[1495] 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点是F，左、右顶点分别是 A_1,A_2, 过 F 作 A_1A_2 的垂线与双曲线交于 B,C 两点。若 $A_1B\perp A_2C$, 则该双曲线 的渐近线的斜率为

规范解题步骤

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点坐标为$(-c,0)$与$(c,0)$，其中

$$c^2=a^2+b^2$$

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右顶点A_1,A_2的坐标为$(-a,0)$与$(a,0)$

线段A_1与A_2是x轴的一部分，因此过F作A_1A_2的垂线，即是过焦点F作一条垂直于x轴的线，交点横坐标为$(c,0)$。

联立方程，求交点坐标

$$\left\{\begin{array}{l} x=c \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0) \end{array}\right.$$

解得$y=\pm\frac{b^2}{a}$

B点坐标为$(c,\frac{b^2}{a})$，C点坐标为$(c,-\frac{b^2}{a})$

A_1B的斜率为

$$\frac{y_{A_1}-y_B}{x_{A_1}-x_B}=\frac{0-\frac{b^2}{a}}{-a-c}=\frac{\frac{b^2}{a}}{a+c} \tag{1}$$

A_2C的斜率为

$$\frac{y_{A_2}-y_C}{x_{A_2}-x_C}=\frac{0-(-\frac{b^2}{a})}{a-c}=\frac{\frac{b^2}{a}}{a-c} \tag{2}$$

垂直的线，斜率相乘=-1

将(1)与(2)相乘得到

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{a+c}\cdot\frac{\frac{b^2}{a}}{a-c}=-1$$

$$\begin{aligned}\frac{b^4}{a^2}&=-(a+c)(a-c)\\&=-(a^2-c^2)\\&=b^2\end{aligned}$$

于是$a^2=b^2$，于是$a=b$，渐进线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm x$，于是答案选**C**