设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F,过 F 且斜率为 $k(k > 0)$

的直线 l 与 C 交于 $A.B$ 两点, $|AB| = 8$.

(1)求 l 的方程;

(2)求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

解答过程

(1) 在抛物线$y^2 = 2px$中，焦点坐标是$(\frac{p}{2}, 0)$，因此抛物线$C: y^2 = 4x$对应的p为2，焦点坐标为$(1, 0)$

因此l的方程为$y = k(x-1)$

联立方程求直线与抛物线的交点A, B坐标

$$\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

将$y = k(x-1)$代入$y^2 = 4x$中，得

$$\begin{aligned} [k(x-1)]^2 &= 4x \\ k^2(x^2 - 2x + 1) &= 4x \\ k^2x^2 - 2k^2x - 4x + k^2 &= 0 \\ k^2x^2 - (2k^2+4)x + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

根据韦达定理可以知道

$$x_A + x_B = -\frac{-(2k^2+4)}{k^2} = \frac{2k^2+4}{k^2}$$

$$x_Ax_B = 1$$

于是有

$$(x_A - x_B)^2 = (x_A + x_B)^2 - 4x_Ax_B = \frac{16(k^2+1)}{k^4} \tag{1}$$

$|AB|$的长度为8，因此有

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} &= 8 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 &= 64 \\ (x_A - x_B)^2 + ((kx_A - k) - (kx_B - k))^2 &= 64 \\ (k^2+1)(x_A - x_B)^2 &= 64 \\ (x_A - x_B)^2 &= \frac{64}{k^2+1}\end{aligned} \tag{2}$$

于是结合韦达定理推出来的(1)和根据题目给定条件推出来的(2)可以有

$$\frac{16(k^2+1)}{k^4} = (x_A - x_B)^2 = \frac{64}{k^2+1}$$

推出$k = \pm 1$
又由于题目已知$k > 0$，于是$k = 1$，于是l的方程为$y = x - 1$

(2)