Probabilités conditionnelles

T^le^ STMG

Table des matières

---

1 Notion de probabilités conditionnelles

1.1 Exemple : Sondage téléphonique dans la classe

Voici les résultats d'un sondage au sein de la classe de TSTMG

	Fille	Garçon	Total
Apple	10	7	17
Pas Apple	6	5	11
Total	16	12	28

On choisit au hasard un élève dans la classe.

— Soit F L'événement : "l'élève est une fille"
— Soit A L'événement : "l'élève possède un téléphone Apple"

On a $A \cap F$: "l'élève est une fille avec un téléphone Apple"

$P(A) = \dfrac{17}{28}$, $P(F) = \dfrac{16}{28}$ et $P(A \cap F) = \dfrac{10}{28}$

A l'aide du tableau :

	F	$\overline{F}$	Total
A	$\left(\frac{10}{28}\right) \approx 0.357$	$\left(\frac{7}{28}\right) = 0.25$	$\left(\frac{17}{28}\right) \approx 0.607$
$\overline{A}$	$\left(\frac{6}{28}\right) \approx 0.214$	$\left(\frac{5}{28}\right) \approx 0.178$	$\left(\frac{11}{28}\right) \approx 0.392$
Total	$\left(\frac{16}{28}\right) \approx 0.571$	$\left(\frac{12}{28}\right) \approx 0.428$	$\left(\frac{28}{28}\right) = 1$

1.2 Définition : Probabilité conditionnelle

Définition : Soit A et B, deux événements avec $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise **sachant que** l'événement A est réalisé.

Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\text{Proba de "B sachant A"} = \frac{\text{Proba de "A et B"}}{\text{Proba de "A"}}$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, $P_F(A)$, c'est la probabilité que l'élève choisi possède un Apple **sachant que c'est une fille**

Ou "**parmi les filles**, quelle est la probabilité que l'élève possède un **Apple** ?"

$$\begin{aligned} P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} &= \frac{\frac{10}{28}}{\frac{16}{28}} \\ &= \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \\ &= 0.625 \end{aligned}$$

On peut retrouver intuitivement ce résultat : sachant que l'élève est une fille, on a 10 chances sur 16 qu'elle possède une téléphone Apple.

	Fille	Garçon	Total
Apple	***10***	7	17
Pas Apple	6	5	11
Total	***16***	12	28

1.3 Exemple : Gagné ou perdu

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit “Gagné” ou soit “Perdu”.

— Sur 15 boules rouges, il est marqué “Gagné”.
— Sur 9 boules noires, il est marqué “Gagné”.

	Rouge	Noires	Total
Gagné	15	9	24
Perdu	5	21	26
Total	20	30	50

On tire au hasard une boule dans le sac.

— Soit R l’événement : “On tire une boule rouge”
— Soit G l’événement : “On tire une boule marquée Gagné”

Donc $R \cap G$ est l’événement : “On tire une boule rouge marquée Gagné”

On a $\quad P(R) = \dfrac{20}{50} = 0.4 \quad$ et $\quad P(R \cap G) = \dfrac{15}{50} = 0.3$

Donc la probabilité qu’on tire une boule marquée “Gagné” **sachant qu’elle est rouge** est :

$$\begin{aligned} P_R(G) &= \frac{P(R \cap G)}{P(R)} \\ &= \frac{0.3}{0.4} = 0.75 \end{aligned}$$

On peut retrouver intuitivement ce résultat : **Sachant que le résultat est une boule rouge**, on a 15 chances sur 20 qu’il soit marqué Gagné.

	Rouge	Noires	Total
Gagné	***15***	9	24
Perdu	5	21	26
Total	***20***	30	50

1.4 Propriétés

— $0 \leq P_A(B) \leq 1$ (Une probabilité est un nombre entre 0 et 1)
— $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$ (Probabilité de l’événement contraire)
— $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

2 Arbre pondéré

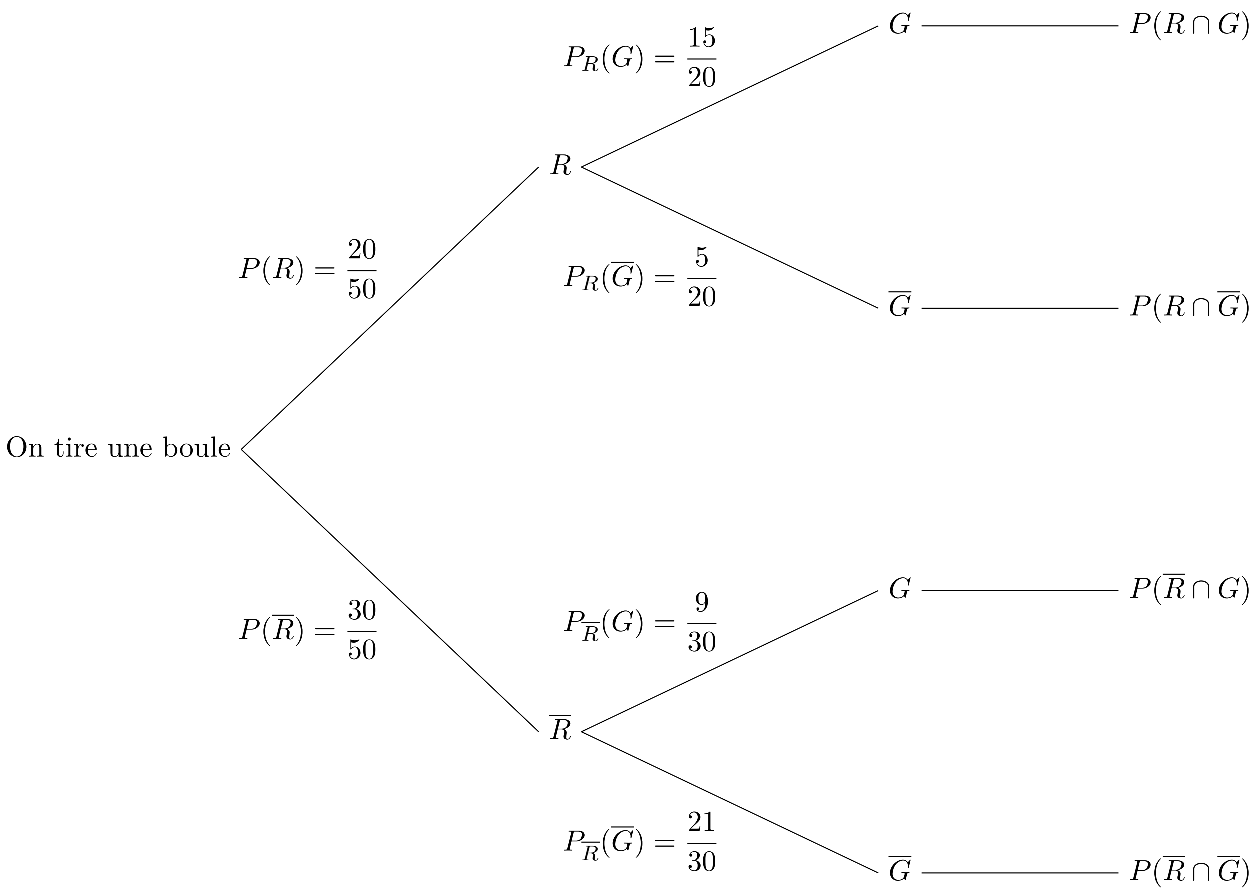
2.1 Exemple : Gagné ou perdu

50 boules : 20 rouges et 30 noires.

- Sur 15 rouges, il est marqué “Gagné”
- Sur 9 noires, il est marqué “Gagné”

R : On tire une boule rouge G : On tire un " gagné "

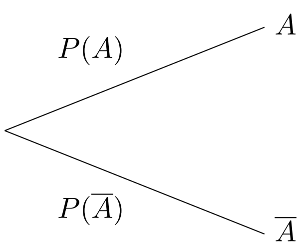
L’expérience aléatoire peut être schématisée par **un arbre pondéré** (ou arbre de *probabilité*).



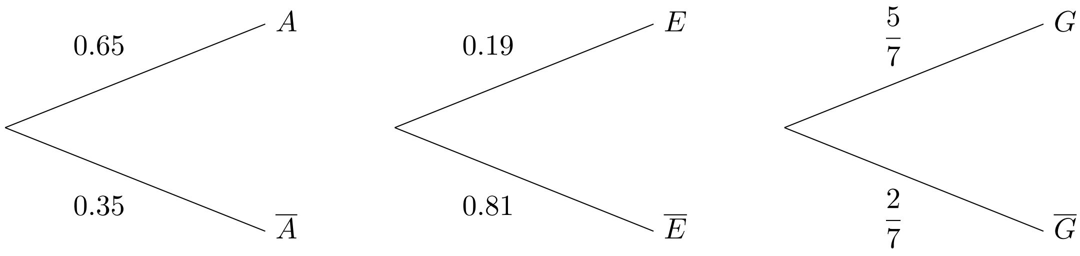
2.2 Règle 1 : Branches issues d’un même noeud

La somme des probabilités des branches issues d’un même noeud est égale à 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$



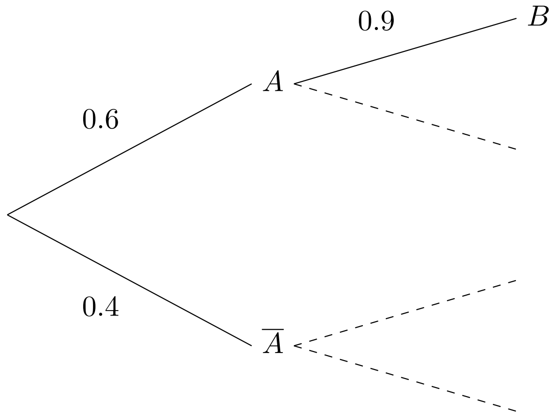
Exemples



2.3 Règle 2 : Probabilité d'une "feuille"

La probabilité d'une "feuille" (extrémité d'un chemin) est égale au **produit** des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

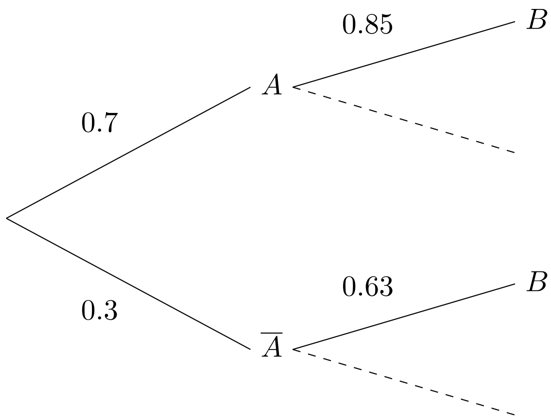
Exemple



$\rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \times 0.9 = 0.54$

2.4 Règle 3 : Probabilités totales

La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à **la somme** des probabilités de chacune de ces "feuilles".

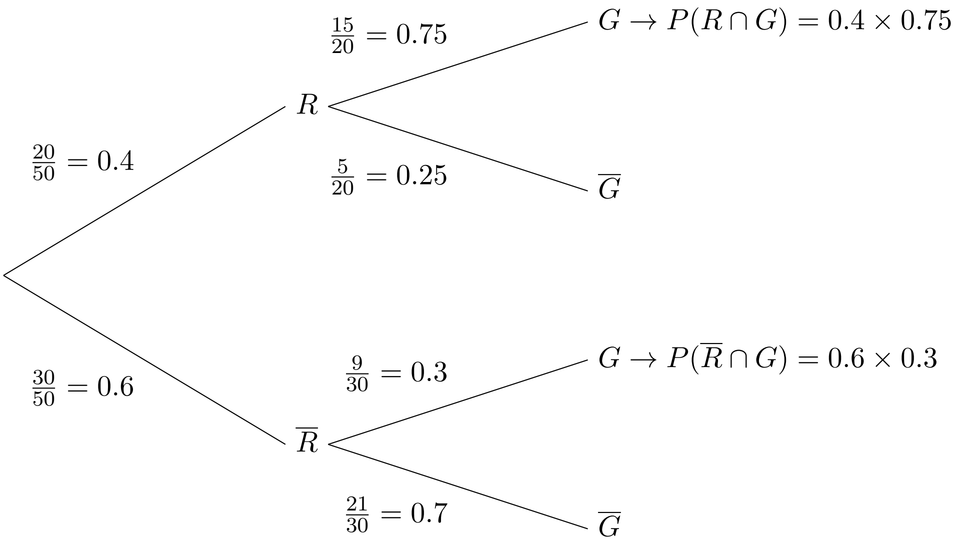


$\rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \times 0.85$

$\rightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0.3 \times 0.63$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= 0.7 \times 0.85 + 0.3 \times 0.63 \\ &= 0.595 + 0.169 = 0.784 \end{aligned}$$

2.4.1 Exemple : Gagné ou perdu



- $P(R \cap G) = 0.4 \times 0.75$ "Rouge et Gagné"
- $P(\overline{R} \cap G) = 0.6 \times 0.3$ "Noire et Gagné"

$$\begin{aligned} P(G) &= P(R \cap G) + P(\overline{R} \cap G) \\ &= 0.4 \times 0.75 + 0.6 \times 0.3 \\ &= 0.3 + 0.18 = 0.48 \end{aligned}$$

3 Probabilités et indépendance

3.1 Définition : Indépendance

On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque :

$$P_A(B) = P(B)/\text{qquad ou}/\text{qquad } P_B(A) = P(A)$$

3.2 Propriété : $P(A \cap B)$

Soient A et B , deux événements **indépendants** alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Preuve

Par définition, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Si A et B sont **indépendants** alors $P_A(B) = P(B)$

Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

— Soit R l'événement "On tire un roi".
— Soit T l'événement "On tire un trèfle".

On a : $P(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $P(T) = \dfrac{8}{32}$

Par ailleurs, $P_T(R)$ est la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles.

On a alors : $P_T(R) = \dfrac{1}{8}$ (un roi parmi les 8 trèfles)

Ainsi, $P_T(R) = P(R)$

Les événements R et T **sont indépendants**.

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes *+ 2 jokers*.

On a : $P(R) = \dfrac{4}{34} = \dfrac{2}{17}$ et $P_T(R) = \dfrac{1}{8}$

Ainsi, $P_T(R) \neq P(R)$

Les événements R et T **ne sont pas indépendants**.

3.3 Méthode : Utiliser l'indépendance de deux événements

Dans une population, un individu est atteint par la maladie a avec une probabilité égale à $0,005$ et par la maladie b avec une probabilité égale à $0,001$.

On choisit au hasard un individu de cette population.

— Soit A l'événement "L'individu a la maladie a".
— Soit B l'événement "L'individu a la maladie b".

On suppose que les événements A et B sont **indépendants**.

✎ Calculer de $P(A \cap B)$ et interpréter le résultat.

Par définition, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Or, A et B sont indépendants donc $P_A(B) = P(B)$

Donc

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \times P(A) \\ &= 0,001 \times 0,005 \\ &= 1 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3} \\ &= 5 \times 10^{-6} = 0,000005 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu soit **atteint par les deux maladies** est égale à $0,000005$

✎ Calculer de $P(A \cup B)$ et interpréter le résultat.

Par définition, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Donc

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,001 + 0,005 - 0,000005 \\ &= 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-6} \\ &= 0,006 - 0,000005 = 0,005995 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait **au moins une des deux maladies** est égale à 0,005 995.