

[1470] 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴, 且与 C_1 有相同的离心率, 求椭圆 C_2 的方程。

解题步骤

\therefore 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的**长轴**为 $2a$, **短轴**为 $2b$

\therefore 由 C_1 的方程可以知道, $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, 故 $a = 2$ 且 $b = 1$

C_1 的长轴为 4, 短轴为 2

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$$

故 $c = \sqrt{3}$

C_1 的**离心率** $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴, 因此 C_2 的 $2b = 4$, 于是 C_2 的 b 等于 2, 设 C_2 方程为

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} &= 1 \\ \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a^2 - 4}{a^2} &= \frac{3}{4} \\ 4(a^2 - 4) &= 3a^2 \\ a^2 &= 16\end{aligned}$$

故 C_2 的表达式为

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$