Probabilité

2^{nde} GT

Table des matières

---

1 Expérience aléatoire, issue, événement, . . .

1.1 Définition : Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle **l'univers** de l'expérience.

On le note en général Ω

1.2 Définition : Issue, Événement

Soit une **expérience aléatoire** d'univers Ω.

Chacun des résultats possibles s'appelle une **éventualité** (ou un **événement élémentaire** ou une **issue**).

On appelle **événement** tout sous ensemble de Ω.

Un événement est donc constitué de zéro, une ou plusieurs éventualités.

Ex.1 : Des lettres

Expérience aléatoire : “Choisir, au hasard, une lettre dans l’alphabet”

$\Omega = \{A; B; C; D; E; F; G; H; ...; X; Y; Z\}$

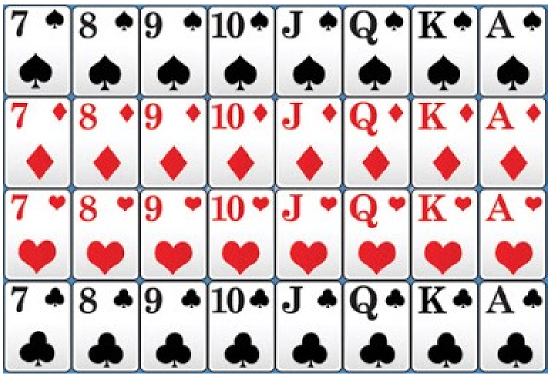
L’ensemble $E_1 = \{A; E; I; O; U\}$ est un événement.

En français, cet événement peut se traduire par la phrase : “La lettre choisie est une voyelle”

L’ensemble $E_2 = \{K; W; X; Y; Z\}$ est un autre événement.

Ce second événement peut se traduire par la phrase : “La lettre choisie vaut 10 pts au scrabble”

Ex.2 : Des cartes



Expérience aléatoire : “Choisir, au hasard, une carte dans un jeu de 32 cartes”

$\Omega = \{7♠; 8♠; 9♠; 10♠; ...; Q♣; K♣; A♣\}$

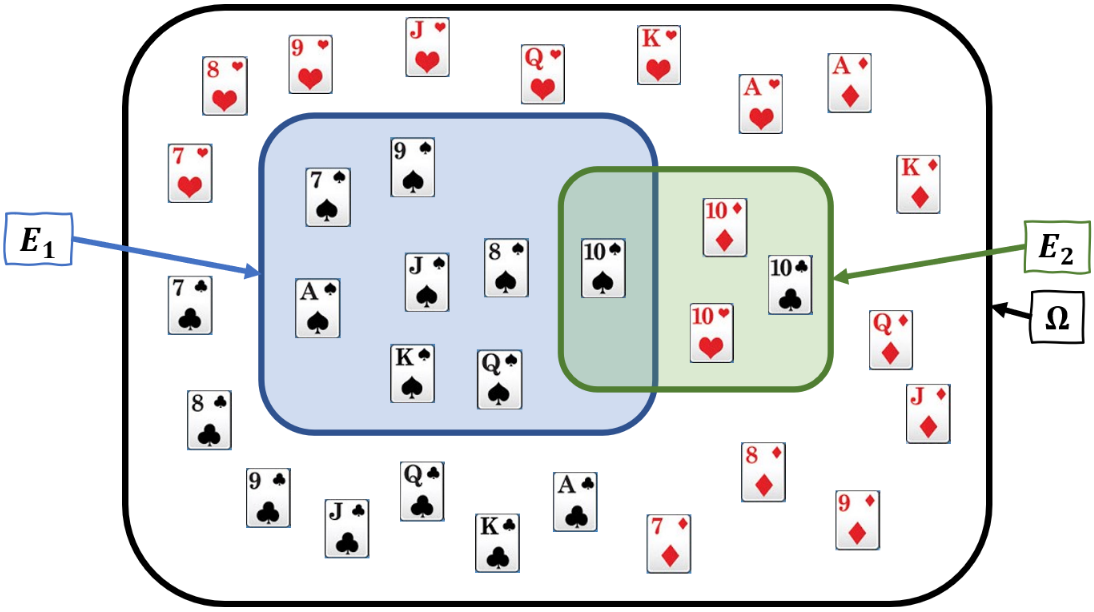
L’ensemble $E_1 = \{7♠; 8♠; 9♠; 10♠; J♠; Q♠; K♠; A♠\}$ est un événement.

En français, cet événement peut se traduire par la phrase : “La carte choisie est un pique.”

L'ensemble $E_2 = \{10\spadesuit ; 10\clubsuit ; 10\heartsuit ; 10\diamondsuit\}$ est un autre événement.

Ce second événement peut se traduire par la phrase : “La carte choisie est un 10.”

Ces événements peuvent être représentés par un diagramme de Venn :



1.3 Définition : Impossible, Certain, Contraire, Union, Intersection

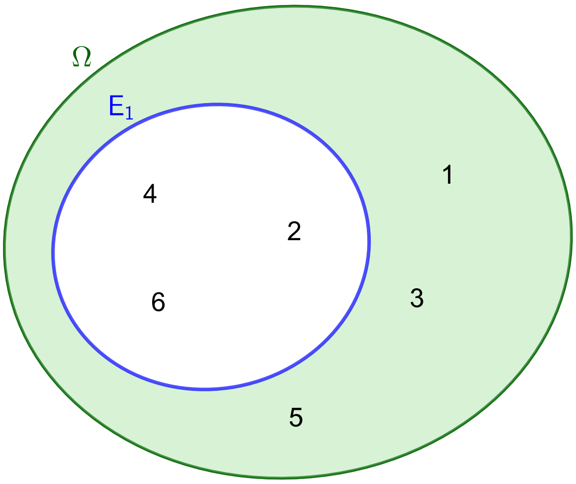
- L'événement **impossible** est la partie vide, noté $\varnothing$, lorsque aucune issue ne le réalise.
- L'événement **certain** est Ω, lorsque toutes les issues le réalisent.
- L'événement **contraire** de A noté $\overline{A}$ est l'ensemble des issues de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- L'événement $A \cup B$ (lire « A union B » ou « A **ou** B ») est constitué des éventualités qui appartiennent **soit à** A, **soit à** B, **soit aux deux ensembles**.
- L'événement $A \cap B$ (lire « A inter B » ou « A **et** B ») est constitué des éventualités qui appartiennent à A **et** à B.

Exemple

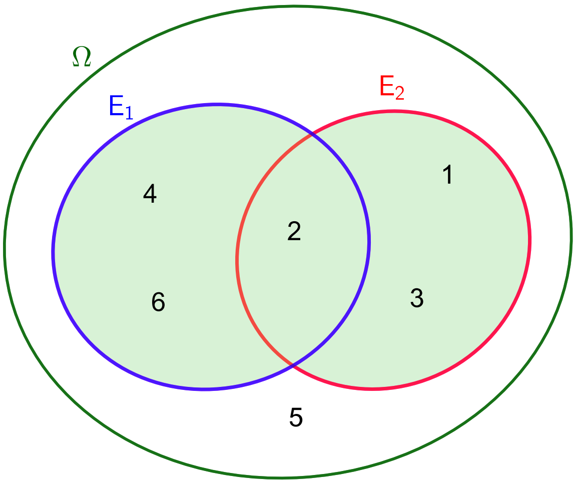
Expérience aléatoire : Lancer d'un dé à six faces

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

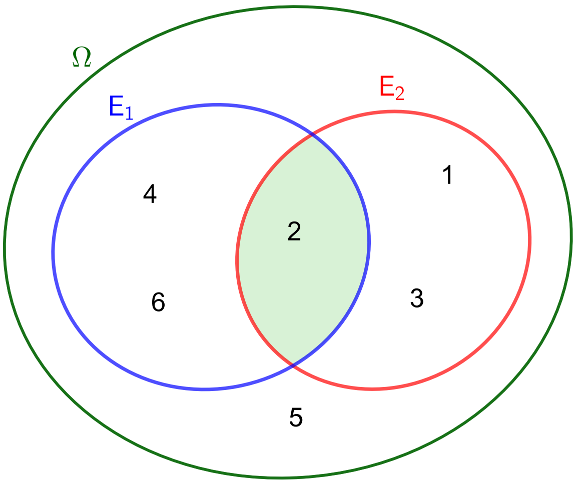
- $E_1 = \{2; 4; 6\}$: “Obtenir un nombre pair”
- $E_2 = \{1; 2; 3\}$: “Obtenir un nombre strictement inférieur à 4”
- E_3 : “Obtenir un nombre supérieur à 6” est un événement **impossible**. $E_3 = \varnothing$
- E_4 : " Obtenir un nombre entier" est un événement **certain**. $E_4 = \Omega$
- $\overline{E_1} = \{1; 3; 5\}$: “Obtenir un nombre impair” est le **contraire** de E_1 : “Obtenir un nombre pair”



— $E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; 6\}$: “Obtenir un nombre pair **ou** strictement inférieur à 4”



— $E_1 \cap E_2 = \{2\}$: “Obtenir un nombre pair **et** strictement inférieur à 4”



1.4 Définition : Incompatible

On dit que A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Deux événements sont incompatibles lorsqu'aucun événement ne les réalise simultanément.

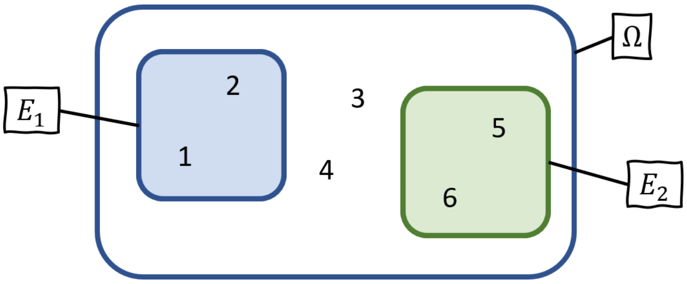
Remarque

Deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements peuvent être incompatibles sans être contraires.

Exemple

- $E_1 = \{1; 2\}$: "Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2"
- $E_2 = \{5; 6\}$: "Obtenir un chiffre supérieur à 4 »

E_1 et E_2 sont deux événements incompatibles.



2 Probabilités

2.1 Définition : Probabilité

La probabilité d'un événement élémentaire est un nombre réel tel que:

- Ce nombre est compris **entre** 0 **et** 1
- La **somme** des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers vaut 1

2.2 Propriétés : Événement impossible, certain et contraire

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

Ex.1

On lance un dé à six faces. On note E l'événement : "Obtenir un 1". On suppose que le dé est bien équilibré et que la probabilité de E est de $\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir un résultat différent de 1 est : $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Ex.2

Expérience aléatoire : “Choisir, au hasard, une lettre dans l'alphabet”

Soit E_1 : “La lettre choisie est un K” $\Rightarrow E_1 = \{K\}$

Donc $P(E_1) = \dfrac{1}{26}$ et $P(\overline{E_1}) = \dfrac{25}{26}$

2.3 Propriété : Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement est la **somme des probabilités des événements élémentaires** qui le compose.

Exemple

Expérience aléatoire : “Choisir, au hasard, une lettre dans l'alphabet”

Soit E_2 : “La lettre choisie est une voyelle” $\Rightarrow E_2 = \{A; E; I; O; U; Y\}$

On a $P(\text{"}A\text{"}) = P(\text{"}E\text{"}) = P(\text{"}I\text{"}) = P(\text{"}O\text{"}) = P(\text{"}U\text{"}) = P(\text{"}Y\text{"}) = \dfrac{1}{26}$.

Donc $P(\overline{E_2}) = P(\text{"}A\text{"}) + P(\text{"}E\text{"}) + ... + P(\text{"}Y\text{"}) = 6 \times \dfrac{1}{26} = \dfrac{3}{13}$

2.4 Théorème : $P(A \cup B)$

Soit A et B deux événement de Ω :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

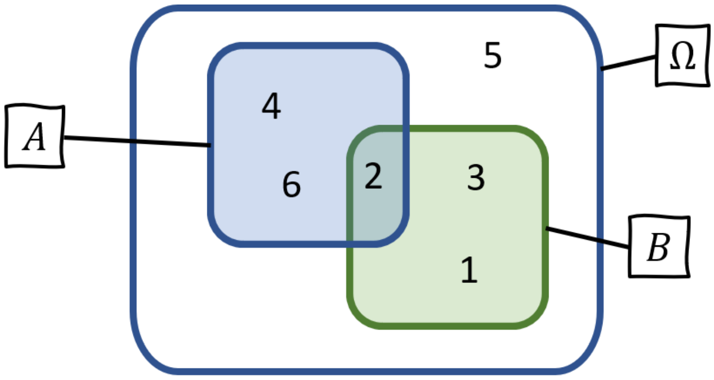
Exemple

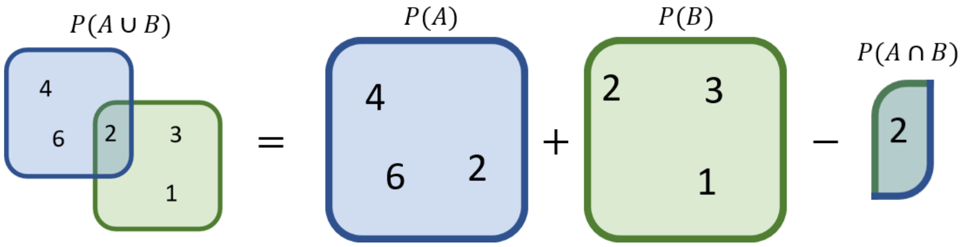
Expérience aléatoire : Lancer d'un dé à six faces

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

- $A = \{2; 4; 6\}$: “Obtenir un nombre pair” $\Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{6}$
- $B = \{1; 2; 3\}$: “Obtenir un nombre strictement inférieur à 4” $\Rightarrow P(B) = \dfrac{3}{6}$
- $A \cap B = \{2\}$: “Obtenir un nombre pair **et** strictement inférieur à 4” $\Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$
- $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$: “Obtenir un nombre pair **ou** strictement inférieur à 4”

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$





2.5 Définition : Équiprobabilité

Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

Lorsque tous les événements élémentaires sont **équiprobables** d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a situation d'**équiprobabilité**.

Exemples et contre-exemple

— Un lancer d'un dé non truqué et noter le nombre obtenu.

Situation d'équiprobabilité car $P(\text{"1"}) = P(\text{"2"}) = P(\text{"3"}) = P(\text{"4"}) = P(\text{"5"}) = P(\text{"6"}) = \dfrac{1}{6}$

— Choisir, au hasard, une carte dans un jeu de 32 cartes et noter la couleur obtenue.

Situation d'équiprobabilité car $P(\text{"}\spadesuit\text{"}) = P(\text{"}\clubsuit\text{"}) = P(\text{"}\heartsuit\text{"}) = P(\text{"}\diamondsuit\text{"}) = \dfrac{1}{4}$

Il y a autant de ♠, ♣, ♥ et ♦ dans le jeu de cartes.

— Choisir, au hasard, un élève dans la classe et noter son nom et prénom.

Situation d'équiprobabilité car $P(\text{"Astride Béranger"}) = P(\text{"Bilal Maoudi"}) = ... = \dfrac{1}{\text{nb élèves}}$

— Choisir, au hasard, un élève dans la classe et la marque de son téléphone.

Ce n'est pas une situation d'équiprobabilité car $P(\text{"APPLE"}) \neq P(\text{"NOKIA"}) \neq P(\text{"SAMSUNG"}) \neq ...$

Les marques de téléphone portable ne sont pas réparties équitablement dans une classe.

2.6 Propriétés : Probabilité en situation d'équiprobabilité

On suppose que l'univers est composé de n événements élémentaires.

- Dans le cas d'équiprobabilité, chaque événement élémentaire a pour probabilité :

$$p = \frac{1}{n}$$

- Si un événement A de Ω est composé de m événements élémentaires, alors :

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Exemple

Expérience aléatoire : Lancer d'un dé à six faces $\Rightarrow \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Situation d'équiprobabilité car $P(\text{"1"}) = P(\text{"2"}) = P(\text{"3"}) = P(\text{"4"}) = P(\text{"5"}) = P(\text{"6"}) = \dfrac{1}{6}$

- $A = \{2; 4; 6\}$: "Obtenir un nombre pair" $\Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Remarque

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

On peut aussi écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Avec $\text{Card}(A)$ = nombre d'éléments de A et $\text{Card}(\Omega)$ = nombre d'éléments de Ω