Nombre dérivé

1ère STMG

Table des matières

1 Limite en zéro d'une fonction

1.1 Exemple

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

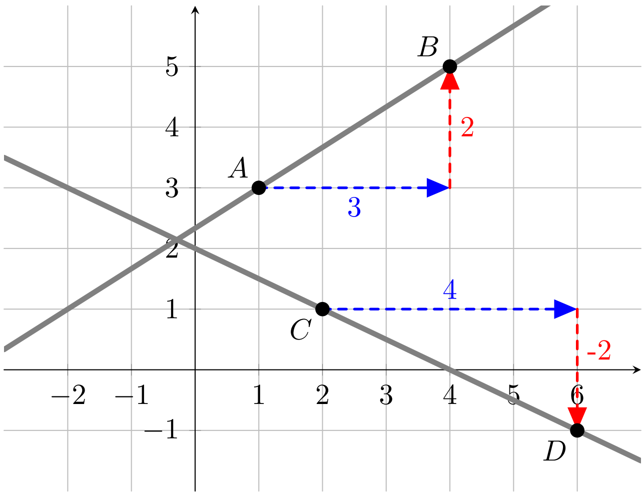
On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

2 Nombre dérivé

2.1 Rappel : Coefficient directeur d'une droite



Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{5-3}{4-1}=\frac{2}{3}$$

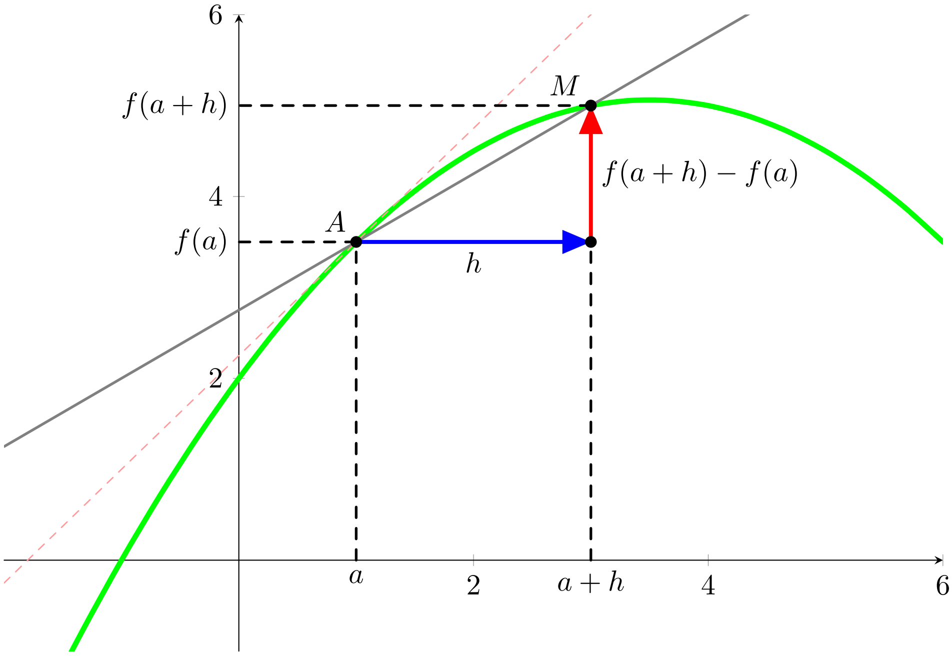
Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à :

$$\frac{-1-1}{6-2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

2.2 Définition : Nombre dérivé

Soit une fonction f et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère ci-dessous.

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives (a) et $(a+h)$.



Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à :

$$\frac{f\,(a+h)-f\,(a)}{a+h-a}=\frac{f\,(a+h)-f\,(a)}{h}$$

.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\left(\frac{f\,(a+h)-f\,(a)}{h}\right)$ lorsque h tend vers 0.

Ce coefficient directeur s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a)$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f\,(a+h)-f\,(a)}{h}\right)$$

2.3 Méthode : Calculer le nombre dérivé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Calculer le nombre dérivé de la fonction f en $x = 2$.

(a) On commence par calculer $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

On a :

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 + 2 \times (2+h) - 3 \\ &= 4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 3 \\ &= h^2 + 6h + 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2) &= (2)^2 + 2 \times (2) - 3 \\ &= 4 + 4 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(h^2 + 6h + 5) - (5)}{h} \\ &= \frac{h^2 + 6h}{h} \\ &= \frac{h(h+6)}{h} \\ &= h + 6 \end{aligned}$$

Puis on calcule la limite de $\left(\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}\right)$ lorsque h tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 6) = 6$$

Le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6. Et on note $f'(2) = 6$.

3 Tangente à une courbe

3.1 Définition : Tangente une courbe représentative d'une fonction

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative d'une fonction f.

La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite :

— passant par A,
— de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

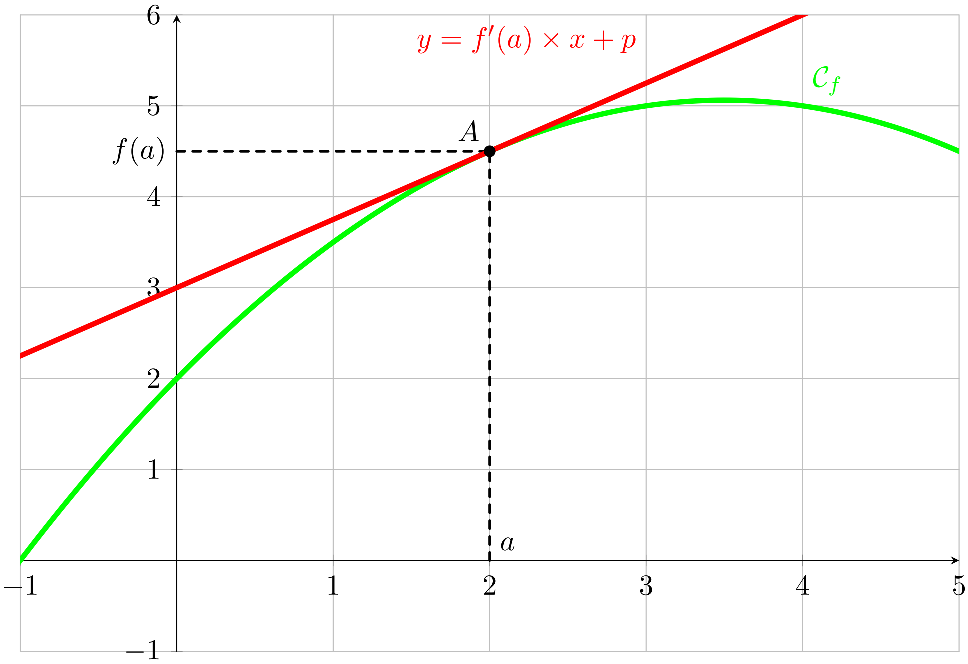


Figure 1 – Tangente à une courbe représentatn une fonction f

3.2 Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

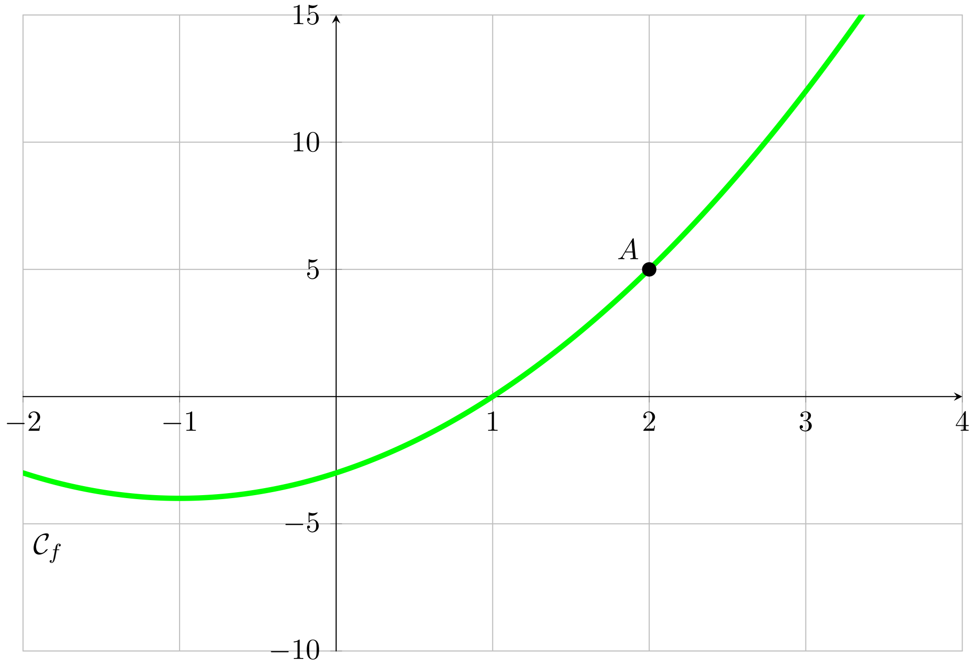
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont le nombre dérivé en 2 a été calculé plus haut.

a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
b) Construire la tangente à la courbe de la fonction f en 2.
c) En s'aidant de la calculatrice graphique, reproduire la courbe de la fonction f
d) Donner une équation de la tangente.

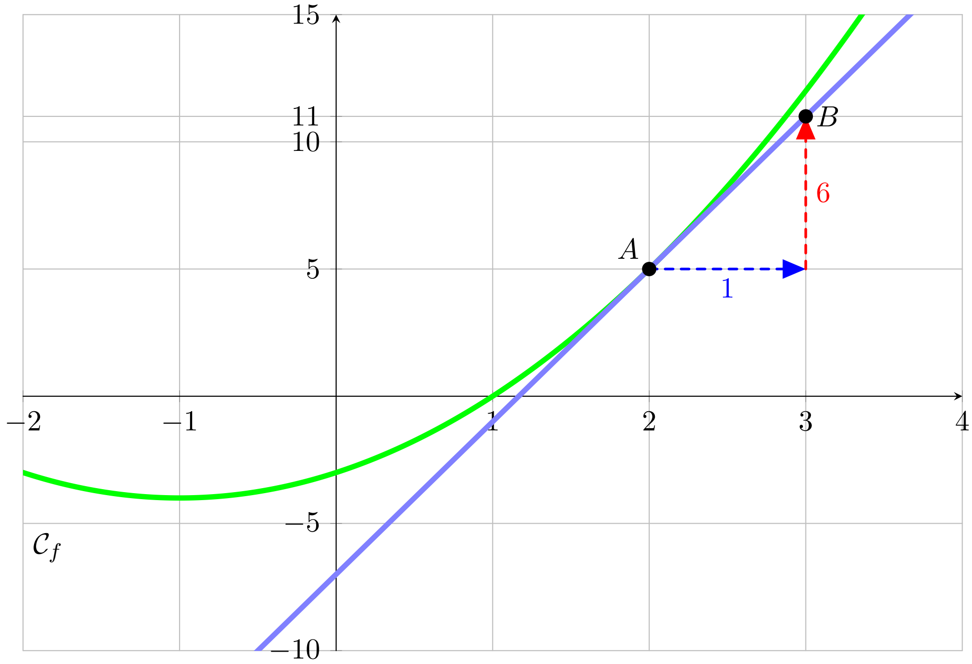
(a) On a vu que le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6. $f'(2) = 6$

Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.

(b) On commence par placer le point A de coordonnées $(2\,;f(2))$, avec $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$.

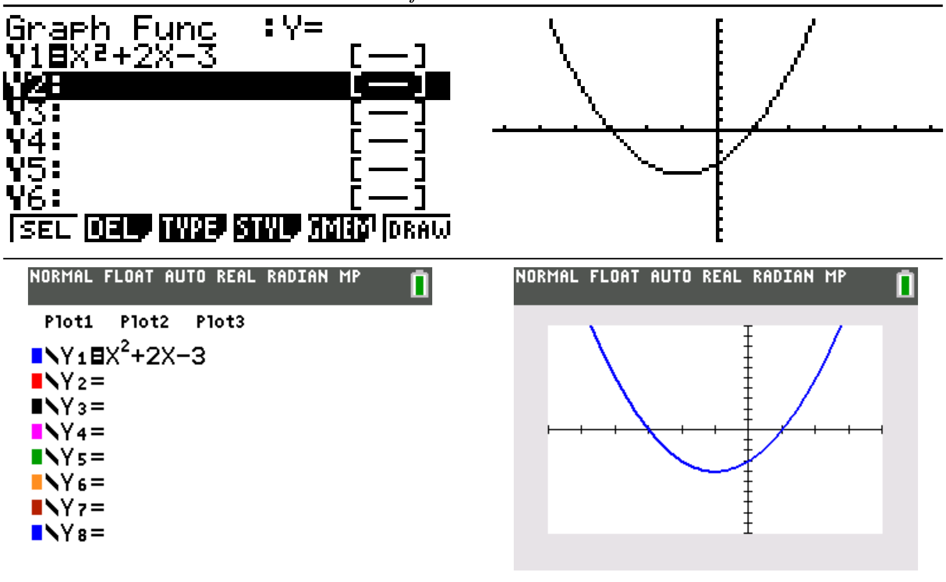


On trace la tangente passant par A et de coefficient directeur 6. Pour cela, on avance de 1 dans le sens des abscisses puis de 6 dans le sens des ordonnées.



(c) A l'aide de la calculatrice, on a :

TABLE 2 – La courbe $\mathcal{C}_f$ sur la calculatrice CASIO et TI



(d) Une équation de la tangente en 2 est de la forme $y = 6x + p$.

Pour calculer p, on sait que le point A appartient à la tangente donc ses coordonnées $(2\,;5)$ vérifient l'équation de la tangente $y = 6x + p$.

$$\begin{aligned} y_A &= 6 \times x_A + p \\ 5 &= 6 \times 2 + p \\ 5 &= 12 + p \\ p &= -7 \end{aligned}$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.

Remarques

À l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point.

Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, saisir :

- TI-83 : Touches `2nde` + `PGRM` (Dessin) puis `5: Tangente` et saisir l'abscisse du point A, ici 2. Puis `ENTER`.

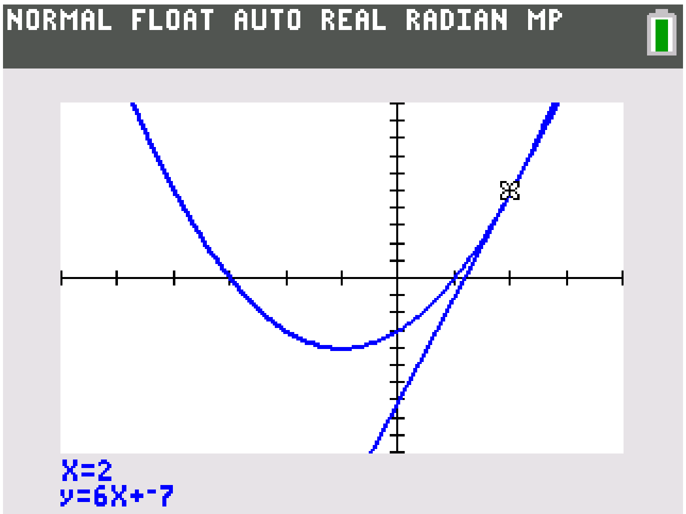


FIGURE 2 – Courbe et tangente avec TI

- Casio Graph 85 : Touches `SHIFT` + `F4` (Skech) puis `Tang` et saisir l'abscisse du point A , ici 2. Puis `EXE` + `EXE`.

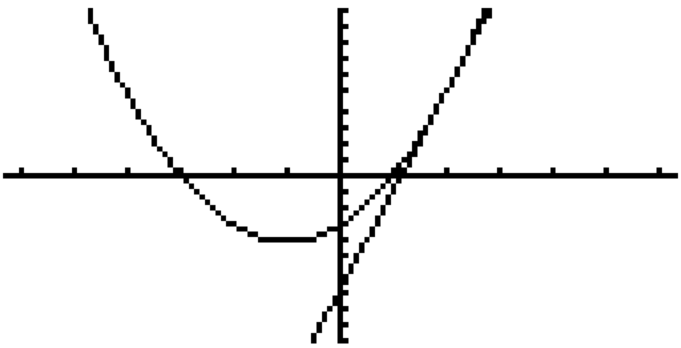


FIGURE 3 – Courbe et tangente avec Casio