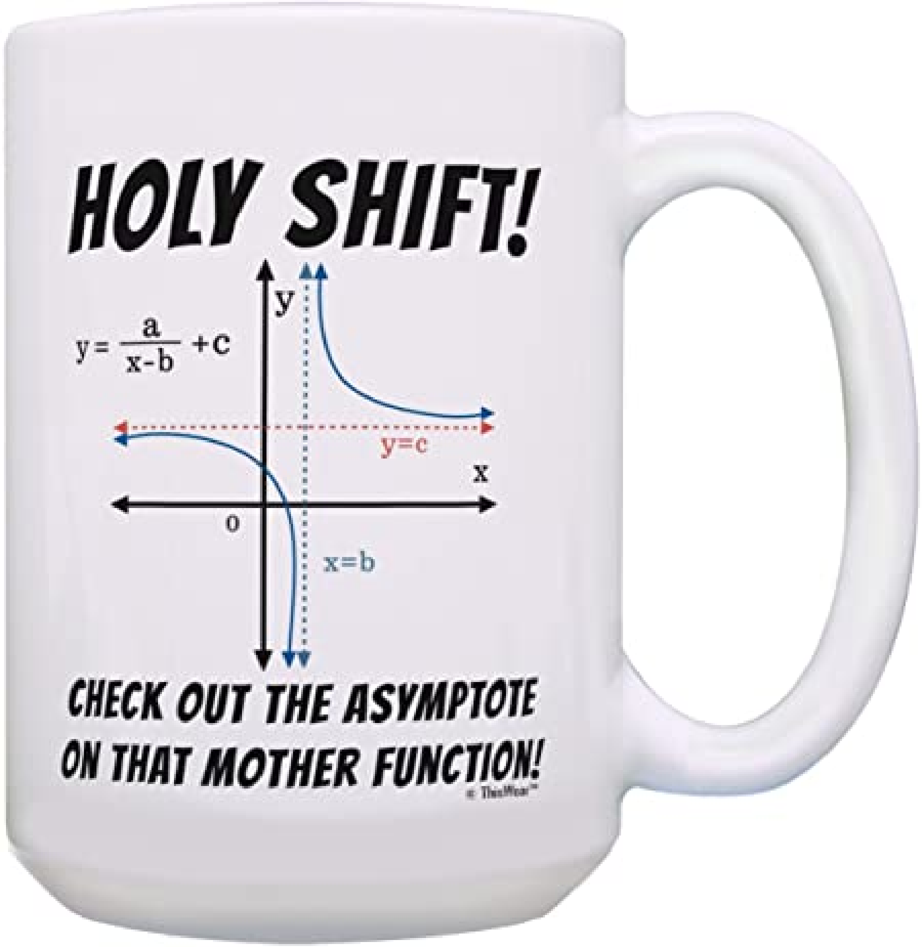
Généralités sur les fonctions



Définition

Soit $\mathscr{D}_f$ une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f$, associe à tout nombre x de $\mathscr{D}_f$, un unique nombre, noté $f(x)$.

$\mathscr{D}_f$ est l'ensemble de définition de f.

Notation

> $$f : \mathscr{D}_f \mapsto \mathbb{R}$$
> $$x \mapsto f(x)$$

ou

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = ...$

Exemple

$$\begin{aligned} f\,:\,[0;5] &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto x\,(5-x) \end{aligned}$$

ou

Soit f une fonction définie sur $[0;5]$ tel que $f(x) = x\,(5-x)$.

Méthode : Établir un tableau de valeurs de f

Soit f une fonction définie sur $[0;5]$ tel que $f(x)=x\,(5-x)$.

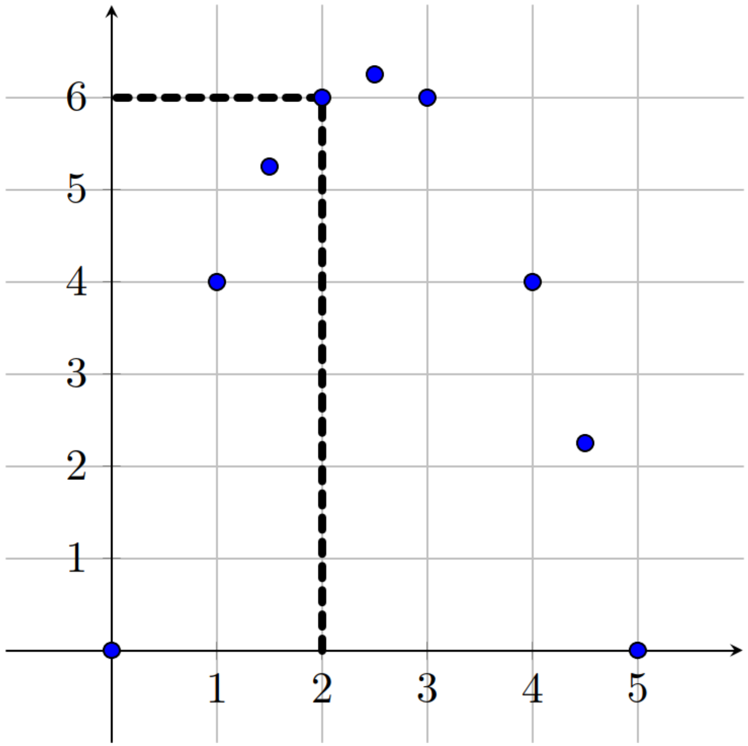
Établir un tableau de valeurs de f, c'est calculer quelques valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de $x\in\mathscr{D}_f$.

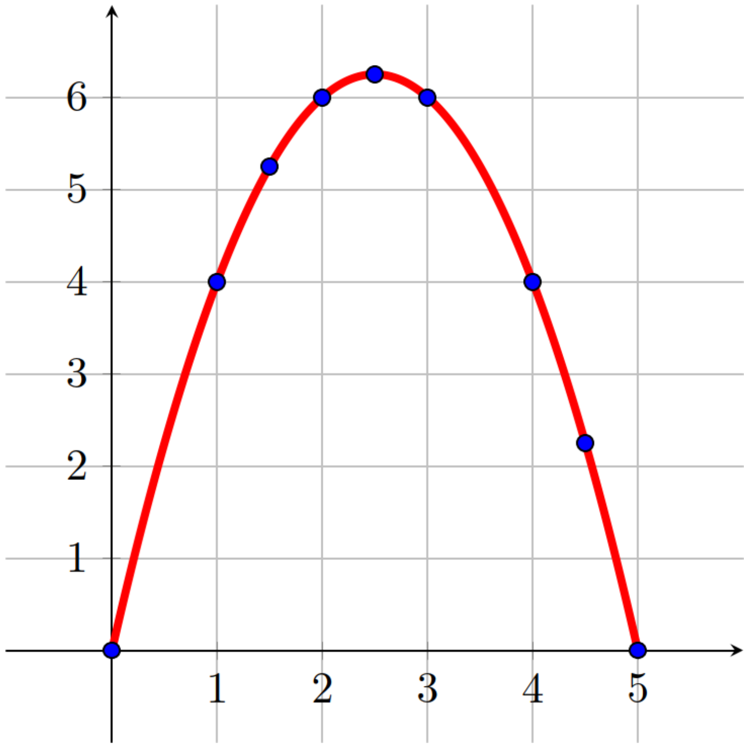
- $f(2)=2\times(5-2)=6$
- $f(0)=0\times(5-0)=0$
- $f(4.25)=4.25\times(5-4.25)=2.25$

Avec quelques valeurs de $x \in [0;5]$, on obtient un **tableau de valeurs**

x	0	1	$1,5$	2	$2,5$	3	4	$4,25$	5
$f(x)$	0	4	$5,25$	6	$6,25$	6	4	$2,25$	0

En plaçant les points dans un repère et en reliant ces points, on obtient :





Remarque

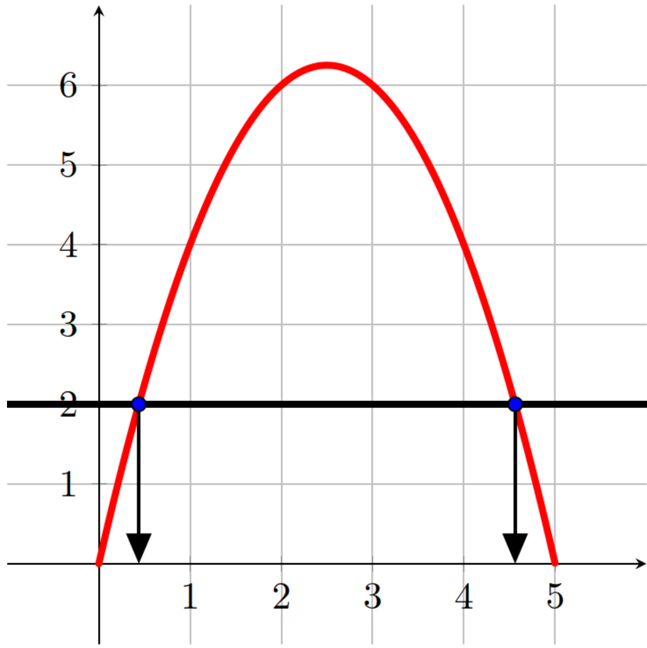
L'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ avec $y = f(x)$ définissent la courbe représentative de la fonction f.

On dira que $y = f(x)$ est **l'équation de la courbe**.

Résolution graphique d'équations

Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$

Pour résoudre une équation du type $f(x) = k$, il s'agit de trouver le (ou les) antécédent(s) de k par la fonction f.



Exemple

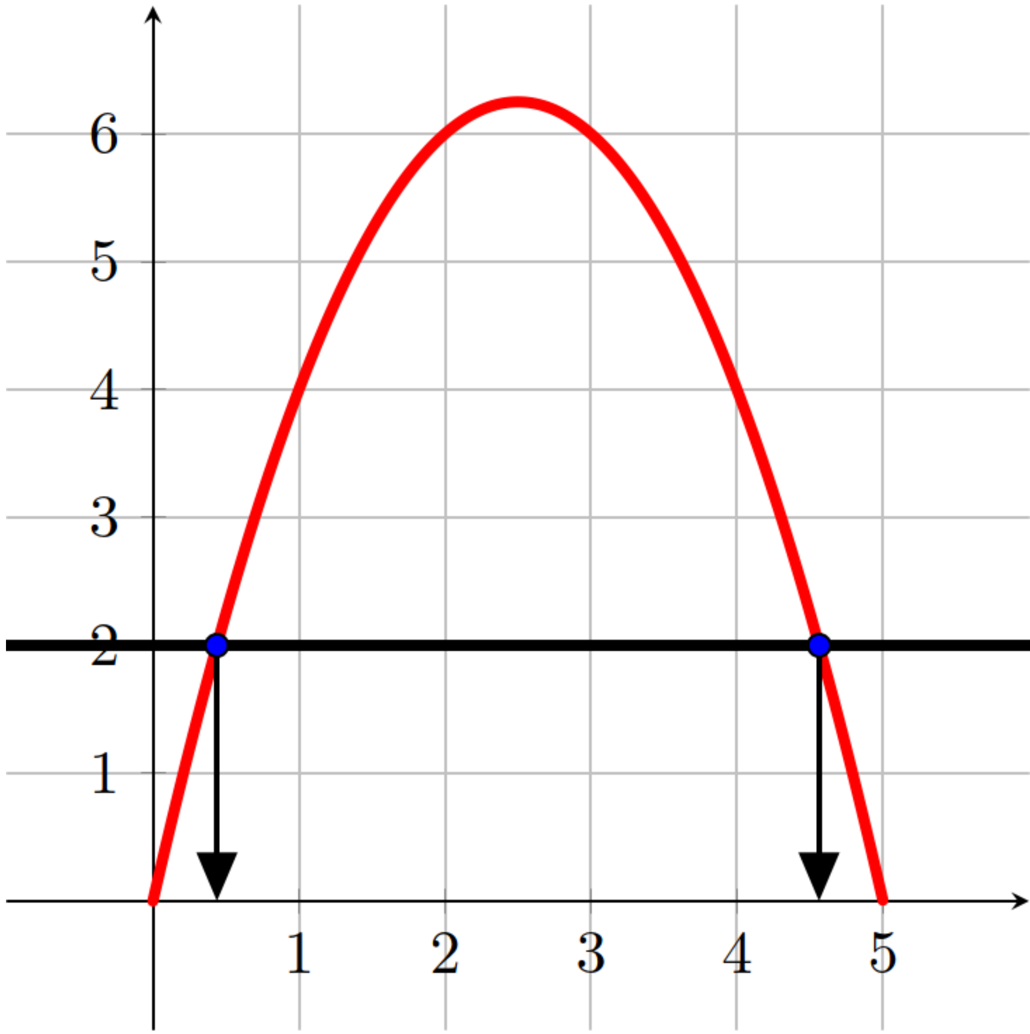
Soit f une fonction définie sur $[0;5]$ tel que $f(x) = x\,(5-x)$.

Pour résoudre $f(x) = 2$, il s'agit de lire graphiquement les antécédents de 2 par la fonction f.

On détermine les abscisses des points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $(0;2)$.

On trouve deux solutions "approchées" :

$$x \approx 0,5 \text{ et } x \approx 4,5$$

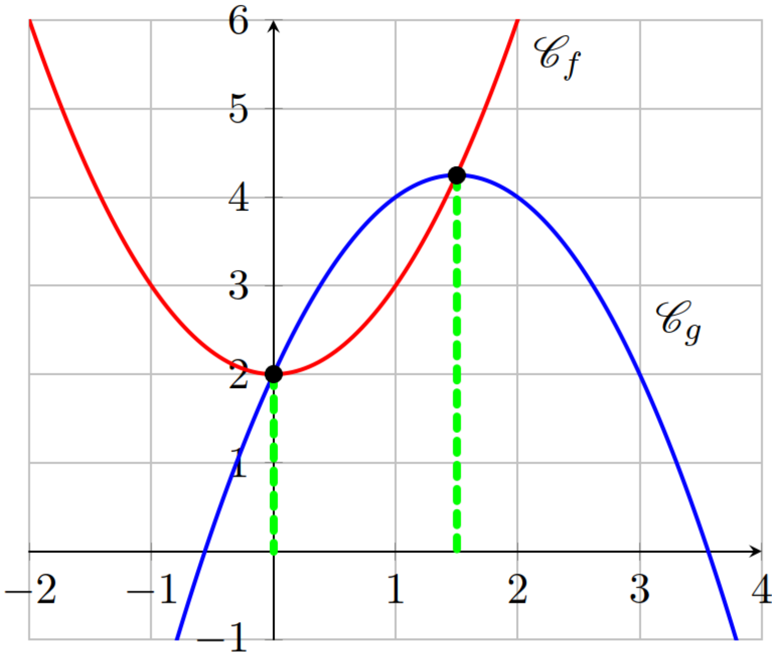


Remarques

- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$ n'a pas de solution car dans ce cas la droite ne coupe pas la courbe.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = g(x)$

Pour trouver les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, il suffit de lire l'abscisse des points d'intersections des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Exemple

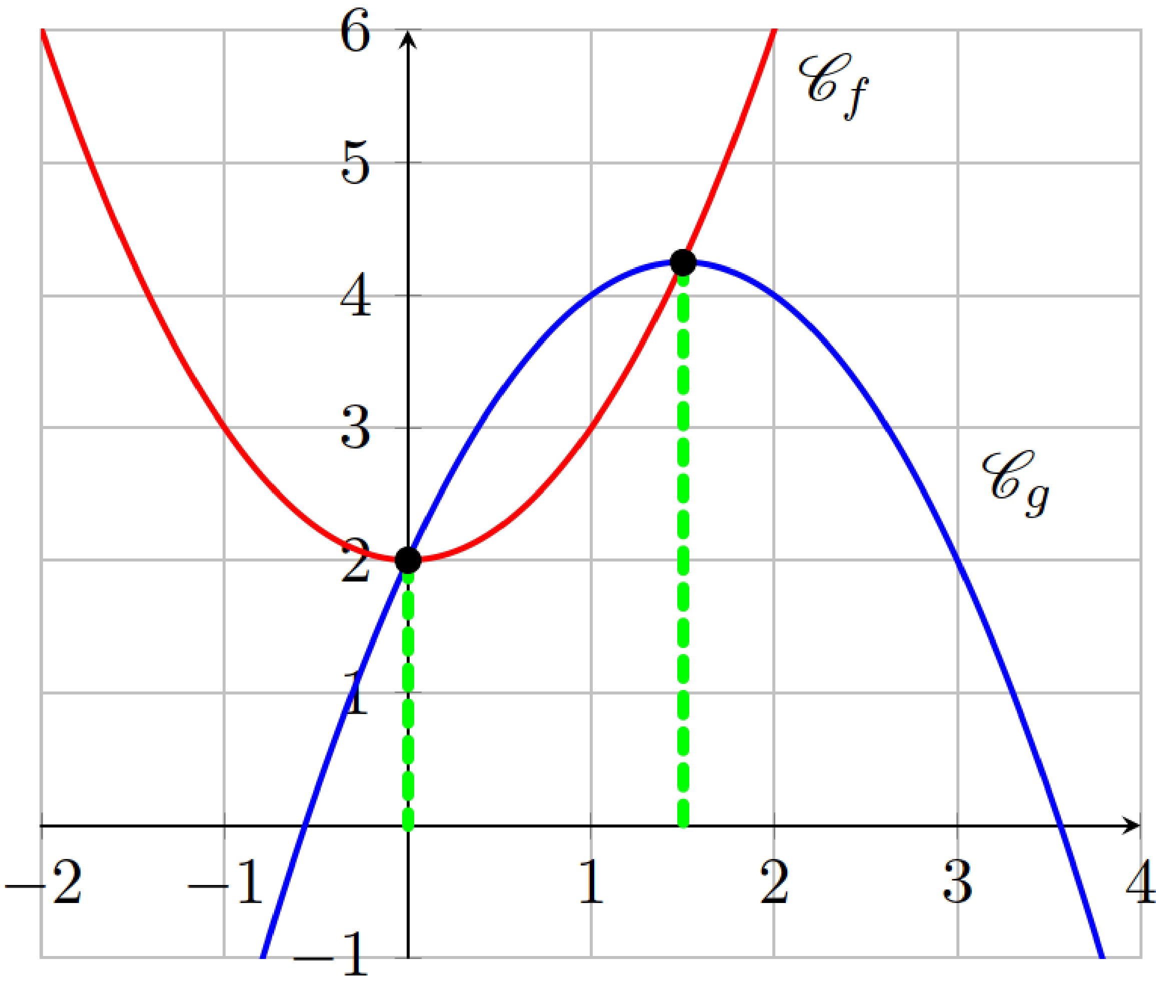
On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^2 + 2$
- $g(x) = -x^2 + 3x + 2$

Les points d'intersections des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont pour abscisses 0 et $1,5$.

Graphiquement, on lit que l'équation $f(x) = g(x)$ admet pour solutions :

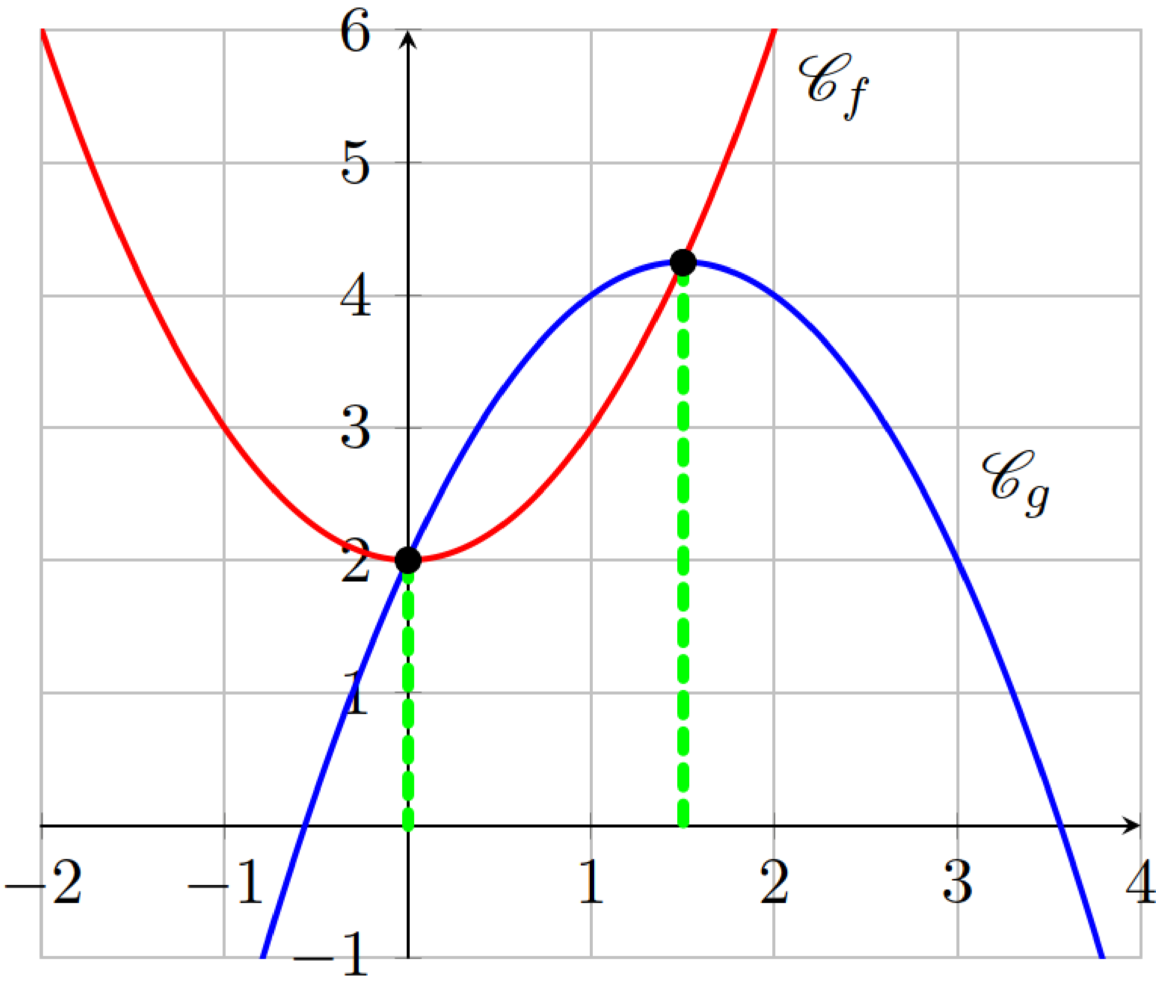
$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = 1,5$$



Vérification :

- Pour $x = 0$
  $f(0) = 0^2 + 2 = 2$
  $g(0) = -0^2 + (3 \times 0) + 2 = 2$

- Pour $x = 1.5$
  $f(1.5) = 1.5^2 + 2 = 4.25$
  $$\begin{aligned} g(1.5) &= -(1.5)^2 + (3 \times 1.5) + 2 \\ &= -2.25 + 4.5 + 2 \\ &= 4.25 \end{aligned}$$



Pour déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$, il faut lire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $\mathscr{C}_f$ est **au-dessous** de $\mathscr{C}_g$.

Graphiquement,

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \left]0; 1.5\right[$$