4、椭圆$\mathrm{mx}^2+\mathrm{ny}^2=1$与直线$y=\frac{1}{2}x+b$交于$\mathrm{M},\mathrm{N}$点,点$\mathrm{A}(0,0)$与线段 MN 的中点连线斜率为$-\frac{1}{2}$，则$\frac{m}{n}$

解答

联立方程

$$\begin{cases} mx^2+ny^2=1 \\ y=\frac{1}{2}x+b \end{cases}$$

将$y=\frac{1}{2}x+b$代入到上面的等式中得

$$mx^2+n\left(\frac{1}{2}x+b\right)^2=1$$

$$mx^2+n\left[\frac{1}{4}x^2+b^2+bx\right]=1$$

$$\left(m+\frac{n}{4}\right)x^2+nbx+nb^2-1=0$$

上面的式子为关于x的一元二次函数，其中M，N两点的横坐标为一元二次方程的两个解，分别设为x_M和x_N，则根据一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的求根公式

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

衍生出来的韦达定理说的是

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$$

$$x_1*x_2=\frac{c}{a}$$

于是根据**韦达定理**可以知道

$$x_M+x_N=-\frac{nb}{m+\frac{n}{4}}$$

将x_M和x_N代入直线方程求y_M和y_N，于是有

$$\begin{aligned}y_M &= \frac{1}{2}x_M + b \\ y_N &= \frac{1}{2}x_N + b\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}y_M + y_N &= \frac{1}{2}\left(X_M + X_N\right) + 2b \\ &= \frac{-nb}{2m + \frac{n}{2}} + 2b\end{aligned}$$

M,N线段的重点坐标为$(\frac{y_M+y_N}{2}, \frac{x_M+x_N}{2})$，$A(0,0)$与重点的**斜率计算公式**为，纵坐标减去纵坐标，横坐标减去横坐标，再相除

$$\frac{\frac{y_M+y_N}{2} - 0}{\frac{x_M+x_N}{2} - 0} = \frac{y_M + y_N}{x_M + x_N} = \frac{\frac{-nb}{2m+\frac{n}{2}} + 2b}{\frac{-nb}{m+\frac{n}{4}}}$$

根据题目意思

$$\begin{aligned}\frac{\frac{-nb}{2m+\frac{n}{2}} + 2b}{\frac{-nb}{m+\frac{n}{4}}} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{\frac{-n}{2m+\frac{n}{2}} + 2}{\frac{-n}{m+\frac{n}{4}}} &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

计算得到$\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$