Suites numériques

1ère STMG

Table des matières

---

1 Définition et représentation graphique

Exemple

On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, ...

On note u_n l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :

$u_0 = 1 \quad u_1 = 3 \quad u_2 = 5 \quad u_3 = 7 \quad \ldots$

On a ainsi défini une **suite numérique**.

On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par u :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longmapsto \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

1.1 Définition : Suite numérique

Une **suite numérique** u_n est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.

u_n est appelé le **terme de rang** n de cette suite (ou d'indice n).

1.2 Définition : Suite définie par une formule explicite

Lorsqu'on définit une suite par une formule **explicite**, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

Exemples

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \times 0 = 0 \\ u_1 &= 2 \times 1 = 2 \\ u_2 &= 2 \times 2 = 4 \\ u_3 &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3 \times n^2 - 1$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$\begin{aligned} v_0 &= 3 \times 0^2 - 1 = 3 \times 0 - 1 = 0 \\ v_1 &= 3 \times 1^2 - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2 \\ v_2 &= 3 \times 2^2 - 1 = 3 \times 4 - 1 = 11 \\ v_3 &= 3 \times 3^2 - 1 = 3 \times 9 - 1 = 26 \end{aligned}$$

1.3 Défintion : Suite définie par une relation de récurrence

Lorsqu'on définit une suite par une relation de **récurrence**, chaque terme de la suite est exprimé en fonction du terme précédent.

Exemples

— On définit la suite u_n par : $u_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le **triple** de son précédent.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$\begin{aligned}
&u_0 = 5 \\
&u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15 \\
&u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45
\end{aligned}$$

De façon générale, on peut noter : $u_{n+1} = 3 \times u_n$

— On définit la suite v_n par : $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4 \times v_n - 6$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$\begin{aligned}
&v_0 = 3 \\
&v_1 = 4 \times v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6 \\
&v_2 = 4 \times v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18 \\
&v_3 = 4 \times v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66
\end{aligned}$$

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

Remarque

Cependant il est possible d'écrire un algorithme avec Python :

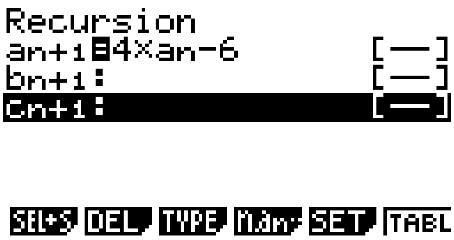
```python
v=3
for i in range(1,10):
    v=4*v-6
    print(i,v)
```

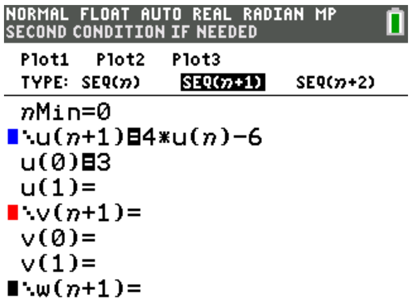
Et on obtient :

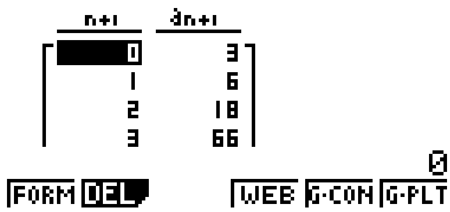
```
(1, 6)
(2, 18)
(3, 66)
(4, 258)
(5, 1026)
(6, 4098)
(7, 16386)
(8, 65538)
(9, 262146)
```

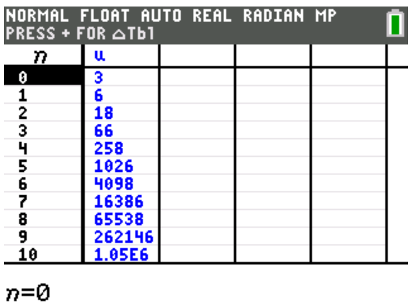
Ou sur une calculatrice :

TABLE 1 – Calcul des termes d'une suite définie par récurrence









Casio Graph 85 — TI-84 CE

A noter : Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

1.4 Représentation graphique d'une suite

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$.

On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29

Il est possible d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un **tableur**

	A	B
1	n	un
2	0	-3
3	1	-2.5
4	2	-1
5	3	1.5
6	4	5
7	5	9.5
8	6	15
9	7	21.5
10	8	29

Figure 1 – Les termes de la suite u_n calculés par un tableur

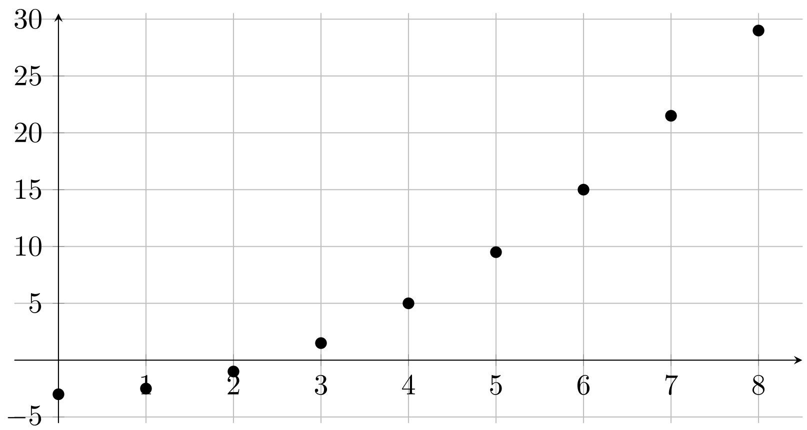


Figure 2 – Les termes de la suites u_n représentés par un nuage de points

2 Sens de variation d'une suite numérique

Exemple

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite u_n :

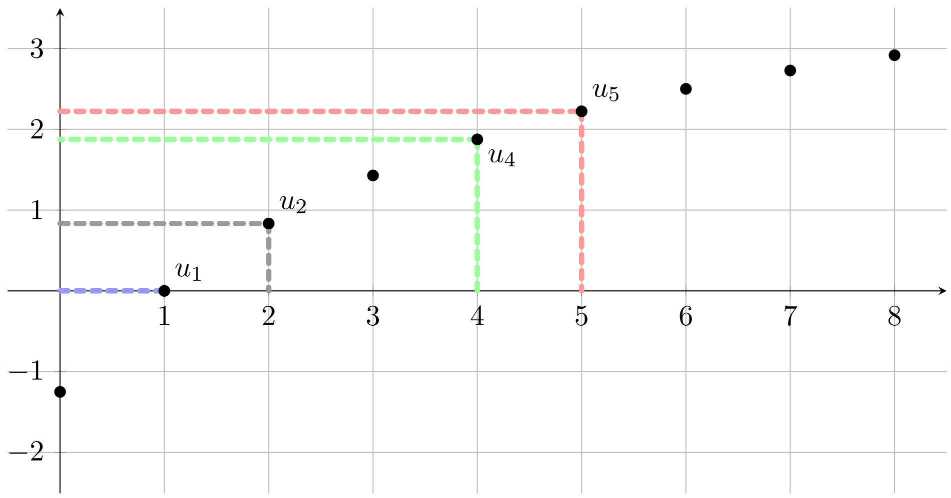


FIGURE 3 – Les termes de la suites u_n représentés par un nuage de points

On peut conjecturer que cette suite est **croissante**.

On constate par exemple que $u_1 < u_2$ ou encore $u_4 < u_5$.

De manière générale, on peut écrire : $u_n < u_{n+1}$

2.1 Définition : Variation d'une suite numérique

Soit une suite numérique u_n.

— La suite u_n est **croissante** signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
— La suite u_n est **décroissante** signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

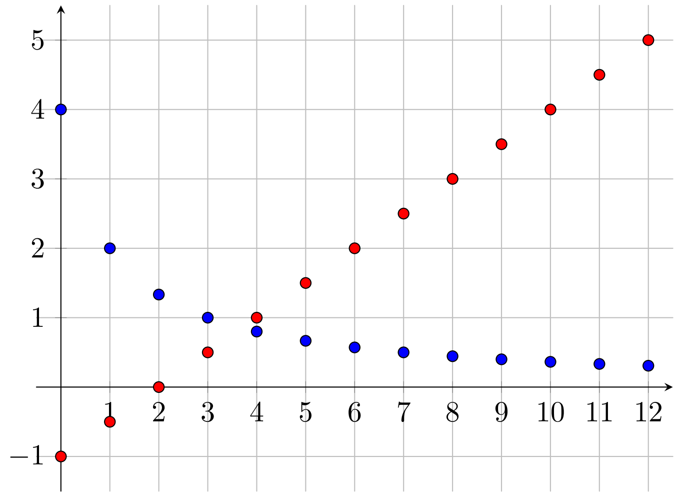


FIGURE 4 – Suite croissante en rouge et décroissante en bleu

2.2 Méthode : Étudier les variations d'une suite

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la suite u_n définie par : $u_{n+1} = u_n + 2$. Démontrer que la suite u_n est croissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne la suite vn définie par : $v_n = 4n + 4$. Démontrer que la suite v_n est croissante.

(a) Calculons $u_{n+1} - u_n$ et étudions son signe.

$u_{n+1} - u_n = 2 > 0 \Longrightarrow$ On en déduit que u_n est croissante.

(b) Caculons $v_{n+1} - v_n$ et étudions son signe.

On a : $v_n = 4n + 4$ donc $v_{n+1} = 4(n + 1) + 4 = 4n + 4 + 4 = 4n + 8$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (4n + 8) - (4n + 4) \\ &= 4n + 8 - 4n - 4 \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Pour tout n entier $v_{n+1} - v_n > 0 \Longrightarrow$ On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

3 Suites arithmétiques

Exemples

— Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.

Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :

$$\begin{aligned} u_0 &= 3 \\ u_1 &= 8 \\ u_2 &= 13 \\ u_2 &= 18 \end{aligned}$$

Une telle suite est appelée une suite **arithmétique** de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

— Soit la suite numérique v_n de premier terme 5 et de raison -2.

Les premiers termes successifs sont :

$$\begin{aligned} v_0 &= 5 \\ v_1 &= 5 - 2 = 3 \\ v_2 &= 3 - 2 = 1 \\ v_3 &= 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

La suite est donc définie par : $v_{n+1} = v_n - 2$ et $v_0 = 5$.

3.1 Définition : Suite arithmétique

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

.

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

3.2 Propriété : Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r

— Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est **croissante**.
— Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est **constante**.
— Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est **décroissante**.

3.2.1 Démonstration

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison r donc $u_{n+1} = u_n + r$.

On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n + r) - u_n \\ &= r \end{aligned}$$

— Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est **croissante**.
— Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est **décroissante**.

Exemple

La suite **arithmétique** (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - 4$ et $u_0 = 5$ est **décroissante** car de raison $-4 < 0$.

3.3 Représentation graphique d'une suite arithmétique

Les points de la représentation graphique d'une suite **arithmétique** sont alignés.

Exemple

On a représenté ci-dessous la suite de raison $-0,5$ et de premier terme 4.

FIGURE 5 – Représentation de $u_{n+1} = u_n - 0.5$ et $u_0 = 4$

4 Suites géométriques

Exemples

— Considérons une suite numérique (u_n) où le **rapport** entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

$$u_0 = 5$$
$$u_1 = 10$$
$$u_2 = 20$$
$$u_2 = 40$$

Une telle suite est appelée une suite **géométrique** de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $u_{n+1} = 2 \times u_n$ et $u_0 = 5$.

— Soit la suite géométrique v_n de premier terme 4 et de raison $0,1$.

Les premiers termes successifs sont :

$$v_0 = 4$$
$$v_1 = 4 \times 0.1 = 0.4$$
$$v_2 = 0.4 \times 0.1 = 0.04$$
$$v_3 = 0.04 \times 0.1 = 0.004$$

La suite est donc définie par : $v_{n+1} = 0,1 \times v_n$ et $v_0 = 4$.

4.1 Définition : Suite géométrique

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q, strictement positif, tel que pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple : Intérêt d'un capital

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.

Chaque année, le capital est multiplié par $1,04$.

Ce capital suit une progression **géométrique** de raison $1,04$.

On a ainsi :

$$u_0 = 500$$
$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$$
$$u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$$
$$u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

4.2 Propriété : Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) est une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0 **strictement positif**.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est **croissante**.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est **constante**.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Exemple

La suite géométrique (u_n) définie par $u_{n+1} = 0,5 \times u_n$ et $u_0 = 5$ est **décroissante** car la raison est $q = 0.5$ et $0 < q < 1$.

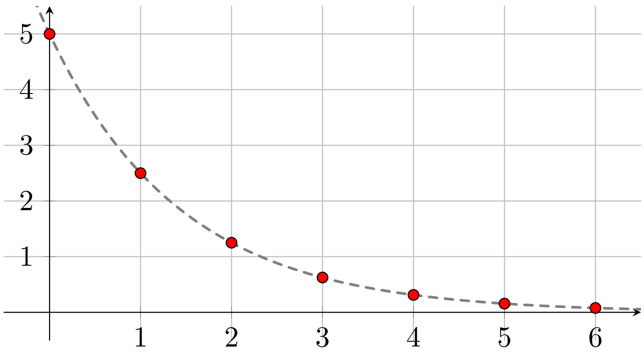


FIGURE 6 – Représentation de $u_{n+1} = 0.5 \times u_n$ et $u_0 = 5$

4.3 Représentation graphique d'une suite géométrique

Les points de la représentation graphique d'une suite **géométrique** ne sont pas alignés.

Exemple

Soit la suite géométrique (u_n) définie par $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ et $u_0 = 500$.

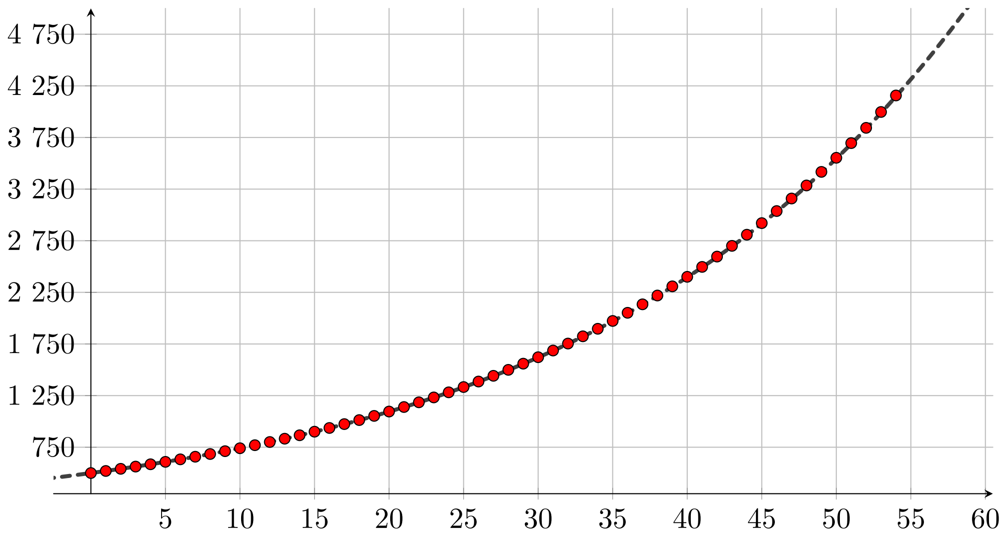
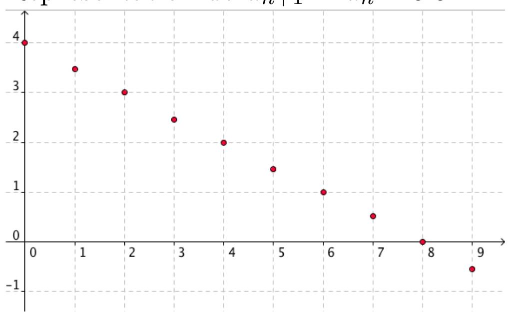


FIGURE 7 – Représentation de $u_{n+1} = 1.04 \times u_n$ et $u_0 = 500$

5 Récapitulatif

5.1 Suite arithmétique

	u_n une **suite arithmétique** de raison r et de 1^{er} terme u_0	Exemple : $r = -0.5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0.5$
Variation	$r > 0 \Rightarrow u_n$ croissante $r < 0 \Rightarrow u_n$ décroissante	$r = 0.5 < 0 \Rightarrow u_n$ décroissante
Représentation	Les points de la représentation sont alignés. On parle de croissance linéaire.	Représentation de $u_{n+1} = u_n - 0.5$ 

5.2 Suite géométrique

	u_n une **suite géométrique** de raison $q > 0$ et de 1^{er} terme $u_0 > 0$	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n \times q$	$u_{n+1} = u_n \times 2$
Variation	$q > 1 \Rightarrow u_n$ croissante $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ décroissante	$q = 2 > 0 \Rightarrow u_n$ croissante
Représentation	Les points de la représentation ne sont pas alignés.	Représentation de $u_{n+1} = 2 \times u_n$