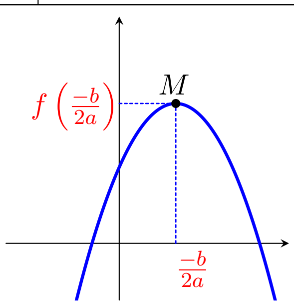
On appelle α la valeur $\dfrac{-b}{2a}$ et β la valeur $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$. $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

1.2.2 Propriété : Variations de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Nous pouvons résumer la variation d'une fonction du 2nd degré par le tableau ci-dessous :

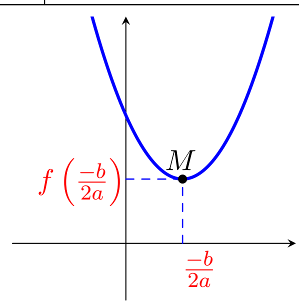
$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$	$-\infty$

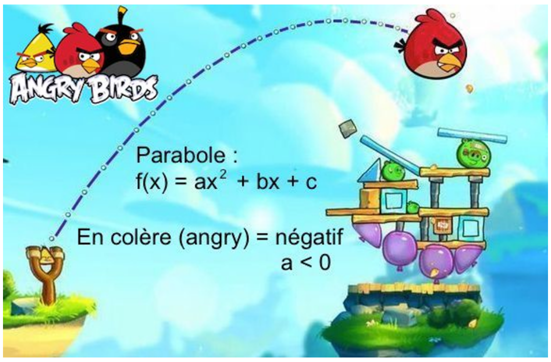


$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$	$+\infty$



Il existe un moyen pour se souvenir du résultat précedent :



Méthode : Etudier les variations d'une fonction du 2nd degré

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

On a $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, donc $a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$.

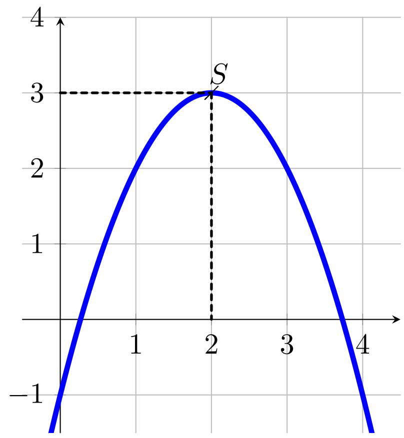
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \times (-1)} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 - 1 = 3$

Le sommet de la parabole est le point $S(2;3)$.

$a < 0$ donc le tableau de variation de f est :

x	$+\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$

Et sa représentation graphique est :



2 Forme factorisée

Il se peut que le polynôme du 2^{nd} degré ne se présente pas sous la forme **developpée** mais sous une forme **factorisée** comme par exemple : $f(x) = (x-1)(x-2)$

En effet :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2) \\ &= x^2 - 2x - 1x + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2 \\ &\Rightarrow a = 1 \text{ , } b = -3 \text{ et } c = 2 \end{aligned}$$

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

f est la forme **factorisée** d'une fonction du 2^{nd} degré.

x_1 et x_2 sont les **racines** de f

Remarque

les **racines** de f sont solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$f(x_1) = a(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) = 0$ et $f(x_2) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = 0$.

Exemples

(1) $f(x) = 3(x-1)(x+2)$

$f(x) = 3(x-1)\left(x-(-2)\right)$

f est une fonction du 2^{nd} degré sous forme factorisée avec $a = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

(2) $f(x) = (2x-6)(x-12)$

Pour faire apparaître la forme factorisée il faut modifier l'écriture de $(2x-6)$

$(2x-6) = 2(x-3)$ donc $f(x) = 2(x-3)(x-12)$

f est une fonction du 2^{nd} degré avec $a = 2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 12$

(3) $f(x) = (3-x)(2x+1)$

On a $(3-x) = -(x-3)$ et $(2x+1) = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

Donc $f(x) = -(x-3) \times 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = -2(x-3)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

f est une fonction du 2^{nd} degré avec $a = -2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

2.2 Propriété : Racines de $f(x)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et x_1 ,x_2 les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Alors la forme **factorisée** de f est : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple

Soit $f(x) = 3(x - 1)(x + 2)$.

f est une fonction du 2^{nd} degré sous forme factorisée avec $a = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

D'autre part, $f(x) = 3\left(x^2 + 2x - 1x - 2\right) = 3x^2 + 3x - 6$

Donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ sont solutions de l'équation $3x^2 + 3x - 6 = 0$

---

3 Résolution d'équations du 2nd degré

Résourdre une équation du 2^{nd} degré, c'est résoudre une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$.

3.1 Définition : Discriminant

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

3.2 Propriété : Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

— Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a **pas de solution réelle**.

— Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a **une unique solution** : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Méthode : Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$

Résoudre les équations suivantes :

(1) $2x^2 - x - 6 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$a = 2,\ b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

Les solutions de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ sont $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$

(2) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

$a = 2,\ b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$

(3) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

$a = 1,\ b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété

La somme S et le produit P des **racines** d'un polynôme du 2^{nd} degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par :

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}$$

Démonstration

Soit x_1 et x_2 les solutions de $x^2+bx+c=0$ alors $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc, la somme des **racines** est $S=x_1+x_2$:

$$\begin{aligned}
S &= x_1+x_2\\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})+(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}\\
&= \frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}
\end{aligned}$$

Le produit des **racines** est $P=x_1\times x_2$:

$$\begin{aligned}
P &= x_1\times x_2\\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})\times(-b+\sqrt{\Delta})}{2a\times 2a}\\
&= \frac{(-b)^2+\left((-b)\times\sqrt{\Delta}\right)+\left(\left(-\sqrt{\Delta}\right)\times(-b)\right)+\left(\left(-\sqrt{\Delta}\right)\times\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}\\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

3.3 Propriété : Forme factorisée de ax^2+bx+c

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur par $f(x)=ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta=0$: Pour tout réel x, on a : $f(x)=a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta>0$: Pour tout réel x, on a : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Remarque

Si $\Delta<0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser les trinômes suivants :

(1) $4x^2+19x-5$

On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$

On a $a=4$, $b=19$ et $c=-5$ donc $\Delta=19^2-4\times4\times(-5)=441$

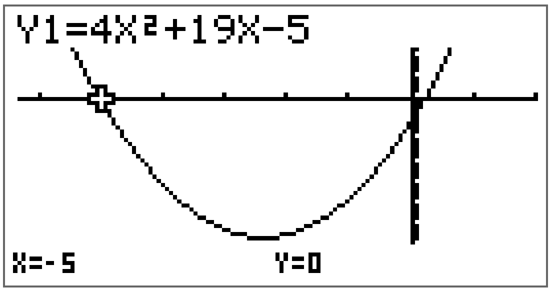
Les racines du trinôme sont :

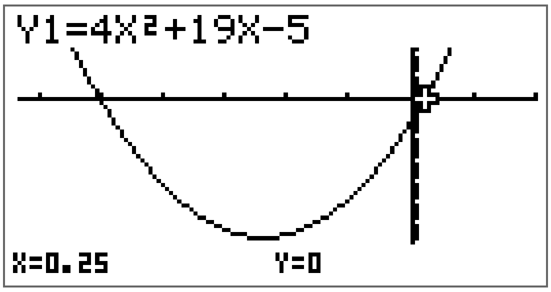
$$
\begin{array}{l|l}
x_1 = \dfrac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4} & x_2 = \dfrac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4} \\
 = -5 & = \dfrac{1}{4}
\end{array}
$$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
4x^2+19x-5 &= 4\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \\
&= 4\left(x+5\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \text{ ou } (x+5)(4x-1)
\end{aligned}
$$

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile ! On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.





(2) $9x^2-6x+1$

On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$

On a $a=9$, $b=-6$ et $c=1$ donc $\Delta=(-6)^2-4\times 9\times(1)=0$

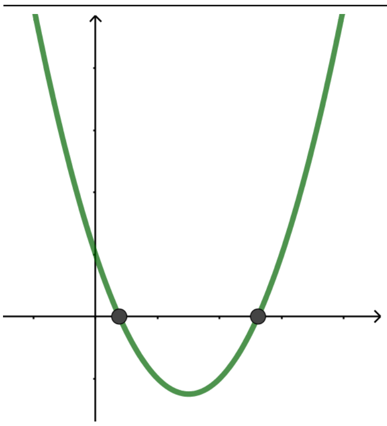
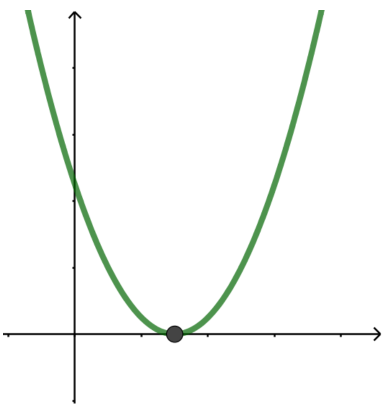
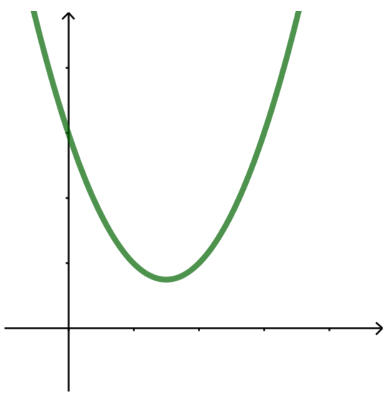
La racine du trinôme est : $x_0=\dfrac{-(-6)}{2\times 9}=\dfrac{1}{3}$

On a donc : $9x^2-6x+1=9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$

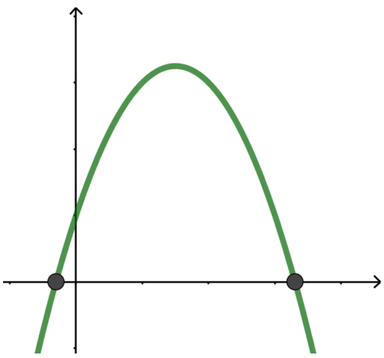
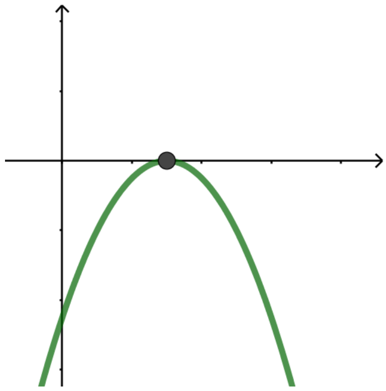
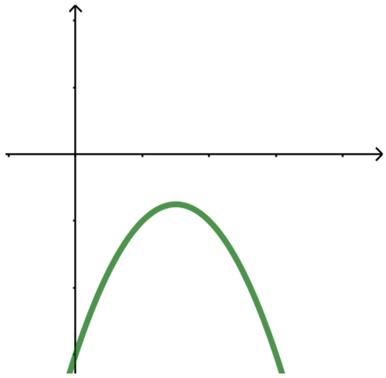
3.4 Propriété : Les différentes représentations possibles de f

En fonction du signe de a et de Δ, nous pouvons en déduire les représentations de f.

$a>0$

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
		

$a < 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		

4 Forme canonique

4.1 Définition : Forme canonique

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f\left(x\right) = a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$$

où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Exemple

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ est une fonction du 2^{nd} degré sous forme **canonique** avec $a = 2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

En effet,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-1)^2 + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

Donc $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction du 2nd degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$. On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

$f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$ où α et β sont des nombres réels.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\
&= 2\left[x^2 - 10x\right] + 10 \\
&= 2\left[x^2 - 10x + 25 - 25\right] + 10 \\
&= 2\left[(x-5)^2 - 25\right] + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 50 + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 40
\end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$

$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme **canonique** de f.

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a(x - \alpha)^2 + \beta
\end{aligned}$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Remarque :

Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β.

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction du 2nd degré (simple)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$. On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

On a $a = 2$, $b = -20$ et $c = 10$ donc

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{b}{2a}\\ &= -\frac{-20}{2\times 2}\\ &= 5\end{aligned}$$

Calculons β :

$$\begin{aligned}\beta &= f(\alpha)\\ &= 2\times 5^2 - 20\times 5 + 10\\ &= 50 - 100 + 10 = 40\end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$ donc $f(x) = 2\left(x-5\right)^2 - 40$

Exemple :

Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x) = 2\left(x-1\right)^2 + 3$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2\left(x-1\right)^2$ est positif.

Or $f(1) = 3$ donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en $x = 1$. Ce minimum est égal à 3.

4.2 Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

— Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
— Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

Remarque :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\frac{b}{2a}$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

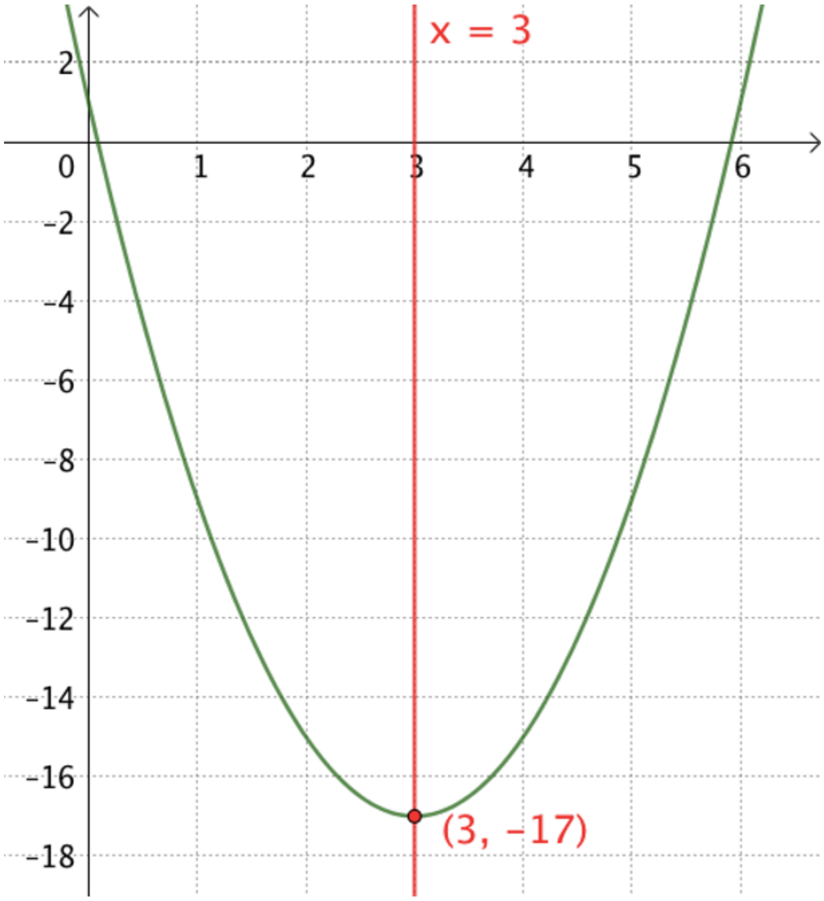
La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, soit $x = -\frac{-12}{2\times 2} = 3$.

La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

Les coordonnées de son sommet sont : $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, soit : $\left(3\ ; 2\times 3^2 - 12\times 3 + 1\right) = (3\ ;\ -17)$.

Le point de coordonnées $(3\ ;\ -17)$ est donc le sommet de la parabole.

$a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un minimum.



Démonstration : Solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :

$ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}&=0\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}&=0\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{\Delta}{4a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{\Delta}{4a^2}\quad\text{car } a\neq 0
\end{aligned}$$

— Si $\Delta<0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2}<0\right)$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.

— Si $\Delta=0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x=\frac{-b}{2a}$

— Si $\Delta>0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ est équivalente à :

$$\left|\begin{aligned}
x+\frac{b}{2a}&=+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\\
x&=+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}-\frac{b}{2a}\\
x&=\frac{+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}\\
x&=\frac{+\sqrt{\Delta}-b}{2a}\\
x&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}\right.\quad\text{et}\quad\left|\begin{aligned}
x+\frac{b}{2a}&=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\\
x&=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}-\frac{b}{2a}\\
x&=\frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}\\
x&=\frac{-\sqrt{\Delta}-b}{2a}\\
x&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}\right.$$

L'équation a deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$