Fonctions et équations du 2$^{\text{nd}}$ degré

1 Fonction polynôme de degré 2

Définition :

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction **trinôme du second degré** ou par abus de langage **"trinôme"**.

Exemples et contre-exemples :

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

f est une fonction du 2$^{\text{nd}}$ degré avec $a = 3$, $b = -7$ et $c = 3$

(2) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$

g est une fonction du 2$^{\text{nd}}$ degré avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -5$ et $c = \frac{3}{5}$

(3) $h(x) = 4 - 2x^2$

h est une fonction du 2$^{\text{nd}}$ degré avec $a = -2$, $b = 0$ et $c = 4$

(4) $k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$

k est une fonction du 2$^{\text{nd}}$ degré car $(x - 4)(5 - 2x) = (5 \times x) - (2x \times x) - (4 \times 5) + (2 \times 4x)$

Donc $k(x) = -2x^2 + 13x - 20 \Rightarrow a = -2$, $b = 13$ et $c = -20$

(5) $m(x) = 5x - 3$

$m(x)$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

(6) $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$

$n(x)$ est une fonction polynôme de degré 4.

2 Forme canonique d'une fonction polynôme de degré

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

$f(x) = (x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont des nombres réels.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\ &= 2\left[x^2 - 10x\right] + 10 \\ &= 2\left[x^2 - 10x + 25 - 25\right] + 10 \\ &= 2\left[(x-5)^2 - 25\right] + 10 \\ &= 2(x-5)^2 - 50 + 10 \\ &= 2(x-5)^2 - 40 \end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$

$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme *canonique* de f.

Propriété :

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x-\alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Remarque :

Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β.

3 Variations et représentation graphique

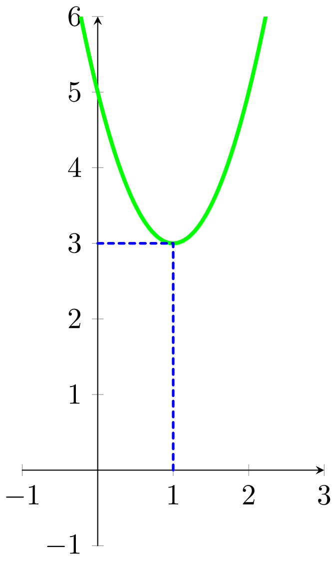
Exemple :

Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f\left(x\right) = 2\left(x-1\right)^2 + 3$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2\left(x-1\right)^2$ est positif.

Or $f\left(1\right) = 3$ donc pour tout x, $f\left(x\right) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en $x = 1$. Ce minimum est égal à 3.



Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

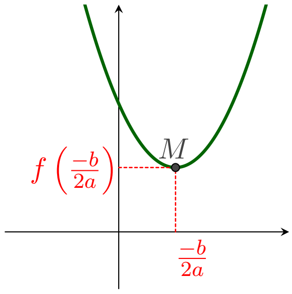
Remarque :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $a > 0$

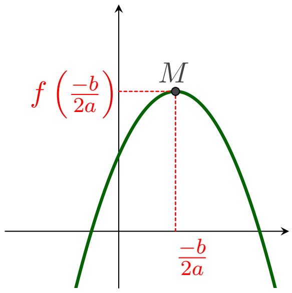
Représentation :



x	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↗ $+\infty$

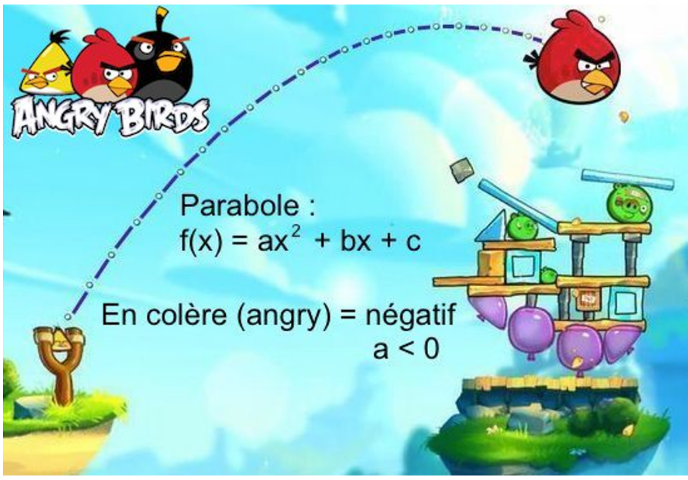
Si $a < 0$

Représentation :



x	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↘ $-\infty$

Il existe un moyen pour se souvenir du résultat précedent :



Propriétés

— Dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

— Le point M de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le **sommet** de la parabole. Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f.

— La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Méthode

Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + 4x \\
&= -\left(x^2 - 4x\right) \\
&= -\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) \\
&= -\left((x-2)^2 - 4\right) \\
&= -(x-2)^2 + 4
\end{aligned}
$$

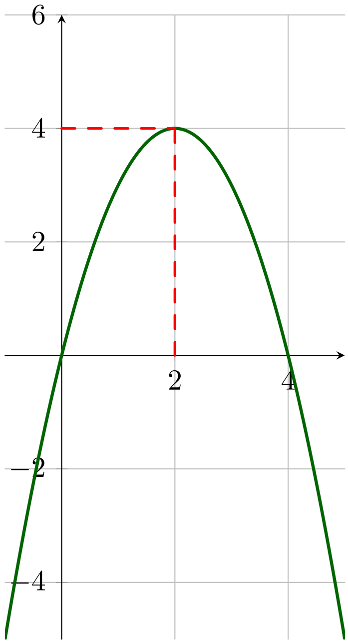
f admet donc un maximum en $x = 2$ égal à 4

$f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$+\infty$	2	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	4	↘ $-\infty$

On obtient la courbe représentative de f ci-dessous.



Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

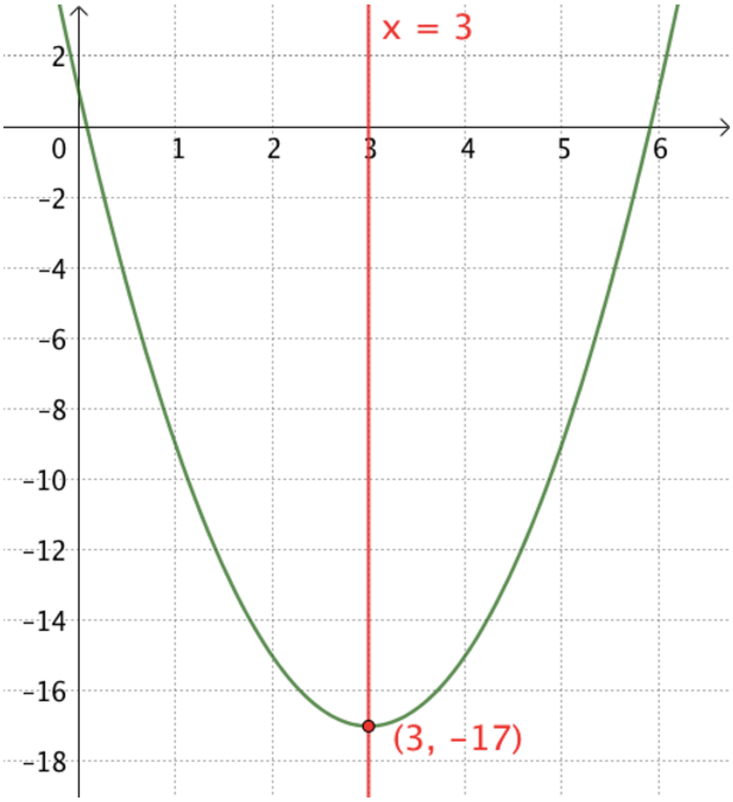
La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, soit $x = -\frac{-12}{2\times 2} = 3$.

La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

Les coordonnées de son sommet sont : $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, soit : $\left(3\ ;2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 1\right) = (3\ ;\ -17)$.

Le point de coordonnées $(3\ ;\ -17)$ est donc le sommet de la parabole.

$a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un minimum.


x = 3
(3, −17)
2
0
1
2
3
4
5
6
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
−16
−18