Fonction inverse

T$^{\text{le}}$ STMG

Table des matières

---

1 Définition et représentation graphique

1.1 Définition : Fonction inverse

Définition : La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1.2 Représentation graphique

Table 1 – Tableau de valeurs de la fonction inverse

x	-2	-1	-0.25	0.1	0.5	1	1.25	2	2.5
$f(x) = \frac{1}{x}$	-0.5	-1	-4	10	2	1	0.8	0.5	0.4

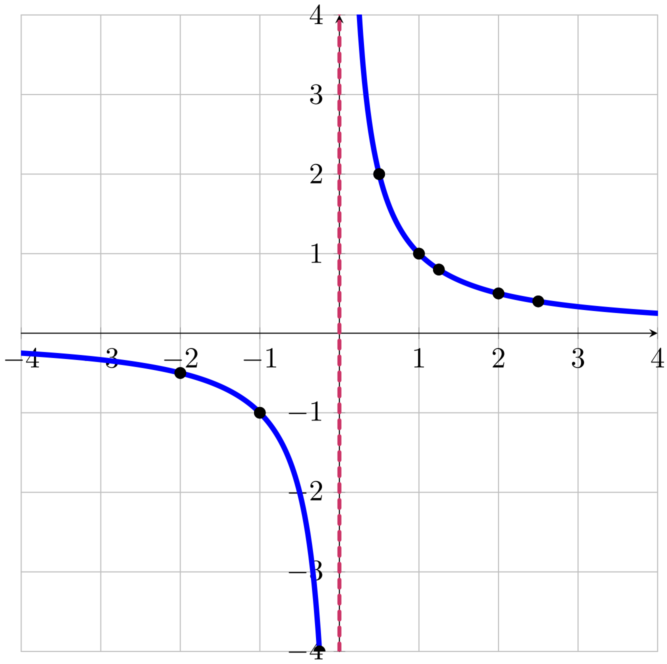

Figure 1 – Représentation graphique de la fonction inverse

1.2.1 Remarque :

La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse, appelée **hyperbole** de centre O, est symétrique par rapport à l'origine.

2 Dérivée et sens de variation

2.1 Propriété : Dérivée de la fonction inverse

La dérivée de la fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

.

Démonstration

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par définition, la fonction dérivée de f est :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \times \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \times \left(\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)} \right) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \times \left(\frac{a-(a+h)}{a(a+h)} \right) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \times \left(\frac{-h}{a(a+h)} \right) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{-1}{a(a+h)} \right) \quad = \frac{-1}{a^2}
\end{aligned}$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $\dfrac{-1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

2.2 Propriété : Variations de la fonction inverse

La fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

Démonstration

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0 \quad$ car $\quad x^2 > 0 \quad$ et $\quad -1 < 0$.

Donc f est **décroissante** sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2.3 Propriété : Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

2.3.1 En $+\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de **plus en plus grand**.

TABLE 2 – Tableau de valeurs de la fonction inverse lorsque $x \to +\infty$

x	0.1	1	2	4	10	50	100	1000	…
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	10	1	0.5	0.25	0.1	0.02	0.01	0.001	…

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de **plus en plus grand**.

On dit que la **limite** de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

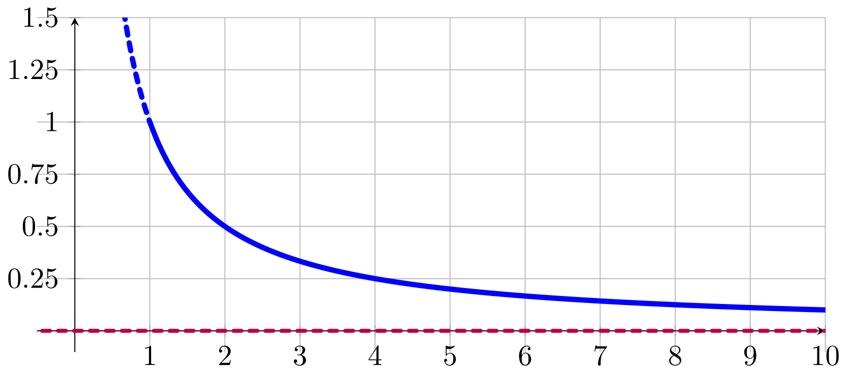

FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction inverse sur $]0\ ;\ +\infty[$

2.3.2 En $-\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de **plus en plus grand dans les négatifs**.

Table 3 – Tableau de valeurs de la fonction inverse lorsque $x \to -\infty$

x	...	-1000	-100	-10	-5	-1	-0.5	-0.1
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	-0.001	-0.01	-0.1	-0.2	-1	-2	-10	...

On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de **plus en plus grand dans les négatifs**.

On dit que la **limite** de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus **grandes dans les négatifs**, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

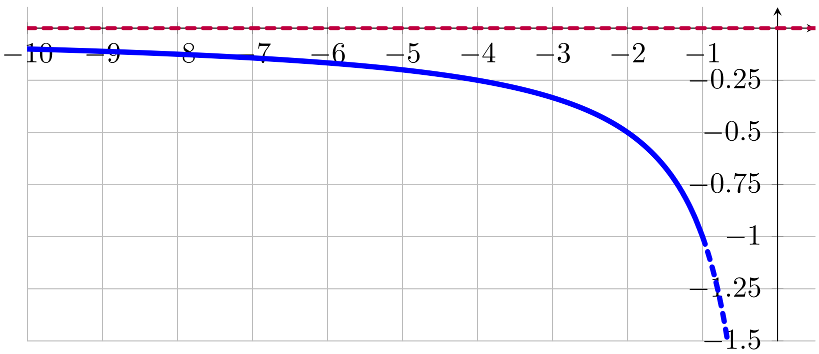

Figure 3 – Représentation graphique de la fonction inverse sur $]-\infty\,;0[$

Remarque :

On dit que l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.3.3 Au voisinage de 0

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$\dots$	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	-1	-2	-10	-100	-1000	$\dots$	1000	100	10	2	1

A l'aide de la calculatrice, on constate que :

— Pour $x > 0$, on a $f(x)$ devient de **plus en plus grand** lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x > 0$ est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

— Pour $x < 0$, on a $f(x)$ devient de **plus en plus grand dans les négatifs** lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x < 0$ est égale à $-\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

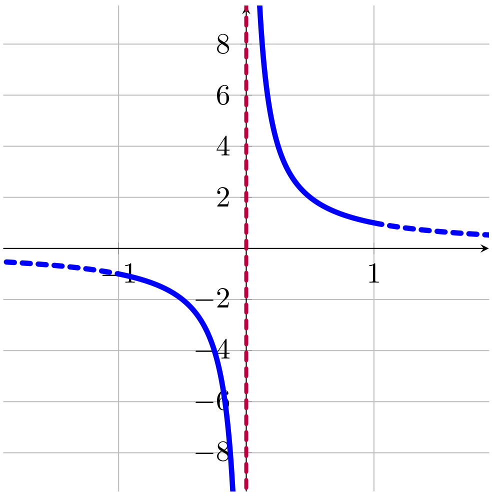

FIGURE 4 – Représentation graphique de la fonction inverse au voisinage de 0

Remarque

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

On dit que l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction inverse.

3 Fonction de la forme $f(x) = P(x) + \dfrac{k}{x}$

3.1 Méthode : Étudier une fonction de la forme $f(x) = P(x) + \dfrac{k}{x}$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 1 - 2x - \dfrac{2}{x}$.

a) Calculer la fonction dérivée de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.
d) Représenter la fonction f dans un repère.

(a) On a : $f(x) = 1 - 2x - 2 \times \frac{1}{x}$

Donc, on a :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 - 2 - 2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \\
&= \frac{-2 \times x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} \\
&= \frac{2 - 2x^2}{x^2}
\end{aligned}
$$

On a donc : $f'(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{x^2}$

(b) On doit résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$.

Pour $x \neq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{2 - 2x^2}{x^2} &> 0 \\
2 - 2x^2 &> 0 \quad \text{car } x^2 > 0 \\
2 &> 2x^2 \\
x^2 &< 1
\end{aligned}
$$

Et donc si $f'(x) > 0$ alors $-1 < x < 1$ et $x \neq 0$.

(c)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	5	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	

(d)

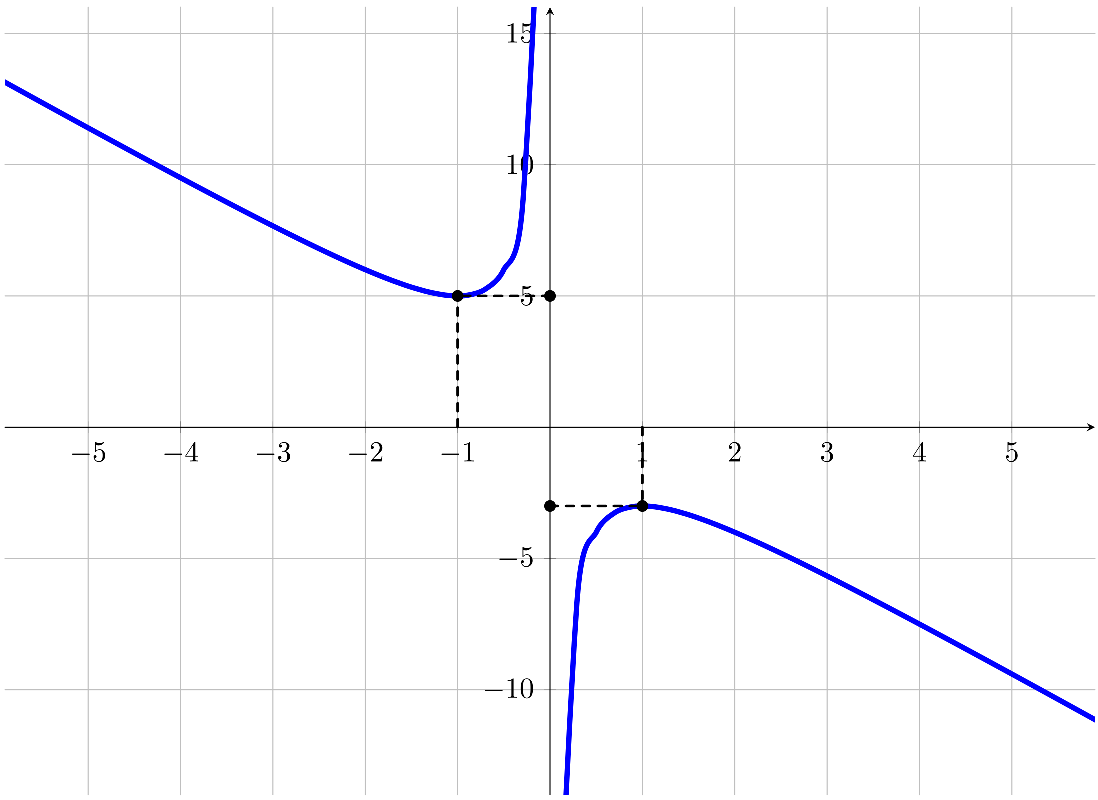

Figure 5 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = 1 - 2x - \frac{2}{x}$