

Fonctions polynômes du 2nd degré

1^{ère} STMG

Table des matières

1	Définition et représentation graphique	2
1.1	Définition : Fonctions polynômes du 2 nd degré	2
1.2	Représentation graphique	2
1.3	Propriétés : Variations d'une fonction polynôme du 2 nd degré	3
1.4	Propriété : Axe de symétrie et sommet	4
1.5	Méthode : Associer une fonction du 2 nd degré à sa représentation graphique	5
2	Forme factorisée d'une fonction polynôme du 2nd degré	7
2.1	Définition : Forme factorisée d'une fonction du 2 nd degré	7
2.2	Propriété : Racines d'une fonction du 2 nd degré	7
2.3	Propriété : Axe de symétrie et sommet	7
2.4	Méthode : Représenter graphiquement une fonction du 2 nd degré à partir de sa forme factorisée.	8
2.5	Méthode : Associer une fonction du 2 nd degré à sa représentation graphique	10
2.6	Méthode : Factoriser une expression du 2 nd degré	11
2.7	Méthode : Démontrer l'égalité de deux fonctions du 2 nd degré	11
3	Signe d'une fonction polynôme du 2nd degré	12
3.1	Méthode : Étudier le signe d'un polynôme du 2 nd degré	12
4	Équation de la forme $x^2 = c$	13
4.1	Propriété : Solutions de l'équation $x^2 = c$	13
4.2	Méthode : Résoudre une équation du type $x^2 = c$	13

1 Définition et représentation graphique

1.1 Définition : Fonctions polynômes du 2nd degré

Les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ax^2$ ou $x \mapsto ax^2 + b$ sont des **fonctions polynômes du 2nd degré**.

Les coefficients a et b sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 3x^2 + 3$
- $g(x) = x^2 - 4$ sont des fonctions polynômes du 2nd degré.
- $h(x) = 4 - 2x^2$
- $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 5x^4 - x^3 + 6x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

1.2 Représentation graphique

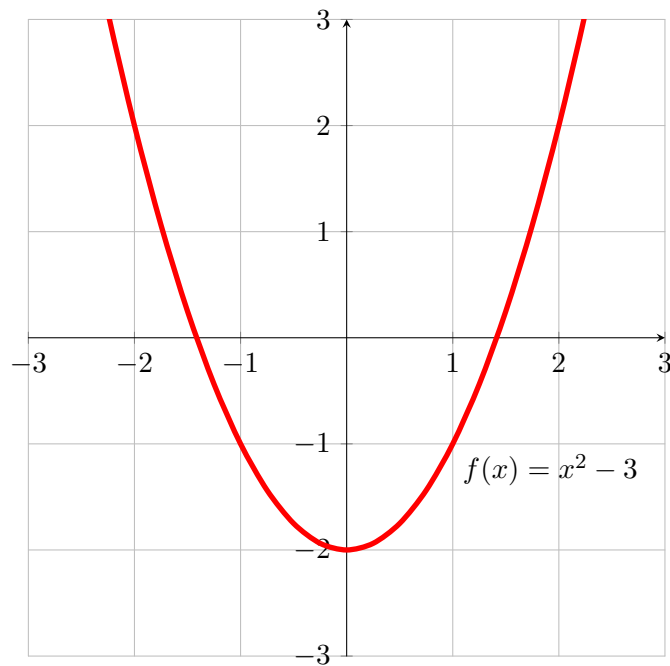


FIGURE 1 – Représentation graphique de $f(x) = x^2 - 2$

La représentation graphique d'une fonction polynôme du 2nd degré s'appelle une **parabole**.

1.3 Propriétés : Variations d'une fonction polynôme du 2nd degré

Soit f une fonction polynôme du 2nd degré, telle que $f(x) = ax^2 + b$.

- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : **cuvette**.
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : **colline**.

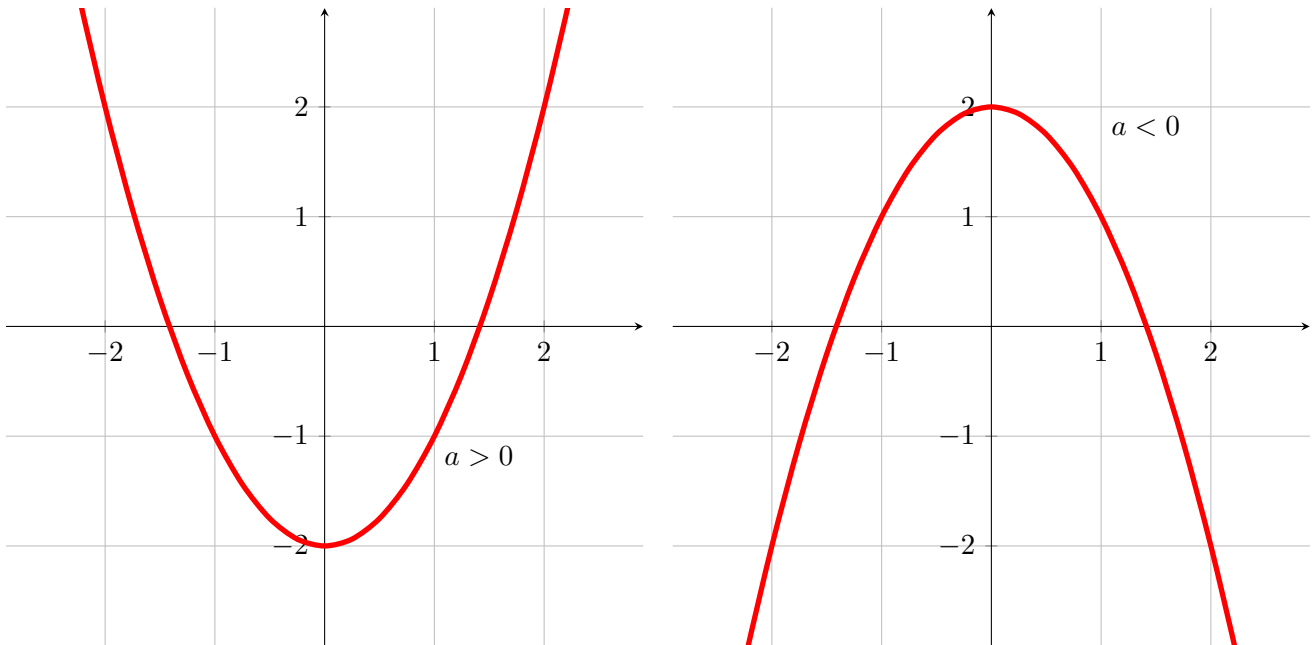


FIGURE 2 – Représentation d'une fonction du 2nd degré suivant le signe de a

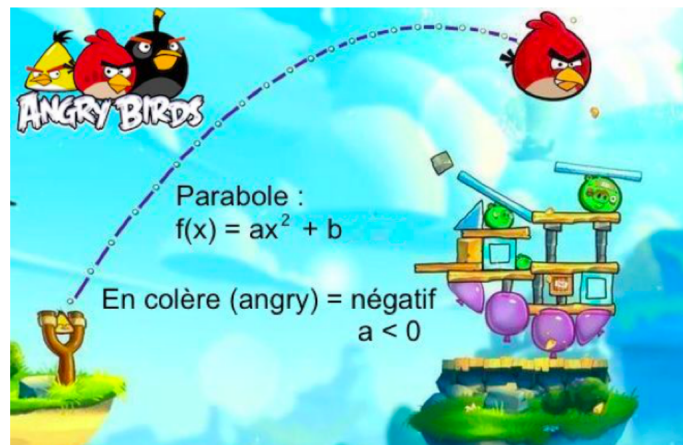


FIGURE 3 – Méthode mnémotechnique pour l'allure de la parabole

1.4 Propriété : Axe de symétrie et sommet

Les paraboles d'équation $y = ax^2 + b$ ont pour axe de symétrie l'**axe des ordonnées** et pour **sommet** le point de coordonnées $(0; b)$.

Exemple

La fonction f telle que $f(x) = -x^2 + 2$ a pour représentation graphique une parabole dont les branches sont tournées vers le bas et dont le sommet est le point $S(0; 2)$. L'axe de symétrie de la parabole est l'axe des ordonnées.

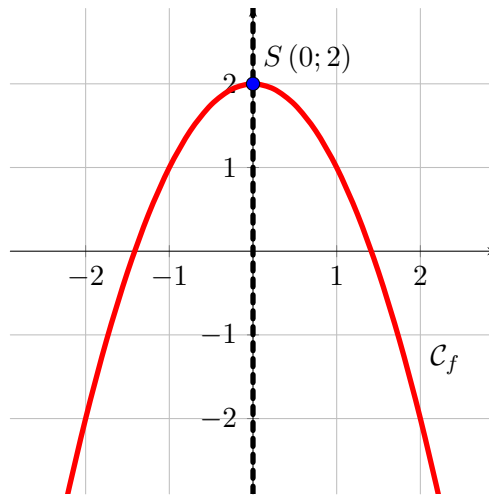
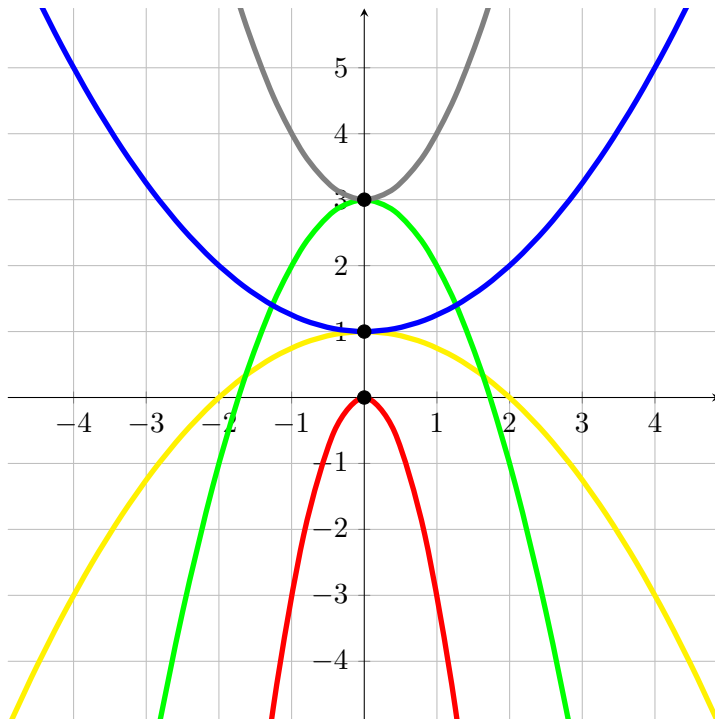


FIGURE 4 – Représentation graphique de $f(x) = -x^2 + 2$

1.5 Méthode : Associer une fonction du 2nd degré à sa représentation graphique

a) Associer chaque fonction à sa représentation graphique :



$$f(x) = -x^2 + 3$$

$$g(x) = -3x^2$$

$$h(x) = x^2 + 3$$

$$p(x) = \frac{x^2}{4} + 1$$

$$q(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$$

(a)

1. La **parabole rouge** est la seule dont le sommet est l'origine (0 ; 0). Donc $b = 0$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$.

Ainsi, la **parabole rouge** est la fonction g définie par $g(x) = -3x^2$.

2. La **parabole verte** et la **parabole noire** ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées (0 ; 3). Donc $b = 3$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$.

Ainsi, il faut choisir parmi les expressions :

— $f(x) = -x^2 + 3$

— $h(x) = x^2 + 3$

Les branches de la **parabole noire** sont tournées vers le haut donc $a > 0$.

Donc, la **parabole noire** représente la fonction h pour qui $a = 1 > 0$. $\longrightarrow h(x) = x^2 + 3$

Les branches de la **parabole verte** sont tournées vers le bas donc $a < 0$.

Donc, la **parabole verte** représente la fonction f pour qui $a = -1 < 0$. $\longrightarrow f(x) = -x^2 + 3$

3. La **parabole bleue** et la **parabole jaune** ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées (0 ; 1). Donc $b = 1$ dans l'écriture de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$.

Ainsi, il faut choisir parmi les expressions :

$$\begin{aligned} - \quad p(x) &= \frac{x^2}{4} + 1 \\ - \quad q(x) &= -\frac{x^2}{4} + 1 \end{aligned}$$

Les branches de la **parabole** **bleue** sont tournées vers le haut donc $a > 0$.

Donc, la **parabole** **bleue** représente la fonction p pour qui $a = \frac{1}{4} > 0$. $\longrightarrow p(x) = \frac{x^2}{4} + 1$

Les branches de la **parabole** **jaune** sont tournées vers le bas donc $a < 0$.

Donc, la **parabole** **jaune** représente la fonction q pour qui $a = -\frac{1}{4} < 0$. $\longrightarrow q(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$

2 Forme factorisée d'une fonction polynôme du 2nd degré

2.1 Définition : Forme factorisée d'une fonction du 2nd degré

Les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

sont des fonctions polynômes du 2nd degré.

Les coefficients a , x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$.

2.2 Propriété : Racines d'une fonction du 2nd degré

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f .

2.3 Propriété : Axe de symétrie et sommet

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

La droite d'équation $x = p$ avec $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ est l'**axe de symétrie** de la parabole représentant la fonction f .

Le point S de coordonnées $(p; f(p))$ est le **sommet** de la parabole représentant la fonction f .

Remarque

Plus généralement, on appelle fonction polynôme du 2nd degré, toute fonction qui s'écrit sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Par exemple, la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ est une fonction polynôme du 2nd degré.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 2(x - 2)(x + 2)$ est une fonction du 2nd degré.

En effet, elle s'écrit aussi sous la forme $x \mapsto ax^2 + b$.

$$f(x) = 2(x - 2)(x + 2) = 2(x^2 - 4) = 2x^2 - 8$$

2.4 Méthode : Représenter graphiquement une fonction du 2nd degré à partir de sa forme factorisée.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2(x - 2)(x + 4)$ et \mathcal{C}_f sa représentation graphique dans un repère.

- Déterminer l'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.
- Déterminer l'axe de symétrie de \mathcal{C}_f .
- Déterminer les coordonnées du sommet de \mathcal{C}_f .
- Placer ces éléments géométriques dans un repère puis tracer \mathcal{C}_f .

(a) Pour déterminer l'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Soit : $2(x - 2)(x + 4) = 0$.

Il s'agit d'une équation-produit. On a donc : $(x - 2) = 0$ ou $(x + 4) = 0$ soit : $x = 2$ ou $x = -4$.

La courbe de f traverse l'axe des abscisses en $x = -4$ et en $x = 2$.

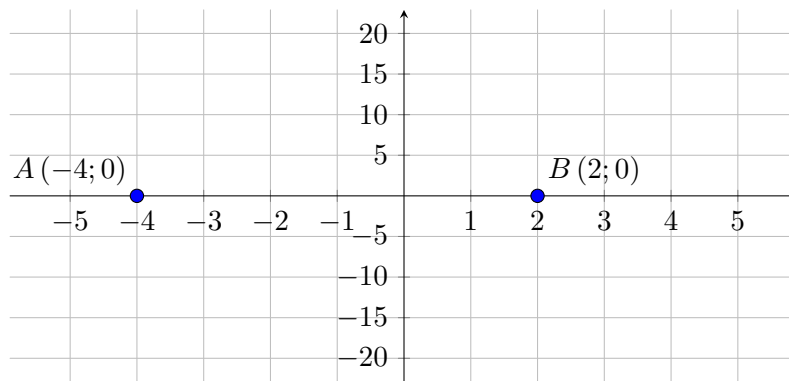


FIGURE 5 – Points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses

(b) Ici, $f(x) = 2(x - 2)(x + 4)$ donc $x_1 = 2$ et $x_2 = -4$, et donc $p = \frac{2 - 4}{2} = -1$.

La droite d'équation $x = -1$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f .

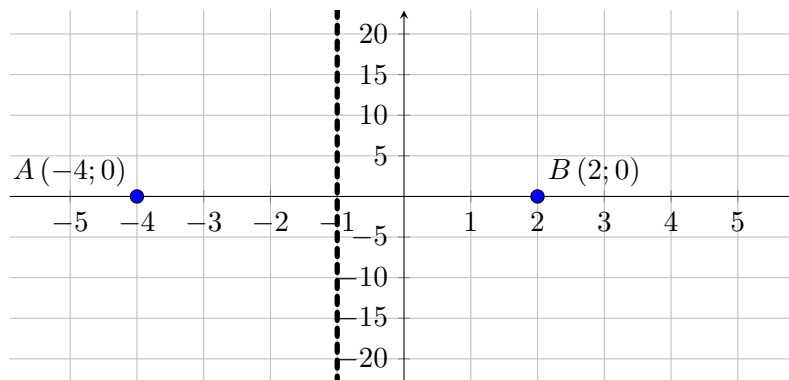


FIGURE 6 – Axe de symétrie de \mathcal{C}_f

- (c) Le sommet S de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie, donc il a pour abscisse $p = -1$ et pour ordonnées :

$$\begin{aligned} f(p) &= f(-1) \\ &= 2(-1-2)(-1+4) \\ &= 2 \times (-3) \times 3 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Le sommet de la parabole S est donc le point de coordonnées $S(-1; -18)$.

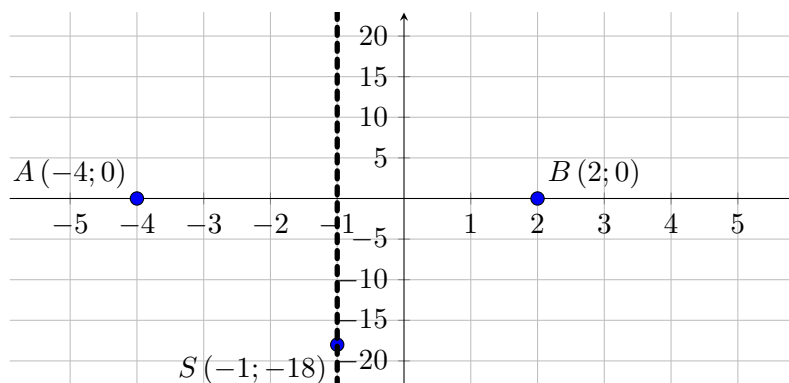


FIGURE 7 – Sommet de C_f

- (d) L'expression de la fonction f est $f(x) = 2(x-2)(x+4)$, donc $a = 2 > 0$.

On en déduit que la parabole représentant la fonction f possède des branches tournées vers le **haut**. Le sommet de la parabole correspond donc **au minimum** de la fonction f .

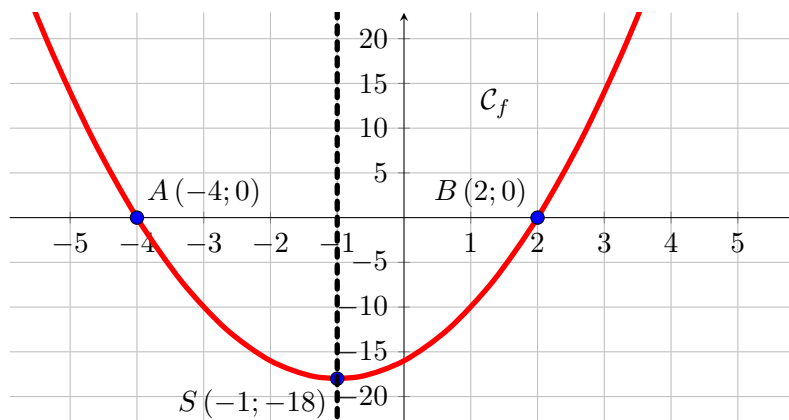
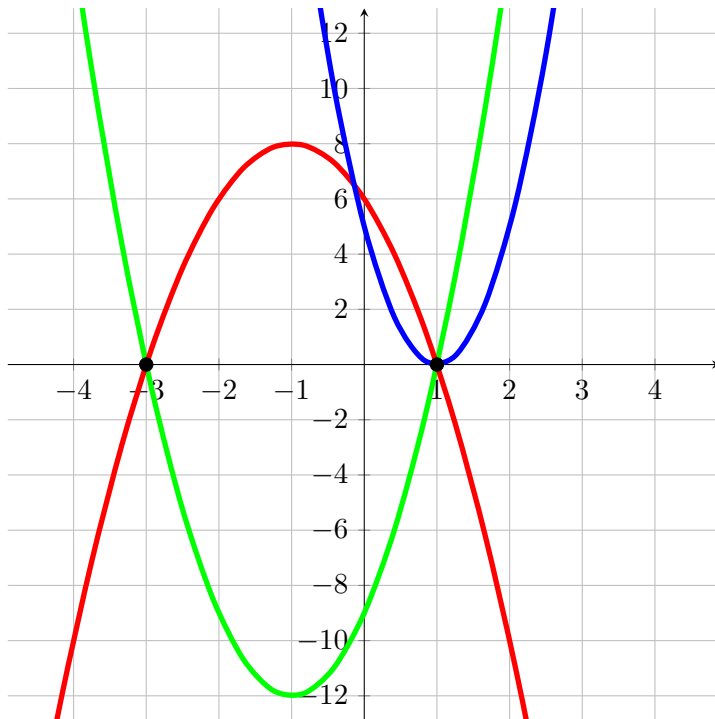


FIGURE 8 – Représentation graphique de $f(x) = 2(x-2)(x+4)$

2.5 Méthode : Associer une fonction du 2nd degré à sa représentation graphique

a) Associer chaque fonction à sa représentation graphique :



$$\begin{aligned}f(x) &= 3(x-1)(x+3) \\g(x) &= -2(x-1)(x+3) \\h(x) &= 5(x-1)^2\end{aligned}$$

(a) On a : $f(x) = 5(x-1)^2 = 5(x-1)(x-1)$.

1. La fonction h est la seule à posséder une **racine double égale à 1**. Cela signifie que la parabole correspondante ne possède qu'un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.

La **parabole bleue** intercepte l'axe des abscisses en 1 uniquement, c'est donc la représentation graphique de la fonction h . $\longrightarrow h(x) = 5(x-1)^2$

2. On a $f(x) = 3(x-1)(x+3)$ et $g(x) = -2(x-1)(x+3)$.

Ces fonctions possèdent donc toutes les deux les mêmes racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.

On peut donc les associer à la **parabole rouge** et à la **parabole verte** qui passent toutes les deux par les points d'abscisse -3 et 1 .

Les branches de la **parabole verte** sont tournées vers le haut donc $a > 0$ donc la **parabole verte** représente la fonction f pour qui $a = 3 > 0$. $\longrightarrow f(x) = 3(x-1)(x+3)$

La **parabole rouge** représente alors la fonction g . $\longrightarrow g(x) = -2(x-1)(x+3)$

2.6 Méthode : Factoriser une expression du 2nd degré

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

- a) Conjecturer une racine de la fonction polynôme f et vérifier par calcul.
- b) Factoriser f

(a) On peut conjecturer que 1 est racine de la fonction polynôme f .

En effet, $f(1) = 2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$.

(b) On a $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, on peut affirmer que $a = 2$.

Par ailleurs, 1 est une racine de f . Donc, sous sa forme factorisée, f s'écrit :

$$f(x) = 2(x - 1)(x - x_2)$$

Il s'agit donc de déterminer x_2 , tel que : $2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x - x_2)$.

En prenant par exemple $x = 0$, cette égalité s'écrit :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 6 &= 2(x - 1)(x - x_2) \\ 2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 6 &= 2(0 - 1)(0 - x_2) \\ -6 &= 2(-1)(-x_2) \\ -6 &= 2x_2 \\ 3 &= x_2 \end{aligned}$$

Ainsi, sous sa forme factorisée, la fonction polynôme f s'écrit $f(x) = 2(x - 1)(x - (-3))$ ou encore

$$f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$$

2.7 Méthode : Démontrer l'égalité de deux fonctions du 2nd degré

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

- a) Démontrer que $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)$

(a) On développe l'expression $3(x - 2)(x + 1)$

$$\begin{aligned} 3(x - 2)(x + 1) &= 3 \times [(x \times x) + (x \times 1) + (-2 \times x) + (-2 \times 1)] \\ &= 3 \times (x^2 - x - 2) \\ &= 3x^2 - 3x - 6 \end{aligned}$$

3 Signe d'une fonction polynôme du 2nd degré

3.1 Méthode : Étudier le signe d'un polynôme du 2nd degré

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2(x-3)(x+2)$.

a) Étudier le signe de la fonction polynôme f

(a) Le signe de $-2(x-3)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur -2 , $(x-3)$ et $(x+2)$

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$$\begin{aligned} x-3 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &> 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &> -2 \end{aligned}$$

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on peut en déduire le signe du produit

$$f(x) = -2(x-3)(x+2)$$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
-2	$-$				
$(x-3)$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que :

- $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; 3]$
- $f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.

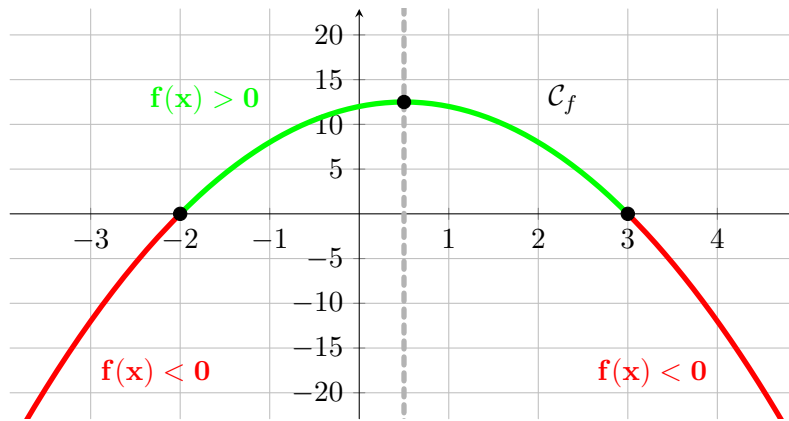


FIGURE 9 – Représentation graphique de $f(x) = -2(x-3)(x+2)$

4 Équation de la forme $x^2 = c$

4.1 Propriété : Solutions de l'équation $x^2 = c$

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = c$ dépendent du signe de c .

- Si $c < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si $c = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- Si $c > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont \sqrt{c} et $-\sqrt{c}$.

4.2 Méthode : Résoudre une équation du type $x^2 = c$

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

- a) $x^2 = 16$
- b) $x^2 = -8$
- c) $2x^2 - 8 = 120$

(a) 16 est positif donc l'équation $x^2 = 16$ admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.

$$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \text{ ou } x = -4$$

(b) -8 est négatif donc l'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

(c) $2x^2 - 8 = 120$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= 120 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 120 + 8 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 128 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 64 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{64} \text{ ou } x = -\sqrt{64} \\ \Leftrightarrow x &= 8 \text{ ou } x = -8 \end{aligned}$$

L'équation admet donc deux solutions $x = \sqrt{64} = 8$ et $x = -\sqrt{64} = -8$.