7、设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，A为左顶点，且A关于渐近线的对称点为$A'$，且有该对称点在右准线$x=\frac{a^2}{c}$上，求离心率$e$

解答

在形如以下式子

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

的双曲线中有

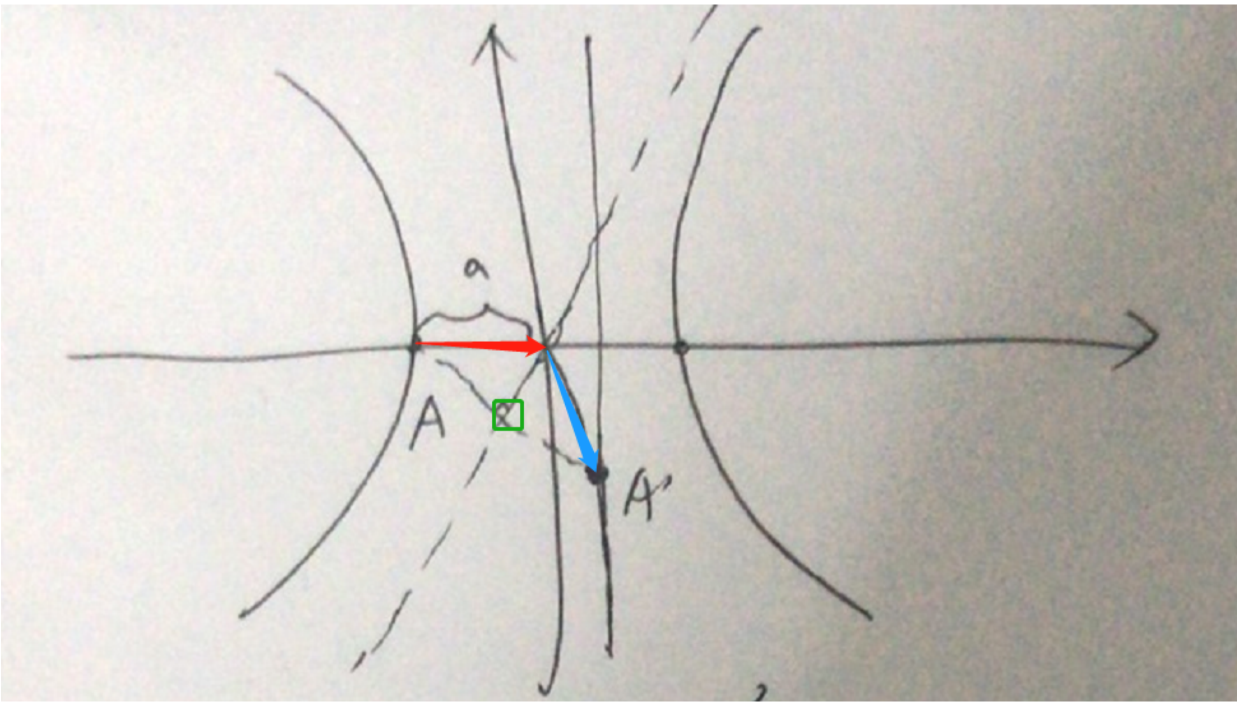
$$e=\frac{c}{a};\qquad c^2=a^2+b^2$$

且渐近线方程为

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

准线方程为为

$$x=\pm\frac{a^2}{c}$$



结合上述图形可以知道蓝色线和红色线构成了等腰直角三角形的两条边，为什么？**因为A和A'关于渐近线对称**

下面标注A和A'的坐标，发现$A=(-a,0)$，$A'=(\frac{a^2}{c},y_{A'})$
因此根据勾股定理可以知道

$$(\frac{a^2}{c})^2+(y_{A'})^2=a^2$$

$$\begin{aligned} y_{A'}^2 &= a^2-\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 \\ &= \frac{a^2c^2-a^4}{c^2} \\ &= \frac{a^2\left(c^2-a^2\right)}{c^2} \\ &= \frac{a^2b^2}{c^2} \end{aligned}$$

因为$y_{A'}<0$，于是$y_{A'}=-\frac{ab}{c}$

两点坐标的斜率公式为

$$\begin{aligned} \frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A} &= \frac{\frac{-ab}{c}-0}{\frac{a^2}{c}-(-a)} \\ &= \frac{\frac{-ab}{c}}{\frac{a^2}{c}+a} \\ &= \frac{-ab}{a^2+ac} \end{aligned}$$

垂直的线，其斜率乘积为-1，因此有

$$\frac{-ab}{a^2+ac}\cdot\frac{b}{a}=-1$$

化简得到

$$b^2=a^2+ac$$

代入

$$b^2=c^2-a^2$$

于是有$c^2-a^2=a^2+ac$

于是有

$$c^2-ac-2a^2=0$$

于是有$(c-2a)(c+a)=0$

于是有$c=2a$，于是有$e=\frac{c}{a}=2$