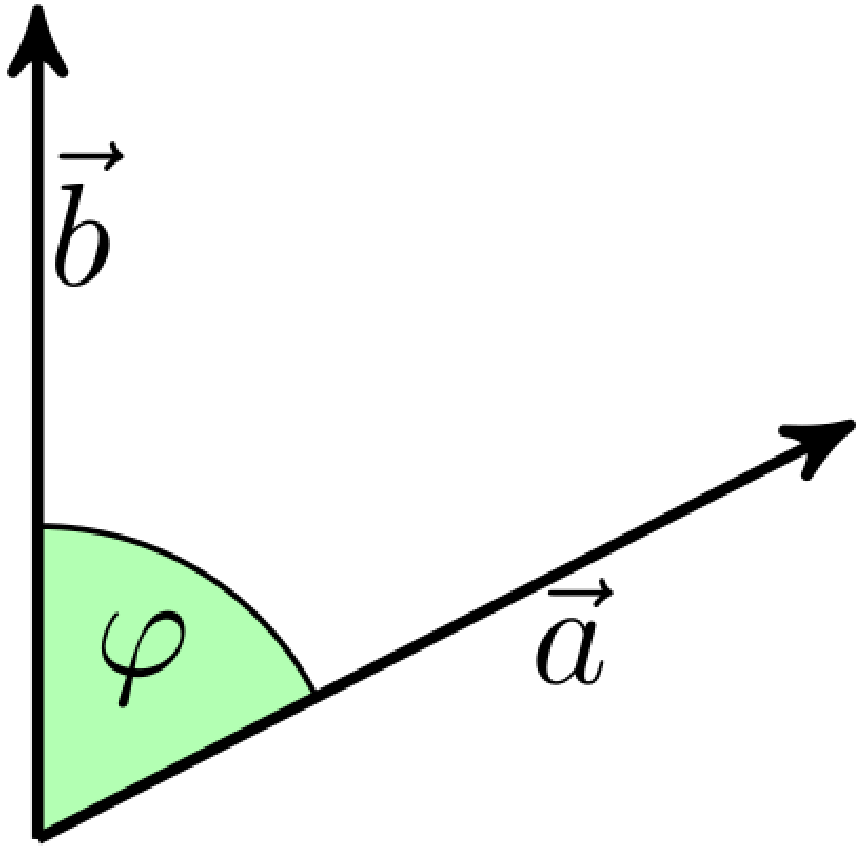
Vecteurs et produit scalaire

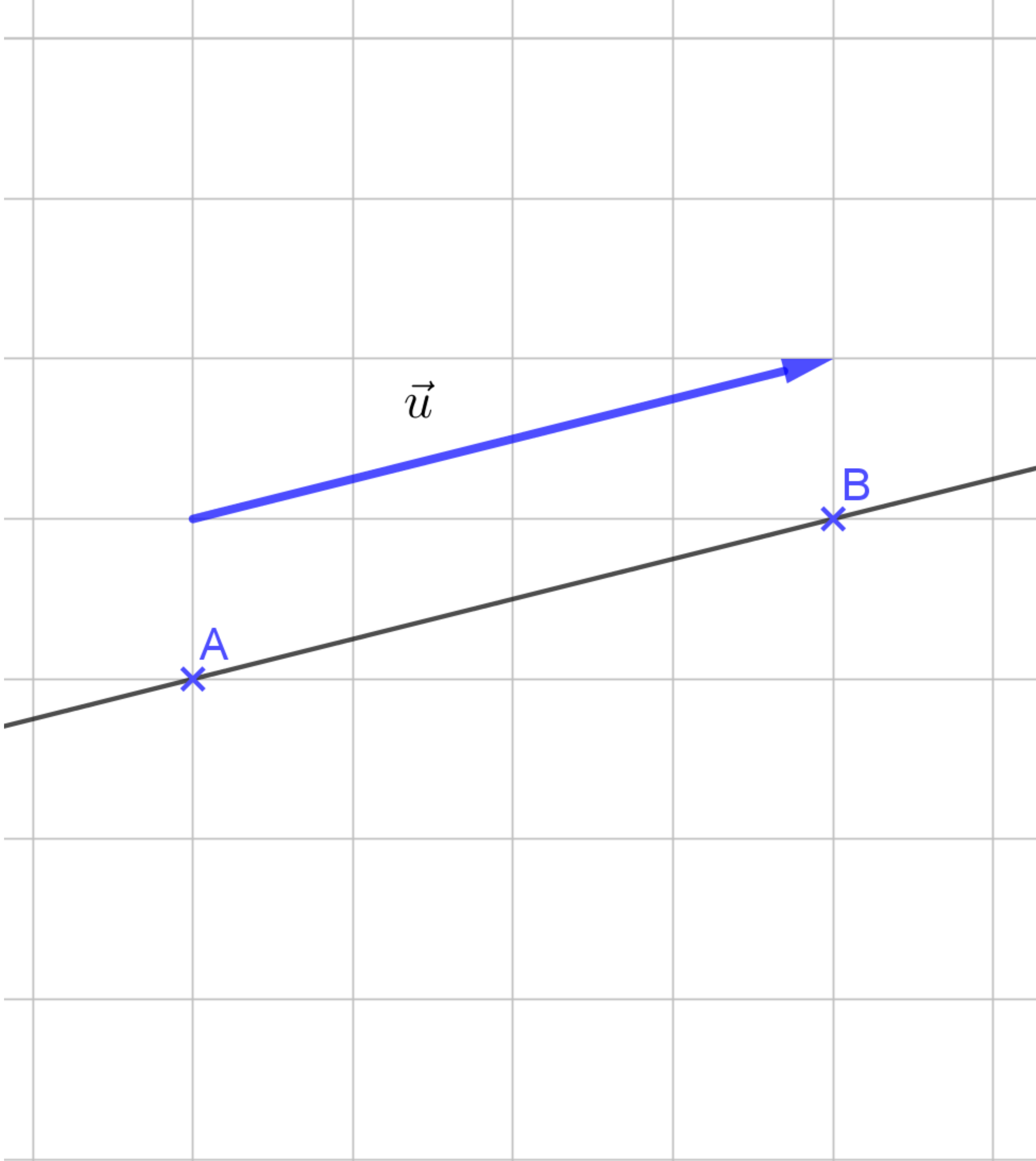


Rappels sur les vecteurs

Caractéristiques

Un vecteur a pour caractéristiques :

- Une longueur (ou norme)
- Une direction (une droite parallèle à ce vecteur)
- Un sens (de A vers B ou l'inverse)

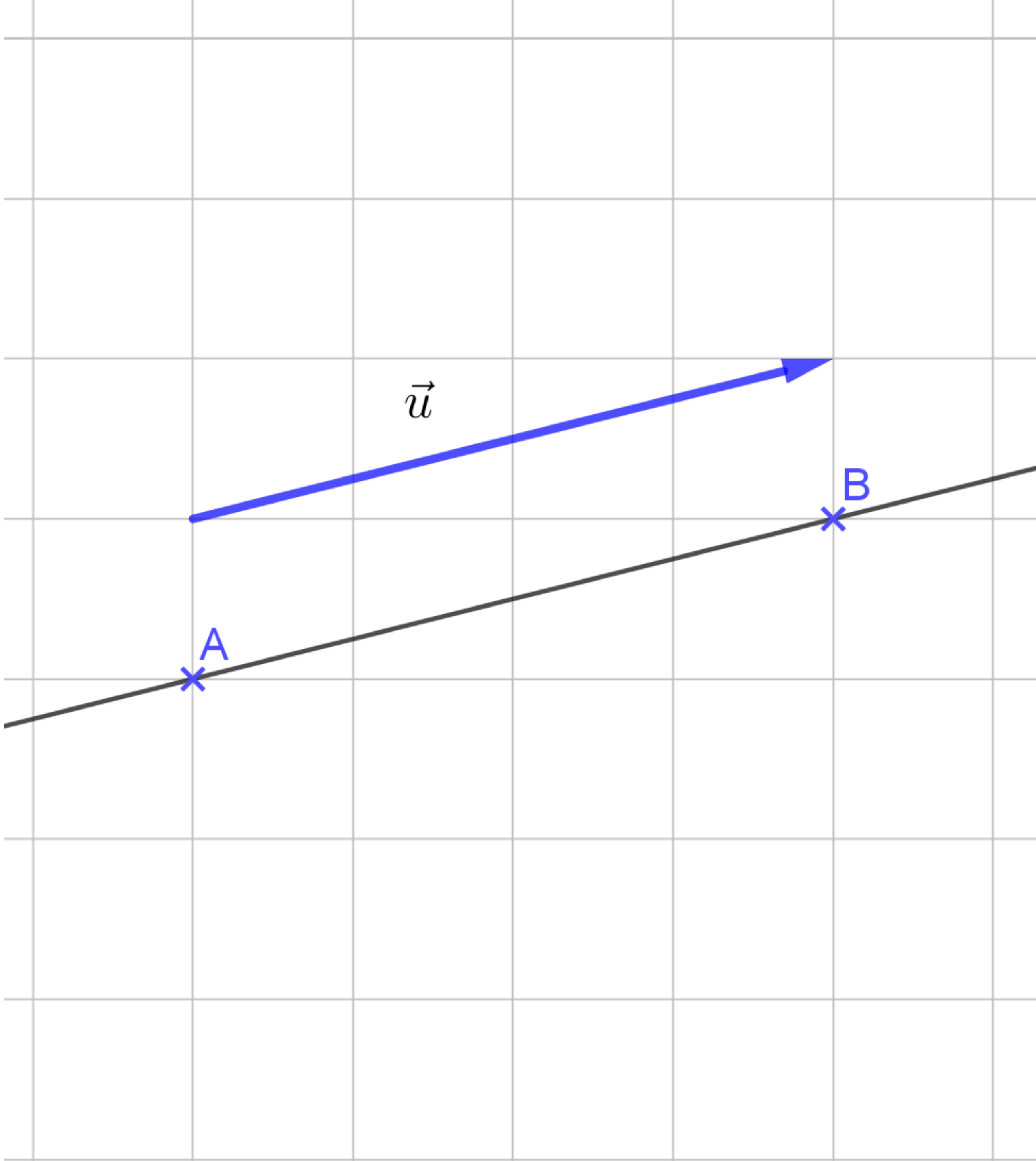


Norme d'un vecteur

On note la norme (longueur) d'un vecteur avec des $||...||$

Exemple

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|\vec{u}\| = AB = \sqrt{17}$$



Vecteurs égaux

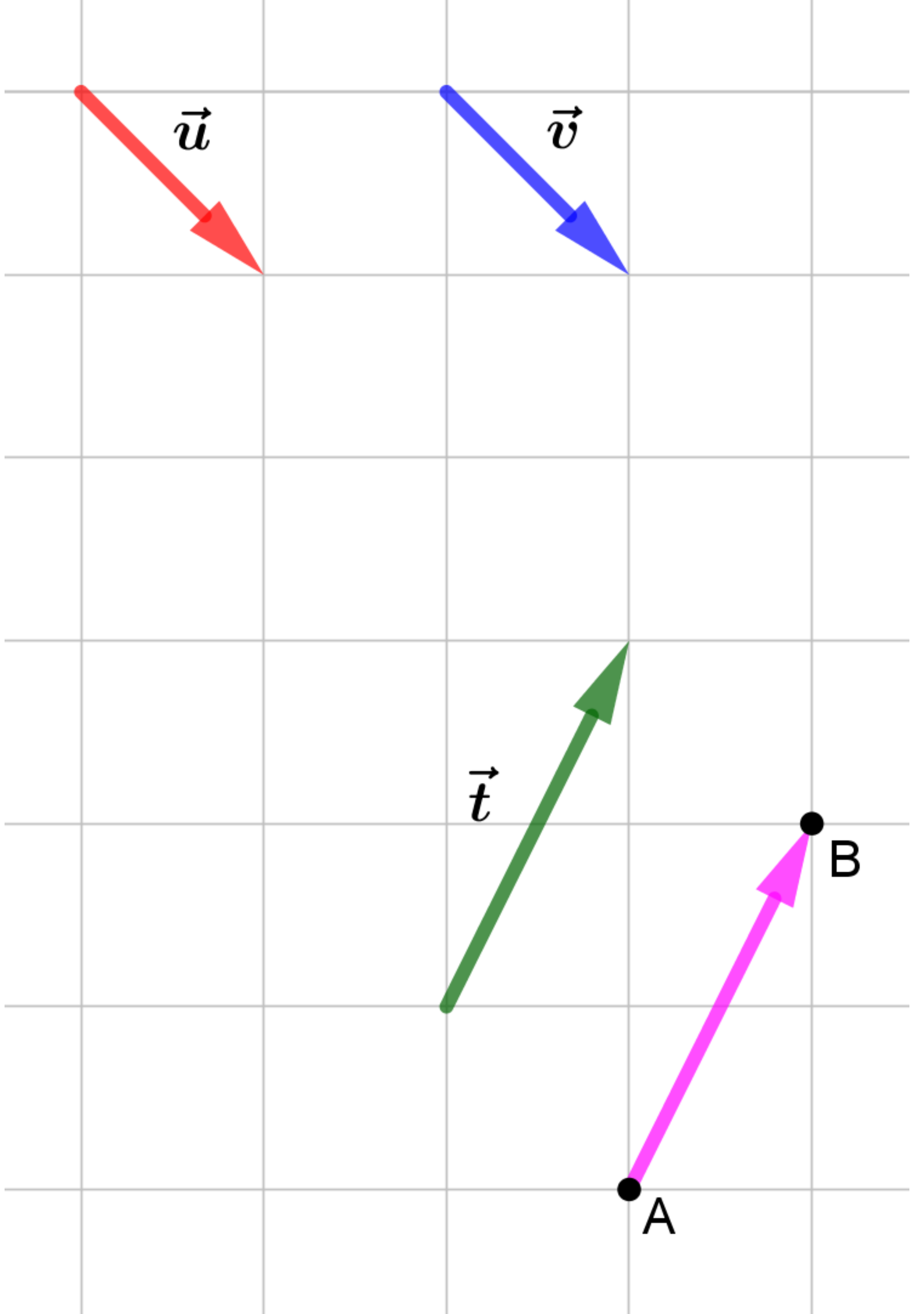
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

- même longueur (même norme)
- même direction et même sens

Exemple

$\vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{t} = \overrightarrow{AB}$

Mais $\vec{t} \neq \overrightarrow{BA}$ (sens contraires)



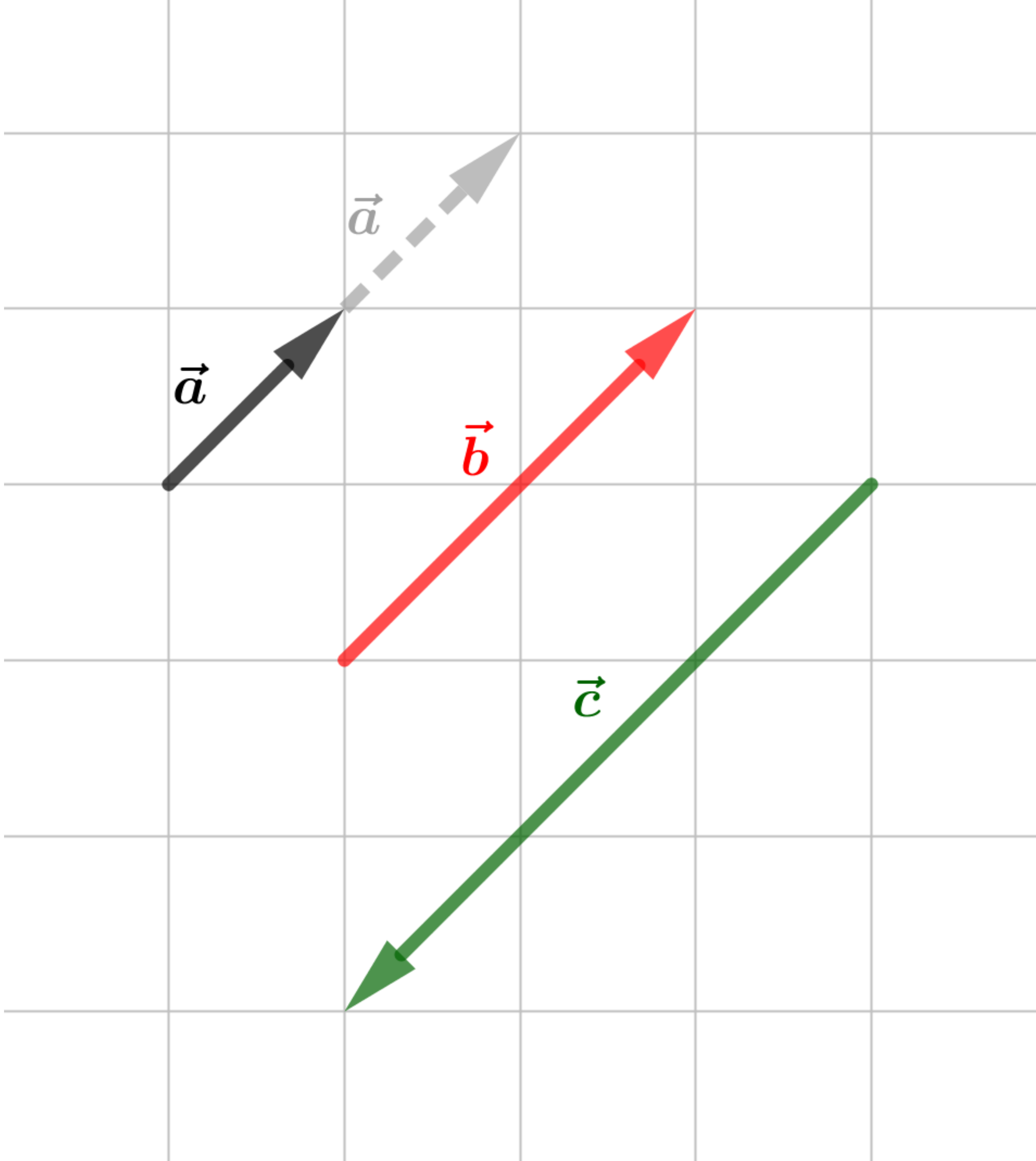
Multiplication par un nombre

Le produit du vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ par le réel $k \neq 0$ est un vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

- si $k > 0$, alors
  - $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction, le même sens.
  - $\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$
- si $k < 0$, alors
  - $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction mais sens **contraire**.
  - $\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$

Exemple

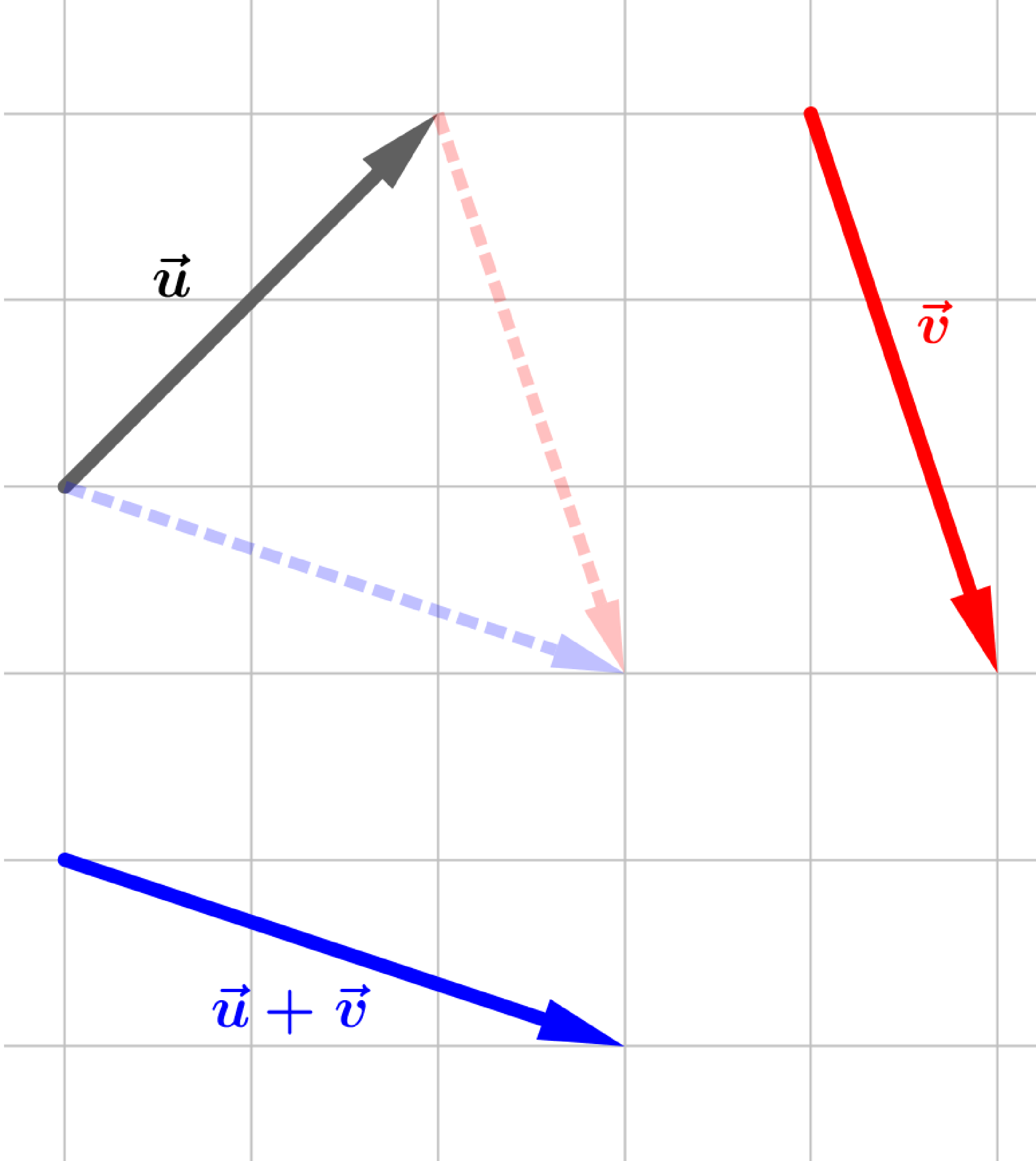
$\vec{b} = 2 \times \vec{a}$ et $\vec{c} = -3 \times \vec{a}$



Somme de vecteurs

L'enchaînement d'une **translation de vecteur** $\vec{u}$ et d'une **translation de vecteur** $\vec{v}$ est une **translation de vecteur** $\vec{u} + \vec{v}$.

Ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est appelé **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



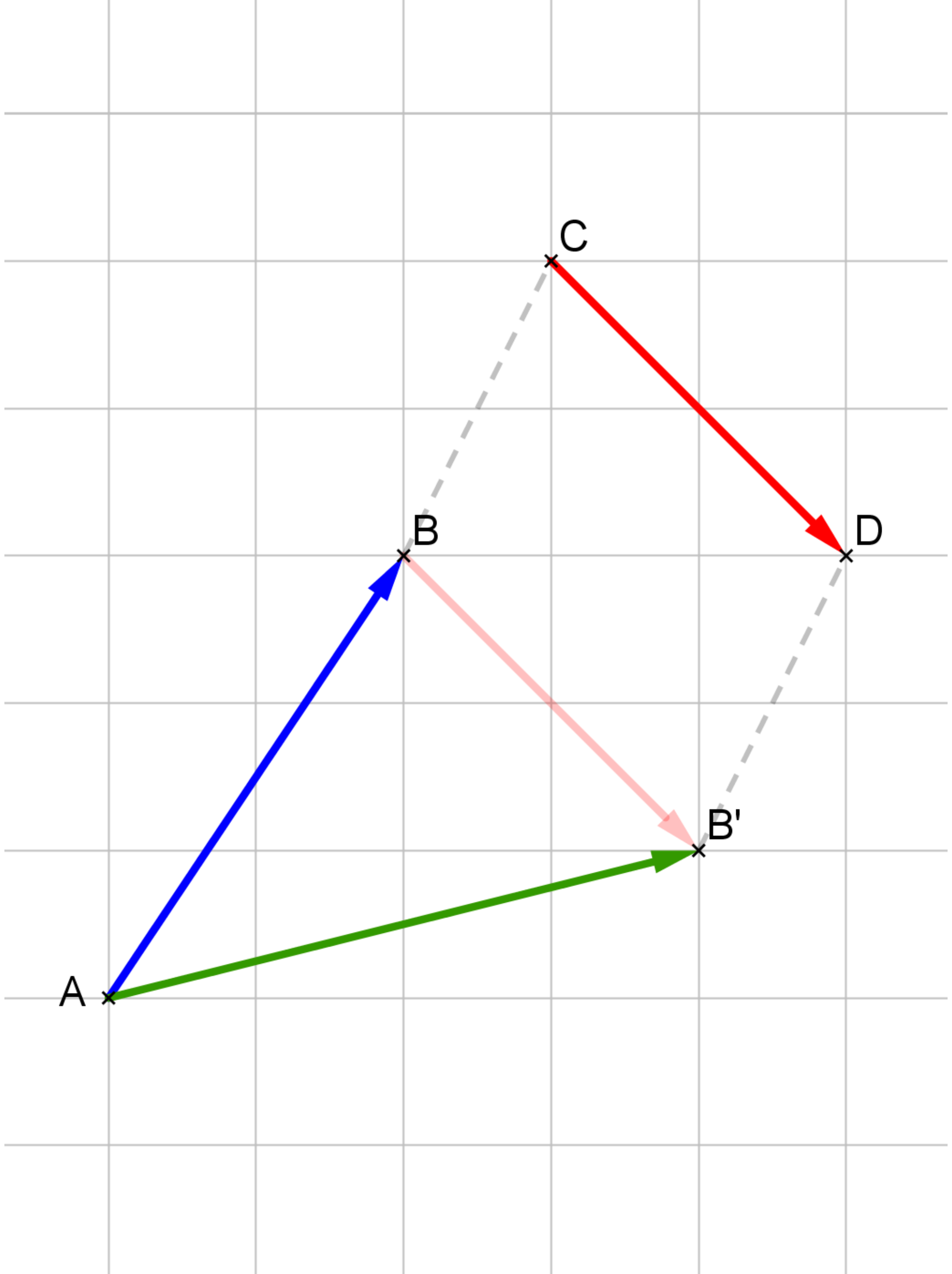
Exemple

$\overrightarrow{BB'}$ est un représentant de $\overrightarrow{CD}$ donc :

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CD}$$

On a donc :

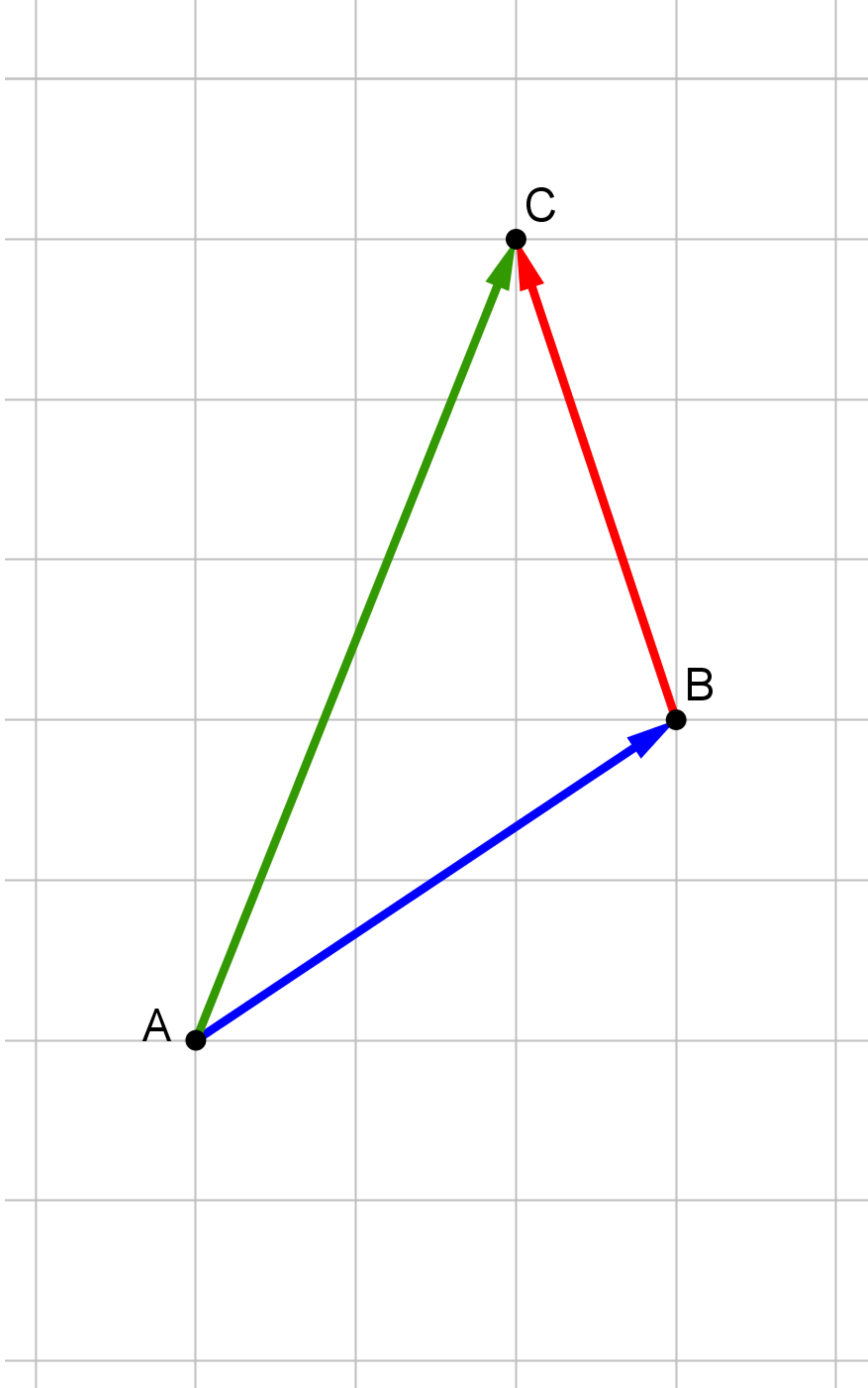
$$\color{blue}{\overrightarrow{AB}} + \color{red}{\overrightarrow{CD}} = \color{green}{\overrightarrow{AB'}}$$



Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C du plan on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



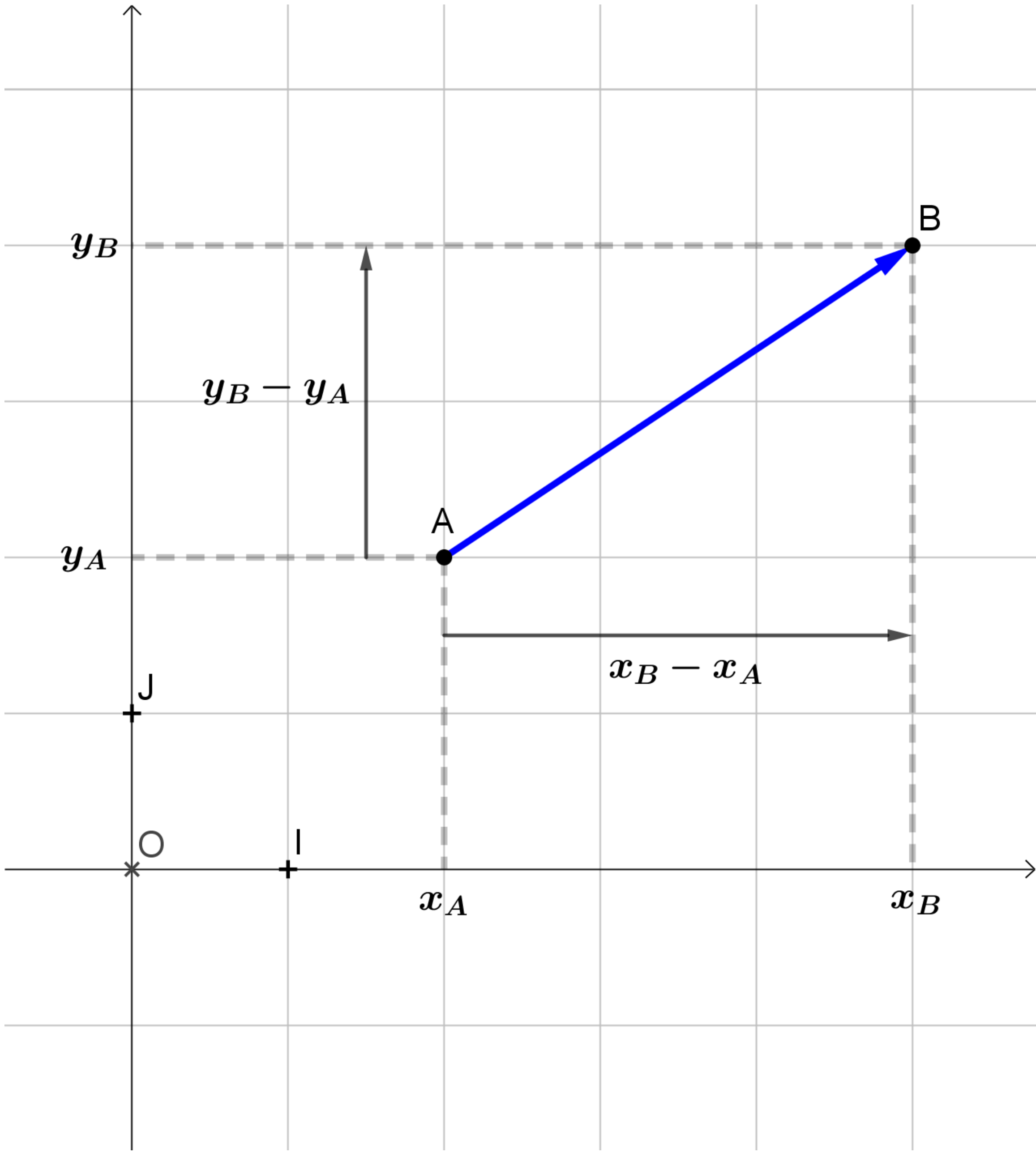
Vecteurs dans un repère orthonormé

Dans le plan muni du repère (O, I, J), les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A)$$

On peut noter :

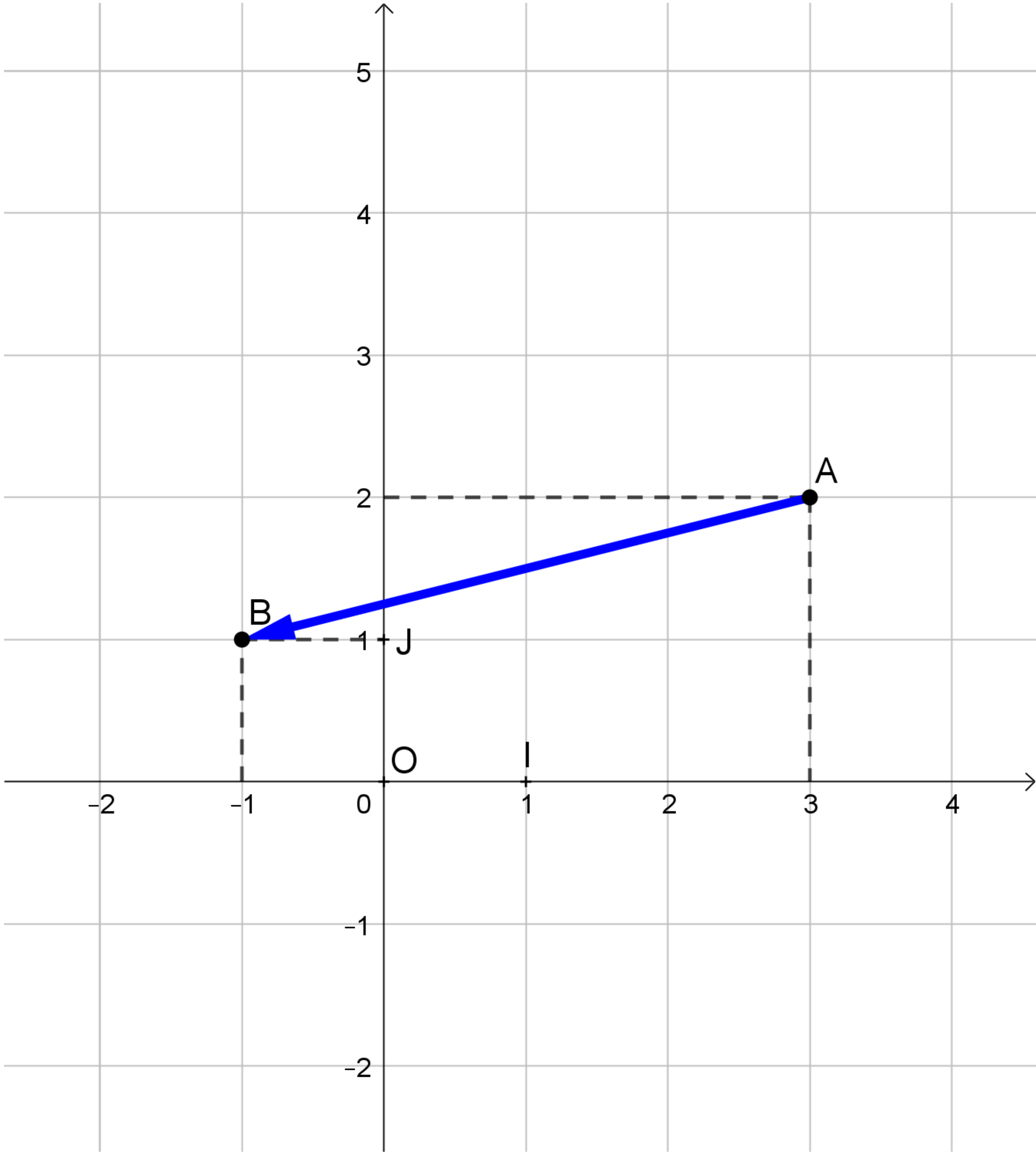
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$



Exemple

Soit $\color{green}{A(3,2)}$ et $\color{red}{B(-1,1)}$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\color{red}{(-1)} - \color{green}{3} \\ \color{red}{1} - \color{green}{2}\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4 \\ -1\end{pmatrix}$$



Égalité, somme de vecteurs et produit par un réel

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ et un réel $k \neq 0$.

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}} \end{cases}$ $\rightarrow$ Deux vecteurs de même coordonnées sont égaux
- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ On peut additionner les coordonnées des vecteurs
- $k\vec{u}\begin{pmatrix} k \times x_{\vec{u}} \\ k \times y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ On peut multiplier les coordonnées des vecteurs par k

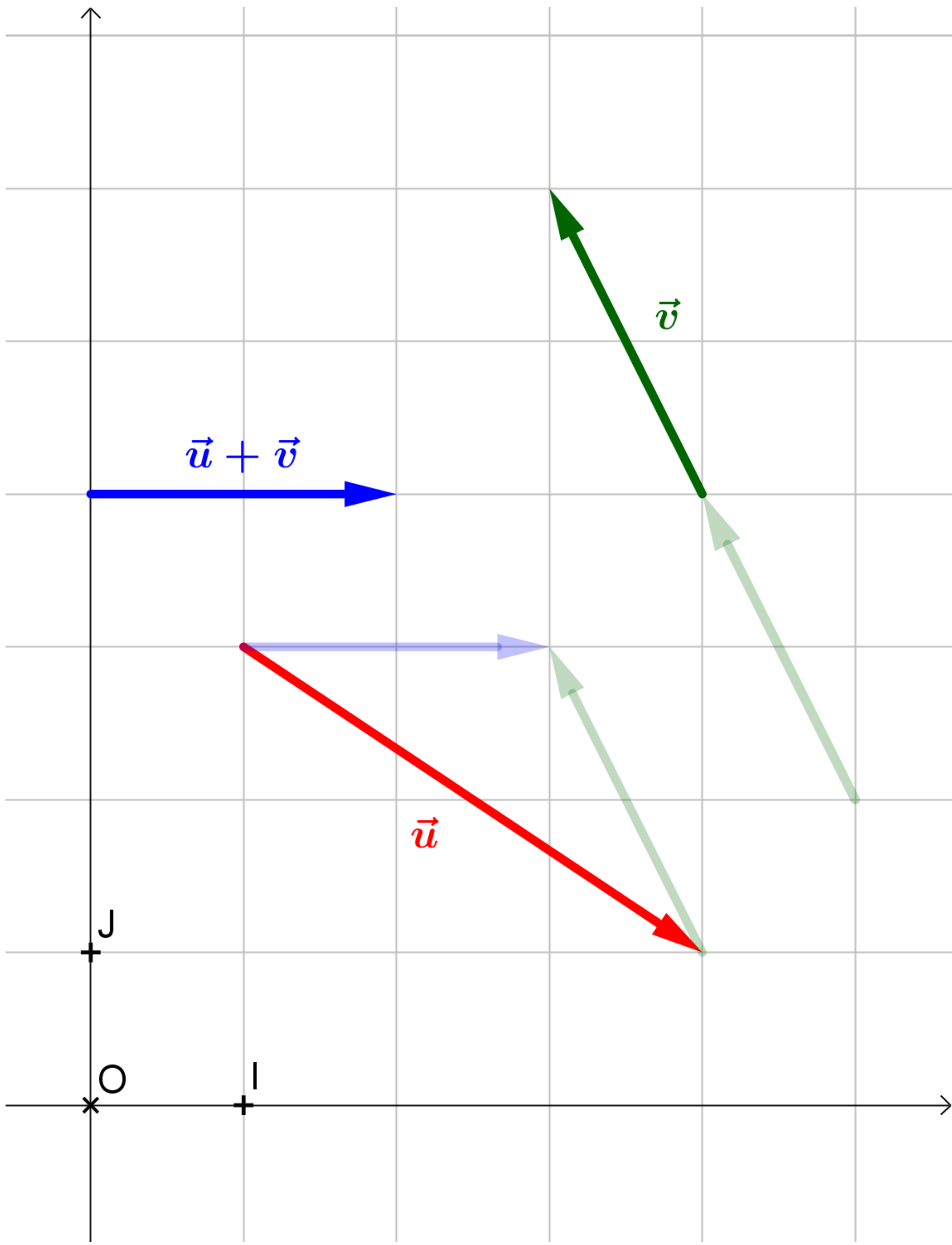
Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $k=2$.

On a :

- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3+(-1)\\(-2)+2\end{pmatrix} \quad \rightarrow \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

- $2\vec{v}\begin{pmatrix}2\times(-1)\\2\times 2\end{pmatrix} \quad \rightarrow 2\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

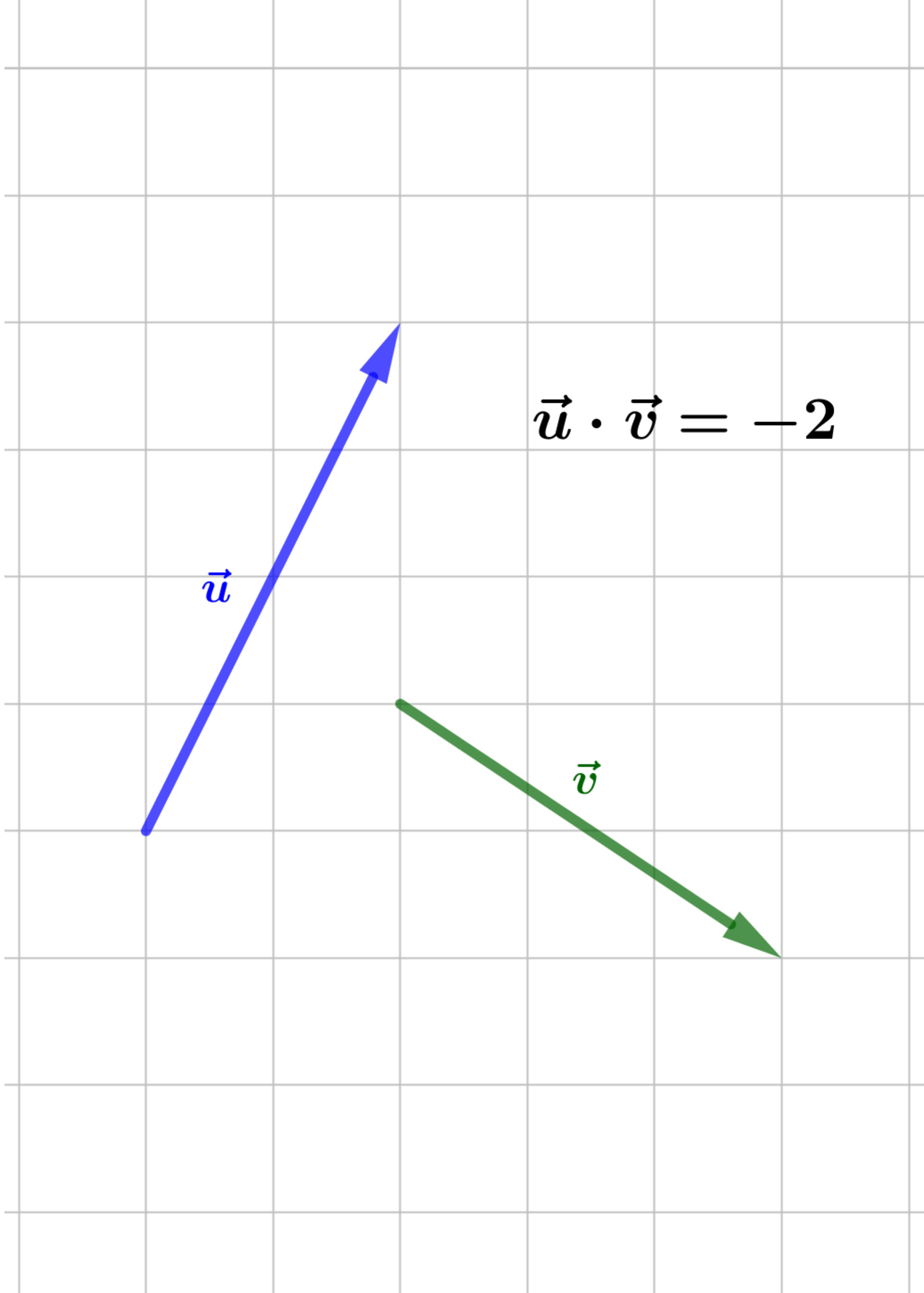


Produit scalaire

Le **produit scalaire** de deux vecteurs est un **nombre réel**.

Il se note

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$



Produit scalaire dans un repère orthonormé

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

On a :

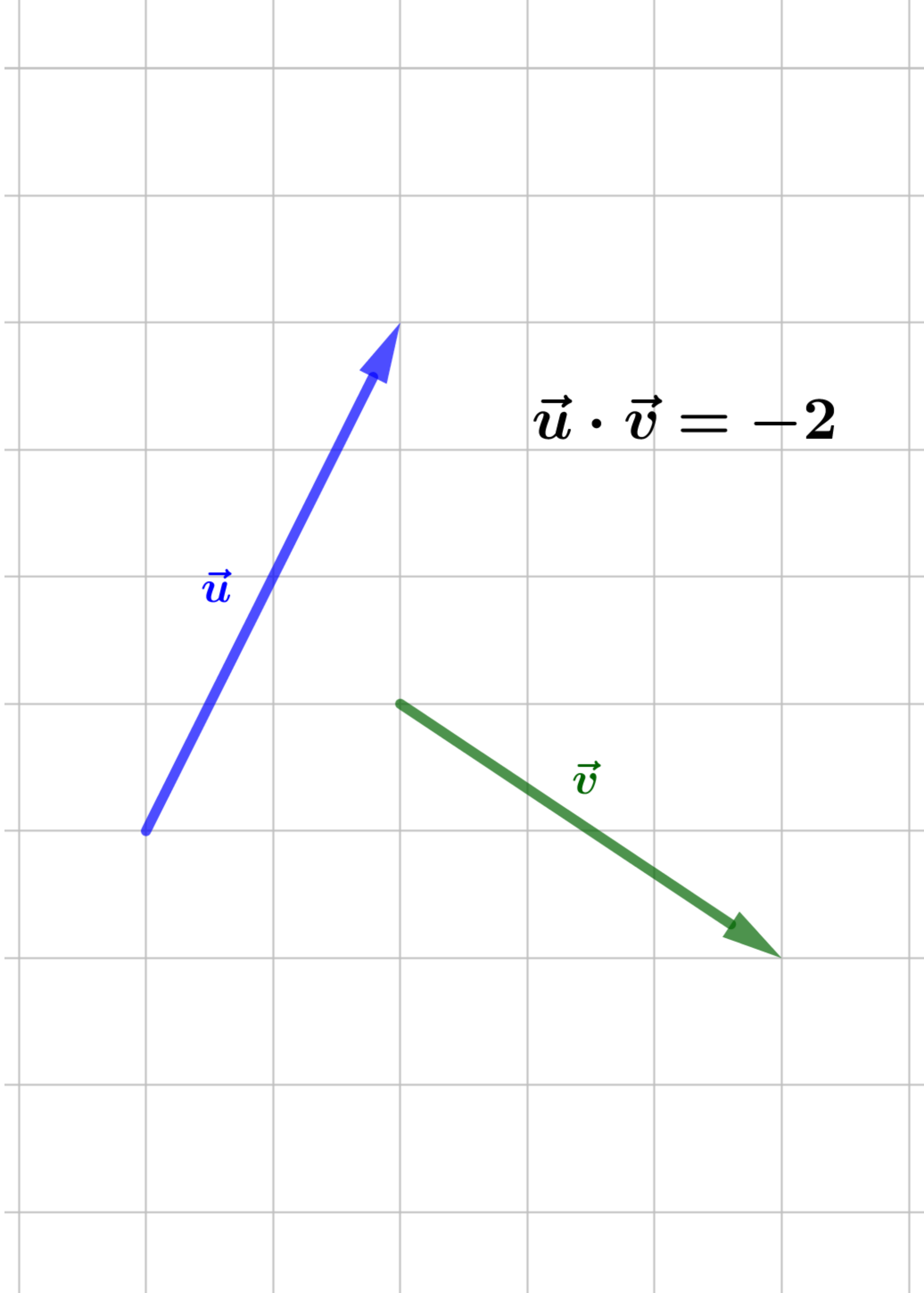
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}) + (y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}})}$$

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}})+(y_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}})\\ &= (2\times 3)+(4\times -2)\\ &= 6+(-8)=-2\end{aligned}$$

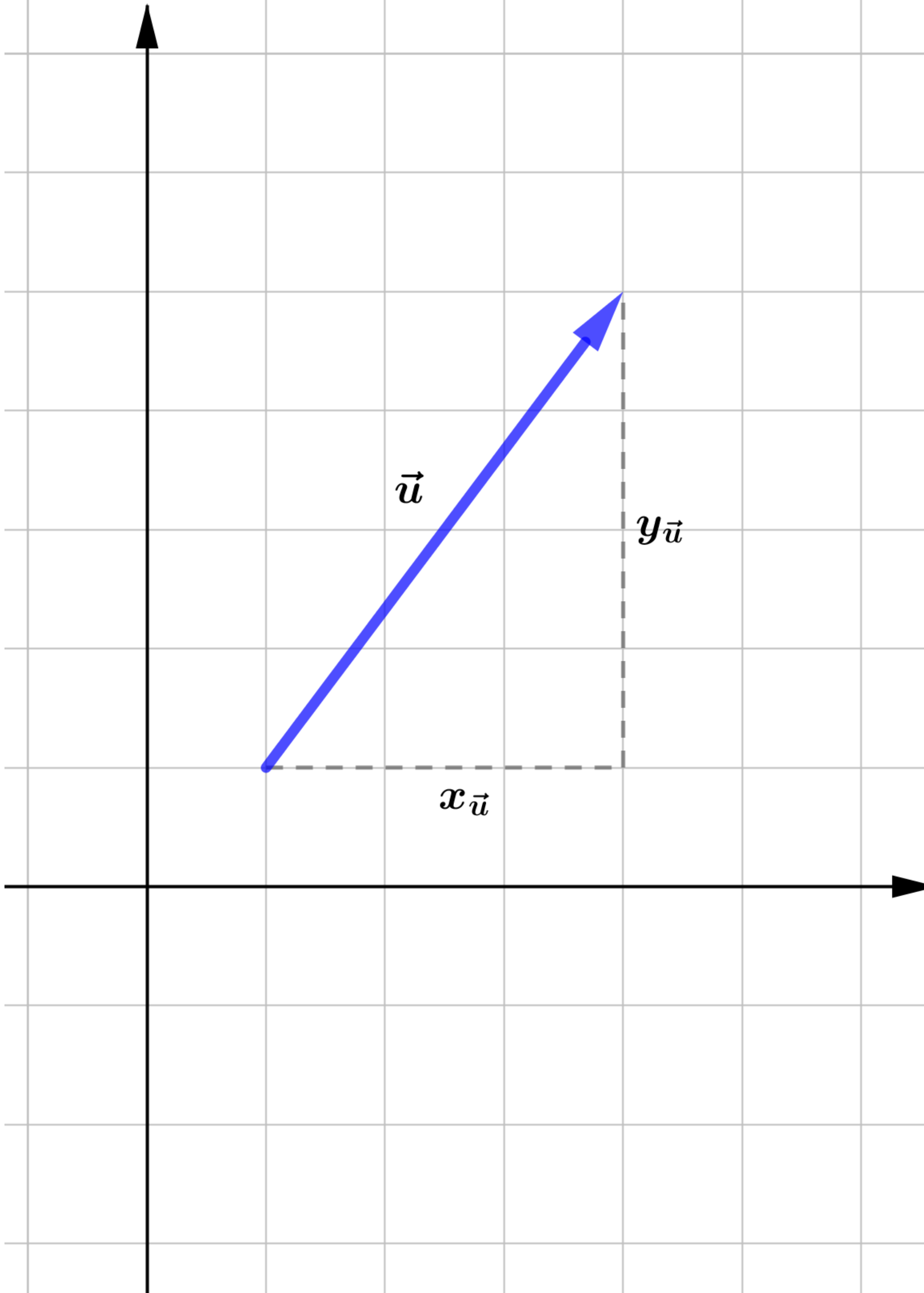


Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

On a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_{\vec{u}})^2 + (y_{\vec{u}})^2}$$

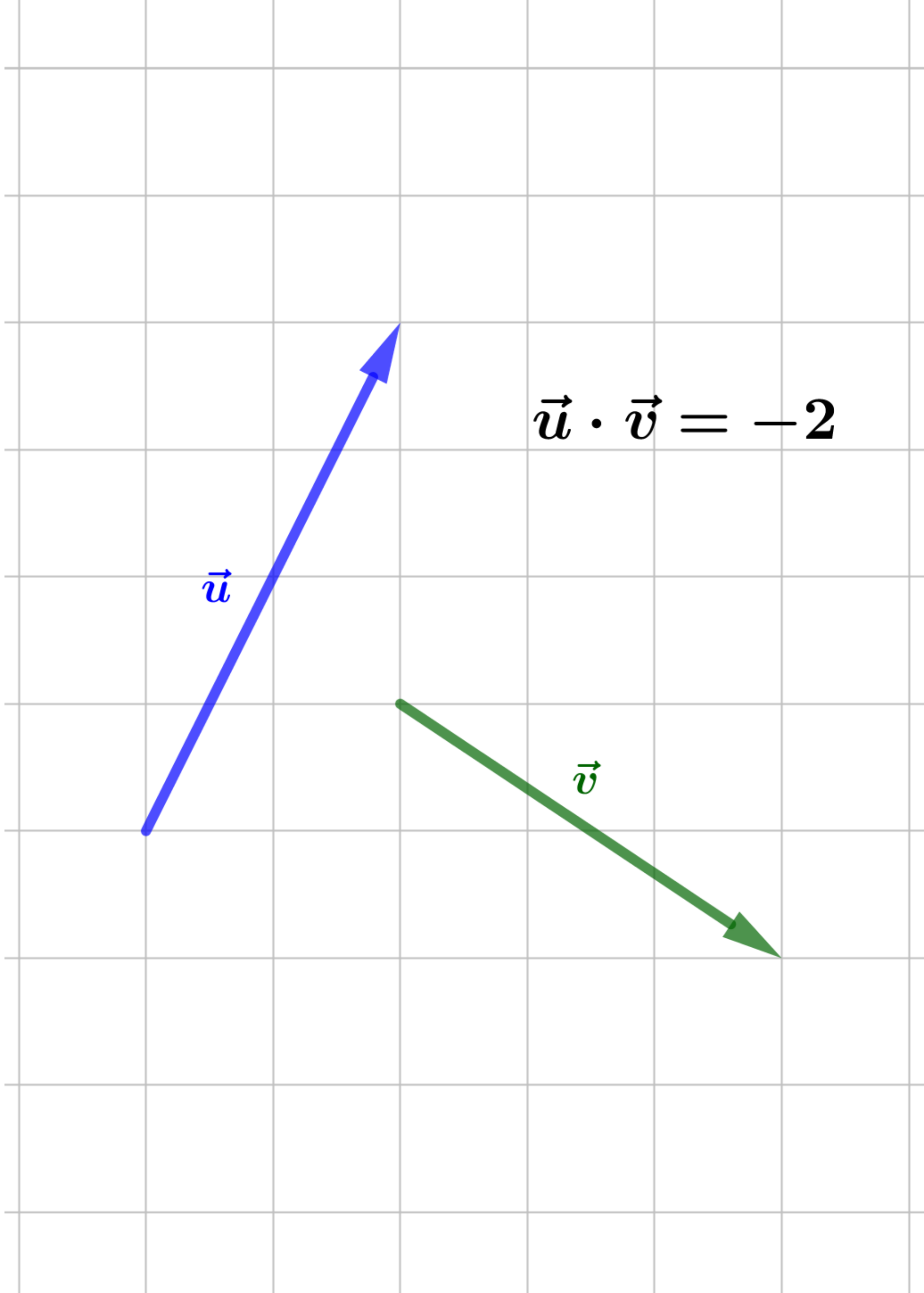


Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

On a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_{\vec{u}})^2 + (y_{\vec{u}})^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_{\vec{v}})^2 + (y_{\vec{v}})^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

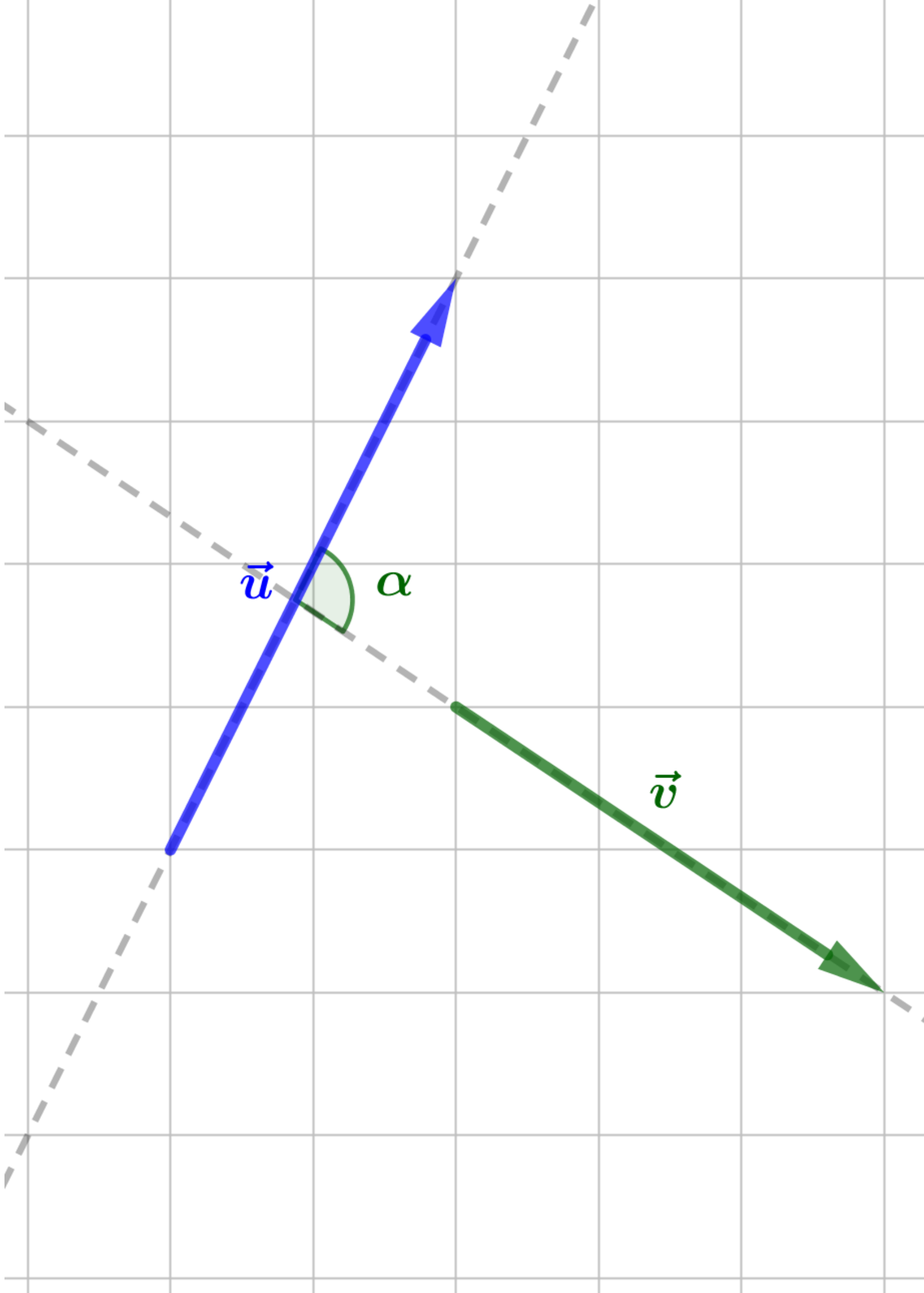


Produit scalaire (2)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs du plan et α l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.

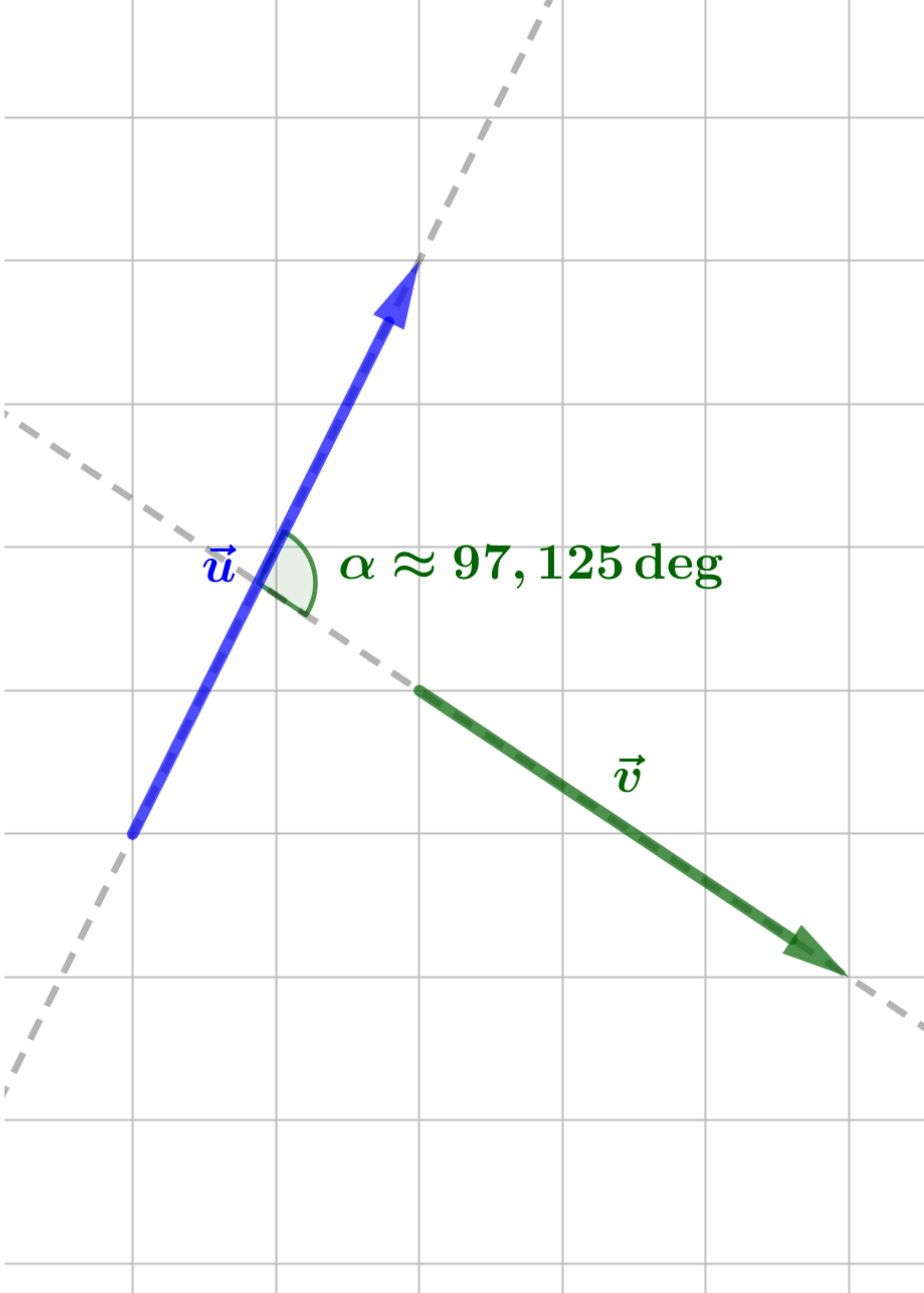
On a :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha}$$



Exemple

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha \\ &= \sqrt{20} \times \sqrt{13} \times \cos(97,125\ldots) \\ &= \sqrt{260} \times \cos(97,125\ldots) \\ &= -2\end{aligned}$$

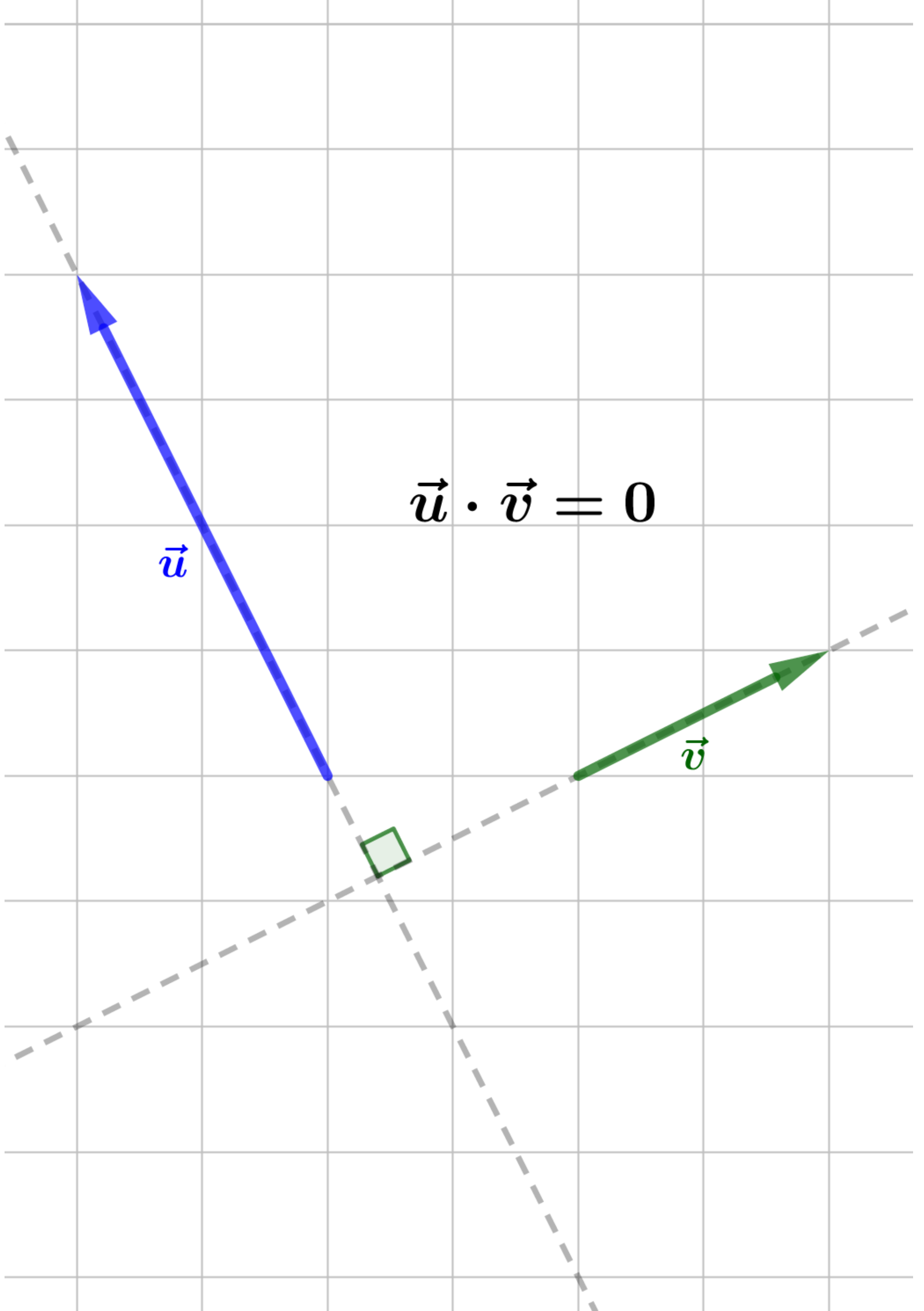


Théorème fondamental 🚩

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs du plan.

On a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}}$$



Preuve

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

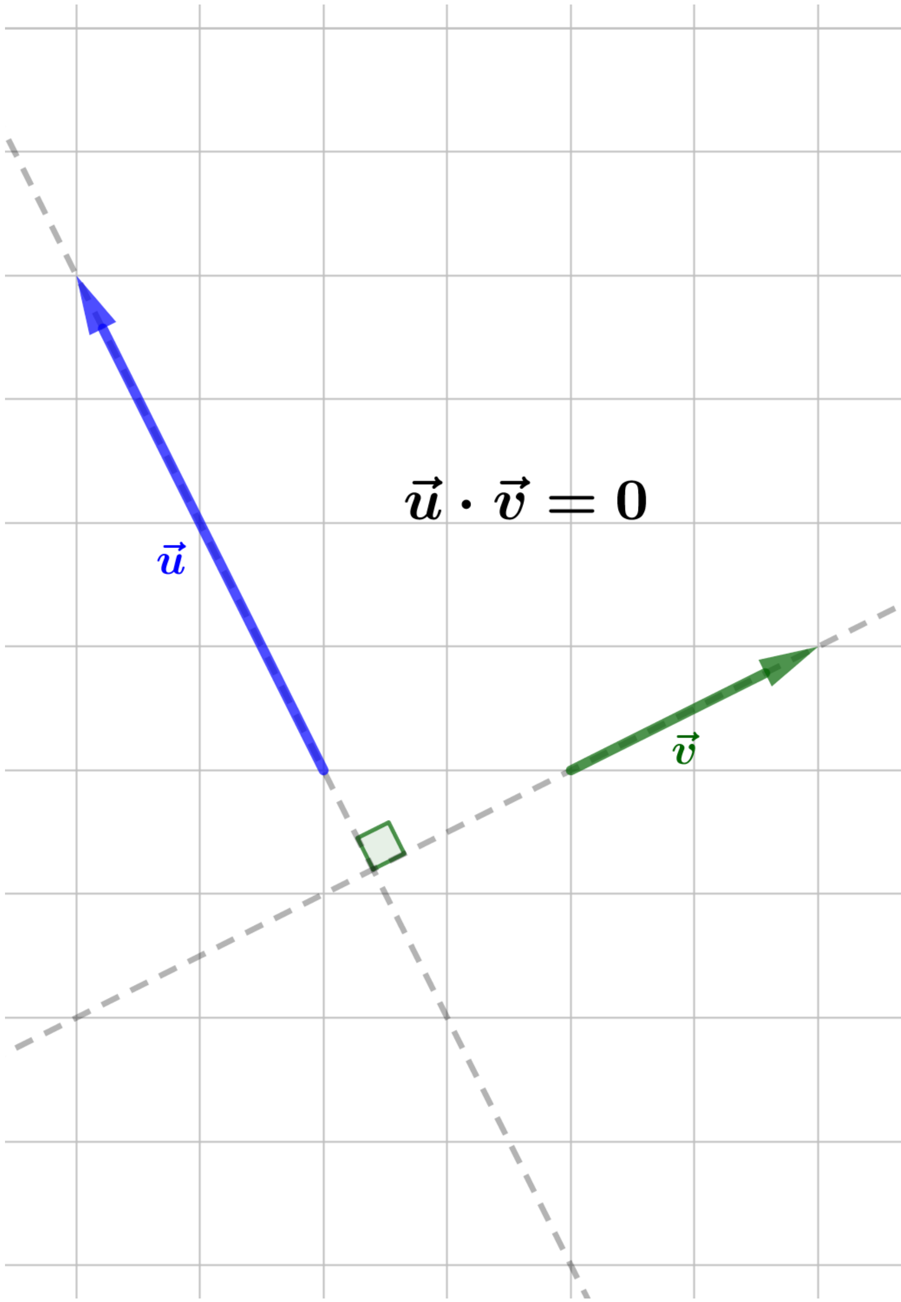
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(90^\circ) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 0 = 0$$

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 90^\circ \\ \alpha = -90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$



Propriétés du produit scalaire

- Commutativité : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Associativité :
  - $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$
  - $k\vec{a} \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot k\vec{b}$
- Distributivité :
  - $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$
  - $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

- Vecteur "au carré" : $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$
- Identités remarquables :
  - $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
  - $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
  - $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

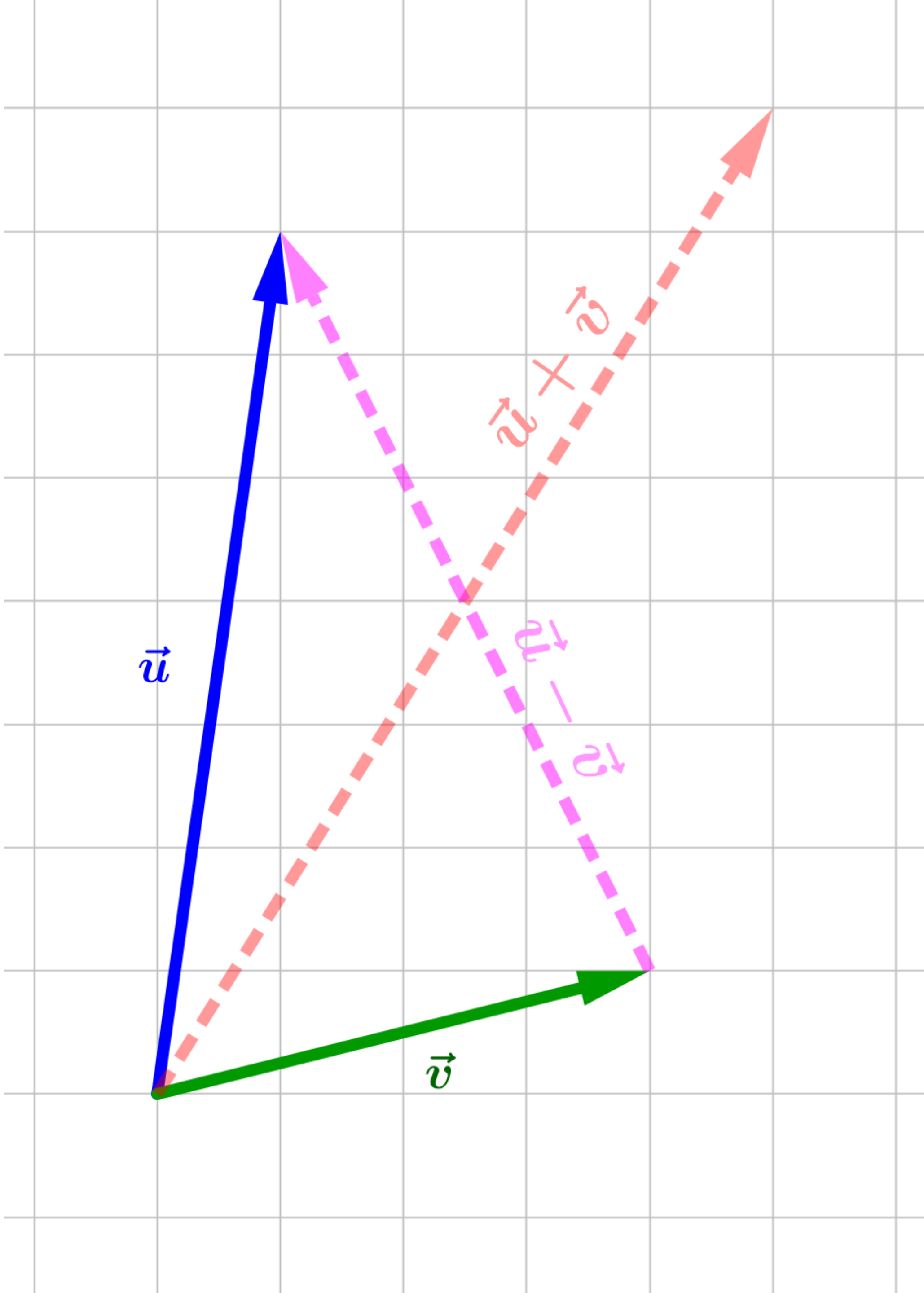
Produit scalaire (3)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs du plan.

On a :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}$$



Preuve

$$\begin{array}{rrcl} & (\vec{u}+\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 \\ \Leftrightarrow & 2\vec{u}\cdot\vec{v} & = & (\vec{u}+\vec{v})^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2 \\ \Leftrightarrow & \vec{u}\cdot\vec{v} & = & \dfrac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v})^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2\right) \\ \Leftrightarrow & \vec{u}\cdot\vec{v} & = & \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right) \end{array}$$

La seconde proposition se démontre de la même manière avec $(\vec{u}-\vec{v})^2$

⚠️ Résumé ⚠️

- $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}) + (y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}})}$
- $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha}$
- $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$
- $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)}$

Produit scalaire et projeté orthogonal

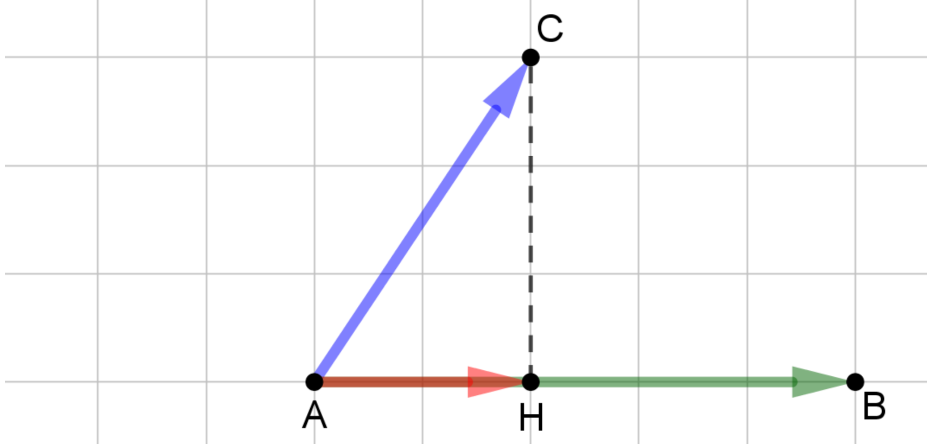
Soient A, B, C trois points du plan et H le projeté orthogonal de C sur la (AB).

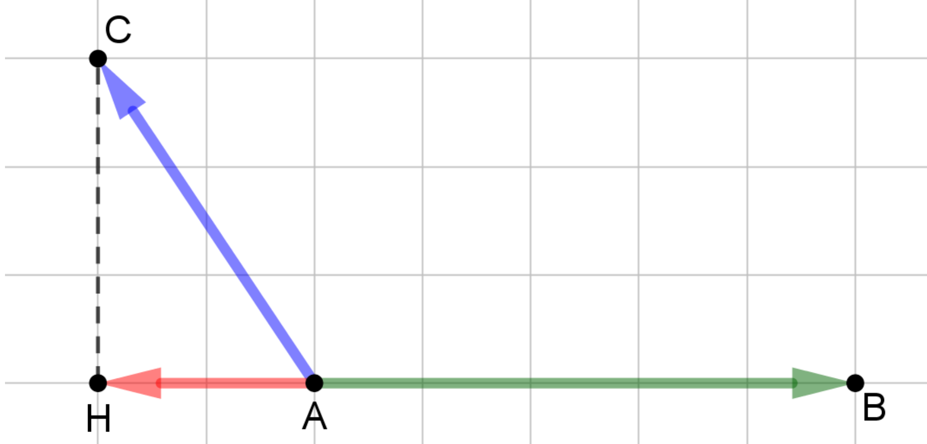
On a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}$$

Donc :

- Si $H \in [AB) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$
- Si $H \notin [AB) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$





Preuve

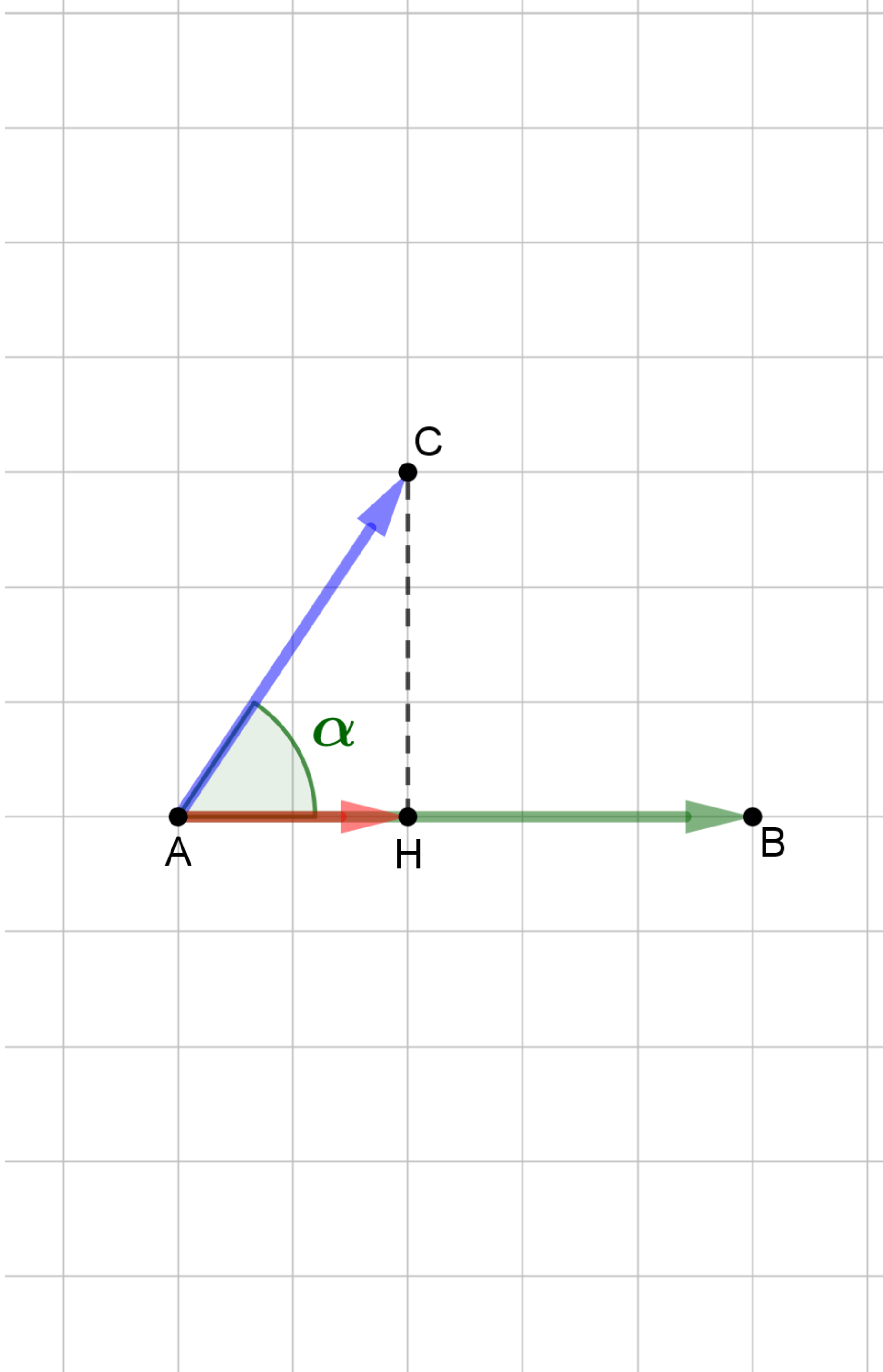
Cas où $H \in [AB)$

On a :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\alpha$
- $\cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \frac{AH}{AC} \\ &= AB \times AH\end{aligned}$$



Cas où $H \notin [AB)$

On a $\alpha = 180^\circ - \beta$ donc :

$$\cos\alpha = \cos(180^\circ - \beta)$$
$$= -\cos(\beta) = \frac{-AH}{AC}$$

Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \frac{-AH}{AC}$$
$$= -AB \times AH$$