Fonctions et équations du 2nd degré

1ère Spécialité Math

Définition et représentation

Définition : Fonction du 2^{nd} degré

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle fonction **trinôme du 2^{nd} degré** ou **"trinôme"**.

Exemples et contre-exemples :

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$
Fonction du 2^{nd} *degré* $\Rightarrow a = 3$, $b = -7$ *et* $c = 3$

Exemples et contre-exemples :

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

Fonction du 2^{nd} *degré* $\Rightarrow a = 3$, $b = -7$ *et* $c = 3$

(2) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$

Fonction du 2^{nd} *degré* $\Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = -5$ *et* $c = \frac{3}{5}$

Exemples et contre-exemples :

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

Fonction du 2^{nd} degré $\Rightarrow a = 3$, $b = -7$ *et* $c = 3$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{3}{5}$

Fonction du 2^{nd} degré $\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, $b = -5$ *et* $c = \dfrac{3}{5}$

(3) $h(x) = 4 - 2x^2$

Fonction du 2^{nd} degré $\Rightarrow a = -2$, $b = 0$ *et* $c = 4$

(4) $k(x) = (x-4)(5-2x)$

$$\begin{aligned}(x-4)(5-2x) &= (5\times x) - (2x\times x) - (4\times 5) + (2\times 4x)\\ &= -2x^2 + 13x - 20\end{aligned}$$

$k(x) = -2x^2 + 13x - 20 \Rightarrow$ *Fonction du 2^{nd} degré* $\Rightarrow a = -2$, $b = 13$ *et* $c = -20$

(4) $k\left(x\right)=\left(x-4\right)\left(5-2x\right)$

$$\begin{aligned}(x-4)(5-2x) &= (5\times x)-(2x\times x)-(4\times 5)+(2\times 4x)\\ &= -2x^2+13x-20\end{aligned}$$

$k(x) = -2x^2 + 13x - 20 \Rightarrow$ *Fonction du* 2^{nd} *degré* $\Rightarrow a = -2$, $b = 13$ *et* $c = -20$

(5) $m\left(x\right)=5x-3$

$m(x)$ *est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).*

(4) $k(x) = (x-4)(5-2x)$
$(x-4)(5-2x) = (5 \times x) - (2x \times x) - (4 \times 5) + (2 \times 4x)$
$= -2x^2 + 13x - 20$
$k(x) = -2x^2 + 13x - 20 \Rightarrow$ *Fonction du 2^nd^ degré* $\Rightarrow a = -2$, $b = 13$ *et* $c = -20$

(5) $m(x) = 5x - 3$
$m(x)$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

(6) $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$
$n(x)$ est une fonction polynôme de degré 4.

Variations et représentation graphique

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Calculons quelques valeurs de $f(x)$.

Variations et représentation graphique

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Calculons quelques valeurs de $f(x)$.

- $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = 21$
- $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 5 = 11$
- $f(0) = 2 \times (0)^2 - 4 \times (0) + 5 = 5$
- $\ldots$

Variations et représentation graphique

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

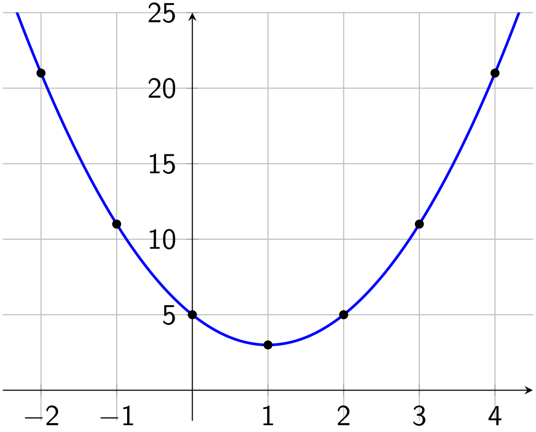
Calculons quelques valeurs de $f(x)$.

- $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = 21$
- $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 5 = 11$
- $f(0) = 2 \times (0)^2 - 4 \times (0) + 5 = 5$
- ...

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	21	11	5	3	5	11	21

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	21	11	5	3	5	11	21

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	21	11	5	3	5	11	21

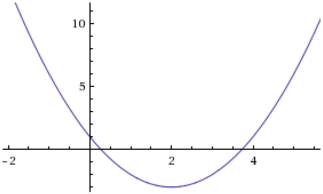


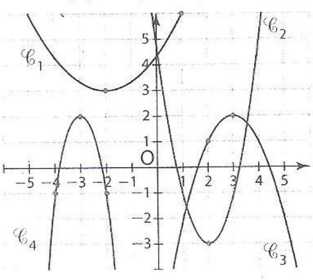
Remarque

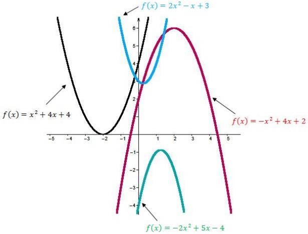
- La représentation graphique d'une fonction du 2^{nd} degré est une **parabole**.

Remarque

- La représentation graphique d'une fonction du 2nd degré est une **parabole**.







Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un **minimum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.

  *Ce **minimum** est égal à* $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un **minimum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.

  *Ce **minimum** est égal à* $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

- Si $a < 0$, f admet un **maximum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.

  *Ce **maximum** est égal à* $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un **minimum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.

  *Ce **minimum** est égal à* $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

- Si $a < 0$, f admet un **maximum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.

  *Ce **maximum** est égal à* $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

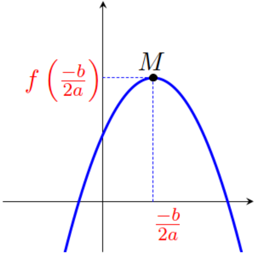
On appelle :

- $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$
- $\beta = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$

Propriété : Variations de $f(x) = ax^2 + bx + c$

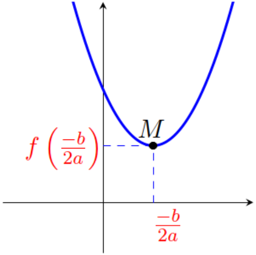
$a < 0$

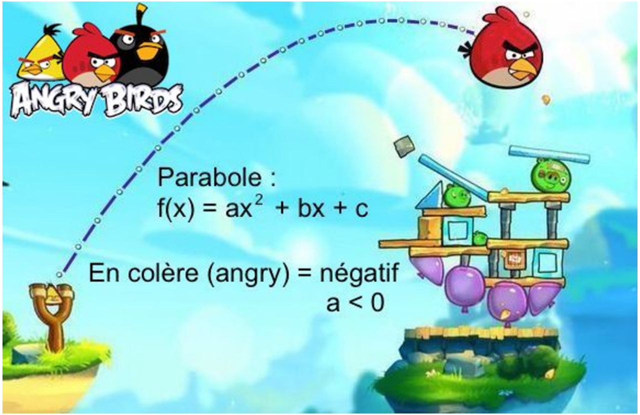
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$			$f(\frac{-b}{2a})$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$



$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			$f(\frac{-b}{2a})$		




ANGRY BIRDS
Parabole :
$f(x) = ax^2 + bx + c$
En colère (angry) = négatif
$a < 0$

Méthode : Etudier les variations d'une fonction du 2nd degré

Variations de $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Méthode : Etudier les variations d'une fonction du 2nd degré

Variations de $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

On a $a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2 \text{ et } \beta = f(\alpha) = f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 - 1 = 3$$

Méthode : Etudier les variations d'une fonction du 2^{nd} degré

Variations de $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

On a $a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2 \text{ et } \beta = f(\alpha) = f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 - 1 = 3$$

Sommet de la parabole $\Rightarrow S(2;3)$.

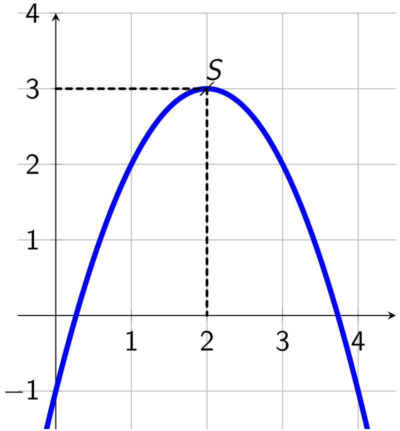
Sommet de la parabole $\Rightarrow S(2;3)$.

Sommet de la parabole $\Rightarrow S(2;3)$.

$a < 0$ donc le tableau de variation de f est :

x	$+\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

x	$+\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$



Forme factorisée

Il se peut que le polynôme du 2^{nd} degré ne se présente pas sous la forme **developpée** mais sous une forme **factorisée** comme par exemple : $f(x) = (x-1)(x-2)$

En effet :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)(x-2) \\
&= x^2 - 2x - 1x + 2 \\
&= x^2 - 3x + 2 \\
&\Rightarrow a = 1 \text{ , } b = -3 \text{ et } c = 2
\end{aligned}
$$

Définition