Exercices - Fonction inverse

1ère STMG

Etudier une fonction polynôme $P(x)$ de degré au plus 3

19 Soit f la fonction définie sur [2 ; 10] par :

$$f(x) = 10x^2 - 100x - 5.$$

1. Montrer que $f'(x) = 20x - 100$.

2. a. Résoudre l'inéquation $20x - 100 \geqslant 0$.

b. En déduire que f est croissante sur [5 ; 10]

3. Construire le tableau de variation de f.

20 Soit f la fonction définie sur [– 5 ; 5] par :

$$f(x) = 5x^2 + 20x - 8.$$

1. Montrer que $f'(x) = 10x + 20$.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$.

b. En déduire que f est croissante sur [– 2 ; 5]

3. Construire le tableau de variation de f.

22 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 7x^3 + 8x + 9.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

23 Soit f la fonction définie sur [– 1 ; 5] par :

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 10.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Montrer que $f'(x) = 6x(1 - x)$.

3. On a étudié le signe de $f'(x)$ sur [– 1 ; 5].
Justifier les résultats donnés dans le tableau ci-dessous.

x	– 1		0		1		5
$f'(x)$		–	0	+	0	–	

4. Construire le tableau de variation de f.

24 Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par :

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 1.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. a. Développer $(x - 2)(x - 3)$.

b. Montrer que $f'(x) = 6(x - 2)(x - 3)$.

c. $f'(x)$ est de la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.
Quelle est la valeur de a. Quel est son signe ?

d. La parabole représentant la fonction f' est-elle « tournée vers le haut » ou « tournée vers le bas » ? En déduire le signe de $f'(x)$.

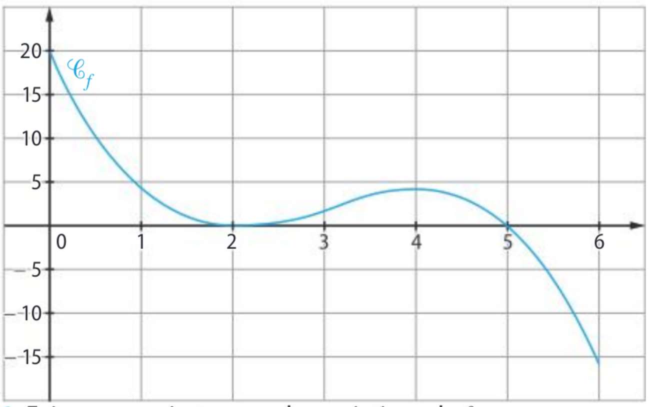
3. Recopier et compléter le tableau de variation de f ci-dessous.

x	0		2		3		5
$f'(x)$		...	0	...	0	...	
$f(x)$	–1	↗	27	...		...	

25 Soit f la fonction définie sur [0 ; 6] par :

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20.$$

On donne la courbe représentative de f ci-dessous.



1. Faire une conjecture sur les variations de f.

2. Calculer $f'(x)$.

3. a. Développer $(-3x + 6)(x - 4)$.

b. En déduire que $f'(x) = -3(x - 2)(x - 4)$.

c. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 6].

4. Construire le tableau de variation de f.

47 Capacité 1, p. 80

Soit f la fonction définie sur [0 ; 10] par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$$

1. Calculer $f'(x)$, puis montrer que pour tout réel x de [0 ; 10],

$$f'(x) = 3(x-1)(x-5).$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 10].

3. Construire le tableau de variation de f sur [0 ; 10].

50 Une bijoutière souhaite lancer un nouveau modèle de bijou. Le nombre de bijoux fabriqués et vendus est compris entre 50 et 300.

On admet que le bénéfice réalisé, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction B définie sur [0,5 ; 3] par :
$B(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 15$ où x représente le nombre de centaines de bijoux fabriqués et vendus.

1. Calculer $B'(x)$.

2. Montrer que $B'(x) = -6(x+1)(x-2)$.

3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur [0,5 ; 3]. En déduire le tableau de variation de la fonction B.

4. Préciser le nombre de bijoux fabriqués et vendus qui permet de réaliser le bénéfice maximal.

Etudier une fonction de la forme : $x \mapsto \dfrac{k}{x}$

27 Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. a. Quelle est l'image par f de chacun des nombres suivants : 1 ; 0,5 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ?

b. Que peut-on dire de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ?

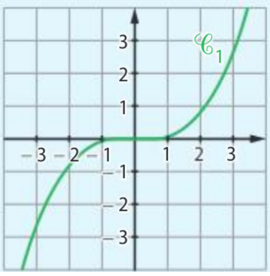
2. a. Quelle est l'image par f de chacun des nombres suivants : 2 ; 5 ; 10 ; 100 et 1 000 ?

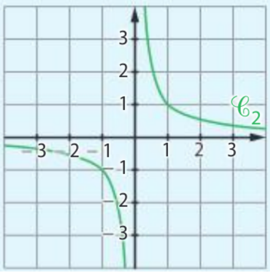
b. Que peut-on dire de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

3. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes. Quelles sont-elles ?

4. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$? sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$?

5. Parmi les courbes ci-dessous, laquelle est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ?





28 Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 \times \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que, pour tout réel x de I, $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$.

2. Justifier que f est décroissante sur I.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0,1	0,2	0,5	1	2	4	10
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...

4. Tracer la courbe représentative de f sur]0 ; 10] dans un repère.

29 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x}.$$

1. Quelle est la valeur du réel k telle que :

$$f(x) = k \times \frac{1}{x}.$$

2. Calculer $f'(x)$.

3. Quel est le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$?

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...

5. Tracer la courbe représentative de f sur]0 ; 10] dans un repère.

30 Reprendre l'exercice **29** avec la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x}$.

31 Reprendre l'exercice **29** avec la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

51 Capacité 2, p. 80

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{9}{2x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Tracer dans un repère la courbe représentative de f.

Etudier une fonction de la forme : $x \mapsto P(x)+\frac{k}{x}$

35 Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I}=[1\,;10]$ par :

$$f(x)=9-\frac{19}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur I.

2. Construire le tableau de variation de f sur I.

37 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x+4}{x}$$

1. Justifier que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=1+\frac{4}{x}$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

3. Quel est le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$?

39 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2-3x+\frac{1}{x}.$$

1. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$,

$$f'(x)=-3-\frac{1}{x^2}.$$

2. Expliquer pourquoi $f'(x)$ est négatif pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

3. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

40 Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I}=]0\,;10]$ par :

$$f(x)=7-x+\frac{10}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de I.

2. Montrer que, pour tout réel x de I, $f'(x)=\frac{-x^2-10}{x^2}$.

3. a. Justifier que, pour tout réel x de I, $-x^2-10<0$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur I.

c. En déduire le sens de variation de f sur I.

4. a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0,1	0,5	1	2	3	5	10
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...

b. Tracer dans un repère la courbe représentative de f.

53 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=2+\frac{5}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Quelle est l'image par f des nombres 10, 100, 1 000 et 10 000 ?

3. Expliquer pourquoi pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)>2$.

4. Tracer dans un repère la courbe représentative de f.

54 Capacité 3, p. 81

Soit f la fonction définie sur $]0\,;5]$ par :

$$f(x)=3x-1+\frac{48}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;5]$.

2. Montrer que pour tout réel x de $]0\,;5]$,

$$f'(x)=\frac{3(x-4)(x+4)}{x^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;5]$.

4. Construire le tableau de variation de f sur $]0\,;5]$.

55 Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I}=]0\,;5]$ par :

$$f(x)=4+16x+\frac{1}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$, puis montrer que pour tout réel x de I,

$$f'(x)=\frac{16x^2-1}{x^2}.$$

2. Justifier que, pour tout réel x de I, $f'(x)$ a le même signe que $(4x-1)$.

3. Construire le tableau de variation de f sur $]0\,;5]$.

4. La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui, préciser sa nature et sa valeur.

67 Soit f la fonction définie sur $]0\,;2]$ par :

$$f(x)=x^3+x+1+\frac{4}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;2]$.

2. Montrer que pour tout réel x de $]0\,;2]$,

$$f'(x)=\frac{(3x^2+4)(x^2-1)}{x^2}.$$

3. Justifier les données du tableau de variation de f ci-dessous.

x	0		1		2
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖	↘	7	↗	13

71 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}5x^2 + 5 + \frac{8}{x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}.$$

2. a. Résoudre l'équation $x^3 - 8 = 0$.

b. Étudier le signe de $x^3 - 8$ sur $]0 ; +\infty[$.

3. En déduire le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

Résoudre un problème avec une fonction de la forme : $x \mapsto P(x) + \frac{k}{x}$

42 Une entreprise fabrique chaque jour entre 5 m^3 et 60 m^3 d'engrais biologique liquide.
Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaines d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué (en m^3).

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}.$$

2. Expliquer pourquoi, pour tout réel x de $[5 ; 60]$, $f'(x)$ a le même signe que $(x^2 - 400)$.

b. Vérifier que $x^2 - 400 = (x - 20)(x + 20)$.

c. Étudier le signe de $x^2 - 400$ sur $\mathbb{R}$, puis sur l'intervalle $[5 ; 60]$.

3. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[5 ; 60]$.

4. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

74 Une coopérative désire optimiser la production de son unité de tri de pommes.
On désigne par x le nombre de centaines de pommes triées par heure. On suppose que le nombre de pommes avariées non écartées à l'issue du tri est une fonction de x, notée f, telle que $f(x) = x^2 - 84x + 1849$, lorsque x appartient à l'intervalle $[42 ; 50]$.

1. a. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[42 ; 50]$.

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[42 ; 50]$.

2. On estime le tri satisfaisant si la proportion de pommes avariées non écartées n'excède pas 3 % des pommes triées.
Justifier que le nombre $\frac{f(x)}{x}$ doit être inférieur ou égal à 3.

3. On nomme g la fonction définie sur $[42 ; 50]$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

a. Justifier que pour tout réel x de $[42 ; 50]$,

$$g(x) = x - 84 + \frac{1849}{x}.$$

b. Montrer que pour tout réel x de $[42 ; 50]$,

$$g'(x) = \frac{(x - 43)(x + 43)}{x^2}.$$

3. On nomme g la fonction définie sur $[42 ; 50]$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

a. Justifier que pour tout réel x de $[42 ; 50]$,

$$g(x) = x - 84 + \frac{1849}{x}.$$

b. Montrer que pour tout réel x de $[42 ; 50]$,

$$g'(x) = \frac{(x - 43)(x + 43)}{x^2}.$$

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[42 ; 50]$

d. Tracer dans un repère la courbe représentative de g.

e. En utilisant le graphique, déterminer le nombre maximal de pommes à trier par heure pour lequel le tri reste satisfaisant.

MATHS & ÉCONOMIE

75 Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 11. Le coût de fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C_T définie sur l'intervalle [0 ; 11] par :

$$C_T(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

Partie A. Étude du coût moyen

Le coût moyen correspondant à la production de x tonnes de bouteilles est défini sur l'intervalle]0 ; 11] par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$

Partie A. Étude du coût moyen

Le coût moyen correspondant à la production de x tonnes de bouteilles est défini sur l'intervalle]0 ; 11] par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x de]0 ; 11],

$$C_M(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 20 + \frac{72}{x}.$$

2. Montrer que pour tout réel x de]0 ; 11],

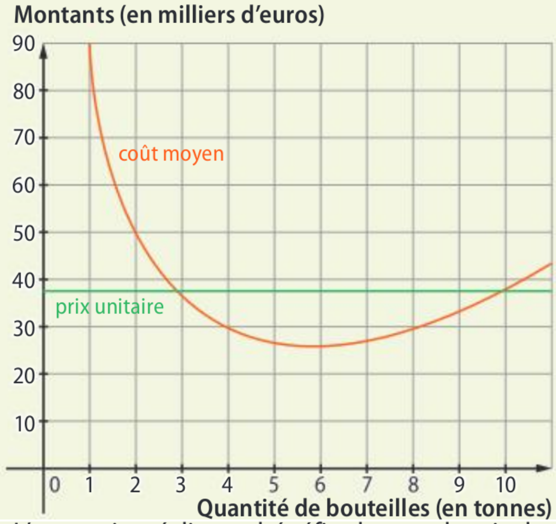
$$C'_M(x) = \frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}.$$

3. Justifier que sur]0 ; 11], $C'_M(x)$ est du signe de $x - 6$. En déduire le tableau de variation de la fonction C_M.

4. Quel est le coût moyen minimal ?

Partie B. Étude du bénéfice

L'entreprise vend ses bouteilles 37,5 milliers d'euros la tonne. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction C_M ainsi que la droite d'équation $y = 37{,}5$.



1. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque le prix de vente unitaire est supérieur au coût moyen. Par lecture graphique, déterminer pour quelles quantités de bouteilles produites et vendues, l'entreprise réalise un bénéfice.

2. a. Montrer que le bénéfice réalisé par la production et la vente de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction B définie sur [0 ; 11] par :

$$B(x) = -0{,}5x^3 + 4x^2 + 17{,}5x - 72.$$

b. Calculer $B'(x)$ et montrer que pour tout réel x de [0 ; 11],

$$B'(x) = -0{,}5(x-7)(3x+5).$$

c. Construire le tableau de variation de B sur [0 ; 11].

d. Pour quelle quantité de bouteilles fabriquées et vendues le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?