Loi de Bernoulli

1ère STMG

Table des matières

---

1 Expériences aléatoire à deux épreuves

1.1 Définition : Indépendance de deux expériences

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.

1.2 Méthode : Calculer une probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves

Léa tente l'expérience suivante avec ses vêtements :

Elle dépose dans un panier 4 chemisiers indiscernables au toucher : 1 blanc, 1 rouge et 2 verts.

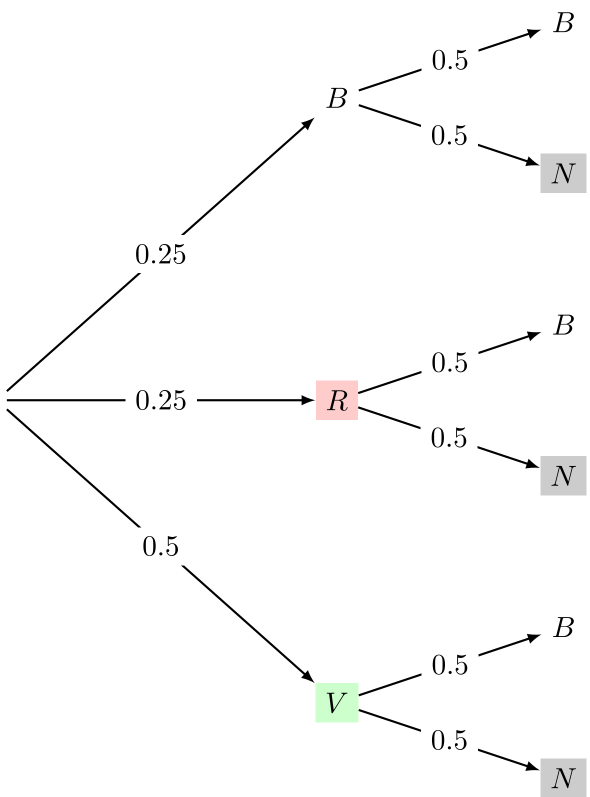
Dans un autre panier, elle y dépose 2 jupes également indiscernables au toucher : 1 blanche et 1 noire.

Elle tire successivement et au hasard, un chemisier du premier panier et une jupe du deuxième panier.

Ces deux expériences, "tirer un vêtement dans chaque panier", sont **indépendantes**.

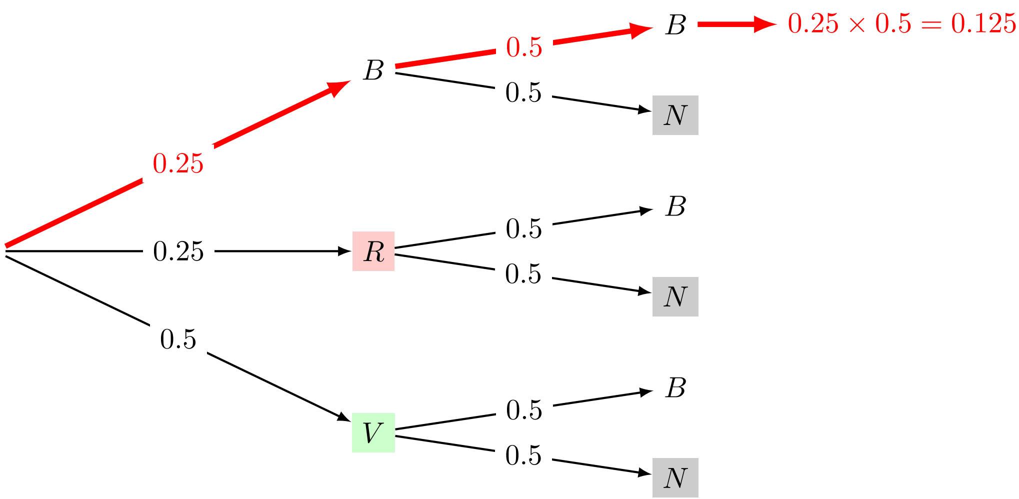
a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b) Calculer la probabilité P_1 d'obtenir deux vêtements blancs.
c) Calculer la probabilité P_2 de ne pas obtenir un chemisier vert et d'obtenir une jupe noire.

(a) La probabilité de tirer un chemisier vert est égale à $0,5$ car le premier panier contient 2 chemisiers verts sur 4 en tout, soit $P(V) = \dfrac{2}{4} = 0,5$.



(b) La probabilité d'obtenir deux vêtements blancs correspond aux issues $(B; B)$,

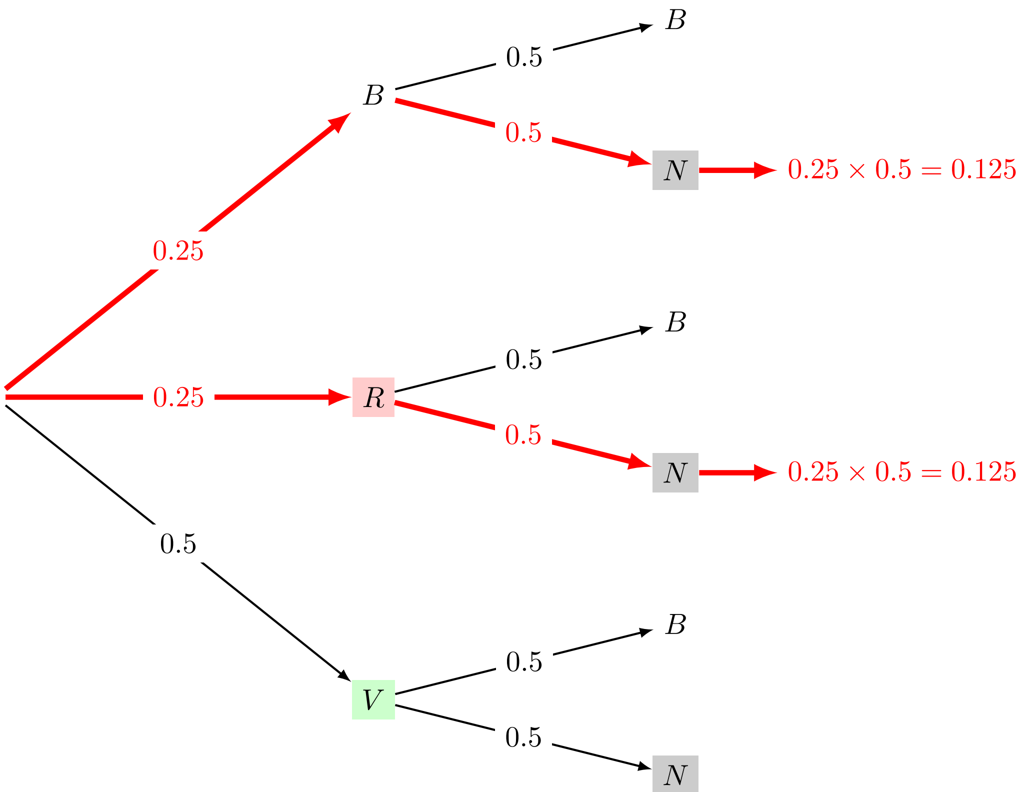
Sur un "chemin de branches", les probabilités se multiplient :



Soit : $P_1 = P(B\ ;B) = 0,25 \times 0,5 = 0,125$. La probabilité d'obtenir deux vêtements blancs est égale à $12,5\%$.

(c) La probabilité de ne pas obtenir un chemisier vert et d'obtenir une jupe noire correspond aux issues $(B\ ;N)$ et $(R\ ;N)$.

Les probabilités de "plusieurs feuilles" s'additionnent :



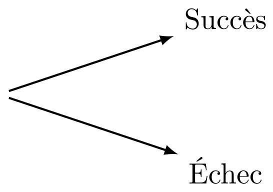
$P_2 = P(B\ ;N) + P(R\ ;N) = (0,25 \times 0,5) + (0,25 \times 0,5) = 0,125 + 0,125 = 0,25.$

La probabilité de ne pas obtenir un chemisier vert et d'obtenir une jupe noire est égale à 25 %.

2 Épreuve de Bernoulli

2.1 Définition : Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer **"succès"** ou **"échec"**.



Remarque

Au **succès**, on peut associer le nombre 1 et à l'**échec**, on peut associer le nombre 0.

Exemples

a) Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès **"obtenir pile"** et comme échec **"obtenir face"**.
b) On lance un dé et on considère par exemple comme succès **"obtenir un 1"** et comme échec **"ne pas obtenir un 1"**.

La loi de Bernoulli associée à cette expérience est :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

2.2 Définition : loi de Bernoulli

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

— la probabilité d'obtenir 1 est égale à p,
— la probabilité d'obtenir 0 est égale à $(1 - p)$.

p est appelé le **paramètre** de la loi de Bernoulli.

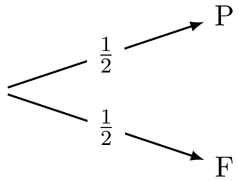
On peut résumer la loi de Bernoulli de paramètre p dans le tableau :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

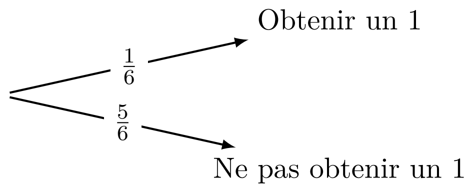
Exemples

Dans les exemples présentés plus haut :

a) $p = \dfrac{1}{2}$



b) $p = \dfrac{1}{6}$



2.3 Propriété : Espérance

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors :

$$E(X) = p$$

2.3.1 Démonstration :

$E(X) = (1 \times p) + (0 \times (1 - p)) = p$

2.4 Méthode : Reconnaître une situation modélisée par une loi de Bernoulli

Après la correction d'un contrôle, le professeur compte que 24 élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 10, et 6 ne l'ont pas obtenue.

Le professeur choisit une copie au hasard.

a)Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi de Bernoulli.

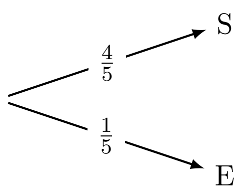
(a) Cette expérience aléatoire possède **deux issues** :

— La copie indique une note supérieure ou égale à 10
— La copie indique une note inférieur à 10

On peut ainsi considérer comme **succès** l'événement "la copie indique une note supérieure ou égale à 10".

La probabilité du succès est égale à $p = \dfrac{24}{30} = \dfrac{4}{5}$.

La situation est donc modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{4}{5}$.



3 Répétitions d'épreuves de Bernoulli

3.1 Définition : Expériences identiques et indépendantes

Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :

— elles ont les mêmes issues,
— chaque issue possède la même probabilité.

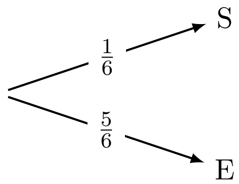
3.1.1 Exemple 1 :

On lance 5 fois de suite un dé à six faces et on note à chaque fois le résultat.

À chaque lancer, on considère comme succès **“obtenir un six”** et comme échec **“ne pas obtenir un six”**.

On répète ainsi 5 fois de suite **la même expérience** de Bernoulli (lancer un dé) et les expériences sont **indépendantes** l'une de l'autre : un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer.

Pour **chaque expérience**, on a les probabilités suivantes :



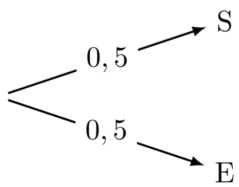
On dit ici que $p = \dfrac{1}{6}$ est le paramètre de l'épreuve de Bernoulli répétée 5 fois.

3.1.2 Exemple 2 :

On lance 20 fois de suite une pièce de monnaie. On considère comme succès **“obtenir Pile"* et comme échec ”obtenir Face"***.

Ces expériences de Bernoulli sont **identiques et indépendantes**.

Pour chaque expérience, on a les probabilités suivantes :



On dit ici que $p = 0,5$ est le paramètre de l'épreuve de Bernoulli répétée 20 fois.

3.2 Méthode : Calculer une probabilité associée à une épreuve de Bernoulli

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire auhasard une boule et **on la remet dans l'urne**. On répète l'expérience **deux fois de suite**.

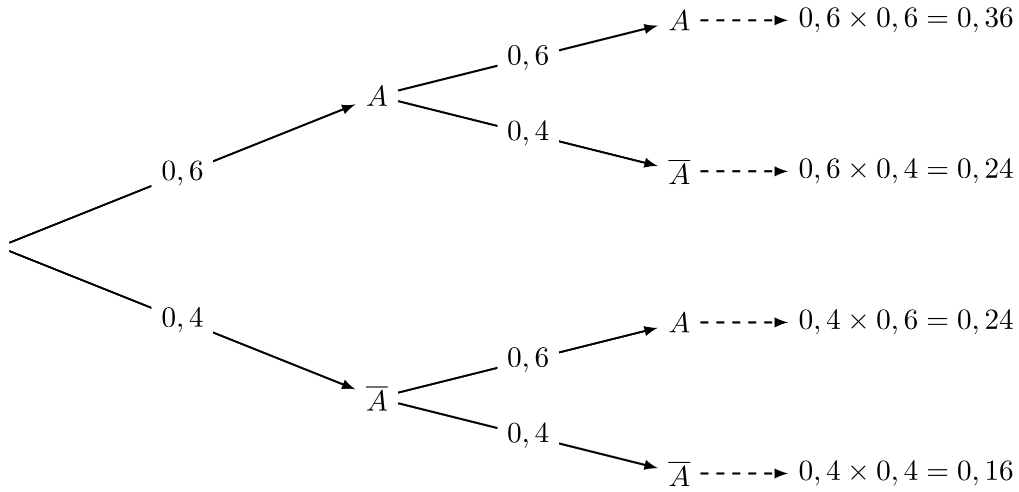
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer les probabilités suivantes :
   a) On tire deux boules blanches.
   b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
   c) On tire au moins une boule blanche.

---

(1) On note A l'issue "On tire une boule blanche" et $\overline{A}$ l'issue contraire "On tire une boule rouge".

$P(A) = \dfrac{3}{5} = 0,6$ et $P(\overline{A}) = \dfrac{2}{5}$=0,4$.

On résume les issues de l'expérience dans un arbre pondéré :



(2) En utilisant l'arbre, on peut déterminer les probabilités demandées

a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue $(A; A)$: $P_1 = 0,36$ (d'après l'arbre).
b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues :

— $\left(A; \overline{A}\right)$
— $\left(\overline{A}; A\right)$

Donc $P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48$.

c) Obtenir **au moins** une boule blanche correspond aux issues :

— $\left(A; \overline{A}\right)$
— $(A; A)$
— $\left(\overline{A}; A\right)$

Donc : $P_2 = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84$.