Généralités sur les fonctions

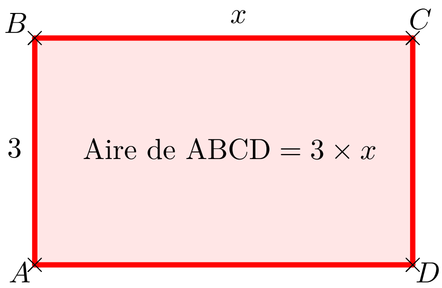
1ère STMG

Table des matières

1 Définitions, notations et représentation graphique

Exemple

On considère la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions 3 et x.



Une expression littérale de f est donc : $f(x) = 3 \times x$.

1.1 Définition : Fonction

Une fonction f associe à tout nombre réel x un unique nombre réel, noté $f(x)$.

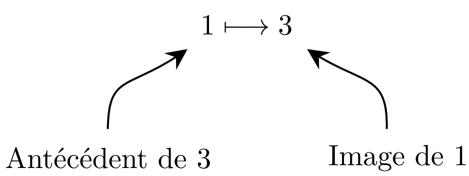
On note également : $x \longmapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.

1.2 Image et antécédent

Pour la fonction f définie plus haut, on a : $f(1) = 3 \times 1 = 3$ et $f(4) = 3 \times 4 = 12$

On dit que :

— l'**image** de 1 par la fonction f est 3. $1 \longmapsto 3$
— un **antécédent** de 3 par f est 1.



Remarques

— Un nombre possède **une unique image**.
— Cependant, un nombre peut posséder **plusieurs antécédents**.

1.3 Méthode : Calculer une image ou un antécédent

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x} + 1$

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessus

x	4	$10,24$	16	$20,25$
$f(x)$				

b) Compléter alors :
- L'image de 4 par f est ...
- Un antécédent de 5 par f est ...
- $f : \ldots \longmapsto 4,2$
- $f(20,25) = \ldots$

c) Calculer $f(4,41)$ et $f(1310,44)$

(a) Tableau de valeurs

x	4	$10,24$	16	$20,25$
$f(x)$	**3**	**4,2**	**5**	**5,5**

(b)

- L'image de 4 par f est **3**
- Un antécédent de 5 par f est **16**
- f : **10,24** $\longmapsto 4,2$
- $f(20,25) =$ **5,5**

(c) Images de $4,41$ et $1310,44$

$f(4,41) = \sqrt{4,41} + 1 = \mathbf{3,1}$

$f(1310,44) = \sqrt{1310,44} + 1 = \mathbf{37,2}$

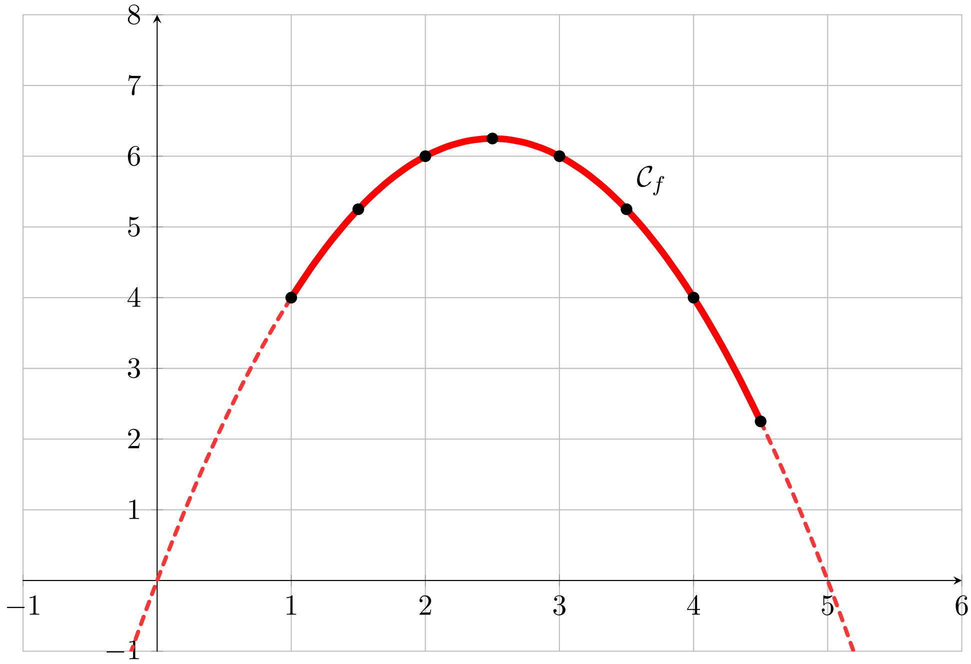


Figure 1 – Représentation graphique de $f(x) = 5x - x^2$

1.4 Représentation graphique

On considère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

On réalise le tableau de valeurs suivant :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on lise x en abscisse et $f(x)$ en ordonnée. En reliant les points, on obtient la courbe $\mathcal{C}_f$.

Tous les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ possèdent donc des coordonnées de la forme $(x; f(x))$.

La courbe représentative de la fonction f dépasse les limites du tableau de valeurs : la fonction n'est pas limitée aux valeurs de $x \in [1; 4.5]$. C'est pourquoi nous pouvons prolonger la courbe (en pointillé) dans la représentation ci-dessus.

2 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

2.1 Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

Répondre **graphiquement** aux questions suivantes :

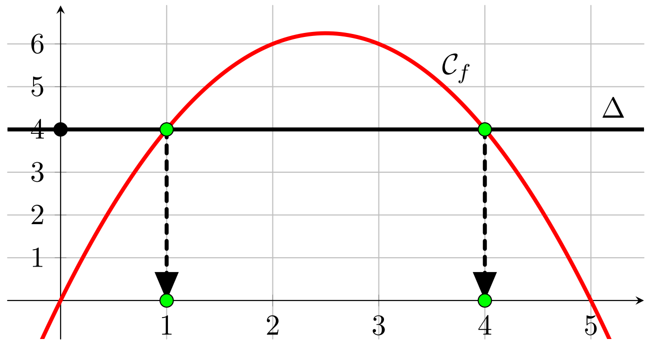
a) Résoudre l'équation $5x - x^2 = 4$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 \geq 4$. Donner une interprétation du résultat.

(a) On considère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

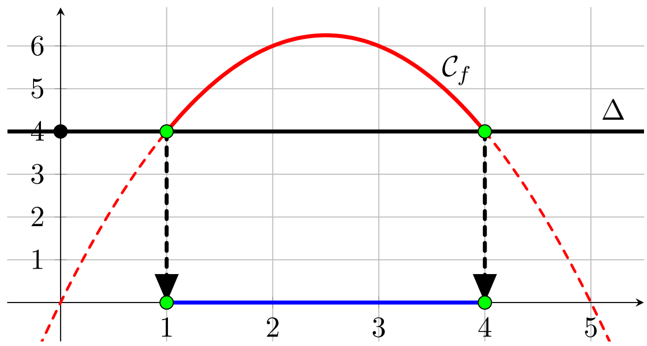
Il s'agit de trouver les antécédents de 4 par la fonction f. Ce qui revient à résoudre l'équation $f(x) = 4$.

On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $(0 \quad ; \quad 4)$.



On lit graphiquement que l'équation $5x - x^2 = 4$ admet pour solutions : les nombres 1 et 4.

(b) Résoudre l'inéquation $5x - x^2 \geq 4$ revient à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ pour lesquels $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** la droite Δ.



On lit graphiquement que l'inéquation $5x - x^2 \geq 4$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle $[1; 4]$.

2.2 Remarques : Validité et unicité des résultats

- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées. Il est indispensable de vérifier les résultats par un calcul.
- L'équation $f(x) = 7$ n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

3 Variations d'une fonction

3.1 Définition : Taux de variation

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le nombre :

$$t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3.2 Propriété : Taux de variation et coefficient directeur

Le taux de variation de f entre a et b est le **coefficient direceteur** *(la pente)* de la droite passant par les points d'abscisses a et b de la courbe de f.

3.3 Méthode : Déterminer un taux de variation d'une fonction

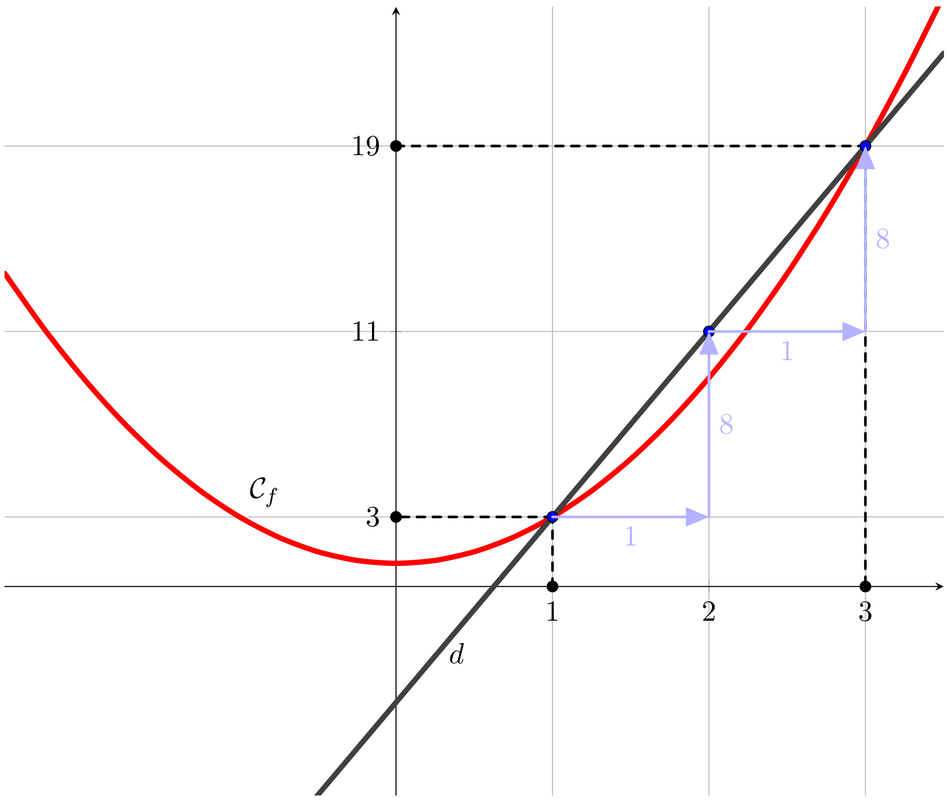
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 1$.

a) Déterminer le taux de variation entre 1 et 3.
b) Interpréter géométriquement ce taux de variation.

(a) Taux de variation entre 1 et 3

$$\begin{aligned}\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} &= \frac{(2 \times 3^2 + 1) - (2 \times 1^2 + 1)}{2} \\ &= \frac{19 - 3}{2} \\ &= 8\end{aligned}$$

(b) Le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à 8 donc la pente de la droite passant par les points d'abscisses 1 et 3 est égale à 8.


19
11
3
1
2
3
8
8
1
1
$\mathcal{C}_f$
d

3.4 Définition : Fonctions monotones

On dit qu'une fonction f est **monotone** sur un intervalle I, si f est :

— soit **croissante** sur I,
— soit **décroissante** sur I,
— soit **constante** sur I.

3.5 Propriétés : Taux de variation

Si le **taux de variation** d'une fonction f entre deux nombres quelconques d'un intervalle I ...

— ... est **positif**, alors f est **strictement croissante** sur I.
— ... est **négatif**, f est strictement décroissante sur I.
— ... est **nul**, f est constante sur I.

3.6 Méthode : Étudier les variations d'une fonction à l'aide du taux de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x - 3$.

a) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(a) On considère deux nombres quelconques $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Le taux de variation de f entre a et b est égal à :

$$\begin{aligned}\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(5b - 3) - (5a - 3)}{b - a} \\ &= \frac{5b - 5a}{b - a} \\ &= \frac{5(b - a)}{b - a} \\ &= 5\end{aligned}$$

Or, $5 > 0$ donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ et donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.