5、在正等比数列$\{a_n\}$中，有$a_1=1$且前三项的积为8，存在$m,n\in N^+$使得$a_m\cdot a_n=64a_1^2$，求$\frac{1}{m}+\frac{9}{n}$的最小值

解答

设公比为$q(\text{且}q>0)$，通项公式展开得到前三项

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1\cdot q = q \\ a_3 &= a_1\cdot q^2 = q^2 \end{aligned}$$

- 前三项的积为

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3 = q^3 = 8$$

  于是$q=2$

题目已知

$$a_m\cdot a_n = 64a_1^2 = 64$$

继续用通项公式，且代入$q=2$

$$\begin{aligned} a_m &= a_1\cdot q^{m-1} = q^{m-1} = 2^{m-1} \\ a_n &= a_1\cdot q^{n-1} = q^{n-1} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

于是有$2^{m-1}2^{n-1}=64$，于是根据指数函数计算公式

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$$

可以知道

$$2^{m-1}2^{n-1} = 2^{m+n-2} = 64 = 2^6$$

于是$m+n-2=6$，于是$m+n=8$

最后考察了不等式技巧

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}+\frac{9}{n} &= \left(\frac{1}{m}+\frac{9}{n}\right)(m+n)\cdot\frac{1}{8} \\
&= \left(\frac{1}{m}\cdot m+\frac{n}{m}+\frac{9m}{n}+\frac{9}{n}\cdot n\right)\cdot\frac{1}{8} \\
&= \left(10+\frac{n}{m}+\frac{9m}{n}\right)\cdot\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

最后$\frac{n}{m}+\frac{9m}{n}\geq 2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{9m}{n}}=6$，等号成立条件为

$$9m^2=n^2\text{，即}3m=n$$

判断一下$m+n=8$和$3m=n$构成的的二元一次方程组是否有整数解，发现有$m=2,n=6$可以取到，所以

$$\frac{1}{m}+\frac{9}{n}=\left(10+\frac{n}{m}+\frac{9m}{n}\right)\cdot\frac{1}{8}\geq 16\cdot\frac{1}{8}=2$$