Fonction polynôme de degré 3

1ère STMG

Table des matières

1 Définition et représentation graphique

1.1 Définition : Fonction polynôme de degré 3

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto ax^3$ ou $x \longmapsto ax^3 + b$ sont des **fonctions polynômes de degré 3**.

Exemples et contre-exemples

- $f(x) = 4x^3 + 1$ fonctions polynômes de degré 3
- $g(x) = x^3 - 2$ fonctions polynômes de degré 3
- $h(x) = 1 + x^2 - 2x^3$ fonctions polynômes de degré 3
- $m(x) = -x + 4$ fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 2x^5 - x^3 + 5x - 1$ fonction polynôme de degré 5.

Les coefficients a et b sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

1.2 Propriétés : Variations

Soit f une fonction polynôme de degré 3, telle que $f(x) = ax^3 + b$.

- Si a est **positif**, f est **croissante**.
- Si a est **négatif**, f est **décroissante**.

1.3 Représentation grapghique

Voici les représentation grapghique des fonctions polynôme $x \longmapsto ax^3$ et $x \longmapsto ax^3 + b$ en fonction du signe de a

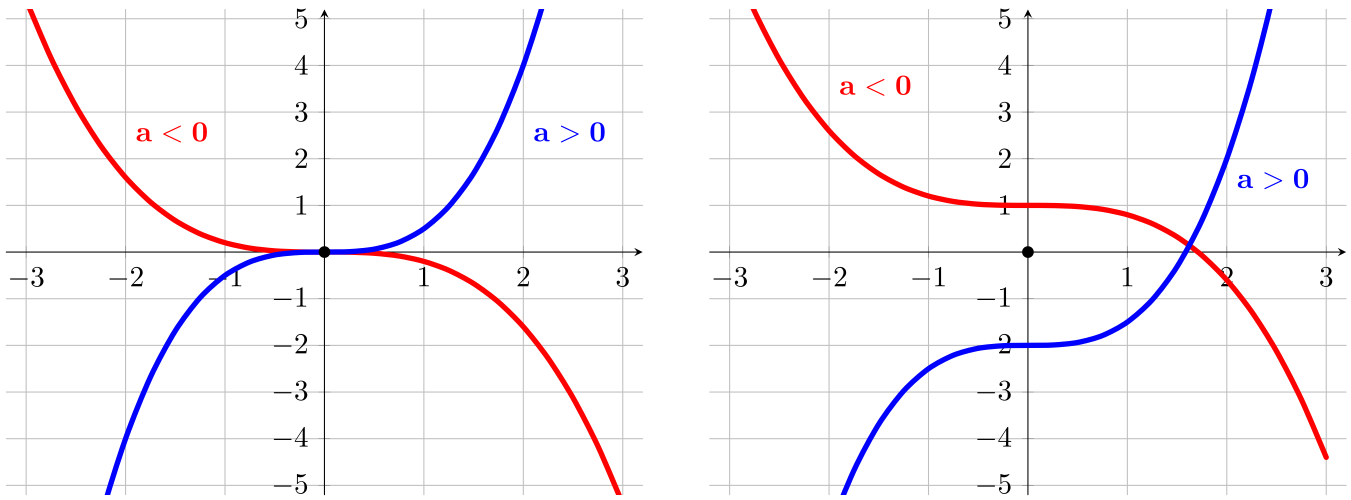

Figure 1 – Répresentation de ax^3 (à gauche) et $ax^3 + b$ (à droite) en fonction du signe de a

2 Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

2.1 Définition : Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

sont des **fonctions polynômes de degré 3**.

Les coefficients a, x_1, x_2 et x_3 sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 5(x-4)(x-1)(x+3)$ est une **fonction polynôme de degré 3** sous sa forme factorisée.

Si on développe l'expression de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient bien l'expression d'une fonction polynôme de degré 3 :

$$f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$$

Développer(5(x−4)(x−1)(x+3))

$\rightarrow$ **$5\,x^3 - 10\,x^2 - 55\,x + 60$**

Figure 2 – Développement de $f(x)$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel

2.2 Propriété : Racines d'une fonction polynôme de degré 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = x_3$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5(x-4)(x-1)(x+3)$.

On a vu, dans l'exemple précédent que : $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$

En partant de l'expression développée, on peut vérifier que 4, 1 et -3 sont des racines du polynôme f.

$$\begin{aligned}
f(4) &= \left(5 \times 4^3\right) - \left(10 \times 4^2\right) - (55 \times 4) + 60 \\
&= 320 - 160 - 220 + 60 \\
&= 0 \\
f(1) &= \left(5 \times 1^3\right) - \left(10 \times 1^2\right) - (55 \times 1) + 60 \\
&= 5 - 10 - 55 + 60 \\
&= 0 \\
f(-3) &= \left(5 \times (-3)^3\right) - \left(10 \times (-3)^2\right) - (55 \times (-3)) + 60 \\
&= -135 - 90 + 165 + 60 \\
&= 0
\end{aligned}$$

4, 1 et -3, solutions de l'équation $f(x) = 0$, sont donc des **racines** de f.

2.3 Méthode : Étudier le signe d'un polynôme de degré 3

Étudier le signe de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right) = 2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$$

2 étant un nombre positif, le signe de $2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$ dépend du signe de chaque facteur : $(x+1)$, $(x-2)$ et $(x-5)$.

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$x+1>0$	$x-2>0$	$x-5>0$
$\Leftrightarrow x>-1$	$\Leftrightarrow x>2$	$\Leftrightarrow x>5$

En appliquant la règle des signes dans le tableau, on peut en déduire le signe du produit $f\left(x\right) = 2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$.

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
2					$+$				
$(x+1)$		$-$	0			$+$			
$(x-2)$			$-$		0		$+$		
$(x-5)$				$-$			0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que :

- $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-1\ ;2] \cup [5\ ;\ +\infty[$
- $f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -1] \cup [2\ ;5]$.

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.

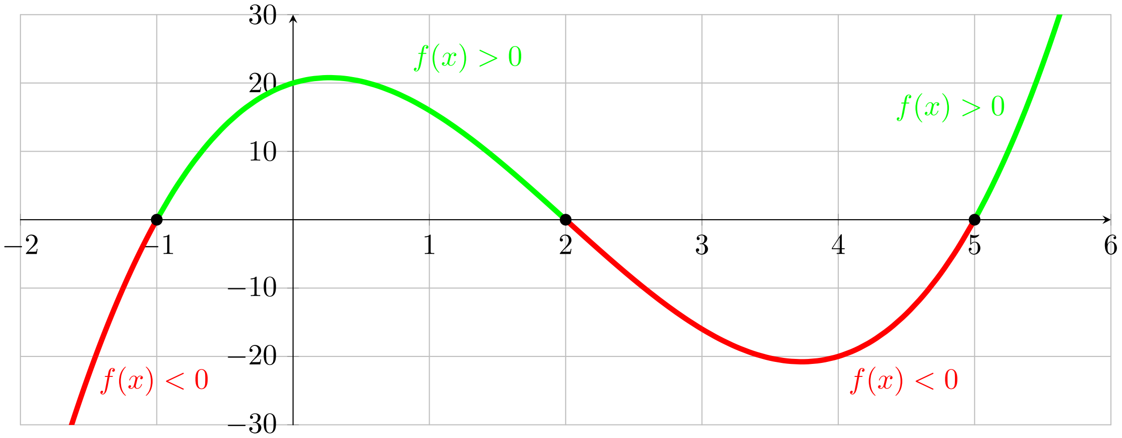

FIGURE 3 – Répresentation graphique de $2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$

3 Équation de la forme $x^3 = c$

3.1 Propriété : Solution de l'équation $x^3 = c$

L'équation $x^3 = c$, avec c positif, possède une unique solution $\sqrt[3]{c}$.

Cette solution peut également se noter $c^{\left(\frac{1}{3}\right)}$.

3.2 Méthode : Résoudre une équation du type $x^3 = c$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x^3 = 27$
b) $2x^3 - 6 = 16$

(a) On cherche le nombre qui, élevé au cube, donne 27.

Ce nombre est égal à la racine cubique de 27, soit : $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

(b) $2x^3 - 6 = 16$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 6 &= 16 \\ 2x^3 &= 22 \\ x^3 &= 11 \end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution $x = \sqrt[3]{11} \approx 2,223$.