

# Suites numériques

1<sup>ère</sup> STMG

## Table des matières

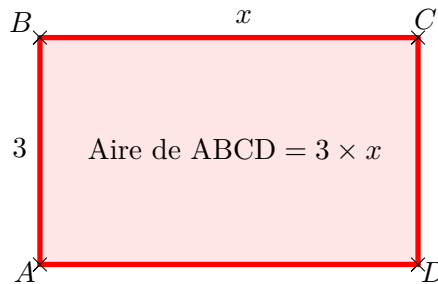
<b>1 Définitions, notations et représentation graphique</b>	<b>2</b>
1.1 Définition : Fonction . . . . .	2
1.2 Image et antécédent . . . . .	2
1.3 Méthode : Calculer une image ou un antécédent . . . . .	3
1.4 Représentation graphique . . . . .	4
<b>2 Résolution graphique d'équations et d'inéquations</b>	<b>5</b>
2.1 Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation . . . . .	5
2.2 Remarques : Validité et unicité des résultats . . . . .	5
<b>3 Variations d'une fonction</b>	<b>6</b>
3.1 Définition : Taux de variation . . . . .	6
3.2 Propriété : Taux de variation et coefficient directeur . . . . .	6
3.3 Méthode : Déterminer un taux de variation d'une fonction . . . . .	6
3.4 Définition : Fonctions monotones . . . . .	7
3.5 Propriétés : Taux de variation . . . . .	7
3.6 Méthode : Étudier les variations d'une fonction à l'aide du taux de variation . . . . .	7

---

# 1 Définitions, notations et représentation graphique

## Exemple

On considère la fonction  $f$  qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions 3 et  $x$ .



Une expression littérale de  $f$  est donc :  $f(x) = 3 \times x$ .

## 1.1 Définition : Fonction

Une fonction  $f$  associe à tout nombre réel  $x$  un unique nombre réel, noté  $f(x)$ .

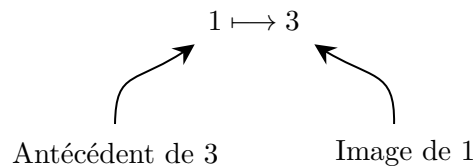
On note également :  $x \mapsto f(x)$  ou  $y = f(x)$ .

## 1.2 Image et antécédent

Pour la fonction  $f$  définie plus haut, on a :  $f(1) = 3 \times 1 = 3$  et  $f(4) = 3 \times 4 = 12$

On dit que :

- l'**image** de 1 par la fonction  $f$  est 3.  $1 \mapsto 3$
- un **antécédent** de 3 par  $f$  est 1.



## Remarques

- Un nombre possède **une unique image**.
- Cependant, un nombre peut posséder **plusieurs antécédents**.

### 1.3 Méthode : Calculer une image ou un antécédent

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x} + 1$

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessus

$x$	4	10,24	16	20,25
$f(x)$				

b) Compléter alors :

- L'image de 4 par  $f$  est ...
- Un antécédent de 5 par  $f$  est ...
- $f : \dots \mapsto 4,2$
- $f(20,25) = \dots$

c) Calculer  $f(4,41)$  et  $f(1310,44)$

(a) Tableau de valeurs

$x$	4	10,24	16	20,25
$f(x)$	<b>3</b>	<b>4,2</b>	<b>5</b>	<b>5,5</b>

(b)

- L'image de 4 par  $f$  est **3**
- Un antécédent de 5 par  $f$  est **16**
- $f : \mathbf{10,24} \mapsto 4,2$
- $f(20,25) = \mathbf{5,5}$

(c) Images de 4,41 et 1310,44

$$f(4,41) = \sqrt{4,41} + 1 = \mathbf{3,1}$$

$$f(1310,44) = \sqrt{1310,44} + 1 = \mathbf{37,2}$$

## 1.4 Représentation graphique

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 5x - x^2$ .

On réalise le tableau de valeurs suivant :

$x$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on lise  $x$  en abscisse et  $f(x)$  en ordonnée. En reliant les points, on obtient la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

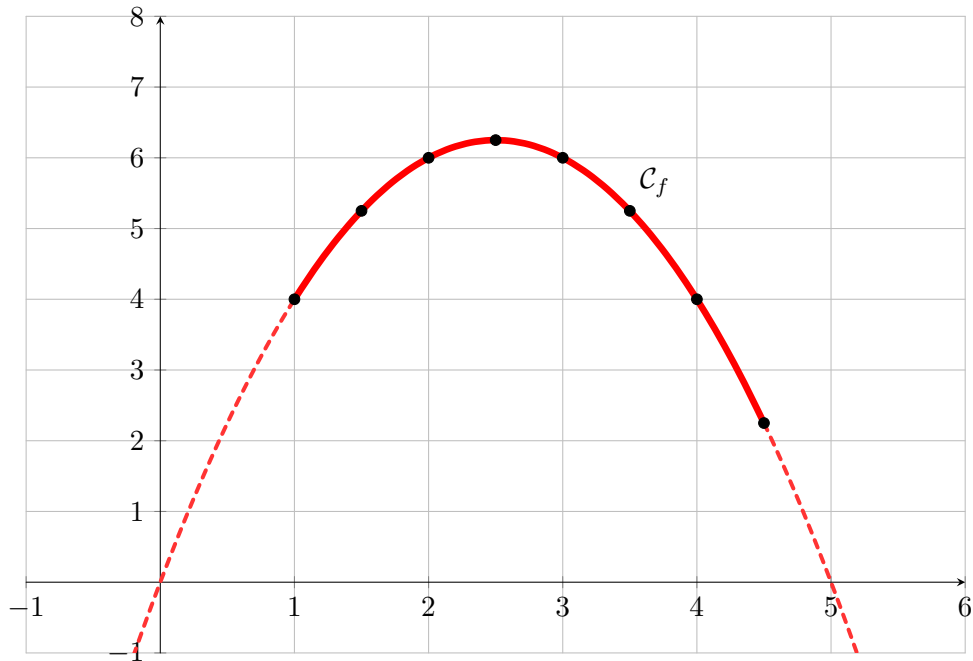


FIGURE 1 – Représentation graphique de  $f(x) = 5x - x^2$

Tous les points de la courbe  $\mathcal{C}_f$  possèdent donc des coordonnées de la forme  $(x; f(x))$ .

La courbe représentative de la fonction  $f$  dépasse les limites du tableau de valeurs : la fonction n'est pas limitée aux valeurs de  $x \in [1; 4,5]$ . C'est pourquoi nous pouvons prolonger la courbe (en pointillé) dans la représentation ci-dessus.

## 2 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

### 2.1 Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

Répondre **graphiquement** aux questions suivantes :

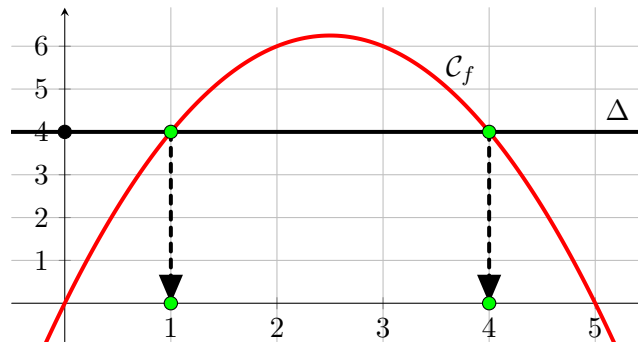
- a) Résoudre l'équation  $5x - x^2 = 4$
- b) Résoudre graphiquement l'inéquation  $5x - x^2 \geq 4$ . Donner une interprétation du résultat.

---

(a) On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 5x - x^2$ .

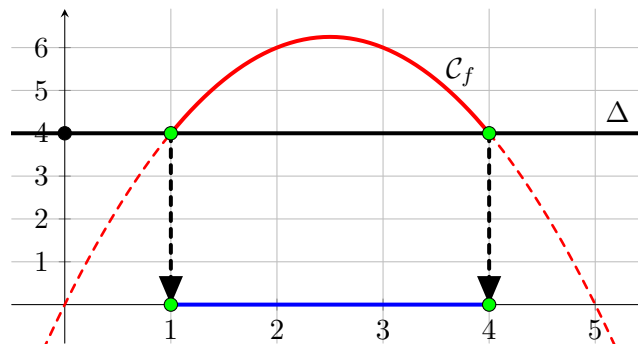
Il s'agit de trouver les antécédents de 4 par la fonction  $f$ . Ce qui revient à résoudre l'équation  $f(x) = 4$ .

On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec la droite  $\Delta$  parallèle à l'axe des abscisses passant par le point  $(0 ; 4)$ .



On lit graphiquement que l'équation  $5x - x^2 = 4$  admet pour solutions : les nombres 1 et 4.

- (b) Résoudre l'inéquation  $5x - x^2 \geq 4$  revient à déterminer les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  pour lesquels  $\mathcal{C}_f$  est **au-dessus** la droite  $\Delta$ .



On lit graphiquement que l'inéquation  $5x - x^2 \geq 4$  admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle  $[1; 4]$ .

### 2.2 Remarques : Validité et unicité des résultats

- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées. Il est indispensable de vérifier les résultats par un calcul.
- L'équation  $f(x) = 7$  n'a pas de solution car dans ce cas la droite  $\Delta$  ne coupe pas la courbe.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

### 3 Variations d'une fonction

#### 3.1 Définition : Taux de variation

Le **taux de variation** de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le nombre :

$$t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

#### 3.2 Propriété : Taux de variation et coefficient directeur

Le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le **coefficient directeur** (*la pente*) de la droite passant par les points d'abscisses  $a$  et  $b$  de la courbe de  $f$ .

#### 3.3 Méthode : Déterminer un taux de variation d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 + 1$ .

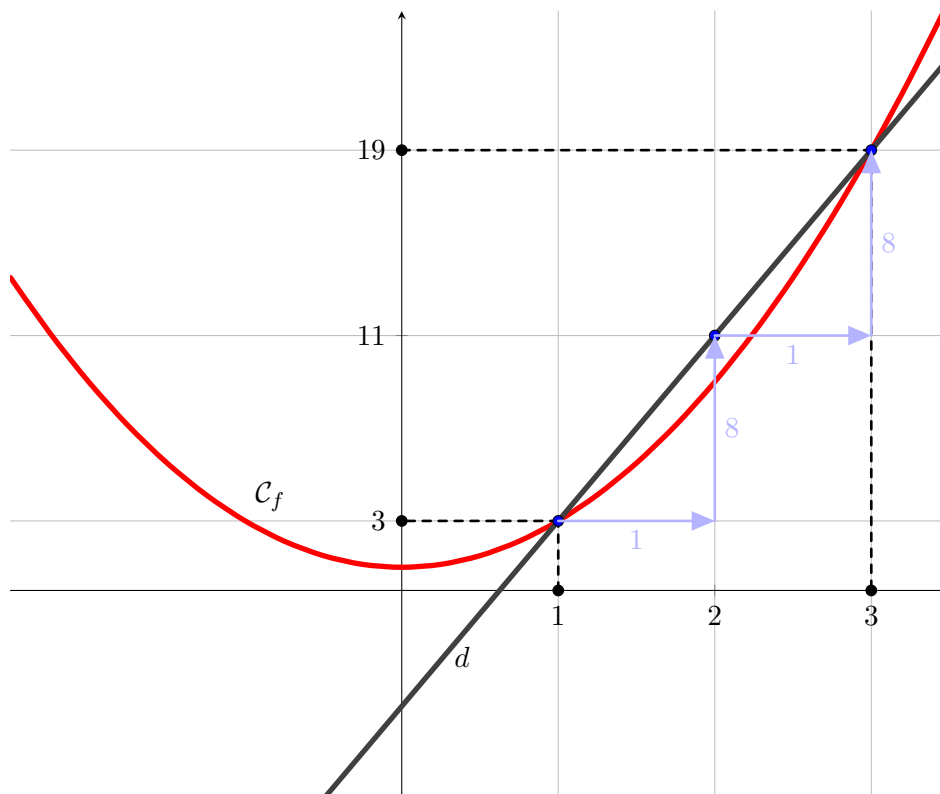
- a) Déterminer le taux de variation entre 1 et 3.
- b) Interpréter géométriquement ce taux de variation.

---

(a) Taux de variation entre 1 et 3

$$\begin{aligned} \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} &= \frac{(2 \times 3^2 + 1) - (2 \times 1^2 + 1)}{2} \\ &= \frac{19 - 3}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

- (b) Le taux de variation de  $f$  entre 1 et 3 est égal à 8 donc la pente de la droite passant par les points d'abscisses 1 et 3 est égale à 8.



### 3.4 Définition : Fonctions monotones

On dit qu'une fonction  $f$  est **monotone** sur un intervalle  $I$ , si  $f$  est :

- soit **croissante** sur  $I$ ,
- soit **décroissante** sur  $I$ ,
- soit **constante** sur  $I$ .

### 3.5 Propriétés : Taux de variation

Si le **taux de variation** d'une fonction  $f$  entre deux nombres quelconques d'un intervalle  $I \dots$

- ... est **positif**, alors  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$ .
- ... est **négatif**,  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- ... est **nul**,  $f$  est constante sur  $I$ .

### 3.6 Méthode : Étudier les variations d'une fonction à l'aide du taux de variation

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 5x - 3$ .

- a) Démontrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

---

(a) On considère deux nombres quelconques  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est égal à :

$$\begin{aligned}\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(5b - 3) - (5a - 3)}{b - a} \\ &= \frac{5b - 5a}{b - a} \\ &= \frac{5(b - a)}{b - a} \\ &= 5\end{aligned}$$

Or,  $5 > 0$  donc  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$  et donc  $f$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .