Fonction Logarithme décimal

T$^{\text{le}}$ STMG

Table des matières

1 Définition et propriétés de la fonction logarithme décimal

1.1 Définition : Logarithme décimal

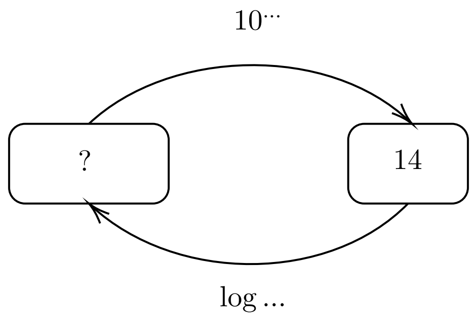
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = 10^x$.

L'équation $10^x = b$, avec $b > 0$, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Cette solution se note $\log b$.

Exemple :

$10^x = 14 \Leftrightarrow x = \log 14 \approx 1,146$



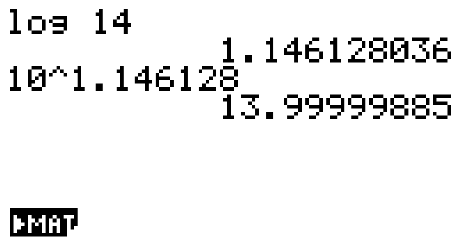


Figure 1 – Calcul de log(14) avec la Casio Graph 85

Graphiquement, on peut trouver ce résultat :

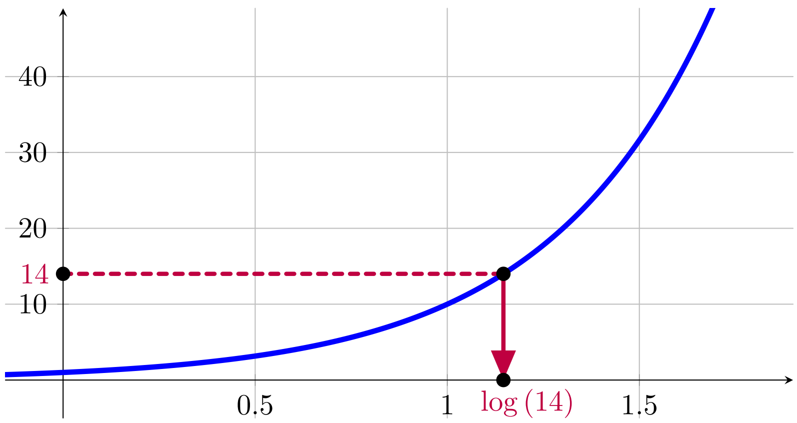


Figure 2 – Représentation de la fonction 10^x

1.2 Définition : Fonction Logarithme décimal

On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation $10^x = b$.

On la note $\log b$.

La **fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ tel que :

$$f(x) = \log x$$

Remarques

a) Pour $b > 0$: $10^x = b$ revient à écrire $x = \log b$
b) $\log 10^x = x$
c) Pour $x > 0$, on a : $10^{\log x} = x$

1.3 Propriété : Sens de variation

La fonction **logarithme décimal**, $f(x) = \log x$, est **croissante** sur $]0;+\infty[$.

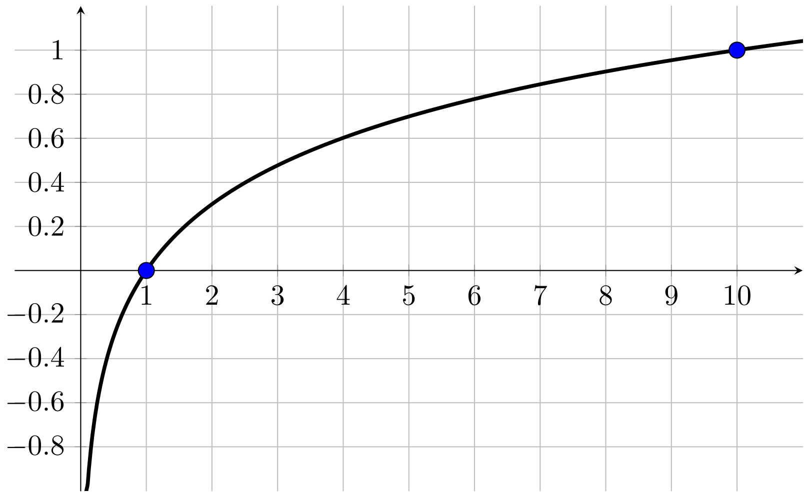


FIGURE 3 – Représentation de la fonction $f(x) = \log x$

1.4 Propriété : Valeurs particulières

a) $\log 1 = 0$
b) $\log 10 = 1$
c) $\log\left(\frac{1}{10}\right) = -1$

1.5 Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimale

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on a :

a) $\log(a \times b) = \log a + \log b$
b) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
c) $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$
d) $\log(a^n) = n \times \log a$ avec n un entier naturel

1.6 Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = \log\left(2-\sqrt{2}\right) + \log\left(2+\sqrt{2}\right)$

b) $B = 2 \times \log(3) + \log(2) - 4 \times \log(3)$

c) $C = \log 10^3 - \log\left(\dfrac{1}{5}\right)$

(a)

$$\begin{aligned} A &= \log\left(2-\sqrt{2}\right) + \log\left(2+\sqrt{2}\right) \\ &= \log\left(\left(2-\sqrt{2}\right) \times \left(2+\sqrt{2}\right)\right) \\ &= \log\left(2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) \\ &= \log(4-2) = \log 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B &= 2 \times \log(3) + \log(2) - 4 \times \log(3) \\ &= \log\left(3^2\right) + \log(2) - \log\left(3^4\right) \\ &= \log(9) + \log(2) - \log(81) \\ &= \log(9 \times 2) - \log 81 \\ &= \log\left(\frac{9 \times 2}{81}\right) \\ &= \log\left(\frac{2}{9}\right) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} C &= \log 10^3 - \log \frac{1}{5} \\ &= 3 \times \log 10 - \log 5 \\ &= 3 \times 1 - \log 5 \\ &= 3 - \log 5 \end{aligned}$$

1.6.1 Remarque : Transformer un produit en une somme

La première formule permet de transformer un produit en une somme.

Par exemple, si on cherche à effectuer 36×62, en appliquant cette formule, on a :

$\log(36 \times 62) = \log 36 + \log 62 \approx 1,5563 + 1,7924$ (voir table ci-dessous)

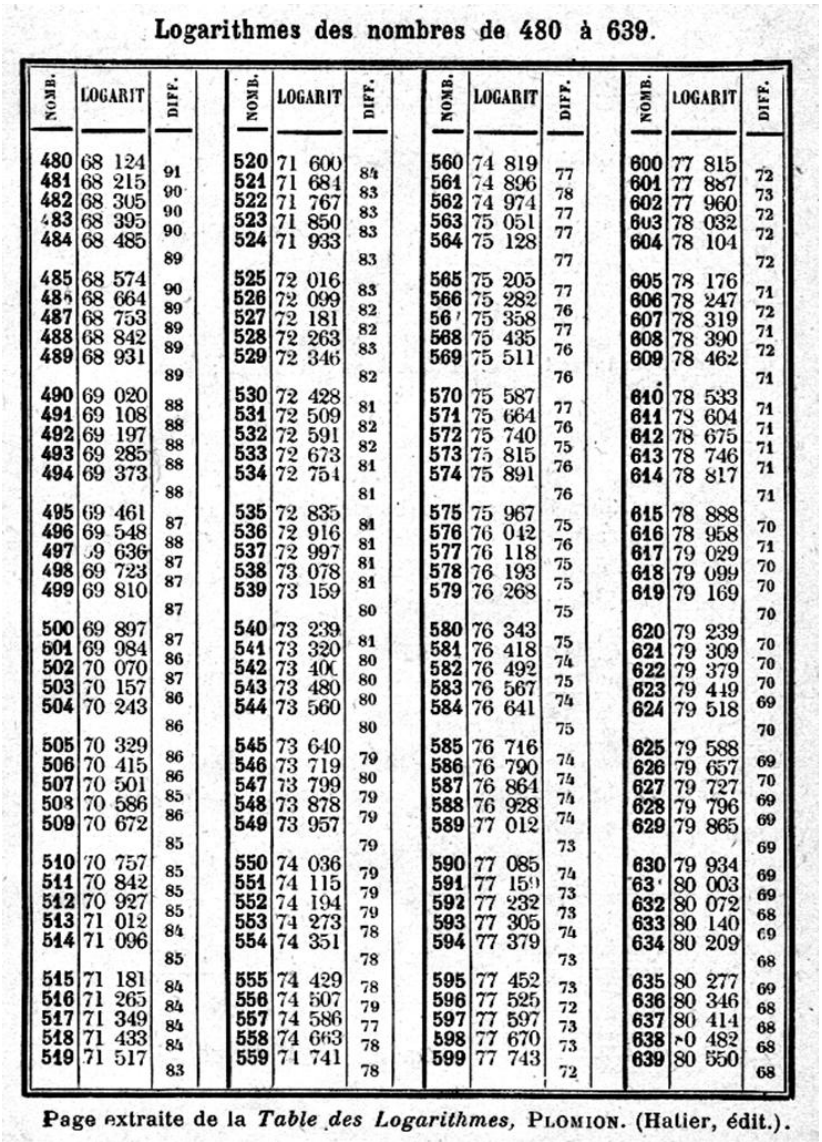
L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve *facilement* :

$$\log(36 \times 62) \approx 3,3487$$

En cherchant dans la table, le logarithme égal à $3,3487$, on trouve 2232, soit : $36 \times 62 = 2232$.

TABLE 1 – Table de logarithmes

x	34	35	36	...	61	62	63	...	2231	2232	2233
$\log(x)$	1,5315	1,5441	1,5563	...	1,7853	1,7924	1,7993	...	3,3485	3,3487	3,3489



Logarithmes des nombres de 480 à 639.

NOMB.	LOGARIT	DIFF.	NOMB.	LOGARIT	DIFF.	NOMB.	LOGARIT	DIFF.	NOMB.	LOGARIT	DIFF.
480	68 124	91	520	71 600	84	560	74 819	77	600	77 815	72
481	68 215	90	521	71 684	83	561	74 896	78	601	77 887	73
482	68 305	90	522	71 767	83	562	74 974	77	602	77 960	72
483	68 395	90	523	71 850	83	563	75 051	77	603	78 032	72
484	68 485	89	524	71 933	83	564	75 128	77	604	78 104	72
485	68 574	90	525	72 016	83	565	75 205	77	605	78 176	71
486	68 664	89	526	72 099	82	566	75 282	76	606	78 247	72
487	68 753	89	527	72 181	82	567	75 358	77	607	78 319	71
488	68 842	89	528	72 263	83	568	75 435	76	608	78 390	72
489	68 931	89	529	72 346	82	569	75 511	76	609	78 462	71
490	69 020	88	530	72 428	81	570	75 587	77	610	78 533	71
491	69 108	88	531	72 509	82	571	75 664	76	611	78 604	71
492	69 197	88	532	72 591	82	572	75 740	75	612	78 675	71
493	69 285	88	533	72 673	81	573	75 815	76	613	78 746	71
494	69 373	88	534	72 754	81	574	75 891	76	614	78 817	71
495	69 461	87	535	72 835	81	575	75 967	75	615	78 888	70
496	69 548	88	536	72 916	81	576	76 042	76	616	78 958	71
497	69 636	87	537	72 997	81	577	76 118	75	617	79 029	70
498	69 723	87	538	73 078	81	578	76 193	75	618	79 099	70
499	69 810	87	539	73 159	80	579	76 268	75	619	79 169	70
500	69 897	87	540	73 239	81	580	76 343	75	620	79 239	70
501	69 984	86	541	73 320	80	581	76 418	74	621	79 309	70
502	70 070	87	542	73 400	80	582	76 492	75	622	79 379	70
503	70 157	86	543	73 480	80	583	76 567	74	623	79 449	69
504	70 243	86	544	73 560	80	584	76 641	75	624	79 518	70
505	70 329	86	545	73 640	79	585	76 716	74	625	79 588	69
506	70 415	86	546	73 719	80	586	76 790	74	626	79 657	70
507	70 501	85	547	73 799	79	587	76 864	74	627	79 727	69
508	70 586	86	548	73 878	79	588	76 928	74	628	79 796	69
509	70 672	85	549	73 957	79	589	77 012	73	629	79 865	69
510	70 757	85	550	74 036	79	590	77 085	74	630	79 934	69
511	70 842	85	551	74 115	79	591	77 159	73	631	80 003	69
512	70 927	85	552	74 194	79	592	77 232	73	632	80 072	68
513	71 012	84	553	74 273	78	593	77 305	74	633	80 140	69
514	71 096	85	554	74 351	78	594	77 379	73	634	80 209	68
515	71 181	84	555	74 429	78	595	77 452	73	635	80 277	69
516	71 265	84	556	74 507	79	596	77 525	72	636	80 346	68
517	71 349	84	557	74 586	77	597	77 597	73	637	80 414	68
518	71 433	84	558	74 663	78	598	77 670	73	638	80 482	68
519	71 517	83	559	74 741	78	599	77 743	72	639	80 550	68

Page extraite de la *Table des Logarithmes*, PLOMION. (Hatier, édit.).

FIGURE 4 – Extrait d'une table des Logarithmes

2 Équations et inéquations

2.1 Propriétés

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on a :

a) $a = b \quad \Leftrightarrow \quad \log a = \log b$
b) $a < b \quad \Leftrightarrow \quad \log a < \log b$ (la fonction logarithme décimale est strictement croissante sur $]0; +\infty[$)

2.2 Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x = 2$
b) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation : $x^5 < 3$
c) 8 augmentations successives de $t\%$ correspondent à une augmentation globale de 30%. Donner une valeur approchée du taux moyen t.

(a)

$$\begin{aligned} 6^x &= 2 \\ \log 6^x &= \log 2 \\ x \times \log 6 &= \log 2 \\ x &= \frac{\log 2}{\log 6} \end{aligned}$$

(b)

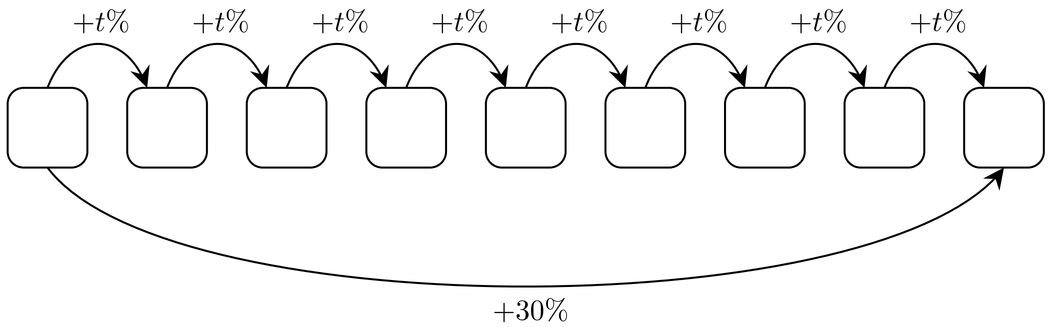
$$\begin{aligned} x^5 &< 3 \\ \log\left(x^5\right) &< \log 3 \\ 5 \times \log x &< \log 3 \\ \log x &< \frac{1}{5} \log 3 \\ \log x &< \log 3^{\frac{1}{5}} \\ x &< 3^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \left]0; 3^{\frac{1}{5}}\right[$.

Remarque :

$3^{\frac{1}{5}}$ se lit **"racine cinquième de 3"** et peut se noter $\sqrt[5]{3}$.

(c)



Une augmentation globale de 30% correspond à un coefficient multiplicateur de $1,3$.

Une augmentation de t% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{t}{100}$.

Huit augmentations de t% correspond à un coefficient multiplicateur de $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^8$.

On doit donc résoudre : $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^8 = 1,3$

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{t}{100}\right)^8 &= (1,3) \\
\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)^8 &= \log(1,3) \\
8 \times \log\left(1 + \frac{t}{100}\right) &= \log(1,3) \\
\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) &= \frac{1}{8} \times \log(1,3) \\
\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) &= \log\left(1,3^{\frac{1}{8}}\right) \\
1 + \frac{t}{100} &= 1,3^{\frac{1}{8}} \\
\frac{t}{100} &= 1,3^{\frac{1}{8}} - 1 \\
t &= 100 \times \left(1,3^{\frac{1}{8}} - 1\right) \\
t &\approx 3,3
\end{aligned}$$

Une augmentation globale de 30% correspond à 8 augmentations successives d'environ $3,3$%.

Remarque

Dans ce dernier exercice, on retrouve la propriété établie dans le chapitre “Fonctions exponentielles” :

$$\text{si} \quad x^n = a \quad \text{alors} \quad x = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{si} \quad \left(1 + \frac{t}{100}\right)^8 = (1,3) \quad \text{alors} \quad \left(1 + \frac{t}{100}\right) = (1,3)^{\frac{1}{8}}$$