Fonctions et équations du 2^{nd} degré

1 Résolution d'une équation du 2^{nd} degré

Définition

Une **équation du 2^{nd} degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec : $a \neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple

L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du 2^{nd} degré.

1.1 Définition

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Méthode : Résoudre une équation du 2^{nd} degré

Résoudre les équations suivantes : (@) $2x^2 - x - 6 = 0$ (@) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ (@) $x^2 + 3x + 10 = 0$

- Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$

— Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

$a = 2,\ b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$

— Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

$a = 1,\ b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété

La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du 2^{nd} degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par :

$S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exercice : Démontrer ces deux formules.

Soit x_1 et x_2 les solutions de $x^2 + bx + c = 0$ alors
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Donc $S = x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned}
S &= x_1 + x_2 \\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) + (-b+\sqrt{\Delta})}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}
\end{aligned}$$

Pour le produit, $P = x_1 \times x_2$:

$$\begin{aligned}
P &= x_1 \times x_2 \\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) \times (-b+\sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} \\
&= \frac{(-b)^2 + \Big((-b) \times \sqrt{\Delta}\Big) + \Big(-\sqrt{\Delta} \times (-b)\Big) + (-\sqrt{\Delta} \times \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

2 Factorisation d'un trinôme

Démonstration

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :

$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} &= 0 \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= 0 \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a} \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{car } a \neq 0 \end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$\left|\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= +\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ x &= +\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{b}{2a} \\ x &= \frac{+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \\ x &= \frac{+\sqrt{\Delta}-b}{2a} \\ x &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ x &= -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{b}{2a} \\ x &= \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \\ x &= \frac{-\sqrt{\Delta}-b}{2a} \\ x &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}\right.$$

L'équation a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Remarque

Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f .

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser les trinômes suivants :

(1) $4x^2 + 19x - 5$

(2) $9x^2 - 6x + 1$

(3) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

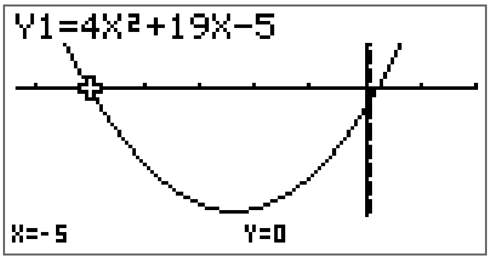
Les racines sont :

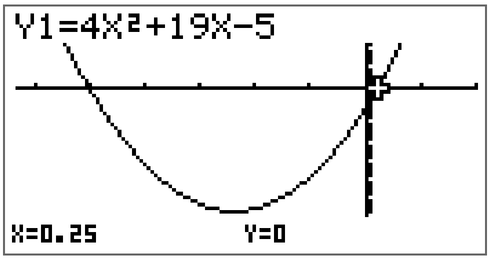
$x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4} = \frac{1}{4}$

On a donc :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 19x - 5 &= 4\left(x - (-5)\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ &= (x+5)(4x-1) \end{aligned}$$

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile ! On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.





(4)