理论力学

吴 佰 建

土木工程学院工程力学系

Email: bawu@seu.edu.cn

绪论

理论力学：研究机械运动（及平衡）的一般规律的科学

1. 机械运动（或平衡）v.s. 其他形式的运动
2. $v \ll c$ 的运动：伽利略和牛顿力学（古典力学）
   近光速、粒子运动：相对论力学、量子力学
3. 生活及工程实践中最为常见，应用最广泛

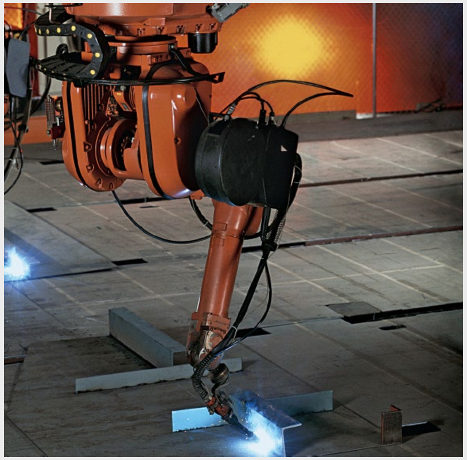
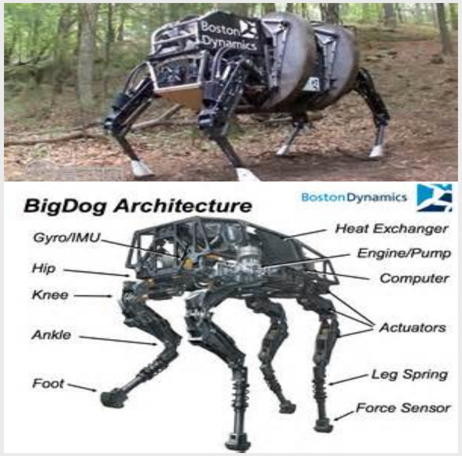
4. 理论力学 v.s. 普通物理

- ✓质点 → 刚体 → 复杂机构（多刚体）
- ✓力 → 复杂力系
- ✓静参考系 → 动参考系
- ✓初等解法 → 高等解法（解析方法）

- **静力学 (Statics)：**
  平衡条件、受力分析、复杂力系简化
- **运动学 (Kinetics)：**
  运动中的几何问题（不考虑运动原因）
- **动力学 (Dynamics)：**
  力与运动的关系







BigDog Architecture
BostonDynamics
Gyro/IMU
Hip
Knee
Ankle
Foot
Heat Exchanger
Engine/Pump
Computer
Actuators
Leg Spring
Force Sensor

参考书

- 工程力学(第二版)，顾成军等，化学工业出版社，2016
- 哈尔滨工业大学理论力学教研室，理论力学（第7版），高等教育出版社，2009
- Statics and Dynamics(12th edition), R. C. Hibbeler, Pearson Prentice Hall, 2010

静力学

STATICS

- 静力学：物体在力系所用下的平衡规律。
  - ✓刚体：无变形，理想化模型 ⇔ 变形体
  - ✓力系：一群力
  - ✓平衡(**equilibrium**):在惯性参考系中处于静止状态。

- 研究的主要问题：
  - ✓物体的受力分析
  - ✓力系的等效替换（与简化）
  - ✓各种力系的平衡条件

静力学

§2.1 静力学基本概念与公理

静力学基本概念

一、力学模型

•质　点(particle)：具有质量其尺寸可以忽略不计的物体

•质点系(particle system)：具有一定联系的若干个质点的集合

•刚　体(rigid body)：特殊的质点系，其上任意两点间的距离保持不变。

研究对象的力学模型：质点、质点系、刚体

刚体与变形体

研究运动时忽略极小的变形—简化为刚体；

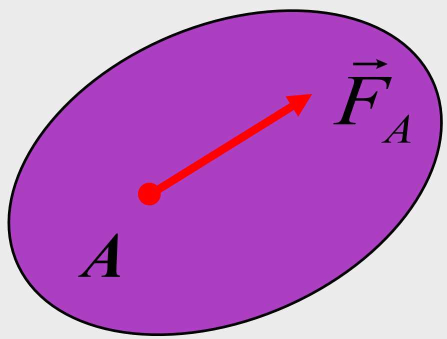
研究物体的变形和内部受力规律时，则必须考虑变形—简化为变形体。

二、力的概念

- **力(force)**：物体间的相互作用，具有大小与方向.

- 力的三要素：大小(N)，方向(指向、方位），作用点。

用定位矢量表示力



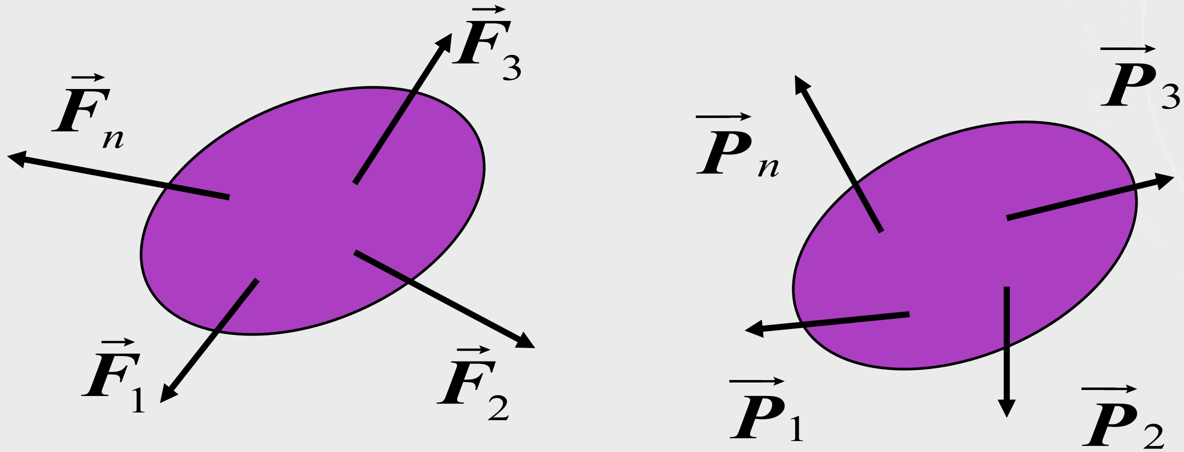
力的单位:
牛[顿](N)，千牛[顿](kN)

- 力的作用效应(**effects of action of the force**)：

外效应（**external effect**)— 物体的运动状态和约束力的改变.
内效应 （**internal effect**)— 物体的变形.

理论力学中不考虑力的内效应

•力系(force system): 作用在物体上的一组力 $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n\}$



•等效力系(equivalent force system):

对同一刚体产生相同作用效果的力系.

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n\} \Leftrightarrow \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_m\}$$

•平衡力系(force system in equilibrium):

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{0}\}$$

平衡力系也称为零力系

对刚体不产生任何作用效果

静力学公理及其推论

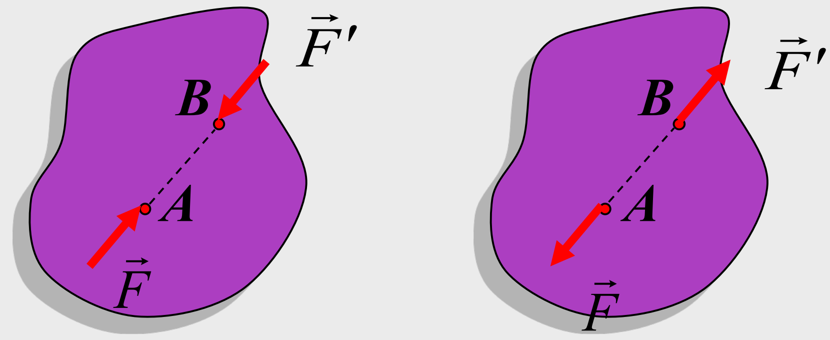
一、力系平衡规律

公理2　二力平衡公理

作用于同一刚体上的两个力平衡的充分必要条件是：此二力等值、反向、共线。

公理2　二力平衡公理

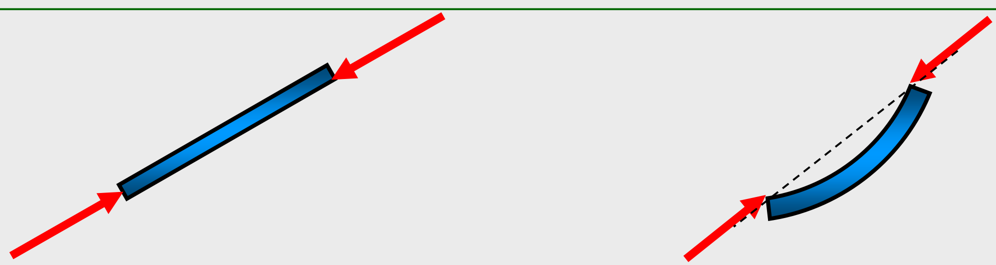
作用于同一刚体上的两个力平衡的充分必要条件是：此二力等值、反向、共线。



$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

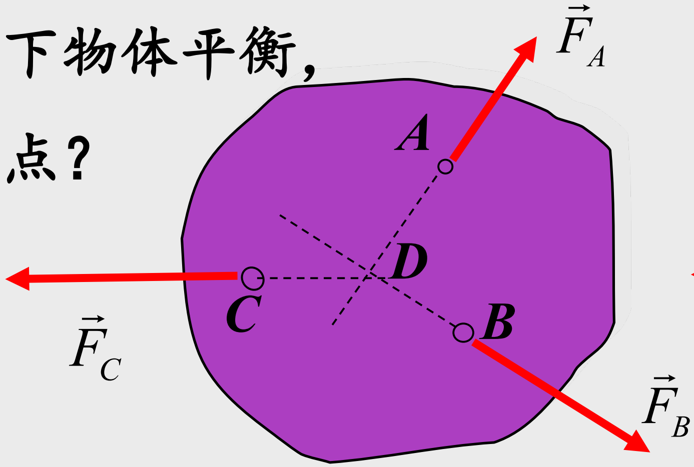
二力构件/二力杆

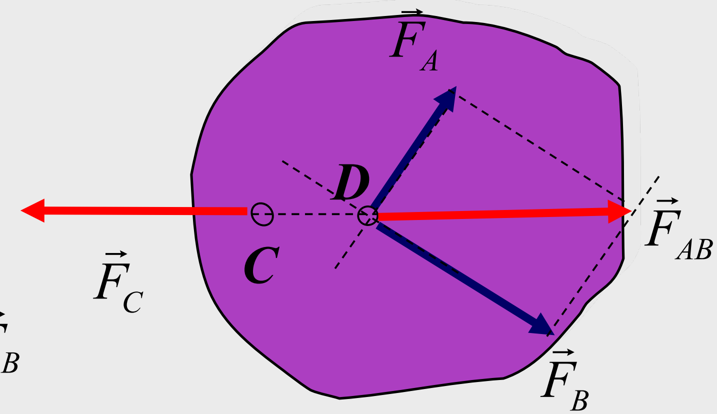
若刚体上只有两点受力且不计其重量，则该刚体称为二力构件或二力杆。作用力方向沿两点连线、大小相等、方向相反。



推论：三力平衡汇交定理

问题： 三力作用下物体平衡，三力方位有何特点？

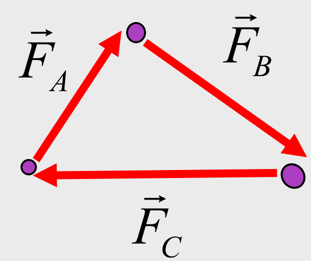




$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{F}_{AB}$$

因 $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$， 所以 $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_C = 0$， $\vec{F}_C$ 通过交点***D*** 。

即，<u>三力必汇交于一点</u>。三力大小关系：



闭口力多边形

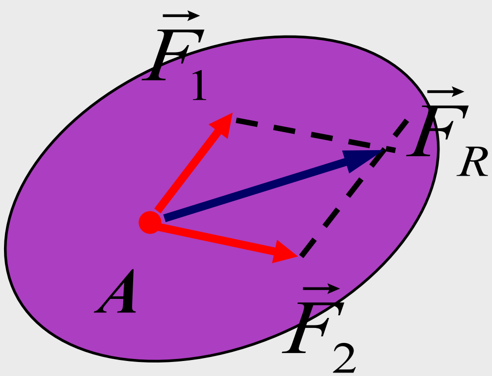
不平行三力平衡

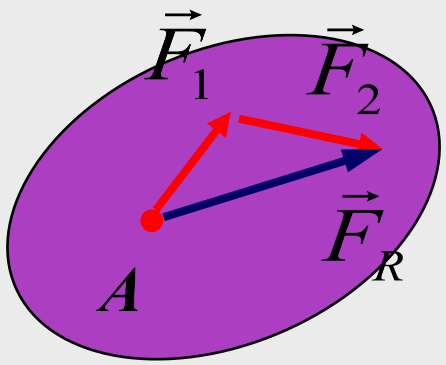
不平行三力平衡的必要条件：作用于刚体上的三个力相互平衡时，若其中两个力的作用线相交于一点，则第三个力的作用线必通过该点。（是否共面？？？）

二、力系简化规律

公理1　力的平行四边形公理

作用在同一点的二个力 $\vec{F}_1$和 $\vec{F}_2$，其合力的大小和方向，是由该两个力的有向线段为邻边所组成的平行四边形的对角线来确定，且具有相同的作用点，并可表示为：$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$





•合力(resultant force)

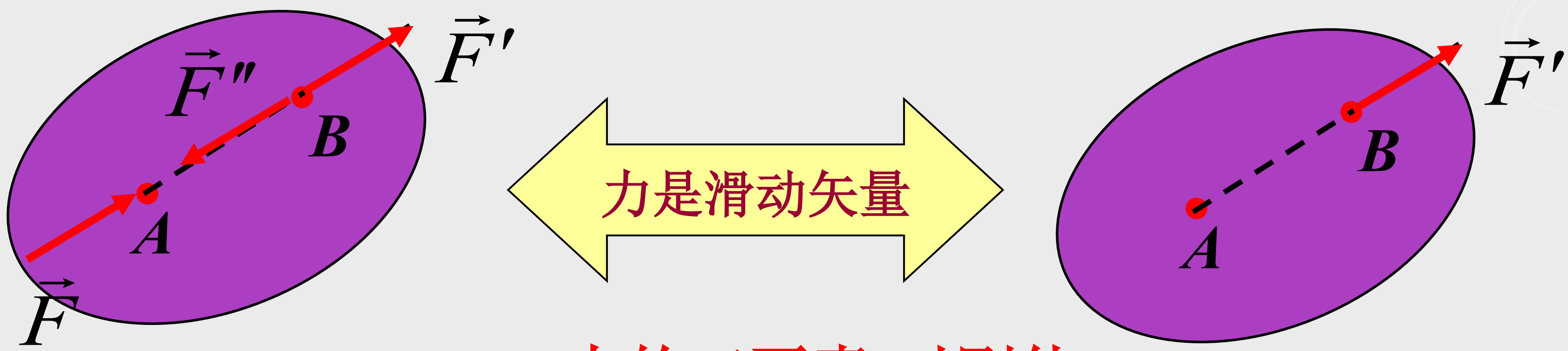
$\vec{F}_R$称为该力系的合力，$\vec{F}_1$和 $\vec{F}_2$ 称为合力的分力

公理3　加减平衡力系公理

同一刚体上增加或减少若干个平衡力系，不改变原力系的作用效果.

推论：力的可传性原理

力可沿其作用线在同一刚体上移动，而不改变该力对物体的效应。

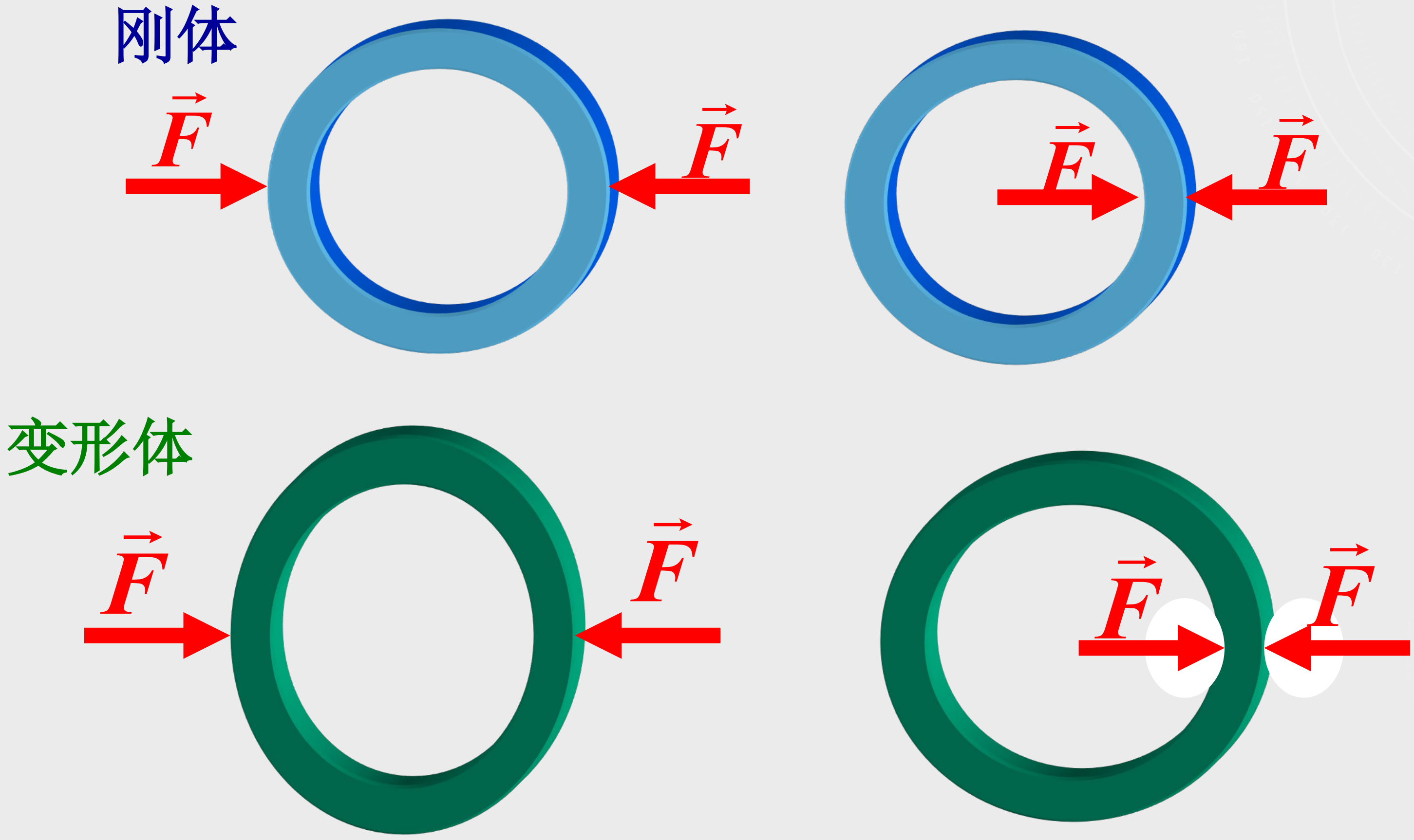


$$\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}''$$

•力的三要素(对刚体)：

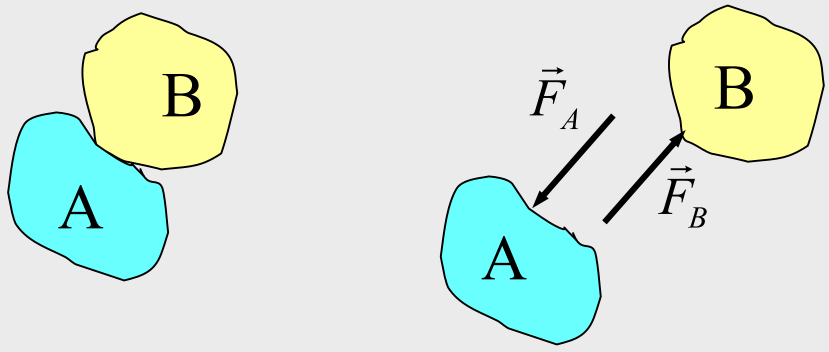
大小、方向、作用线

•力的可传性原理不适用于变形体



三、力的传递规律

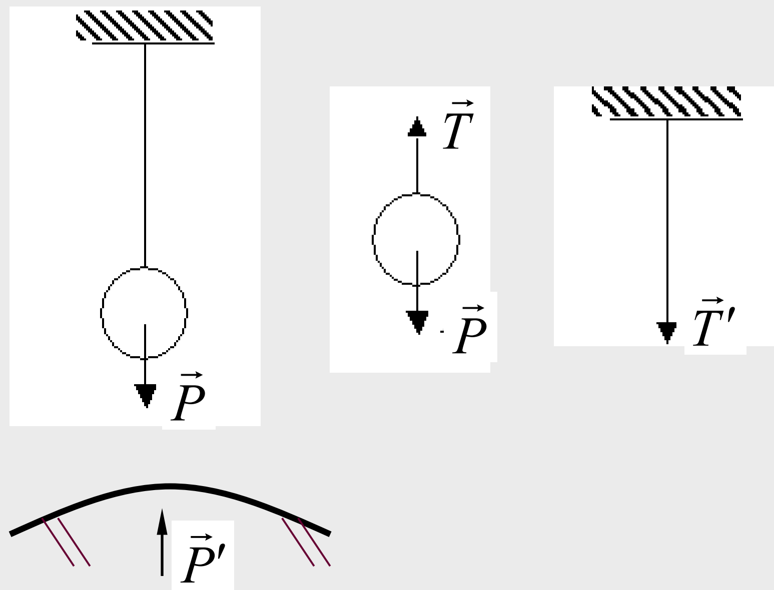
公理4 作用力与反作用力公理



$$\vec{F}_A = \vec{F}_B$$

两物体间相互作用的一对力，总是等值、反向、共线，并分别作用在两个物体上.

例　区分作用力反作用力与平衡力



作用力与反作用力:

$\vec{P}$ - $\vec{P}'$

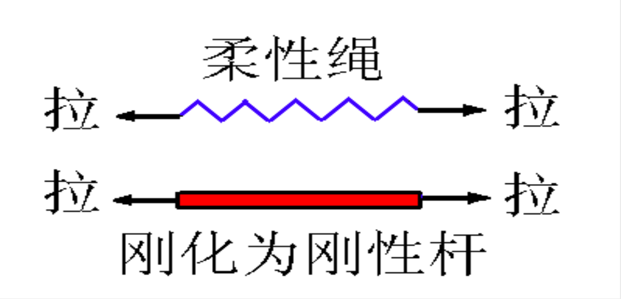
$\vec{T}$ - $\vec{T}'$

平衡力:

$\vec{P}$ - $\vec{T}$

公理5 刚化公理

若变形体在某个力系作用下处于平衡状态,则将此物体固化成刚体（简称刚化）时其平衡不受影响。

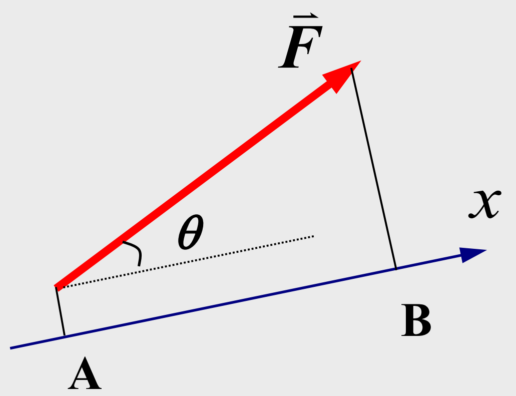


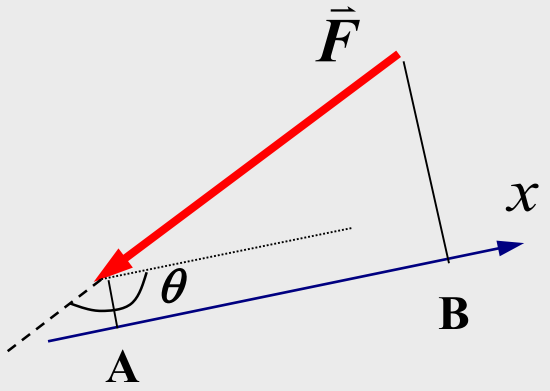
此公理表明：对于处于平衡状态的变形体，可用刚体静力学的平衡理论。

§2.2 力的投影、力矩与力偶

力的投影

一、力在轴上的投影





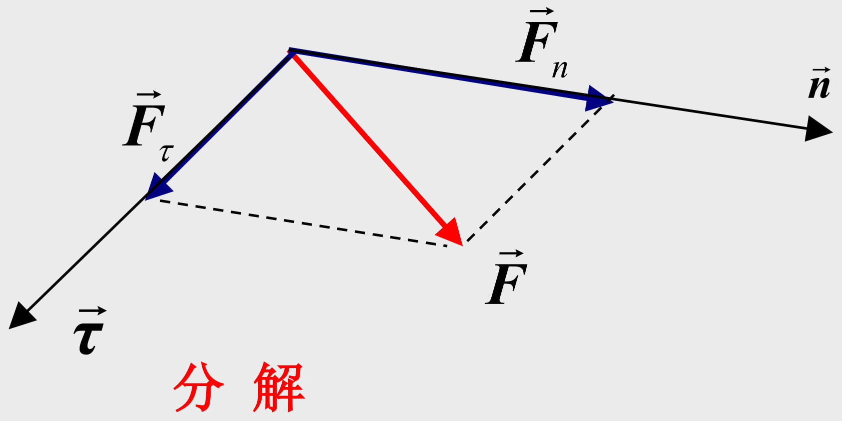
在x轴上的投影

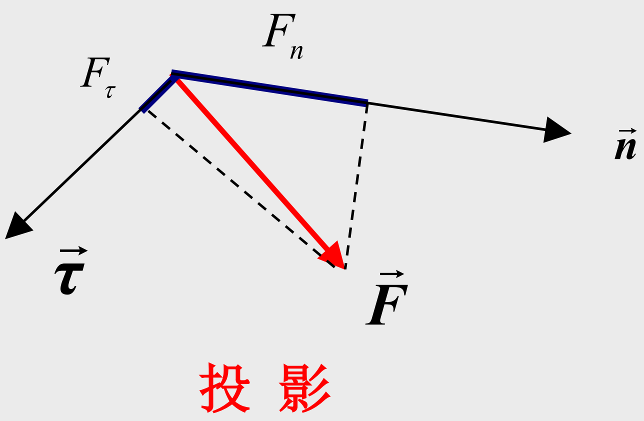
$$F_x = F \cdot \cos\theta$$

投影 $F_x = F \cdot \cos\theta$

若x轴单位向量为 $\vec{i}$ 则：$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i}$ →标量

问题：力的分解与力的投影有何不同？

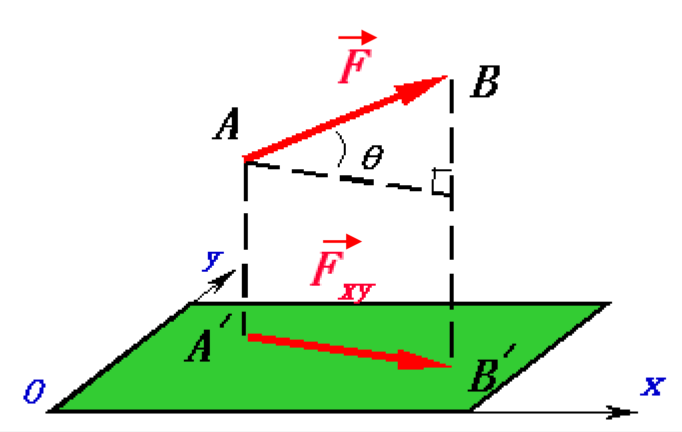




二、力在平面上的投影

力在*xy*平面上的投影为 $\vec{F}_{xy}$（矢量），

它的大小：$F_{xy} = F\cos\theta$

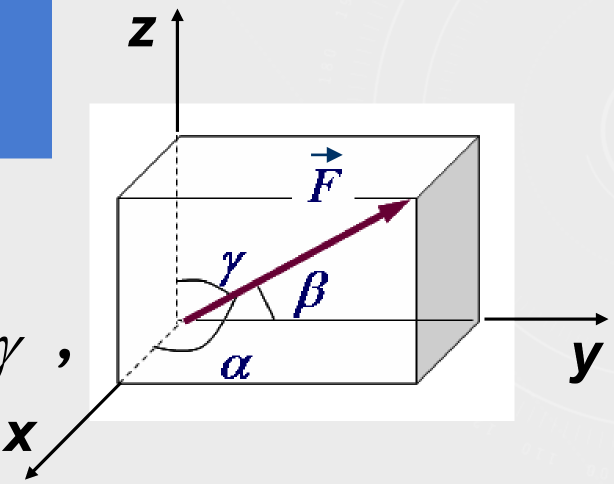


注意：

力在轴上投影是标量。

力在平面上的投影是矢量。

问题：
求力在直角坐标轴上的投影。



（1）直接投影法（一次投影法）

已知 $\vec{F}$ 与x、y、z轴正向交角为 α,β,γ ，

则：

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$

$$F_y = F \cdot \cos\beta$$

$$F_z = F \cdot \cos\gamma$$

其中 α,β,γ 不独立。

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为方向余弦，满足 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

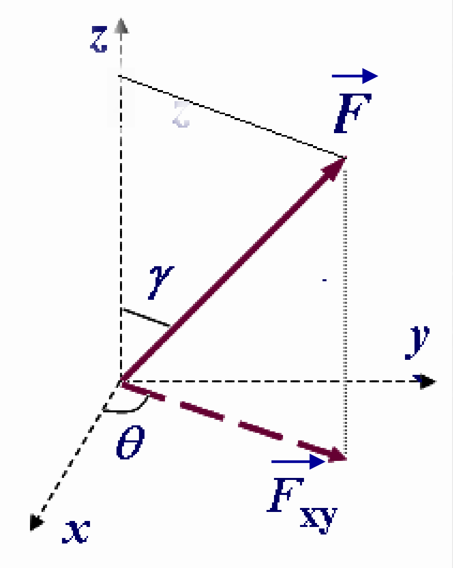
（2）二次投影法

已知力与z轴正向交角为 γ ，

则在xOy面上投影大小：

$$F_{xy} = F\sin\gamma$$

在z轴上投影： $F_z = F\cos\gamma$



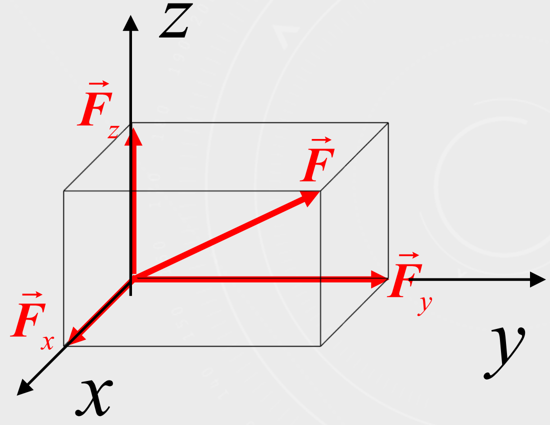
若 $\vec{F}_{xy}$与x轴正向交角为 θ ，则

$$F_x = F\cdot\sin\gamma\cdot\cos\theta$$

$$F_y = F\cdot\sin\gamma\cdot\sin\theta$$

注意： 力在坐标轴上的投影是代数量，应特别注意它的正负号。

能否用投影表达力矢量？



设 $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$ 为直角坐标系 x y z 轴

的单位矢量（基矢量），则力 $\vec{F}$ 可以写成

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

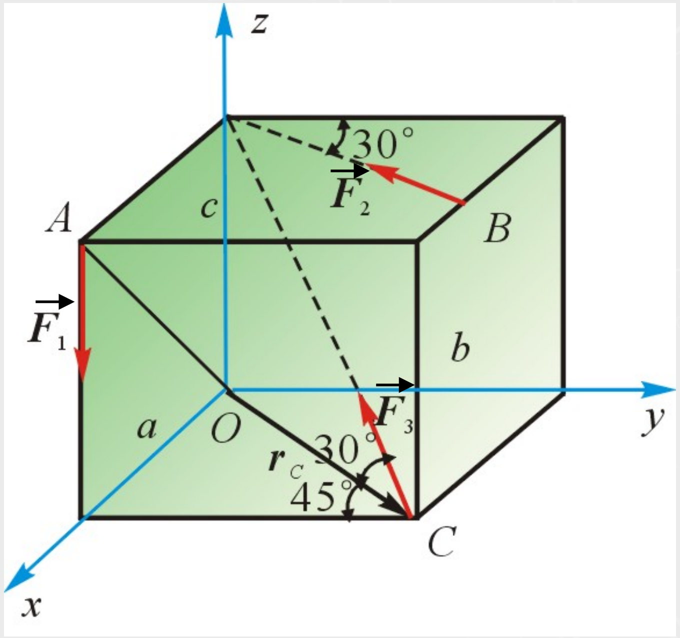
其中，F_x、F_y、F_z就是力 $\vec{F}$ 在各坐标轴上的投影。

问题： 已知力F在直角坐标轴上的三个投影，试用投影表示F的大小和方向。

模：
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

方向余弦：
$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

例 图中$a = b = \sqrt{3}$ m，$c = \sqrt{2}$ m。力$F_1 = 100\text{N}$，$F_2 = 200\text{N}$，$F_3 = 300\text{N}$，方向如图。求各力在三个坐标轴上的投影。



解：力$\vec{F}_1$在各坐标轴上的投影：

$$F_{1x} = 0, \quad F_{1y} = 0, \quad F_{1z} = -F_1 = -100$$

力$\vec{F}_2$在各坐标轴上的投影：

$$F_{2x} = -F_2 \cos 60^\circ = -100\text{N}$$

$$F_{2y} = -F_2 \cos 30^\circ = -100\sqrt{3}N$$

$$F_{2z} = 0N$$

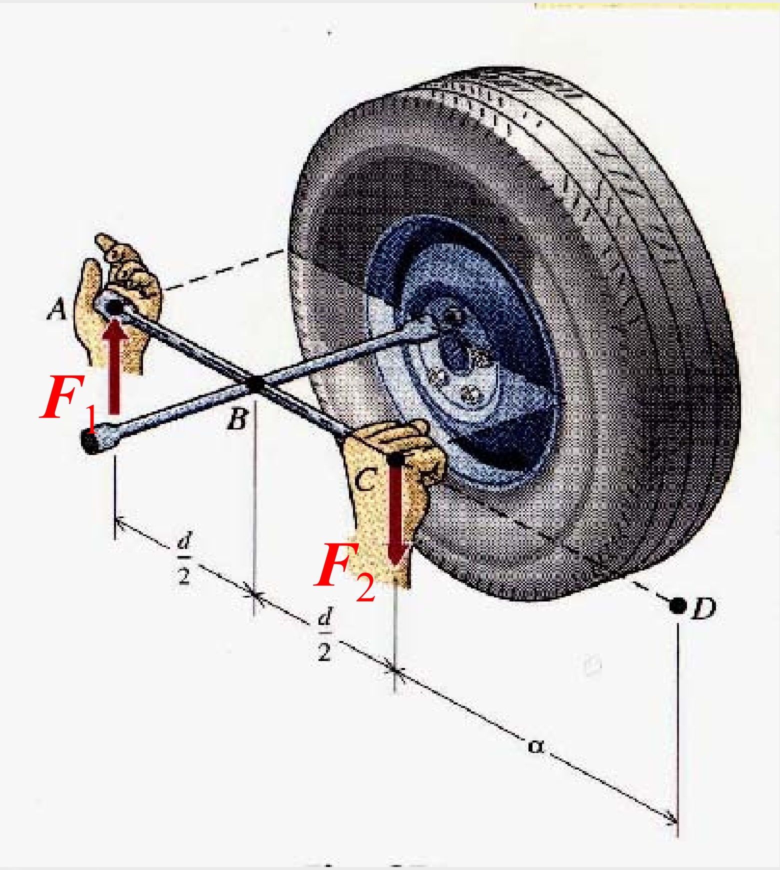
力$\vec{F}_3$在各坐标轴上的投影：

$$F_{3z} = F_3 \sin 30^\circ = 150\text{N}$$

$$F_{3x} = -F_3 \cos 30^\circ \sin 45^\circ = -75\sqrt{6}N$$

$$F_{3y} = -F_3 \cos 30^\circ \cos 45^\circ = -75\sqrt{6}N$$

力矩与力偶



力矩：
力对物体转动效应的度量

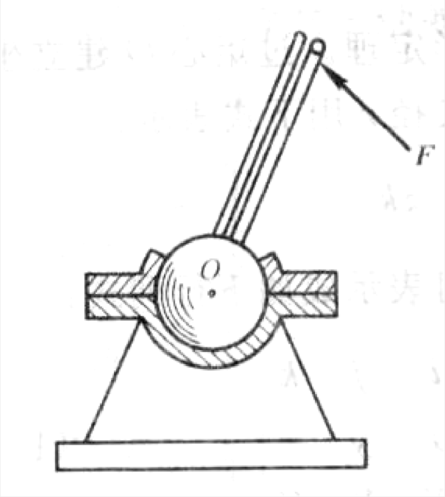
1、力对点之矩
2、力对轴之矩

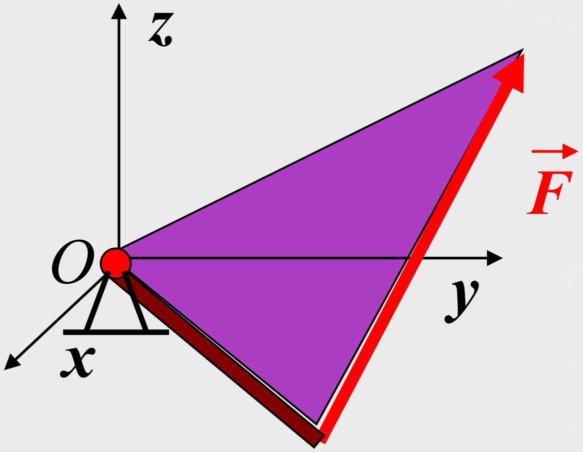
一、力对点之矩 (moment of a force about a point)

力对点之矩：

力使物体绕某点转动效应的度量

电视机天线：





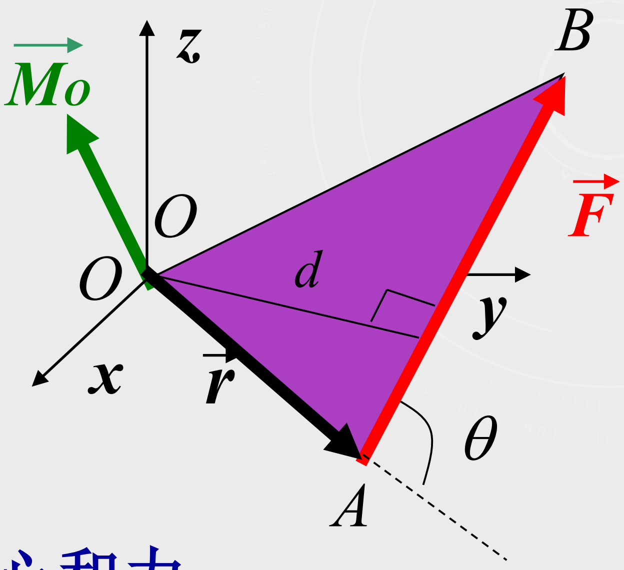
需要度量：

1、转动快慢

2、转动方向

力对点之矩的数学描述

（1）矢量表示式



$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

讨论：

方向： $\vec{r} \times \vec{F}$ 确定的方向；即垂直于矩心和力矢量所在的平面。

大小： $\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = r \cdot F \sin\theta \;\; = F \cdot d \;\; = 2S_{\Delta OAB}$

作用点： 取矩点O

点O称为力矩中心（矩心），
该矢量通过矩心，为定位矢量。

力矩单位：
牛顿.米（N.m）

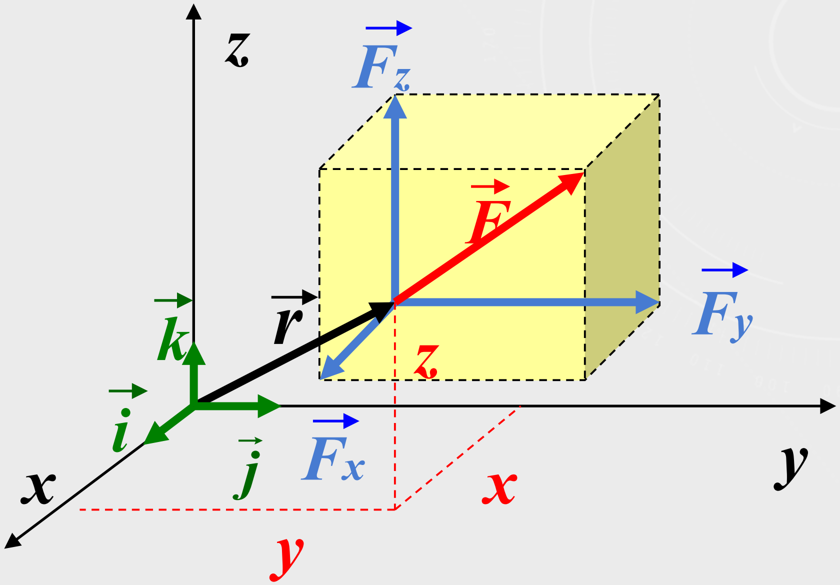
（2）解析表示式

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

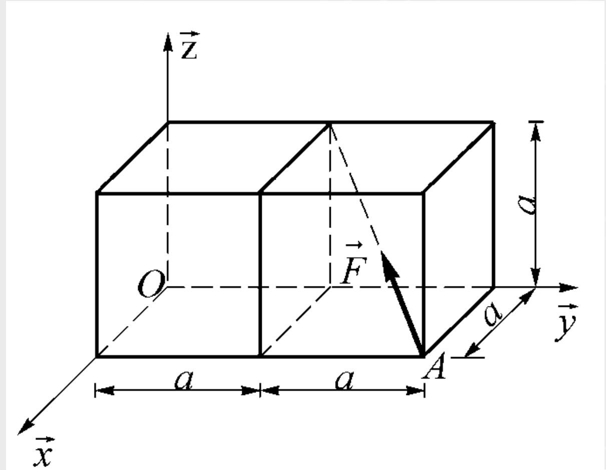
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

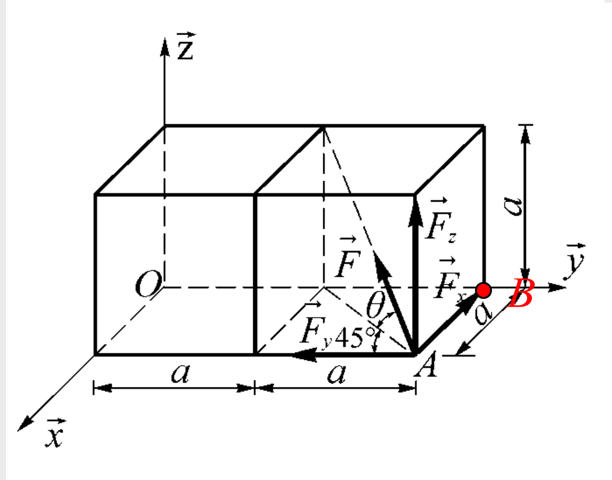
$$= M_{ox}\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k}$$



$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= yF_z - zF_y \\ M_{Oy} &= zF_x - xF_z \\ M_{Oz} &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\}$$ 力对点之矩在轴上的投影

例：在图示立方体中，已知力与尺寸*a*。试求力对*O*点矩。





解：力的投影

$$F_x = -F\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}F$$

$$F_y = -\frac{1}{\sqrt{3}}F$$

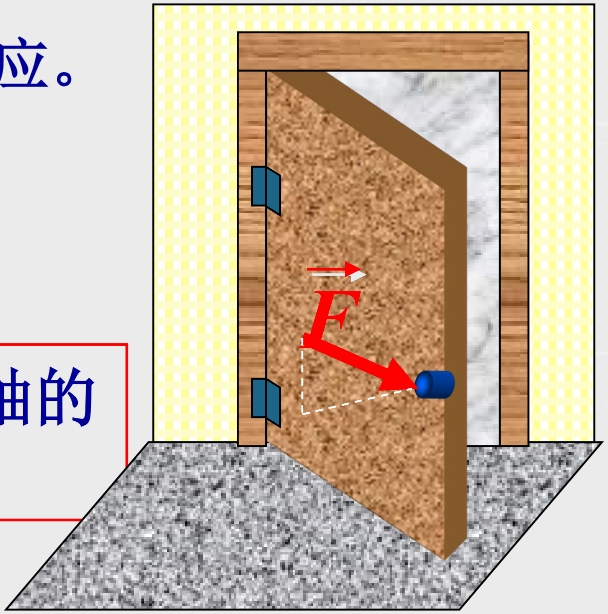
$$F_z = \frac{1}{\sqrt{3}}F$$

$$\vec{F} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k})F \qquad \vec{r} = (\vec{i} + 2\vec{j})a$$

力对O的矩： $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = (\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k})Fa$

问题：如何求力对B点的矩？

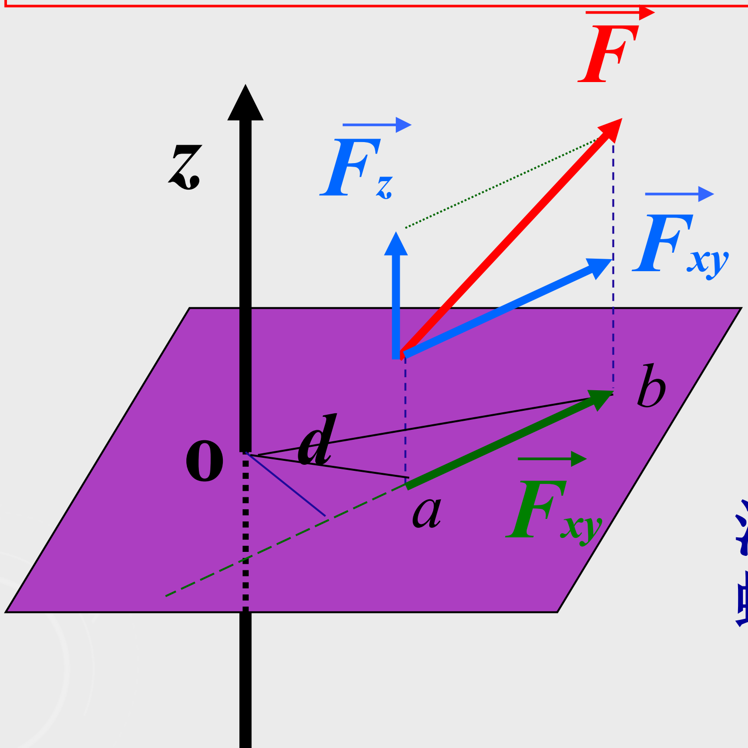
二、力对轴之矩(moment of a force about an axis)



力对轴之矩：度量力使物体绕某轴转动的效应。
轴的方位已知。

矢量 or 标量？

定义：力对轴之矩等于该力在垂直于该轴的平面上的投影对该轴与该平面交点之矩。



方法一：根据定义

$$M_z = \pm dF_{xy} = \pm 2S_{\Delta Oab}$$

由右手螺旋法则定正负：

沿轴定一方位为正方向，力矢量右手螺旋拇指方向与所定正方向相同为正。

$$M_z = \pm dF_{xy}$$

问题：

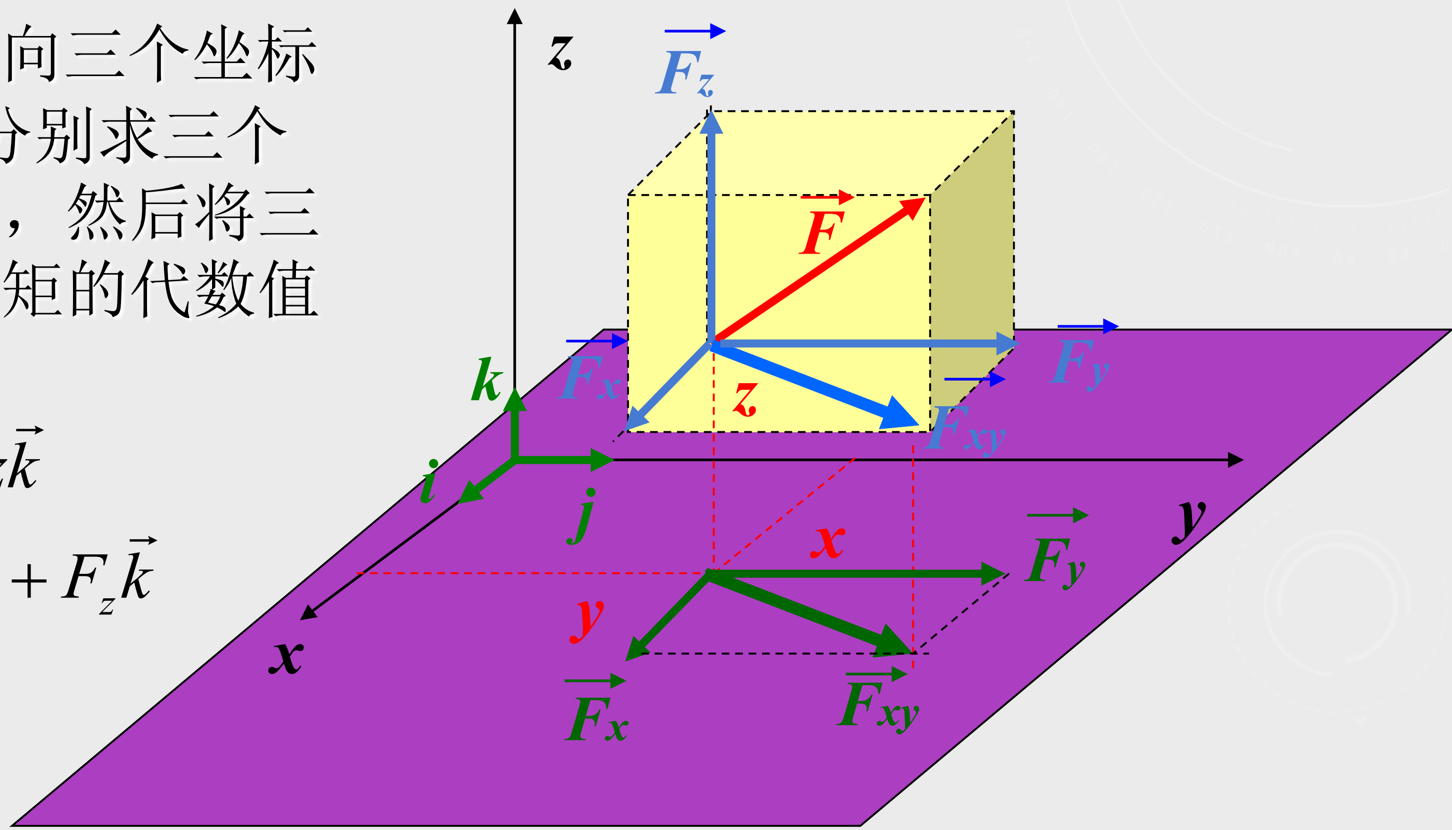
什么情况力对轴之矩为零？

力与该轴平行或相交时力对该轴之矩为零。

方法二：将力向三个坐标轴方向分解，分别求三个分力对轴之矩，然后将三个分力对轴之矩的代数值相加。

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$



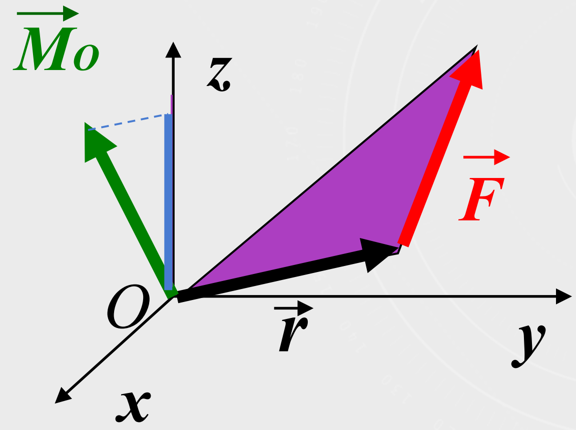
$$\boxed{M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x}$$

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z$$

力对轴之矩

$$\left.\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\}$$



力对点之矩在各坐标轴上的投影

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= yF_z - zF_y \\ M_{Oy} &= zF_x - xF_z \\ M_{Oz} &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= M_{Ox} \\ M_y(\vec{F}) &= M_{Oy} \\ M_z(\vec{F}) &= M_{Oz} \end{aligned}\right\}$$

力对轴之矩与力对点之矩的关系

力对*z*轴之矩等于力对*z*轴上任意一点*O*之矩在该轴上的投影。

力对轴之矩与力对点之矩的关系

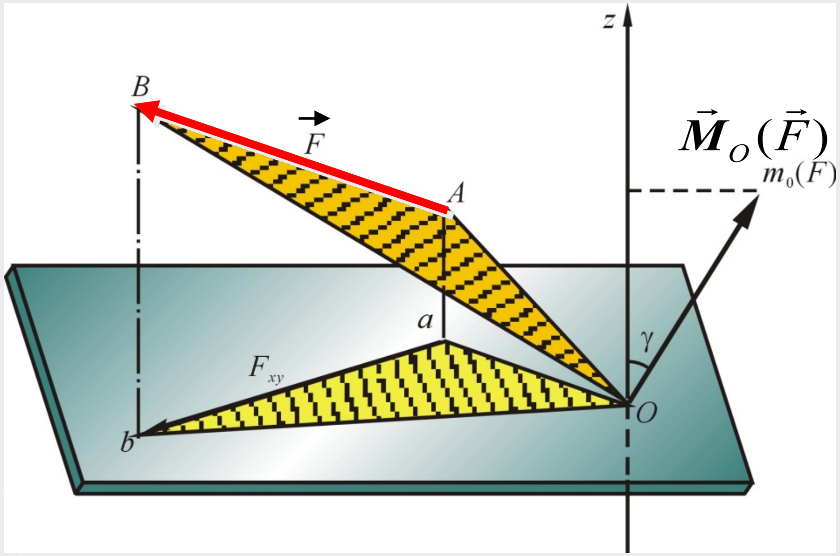
力对(z)轴之矩等于力对(z)轴上任意一点(O)之矩在该轴(z)上的投影。

证明：

力$\vec{F}$对O点之矩、力$\vec{F}$对通过O点的z轴之矩的大小分别为

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = 2S_{\Delta OAB}$$

$$\left|M_z(\vec{F})\right| = 2S_{\Delta Oab}$$

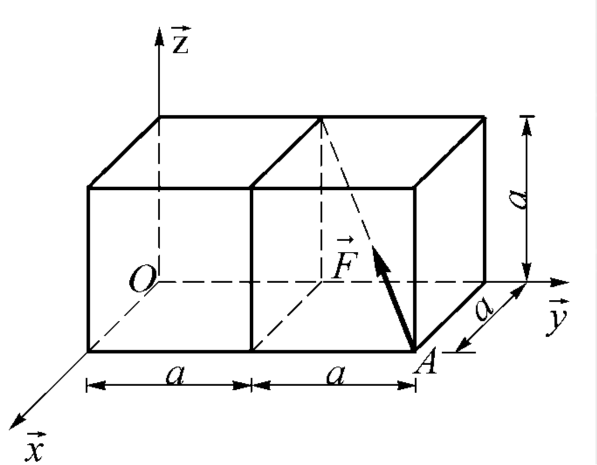


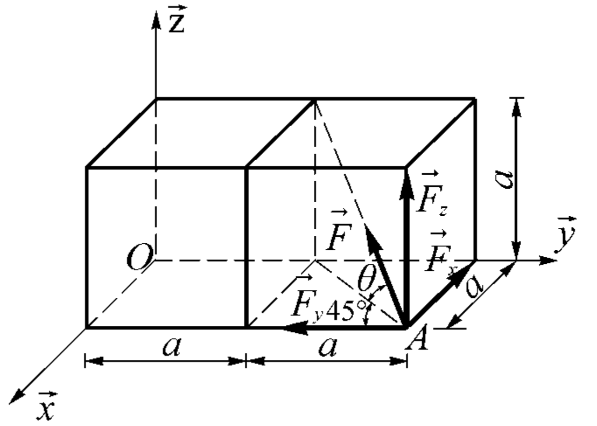
$$S_{\Delta OAB}\left|\cos\gamma\right| = S_{\Delta Oab}$$

$$\Rightarrow \left|M_z(\vec{F})\right| = \left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| \cdot \left|\cos\gamma\right|$$

式中γ为两三角形平面之间的夹角，即 $\vec{M}_O(\vec{F})$与z轴之夹角。

例：在图示立方体中，已知力与尺寸*a*。试求力对*x*、*y*、*z*轴之矩。





解：用方法二

$$F_x = -F\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}F$$

$$F_y = -\frac{1}{\sqrt{3}}F$$

$$\vec{F} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k})F$$

$$F_z = \frac{1}{\sqrt{3}}F$$

对*x*轴矩： $$M_x(\vec{F}) = F_z \cdot 2a = \frac{2}{\sqrt{3}}Fa$$

对*y*轴矩： $$M_y(\vec{F}) = -F_z \cdot a = -\frac{1}{\sqrt{3}}Fa$$

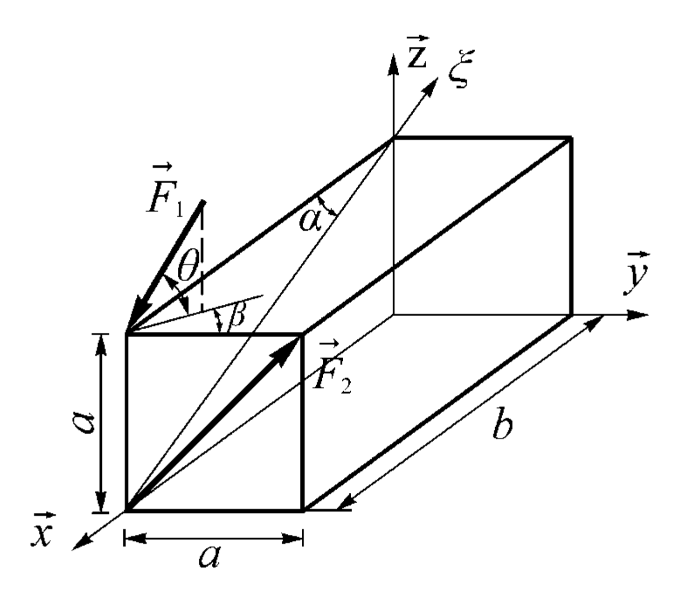
对*z*轴矩： $$M_z(\vec{F}) = F_x \cdot 2a - F_y \cdot a = \frac{1}{\sqrt{3}}Fa$$

对*O*点的矩： $$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = (\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k})Fa$$

例： 已知，F_1，θ，β，求F_1对ξ轴的矩。

解： 用方法一

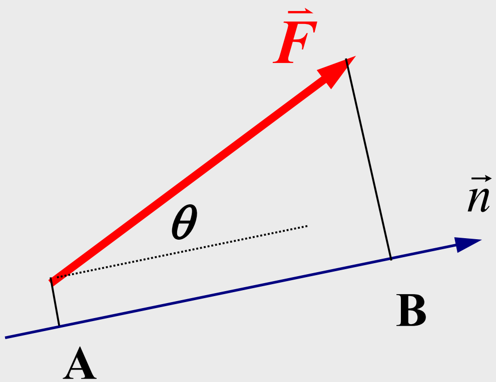
很麻烦



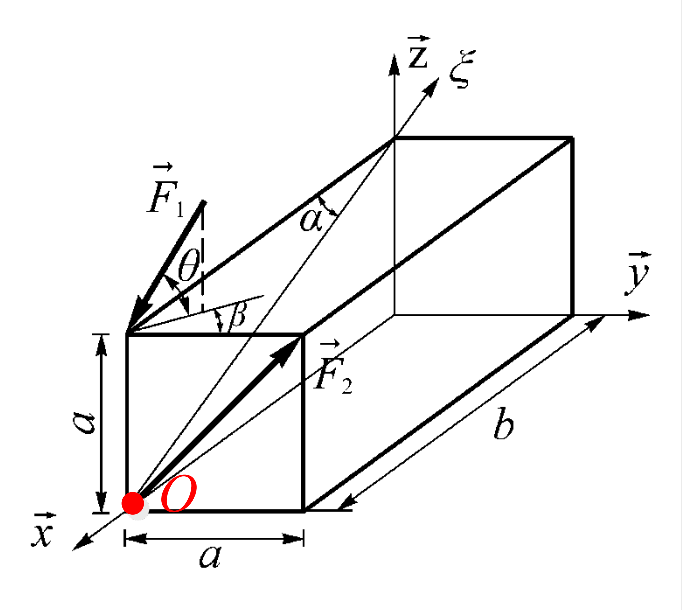
力对（z）轴之矩等于力对（z）轴上任意一点（o）之矩在该轴（z）上的投影。

力对任意一轴的矩

矢量在轴上的投影：



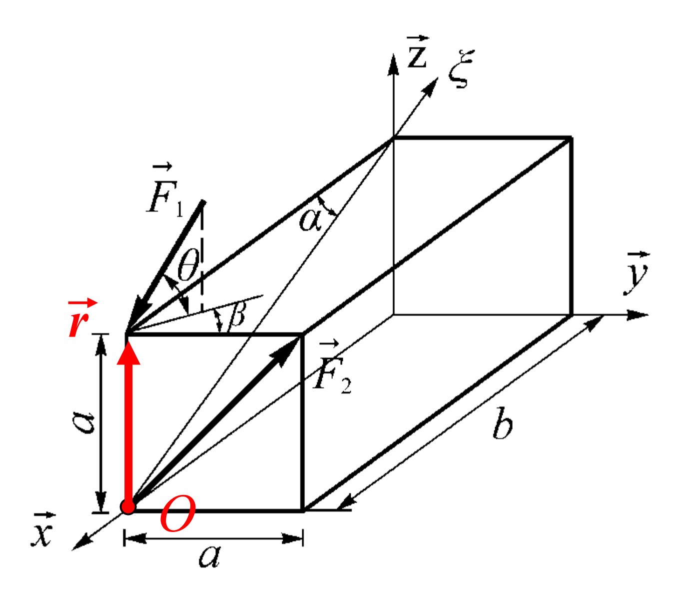
$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{n}$$



◎若轴的方向向量为***n***，***O***为轴上一点，则：

$$M_\xi(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}) \cdot \vec{n} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}$$

例： 已知，F_1，θ，β，求F_1对ξ轴的矩。



解：

$$F_{1x} = F_1 \cos\theta \sin\beta$$

$$F_{1y} = -F_1 \cos\theta \cos\beta$$

$$F_{1z} = -F_1 \sin\theta$$

F_1对O点的矩

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

$$= (a\vec{k}) \times (F_1 \cos\theta \sin\beta \, \vec{i} - F_1 \cos\theta \cos\beta \, \vec{j} - F_1 \sin\theta \, \vec{k})$$

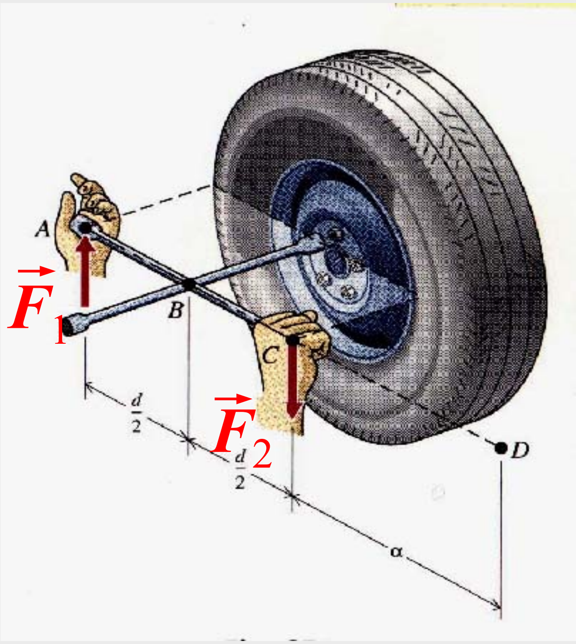
$$= (\cos\beta \, \vec{i} + \sin\beta \, \vec{j}) a F_1 \cos\theta$$

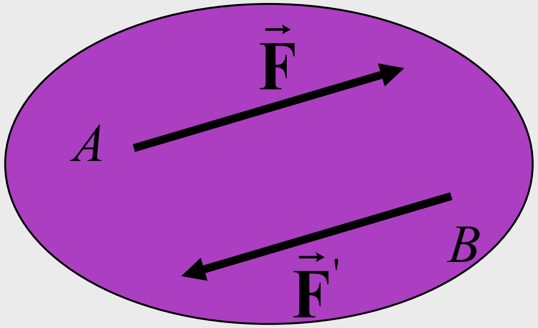
ξ轴的单位矢量： $\vec{\boldsymbol{n}} = (-b\vec{\boldsymbol{i}} + a\vec{\boldsymbol{k}}) \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

F_1对ξ轴的矩： $M_\xi = \vec{\boldsymbol{M}}_O(\vec{\boldsymbol{F}}_1) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = -ab \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F_1 \cos\beta \cos\theta$

力　偶

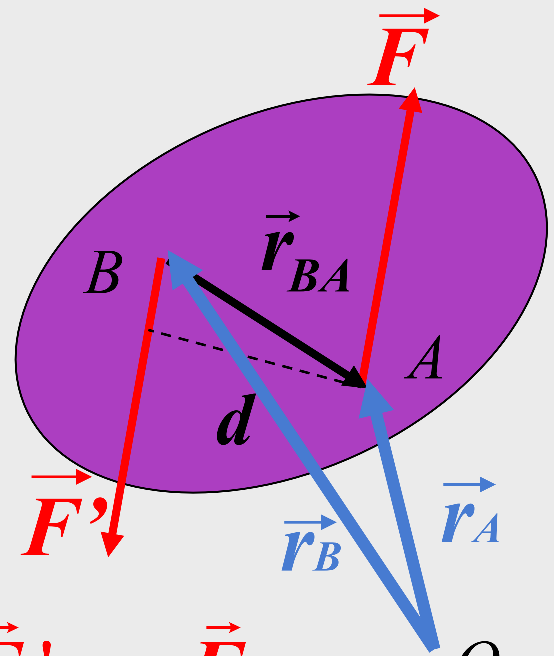
概念与性质





- 力偶(couple)：$\{\vec{F},\ \vec{F}'\}$, $\vec{F}=-\vec{F}'$ 不共线

力偶矩 (moment of a couple)



$\vec{F}' = -\vec{F}$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'$$

$$= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

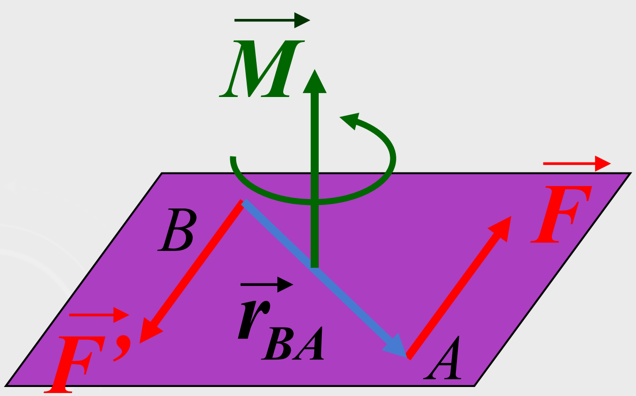
与取矩点无关

力偶矩：

$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

为自由矢量

大小：$\boxed{M = d \cdot F}$ 单位：N . m



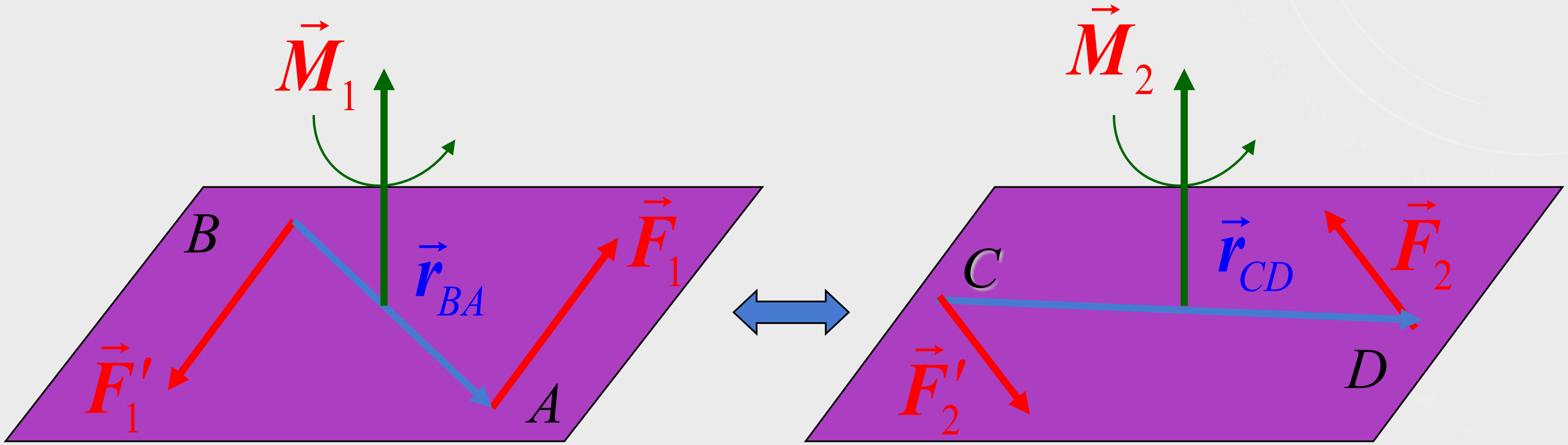
方向： 垂至于力偶所在平面

指向： 符合右手螺旋法则

1、力偶的等效条件(定理)

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_1'\} = \{\vec{F}_2, \vec{F}_2'\}$$

• 两个力偶**等效的条件**是它们的**力偶矩相等**



$$\vec{M}_1 = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1 \qquad \vec{M}_2 = \vec{r}_{CD} \times \vec{F}_2$$

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_1 = \vec{M}_2 = \vec{r}_{CD} \times \vec{F}_2$$

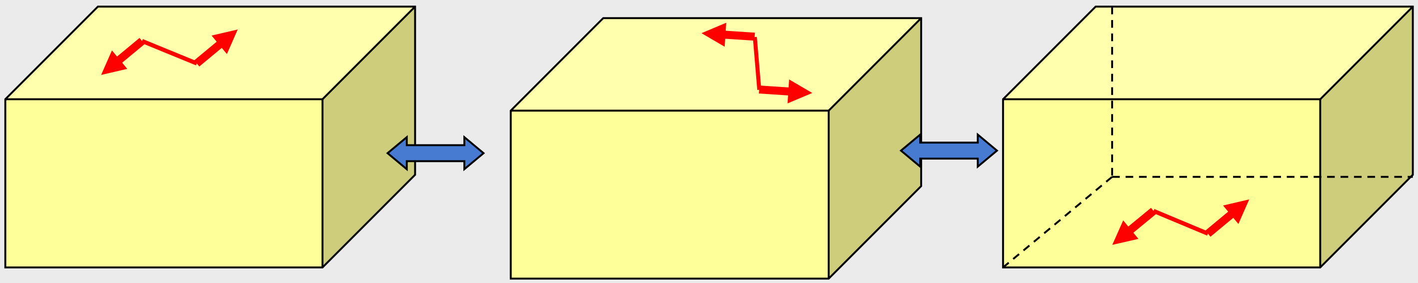
一般就用**矢量** $\vec{M}$ 或力偶作用面内的**螺旋圈**表示一个力偶，而不画成两个力。

2、力偶的性质

力偶是自由矢量

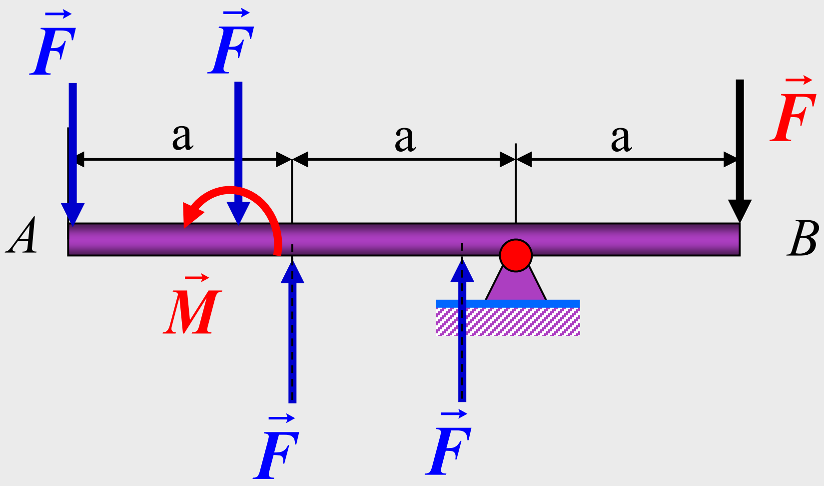
性质一

力偶可在其作用面及其平行平面内任意移动，而不改变对刚体的作用效应



力偶是自由矢量

性质二 在保持力偶矩不变的情况下，同时改变组成力偶的力大小及力偶臂的长短，则不会改变它对刚体的转动效应。



问题：力偶可否与一个力等效？

力偶不能与一个力等效 $\{\vec{F},\vec{F}'\}\neq\{\vec{F}_R\}$