Variables aléatoires

1ère STMG

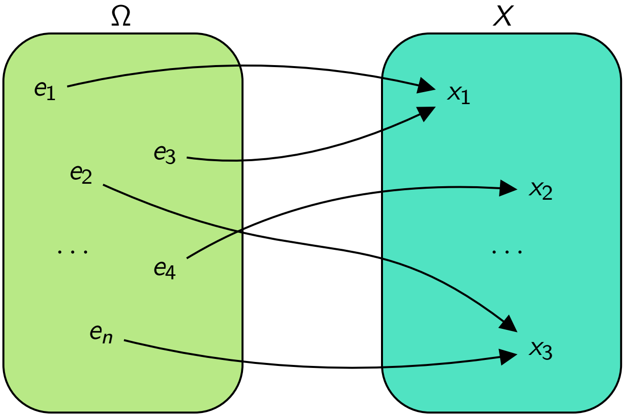
Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition : Variable aléatoire

Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers Ω.

Définition : Variable aléatoire

Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers Ω.



Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.
On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est **pair**, on gagne 2€.
- Si le résultat est **1**, on gagne 3€.
- Si le résultat est **3** ou **5**, on perd 4€.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs **2**, **3** ou **-4**.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs **2**, **3** ou **-4**.

- Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : X=2
- Pour l'issue 1, on a : X=3
- Pour les issues 3 et 5, on a : X=-4

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs **2**, **3** ou -**4**.

- Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : X=2
- Pour l'issue 1, on a : X=3
- Pour les issues 3 et 5, on a : X=-4

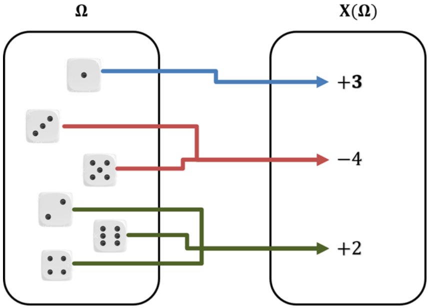


FIGURE 1: Variable aléatoire X

Définition : Loi de probabilité

La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Définition : Loi de probabilité

La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_N

Exemple

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Exemple

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

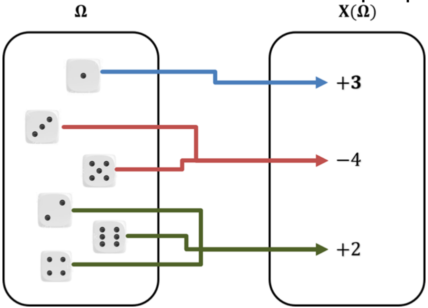


Figure 2: Variable aléatoire X

Exemple

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

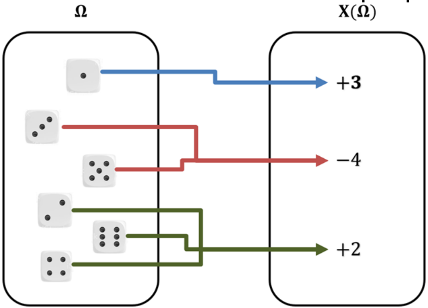


FIGURE 2: Variable aléatoire X

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur **2** est égale à $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur **2** est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

On note : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur **2** est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

On note : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

De même : $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur **2** est égale à $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

On note : $P(X=2)=\frac{1}{2}$.

De même : $P(X=3)=\frac{1}{6}$ et $P(X=-4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	**-4**	**2**	**3**
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Remarques :

- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i.
- $p_1 + p_2 + ... + p_N = 1$

Remarques :

- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i.
- $p_1 + p_2 + ... + p_N = 1$

Exemple

Dans l'exemple traité plus haut : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

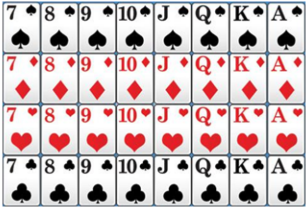


FIGURE 3: Jeu de 32 cartes

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

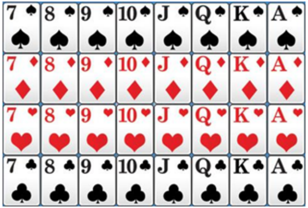


FIGURE 3: Jeu de 32 cartes

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un coeur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer $P(X \geq 5)$ et interpréter le résultat.

(a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs **2**, **5**, **-1** mais aussi **7**. En effet, si on tire le roi de coeur, on gagne 5€ pour le roi et 2€ pour le coeur = 7€.

(a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs **2**, **5**, **-1** mais aussi **7**. En effet, si on tire le roi de coeur, on gagne 5€ pour le roi et 2€ pour le coeur = 7€.

- Si la carte tirée est un coeur (autre que le roi de coeur), $X = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}$$

(a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs **2**, **5**, **-1** mais aussi **7**. En effet, si on tire le roi de coeur, on gagne 5€ pour le roi et 2€ pour le coeur = 7€.

- Si la carte tirée est un coeur (autre que le roi de coeur), $X = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}$$

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de coeur), $X = 5$.

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}$$

(a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs **2**, **5**, **-1** mais aussi **7**. En effet, si on tire le roi de coeur, on gagne 5€ pour le roi et 2€ pour le coeur = 7€.

- Si la carte tirée est un coeur (autre que le roi de coeur), $X = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}$$

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de coeur), $X = 5$.

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}$$

- Si la carte tirée est le roi de coeur, $X = 7$.

$$P(X = 7) = \frac{1}{32}$$

- Si la carte tirée n'est ni un coeur, ni un roi, $X = -1$.

$$P(X = -1) = \frac{21}{32}$$

La loi de probabilité de X est :

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

(b) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. La probabilité de gagner plus de 5€ est égale à $\frac{1}{8}$.

Espérance

Définition : Espérance mathématique

L'**espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est :

$$E(x) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + ... + p_n \times x_n$$

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi de probabilité

On considère le jeu du paragraphe précédent dont la loi de probabilité de X est la suivante.

x_i	-1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

a) Calculer l'espérance de la loi de probabilité de X et interpréter le résultat.

(a) $E(X) = \left(\frac{21}{32} \times (-1)\right) + \left(\frac{7}{32} \times 2\right) + \left(\frac{3}{32} \times 5\right) + \left(\frac{1}{32} \times 7\right) = \frac{15}{32}$

(a) $E(X) = \left(\frac{21}{32} \times (-1)\right) + \left(\frac{7}{32} \times 2\right) + \left(\frac{3}{32} \times 5\right) + \left(\frac{1}{32} \times 7\right) = \frac{15}{32}$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ $0,50$€.

(a) $E(X) = \left(\frac{21}{32} \times (-1)\right) + \left(\frac{7}{32} \times 2\right) + \left(\frac{3}{32} \times 5\right) + \left(\frac{1}{32} \times 7\right) = \frac{15}{32}$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ $0,50$€.

Remarque

L'espérance est donc la **moyenne** que l'on peut *espérer* si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.