理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

动 力 学

达朗贝尔原理

让·勒朗·达朗贝尔

- 法国物理学家、数学家和天文学家
- 数学《数学手册》8卷、力学《动力学》、哲学《文集》23卷、《百科全书》的序言等等。

- 《动力学》：提出三大运动定律；提出了达朗贝尔原理，它与牛顿第二定律相似，但在于可以把动力学问题转化为静力学问题处理；
- 使一些力学问题的分析简单化，而且为分析力学的创立打下了基础。

Born	16 November 1717 Paris, France
Died	29 October 1783 (aged 65) Paris, France
Nationality	French
Fields	Mathematics Mechanics Physics Philosophy
Alma mater	University of Paris
Notable students	Pierre-Simon Laplace
Known for	D'Alembert criterion D'Alembert force D'Alembert's form of the principle of virtual work D'Alembert's formula D'Alembert equation D'Alembert operator D'Alembert's paradox D'Alembert's principle D'Alembert system D'Alembert–Euler condition Tree of Diderot and d'Alembert Cauchy–Riemann equations Fluid mechanics Encyclopédie Three-body problem
Notable awards	Fellow of the Royal Society Follow of the Institut de France

达朗贝尔原理

动静法

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_N \xrightarrow{\vec{F}_I = -m\vec{a}} \vec{F} + \vec{F}_N + \vec{F}_I = 0$$

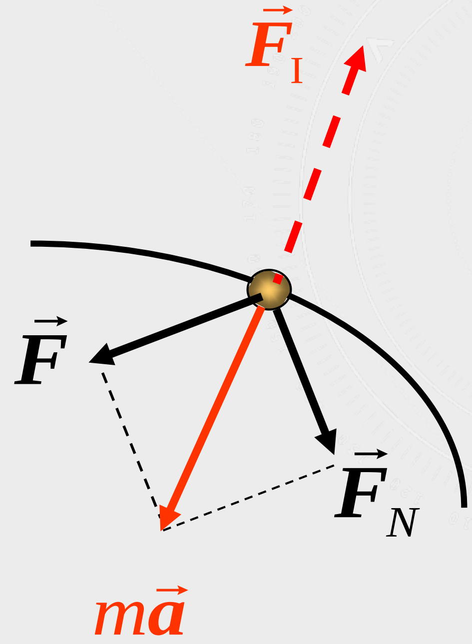
动力学问题　　“静力学”问题

惯性力 $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{F}_\mathrm{I} = -m\vec{a}}$

1、质点的达朗贝尔原理

$\vec{F}$ 主动力， $\vec{F}_N$ 约束力，

$\vec{F}_{\mathrm{I}} = -m\vec{a}$ 惯性力



<u>质点的达朗贝尔原理：</u> $\{\vec{F}, \vec{F}_N, \vec{F}_{\mathrm{I}}\} = \{\mathbf{0}\}$

主动力＋约束力＋惯性力＝“平衡”力系

2、质点系的达朗贝尔原理

若对于质点系中的第i个质点有：

$$\vec{F}_i+\vec{F}_{\mathrm{N}i}+\vec{F}_{\mathrm{I}i}=\mathbf{0}$$

n个平衡汇交力系

若第i个质点上的力分为：外力 $\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}$ 内力 $\vec{F}_i^{(\mathrm{i})}$

$$\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}+\vec{F}_i^{(\mathrm{i})}+\vec{F}_{\mathrm{I}i}=\mathbf{0}$$

则对于整个质点系： 静力学：平衡条件？ 主矢、主矩等于零

$$\vec{F}_{\mathrm{R}}=\sum\vec{F}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}+\sum\vec{F}_i^{(\mathrm{i})}+\sum\vec{F}_{\mathrm{I}i}=0$$

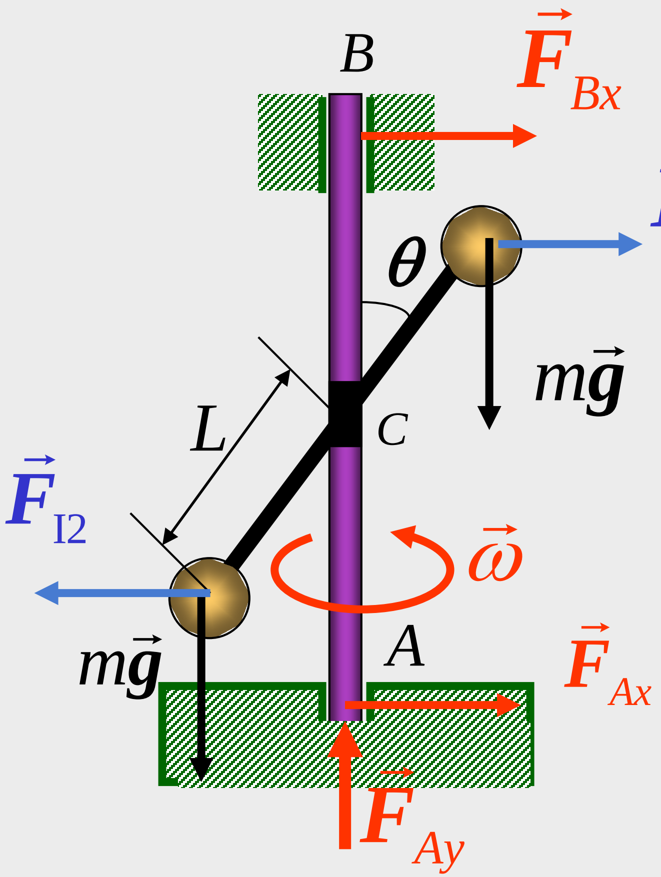
$$\vec{M}_O=\sum\vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}\right)+\sum\vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{(\mathrm{i})}\right)+\sum\vec{M}_O\left(\vec{F}_{\mathrm{I}i}\right)=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum\vec{F}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}+\sum\vec{F}_{\mathrm{I}i}=0$$

$$\sum\vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}\right)+\sum\vec{M}_O\left(\vec{F}_{\mathrm{I}i}\right)=0$$

例： 已知：$AB = h, AC = h/2, \omega, \theta, L, m$，求A、B的约束力。



解： 研究整体 应用动静法. 受力分析与运动分析

$$F_{I1} = F_{I2} = ma = mL\omega^2 \sin\theta$$

$$\sum M_A = 0$$

$$mgL\sin\theta - mgL\sin\theta - F_{Bx}h$$

$$-F_{I1}(0.5h + L\cos\theta) + F_{I2}(0.5h - L\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Bx} = -\frac{mL\omega^2 \sin 2\theta}{h}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = \frac{mL\omega^2 \sin 2\theta}{h}$$

$$F_{Bx} + F_{Ax} + F_{I1} - F_{I2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - 2mg = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 2mg$$

若求附加动反力？

应用静力学写平衡方程的方法求解质点(系)的动力学问题，这种方法称为静态动力学方法，简称动静法。

3、刚体惯性力系的简化

质点系达朗贝尔原理

$$\sum \vec{F}_i^{(e)} + \sum \vec{F}_{Ii} = 0$$ 主矢

$$\sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{(e)}\right) + \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_{Ii}\right) = 0$$ 主矩

$\{\vec{F}_{Ii}\}$ $\Rightarrow$ 如何等效？

$$\{\vec{F}_{I1}, \dots, \vec{F}_{In}\} = \{\vec{F}_{IR},\ \vec{M}_{IO}\}$$

向一点O简化

$$\begin{cases} \vec{F}_{IR} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ii} \\ \vec{M}_{IO} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_{Ii}) \end{cases}$$

质点系动力学问题

$\Updownarrow$

$$\{\vec{F}_1^{(e)}, \dots, \vec{F}_m^{(e)}, \vec{F}_{IR},\ \vec{M}_{IO}\} = \{0\}$$

形式上的“平衡”

惯性力系的主矢

$$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$$

惯性力系的主矩 → 与简化中心O有关

存在特殊的简化中心？ Yes!

a) 若O为固定点

$$\vec{M}_{\mathrm{IO}} = -\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

b) 若O为质心 C（动点）

$$\vec{M}_{\mathrm{IC}} = -\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C^{\,r}}{\mathrm{d}t}$$

向静止点O简化

主矢：$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩：$\vec{M}_{\mathrm{IO}} = -\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$

向质心C简化

主矢：$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩：$\vec{M}_{\mathrm{IC}} = -\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_C{}^{r}}{\mathrm{d}t}$

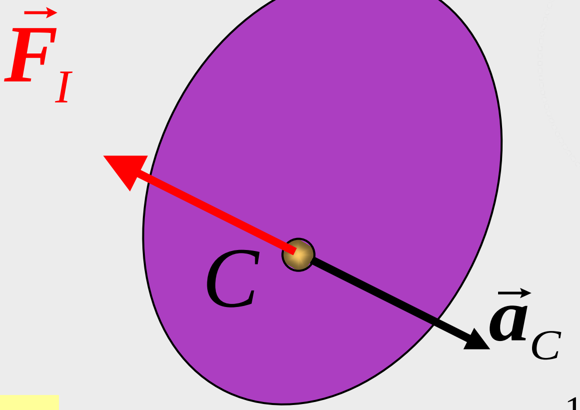
(1) 平移刚体惯性力系的简化

向质心C简化

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C}$$

$$\vec{M}_{\mathrm{IC}} = -\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C^{r}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\boxed{\vec{M}_{\mathrm{IC}} = \mathbf{0}}$$



惯性力的合力通过质心

向静点O简化

主矢：$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩：$\vec{M}_{\mathrm{IO}} = -\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$

向质心C简化

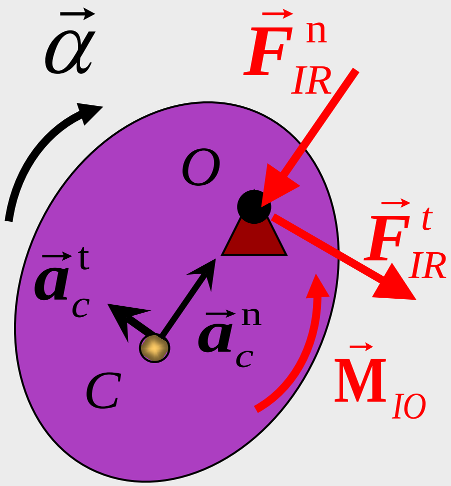
主矢：$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩：$\vec{M}_{\mathrm{IC}} = -\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_C{}^{r}}{\mathrm{d}t}$

(2) 定轴转动刚体惯性力系的简化

条件：具有垂直于转轴的质量对称面——可简化为平面问题

向转轴 *O* 简化



$$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_c$$

$$M_{\mathrm{IOz}} = \frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J_O\omega)}{\mathrm{d}t} = J_O\alpha$$

$$M_{\mathrm{IOz}} = J_O\alpha$$

向转轴简化的结果

向静点O简化

主矢：$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩：$\vec{M}_{\mathrm{I}O} = -\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$

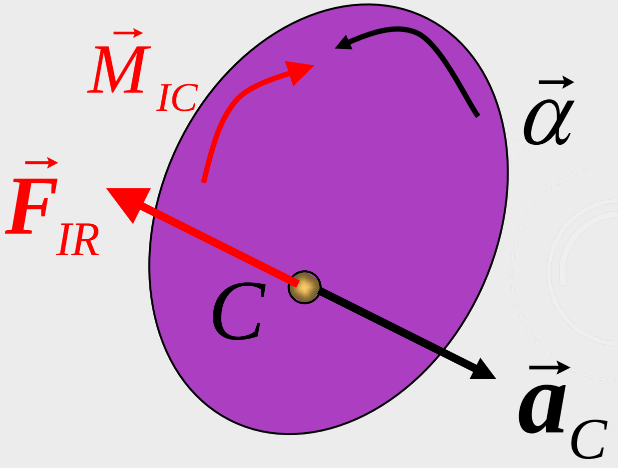
向质心C简化

主矢：$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩：$\vec{M}_{\mathrm{IC}} = -\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_C^{\,r}}{\mathrm{d}t}$

(3)、平面运动刚体惯性力系的简化

条件：具有平行于运动平面的质量对称面——可简化为平面问题。



向质心C简化

主矢：$\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩：$\vec{M}_{\mathrm{IC}} = -J_C\vec{\alpha}$

$$M_{\mathrm{IC}z} = \frac{\mathrm{d}L_{Cz}^{r}}{\mathrm{d}t} = J_C\alpha$$

向质心简化的结果

思 考 题 1

作平动的刚体，向质心以外的任意点简化，其惯性力偶矩均为零吗？若不为零，又如何计算？

思 考 题 2

作定轴转动的刚体（质量对称面与转轴正交），惯性力系可以向质心简化吗？若可以则惯性力和惯性力偶如何表达？

思 考 题 3

作平面运动的刚体，向质心以外的任意点简化，其惯性力偶矩如何计算？

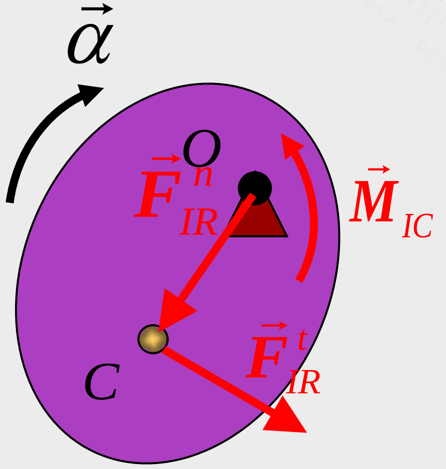
思考：若把定轴转动看为平面运动的特殊情况，则向质心简化的结果是什么？

定轴转动刚体向质心C简化

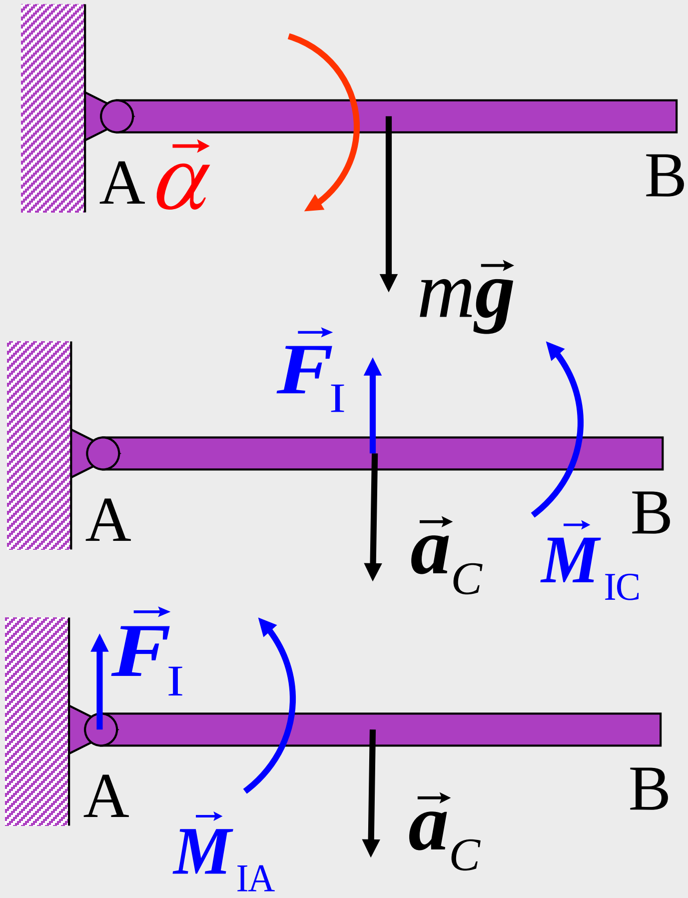
主矢： $\vec{F}_{\mathrm{IR}} = -m\vec{a}_C$

主矩： $\vec{M}_{\mathrm{IC}} = -J_C\vec{\alpha}$

$$M_{\mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{d}L_C^r}{\mathrm{d}t} = J_C\alpha$$



思考题： 已知均质杆长为 L，质量为m，角速度为零，角加速度为 α，



1、将惯性力向质心C简化

2、将惯性力向转轴A简化

惯性力向质心C简化：

$$F_{\mathrm{I}} = m\alpha\frac{L}{2},\quad M_{\mathrm{IC}} = \frac{1}{12}mL^2\alpha$$

惯性力向转轴A简化：

$$F_{\mathrm{I}} = m\alpha\frac{L}{2},\quad M_{\mathrm{IA}} = \frac{1}{3}mL^2\alpha$$

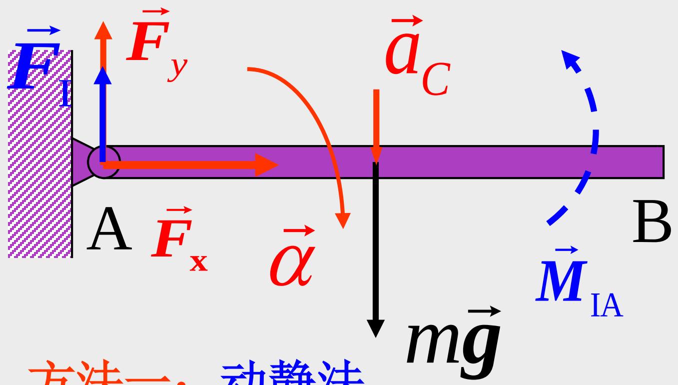
惯性力(力偶)的施加： 大小、方向、作用点

刚体动力学问题

$$\{\vec{F}_1^{(\mathrm{e})},\cdots,\vec{F}_m^{(\mathrm{e})},\vec{F}_{\mathrm{I}R},\ \vec{M}_{\mathrm{I}O}\}=\{0\}$$

"动平衡"条件

例：已知 L，m，初始无初速度，求初始时杆的角加速度和约束力。



问题： 求解该题有几种方法？

适合的才是最好的！

方法一：动静法

可对任意点取矩！

$$F_\mathrm{I} = m\alpha\frac{L}{2},\ M_\mathrm{IA} = \frac{1}{3}mL^2\alpha$$

$$\sum M_A = M_\mathrm{IA} - mg\frac{L}{2} = 0$$

$$\sum F_x = F_x = 0$$

$$\sum F_y = F_y - mg + F_\mathrm{I} = 0$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L},\ F_x = 0,\ F_y = \frac{1}{4}mg$$

方法二：

应用动量矩定理

和质心运动定理

$$J_A\alpha = mg\frac{L}{2}$$

$$ma_{Cx} = F_x$$

$$ma_{Cy} = F_y - mg$$

方法三：

应用动能定理

和质心运动定理

一个自由度问题！

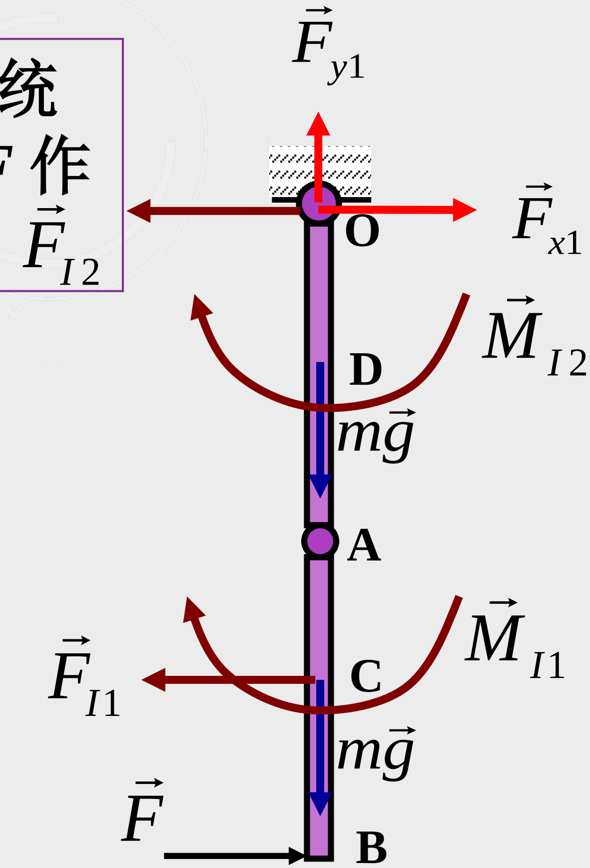
$$\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}J_A\omega^2)}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{g}\bullet\boldsymbol{v}_C$$

$$ma_{Cx} = F_x$$

$$ma_{Cy} = F_y - mg$$

运动学关系： $a_{Cx} = 0,\quad a_{Cy} = -\alpha\frac{L}{2}$

例：两根质量 *m*、长度 *l* 的均质杆构成的系统如图示，开始静止。在 *B* 端受一个已知力 *F* 作用，试求此时两根杆的角加速度。



解：受力分析，运动分析

加惯性力 $F_{I1}=m(l\alpha_1+\frac{l}{2}\alpha_2)$ $\quad F_{I2}=m\frac{l}{2}\alpha_1$

$$M_{I1}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_2 \qquad M_{I2}=\frac{1}{3}ml^2\alpha_1$$

[整体]: $\sum M_O=0$

$$F2l-F_{I1}\frac{3}{2}l-M_{I1}-M_{I2}=0$$

$$\Rightarrow \quad F2l-m(l\alpha_1+\frac{l}{2}\alpha_2)\frac{3}{2}l-\frac{1}{12}ml^2\alpha_2-\frac{1}{3}ml^2\alpha_1=0 \qquad \textbf{(1)}$$

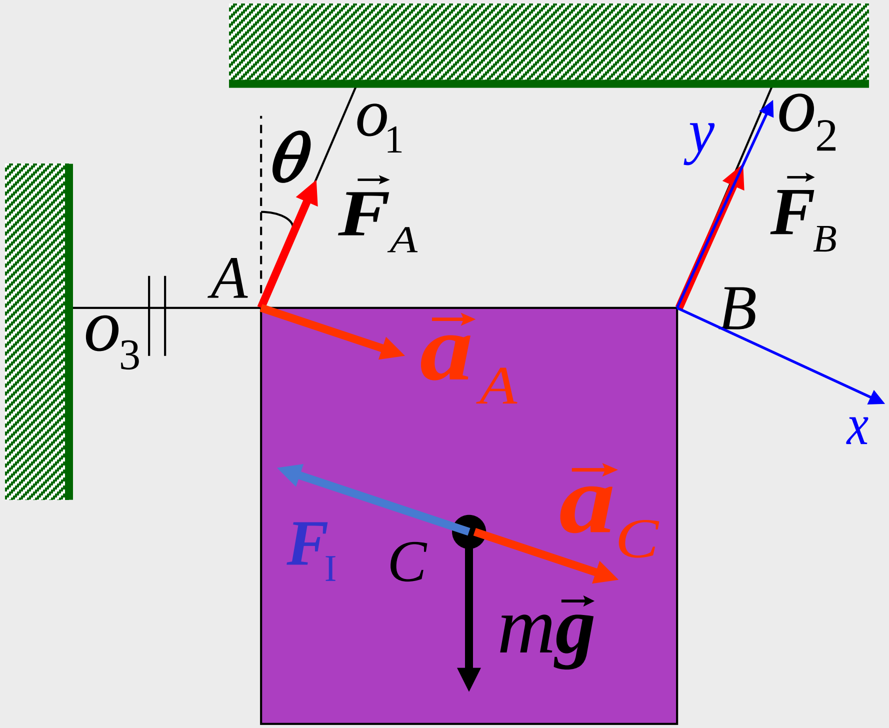
[AB]: $\sum M_A=0$

解(1)(2)即可求得加速度

$$Fl-F_{I1}\frac{1}{2}l-M_{I1}=0$$

$$\Rightarrow \quad Fl-m(l\alpha_1+\frac{l}{2}\alpha_2)\frac{1}{2}l-\frac{1}{12}ml^2\alpha_2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

例：已知：$m, \boldsymbol{\theta}, AO_1 \underline{\underline{//}} BO_2, O_1O_2 \underline{\underline{//}} AB$， 求水平绳切断后的瞬时，板质心加速度和两个绳索的拉力。



解：受力分析与运动分析

$$F_I = ma_c$$

建立"平衡方程"，并求解

$$\sum F_x = 0 \quad mg\sin\theta - F_I = 0$$

$$a_C = g\sin\theta$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_B L\cos\theta - mg\frac{L}{2} - F_I\frac{L}{2}\cos\theta + F_I\frac{L}{2}\sin\theta = 0$$

$$F_B = \frac{mg}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$$

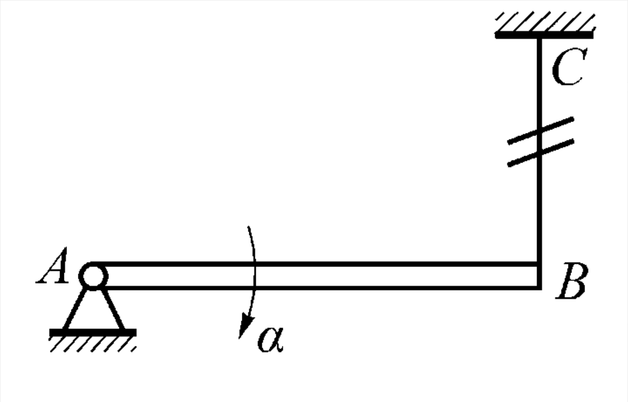
$$\sum F_y = 0 \quad F_B + F_A - mg\cos\theta = 0$$

$$F_A = \frac{mg}{2}(\cos\theta - \sin\theta)$$

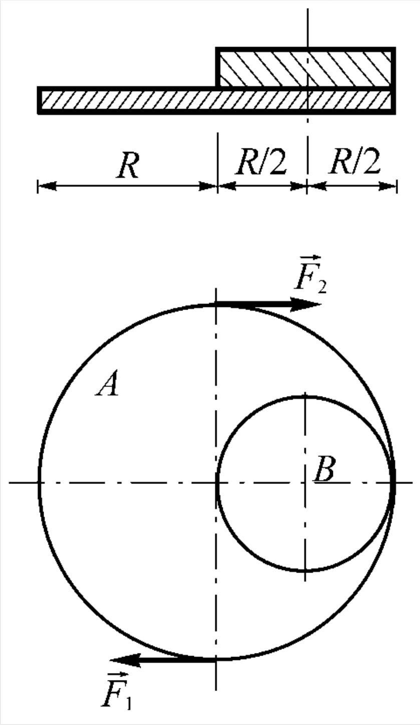
问题：若绳索**B**变为弹簧，如何求。

概念

1、均质细杆***AB***重***P***，长***L***，置于水平位置，若在绳***BC***突然剪断瞬时有角加速度***α***，则杆上各点惯性力简化为一个合力时，大小为 $\underline{\qquad \frac{PL\alpha}{2g} \qquad}$，作用点的位置在离***A***端 $\underline{\qquad \frac{2L}{3} \qquad}$ 处，在图中画出该惯性力。



2、半径为R，质量为m_A的均质圆盘A，与半径为 $\frac{R}{2}$ ，质量为m_B的均质圆盘B如图固结在一起，并置于水平光滑平面上，初始静止，受二平行力 $\vec{F}_1$ ，$\vec{F}_2$ 作用，若$m_A=m_B=m$，$F_1=F_2=F$，则系统惯性力系简化的结果：主矢量的大小为________0________，主矩的大小为________$2FR$________（并应在图中画出）。



例：*OB*杆和*OA*绳固定*AB*杆。*OB*质量不计，*AB*长*l*、质量*m*。试求剪断绳*OA*的瞬时，*OB*杆的内力。

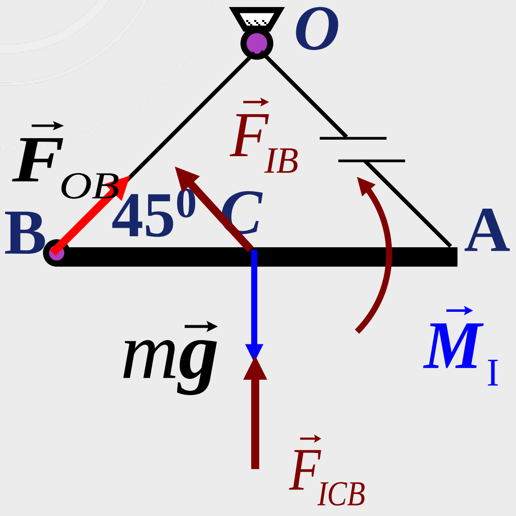
解：受力分析、运动分析

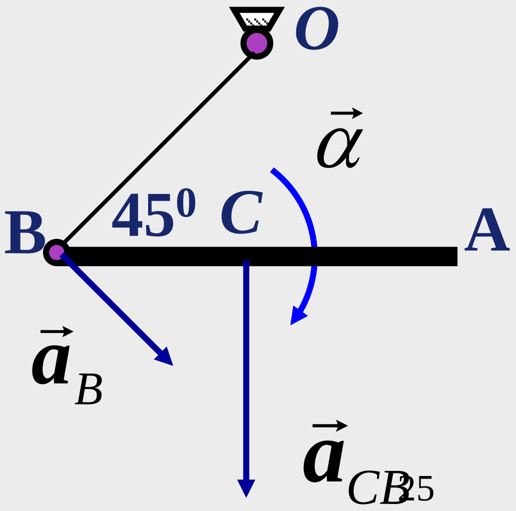
加惯性力

$$\vec{F}_I = m\vec{a}_C \qquad \vec{a}_c = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$$

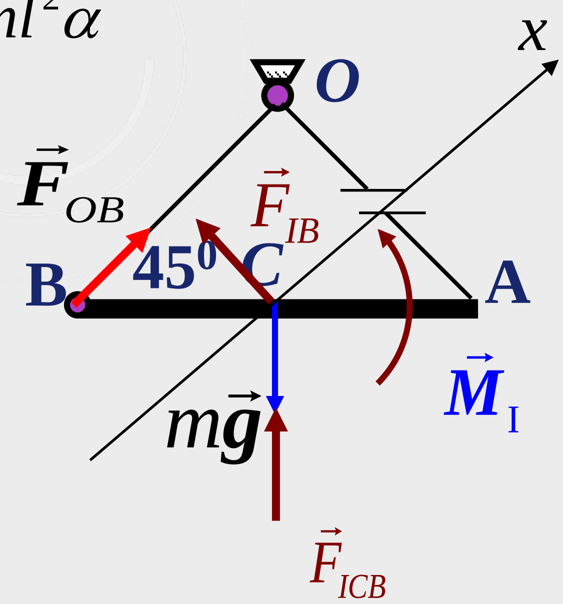
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_I = m(\vec{a}_B + \vec{a}_{CB}) = \vec{F}_{IB} + \vec{F}_{ICB}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{IB} &= ma_B \\ F_{ICB} &= ma_{CB} = m\alpha\frac{l}{2} \\ M_I &= J_c\alpha = \frac{1}{12}ml^2\alpha \end{aligned}\right\}$$





$$F_{IB}=ma_B \qquad F_{ICB}=m\alpha\frac{l}{2} \qquad M_I=\frac{1}{12}ml^2\alpha$$



列“平衡方程”

$$\sum M_C=0 \qquad M_I-F_{OB}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2}=0$$

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha-F_{OB}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2}=0 \qquad (1)$$

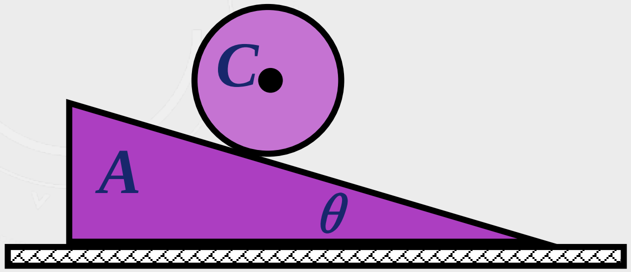
$$\sum F_x=0 \quad F_{OB}+(F_{ICB}-mg)\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$F_{OB}+(m\alpha\frac{l}{2}-mg)\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \quad (2)$$

上两式中未知量： F_{OB} α

$$F_{OB}=\frac{\sqrt{2}mg}{5} \qquad \alpha=\frac{6g}{5l}$$

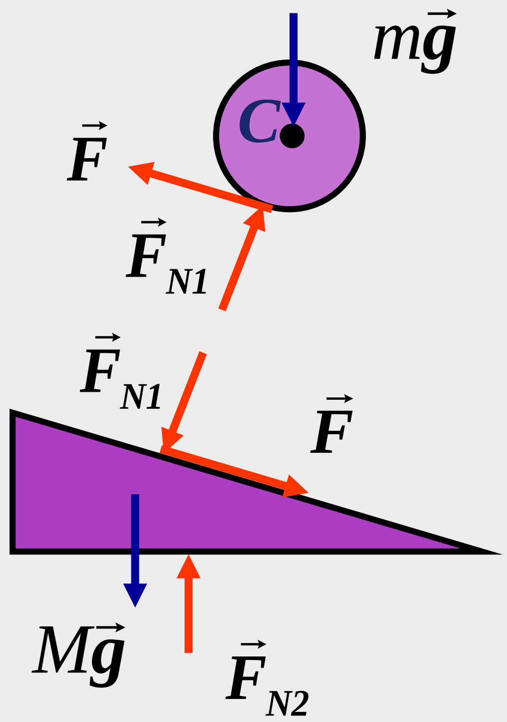
例 质量m、半径r的均质圆轮在质量M的楔块上纯滚动，楔块则被搁置在光滑的水平面上。试求楔块的加速度和圆轮的角加速度。



解：1、受力分析

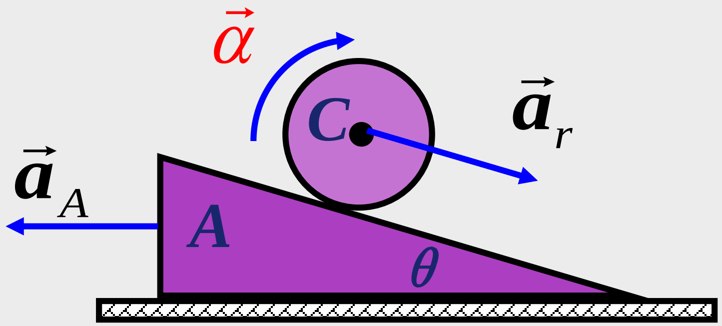
2、运动分析　　2个自由度　a_A　　α

3、施加惯性力



［轮］　平面运动

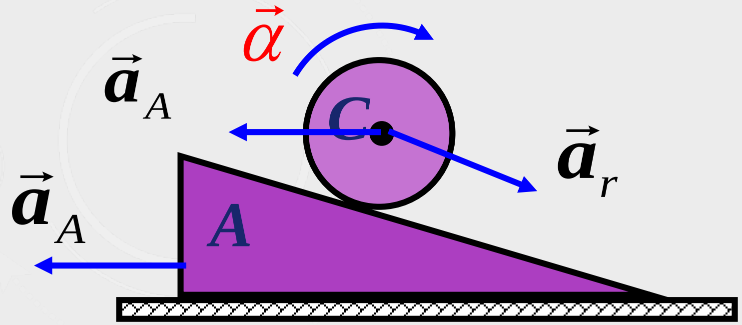
$$\vec{F}_{I1} = m\vec{a}_C = m\vec{a}_A + m\vec{a}_r$$



以C为动点，
动系固定在A上

则　$\vec{a}_c = \vec{a}_A + \vec{a}_r$　　而　$a_r = \alpha \cdot r$

3、施加惯性力



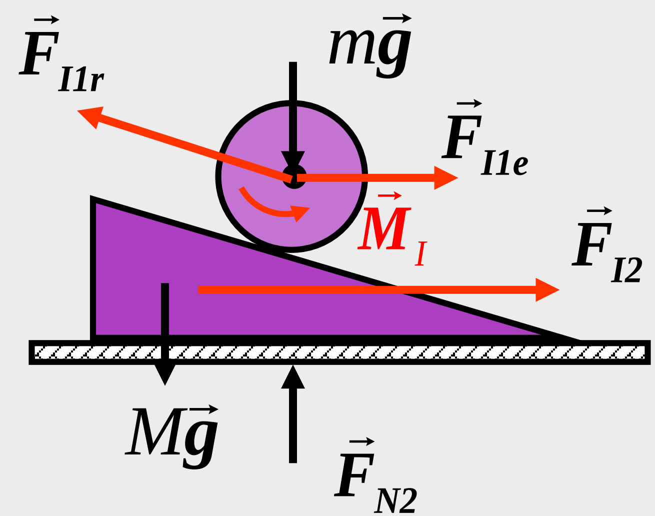
［轮］ 平面运动

$$\vec{F}_{I1} = m\vec{a}_C = m\vec{a}_A + m\vec{a}_r = \vec{F}_{I1e} + \vec{F}_{I1r}$$

$$F_{I1e} = ma_A \qquad F_{I1r} = ma_r = m\alpha r$$

$$M_I = J_C\alpha$$

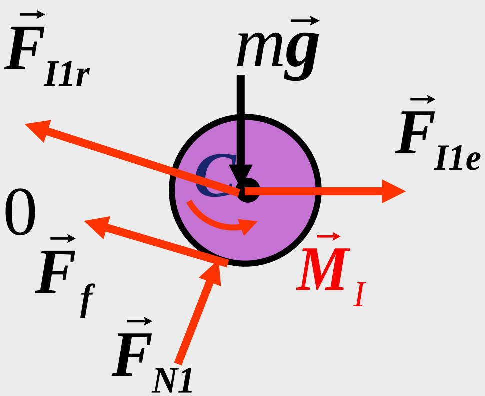
［斜面］ 平动 $\quad F_{I2} = Ma_A$



4、平衡方程

[整体] $\sum F_x = 0$

$$F_{I1e} + F_{I2} - F_{I1r}\cos\theta = 0$$



[轮] $\sum M_I = 0$

$$mgr\sin\theta + F_{I1e}r\cos\theta - F_{I1r}r - M_I = 0$$

含有未知量：

$\alpha \qquad a_A$

两 个 方 程 两 个 未知，可解。

总结:

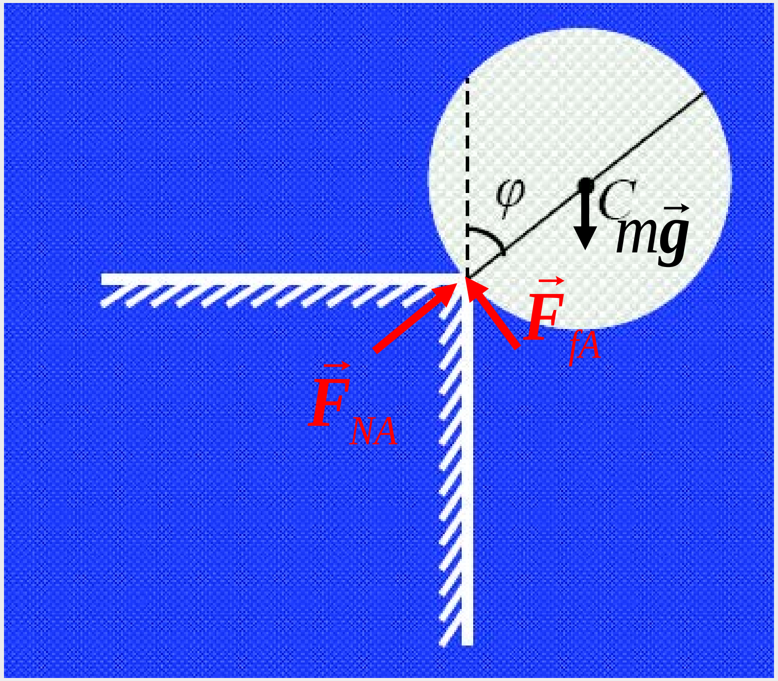
(1) 动静法与刚体动力学微分方程(即质心运动定理、动量矩定理)等价;

(2) 由于静力学分析方法简单直观，平衡方程有多种形式，简化中心可任意选取，所以动静法为动力学分析带来很大方便;

(3)动静法一般用来求解加速度。

4、附加例题

例 均质圆柱开始时静止于水平台边上, $\varphi = 0$，受小扰动后无滑动的的滚下，试求园柱脱离平台时的φ角。



圆柱脱离平台前作何运动?

圆柱为何会脱离平台?

受力、运动分析

先用动能定理求速度

解: ［圆柱］动能定理

初始时刻(φ=0)： $T_1 = 0$

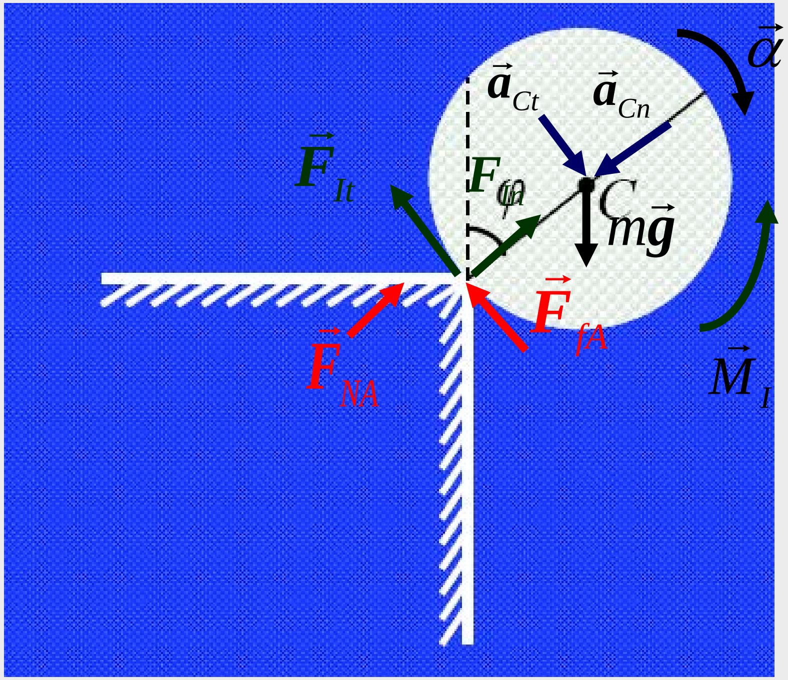
t时刻($\varphi = \varphi$): $T_2 = \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2$

$$W_{12} = mgr(1 - \cos\varphi)$$

则： $\frac{3}{4} m r^2 \omega^2 = mgr(1 - \cos\varphi)$ ⟹ $\omega^2 = 4g(1 - \cos\varphi)/3r$

$$\omega^2 = 4g(1-\cos\varphi)/3r$$

动静法：惯性力向A简化



$$F_{In} = ma_{Cn} = mr\omega^2$$
$$= 4mg(1-\cos\varphi)/3$$

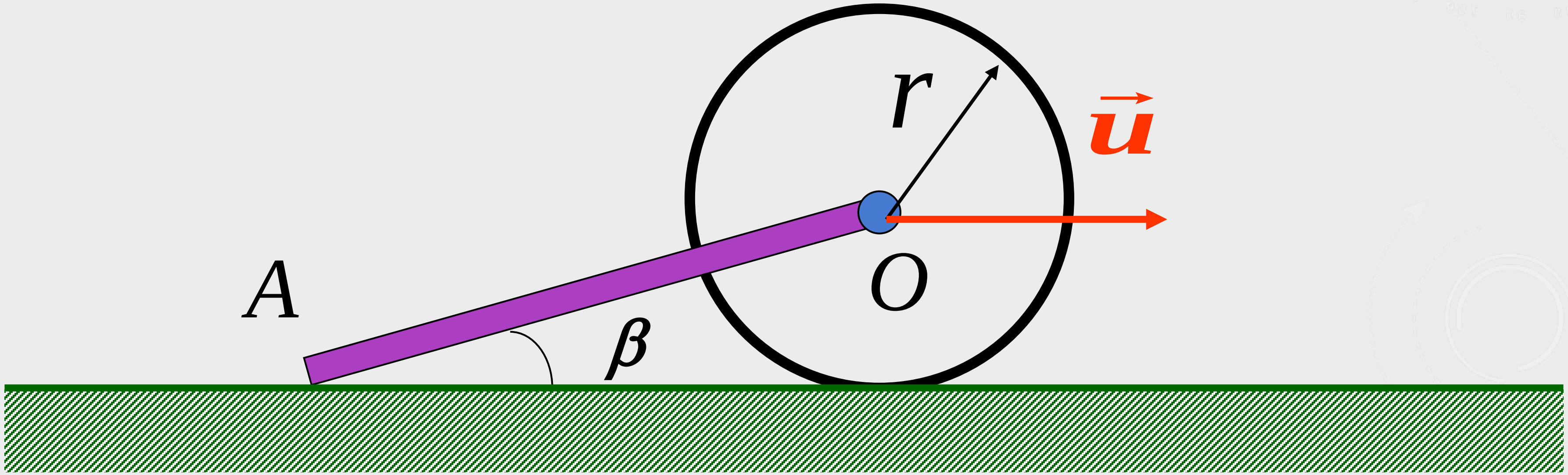
$$F_{It} = ma_{Ct} = mr\alpha \qquad M_I = J_A\alpha$$

$$\Sigma F_n = 0,$$

$$F_{NA} + F_{In} - mg\cos\varphi = 0$$

脱离时, F_{NA}= 0, φ **= arc cos (4/7)**

例： 均质圆盘和均质杆的质量都为m，圆盘半径为r，杆与水平面的夹角为β，与地面的滑动摩擦因数为 f，初始时圆盘O点的速度为u，在地面上纯滚动，求系统至停止移动的距离 s ，及运动时圆盘所受的摩擦力。

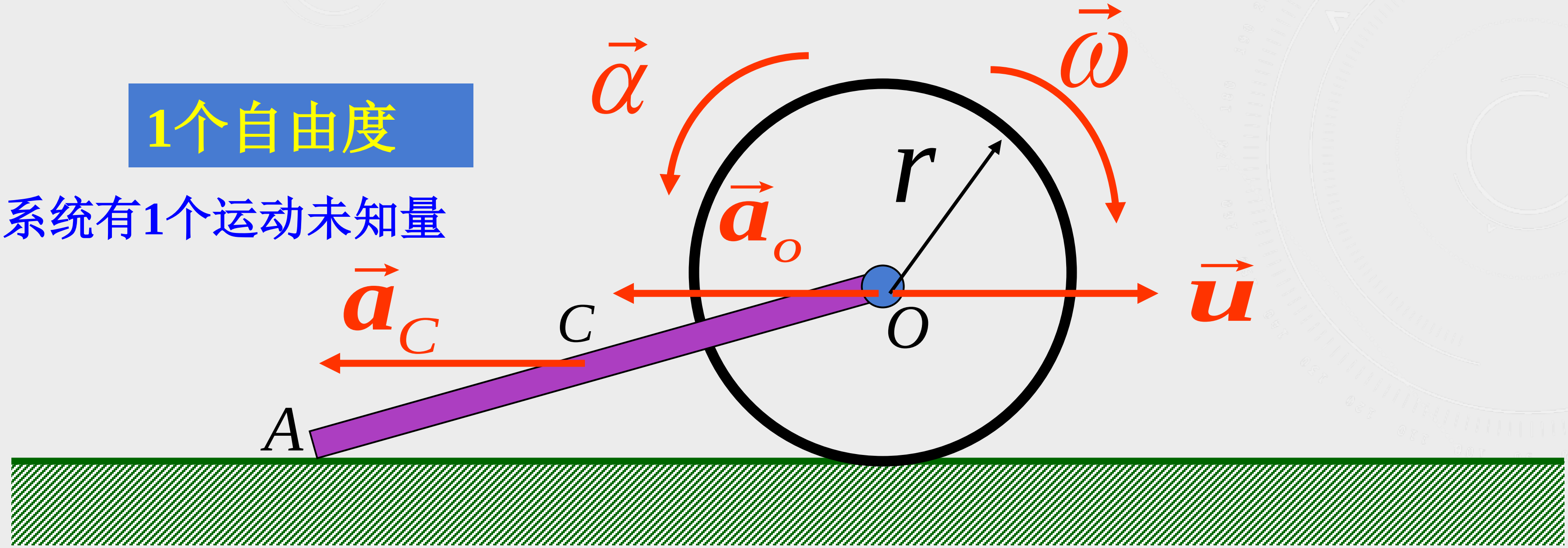


问题：1：系统有多少未知量？

2：用什么方法求解未知量？

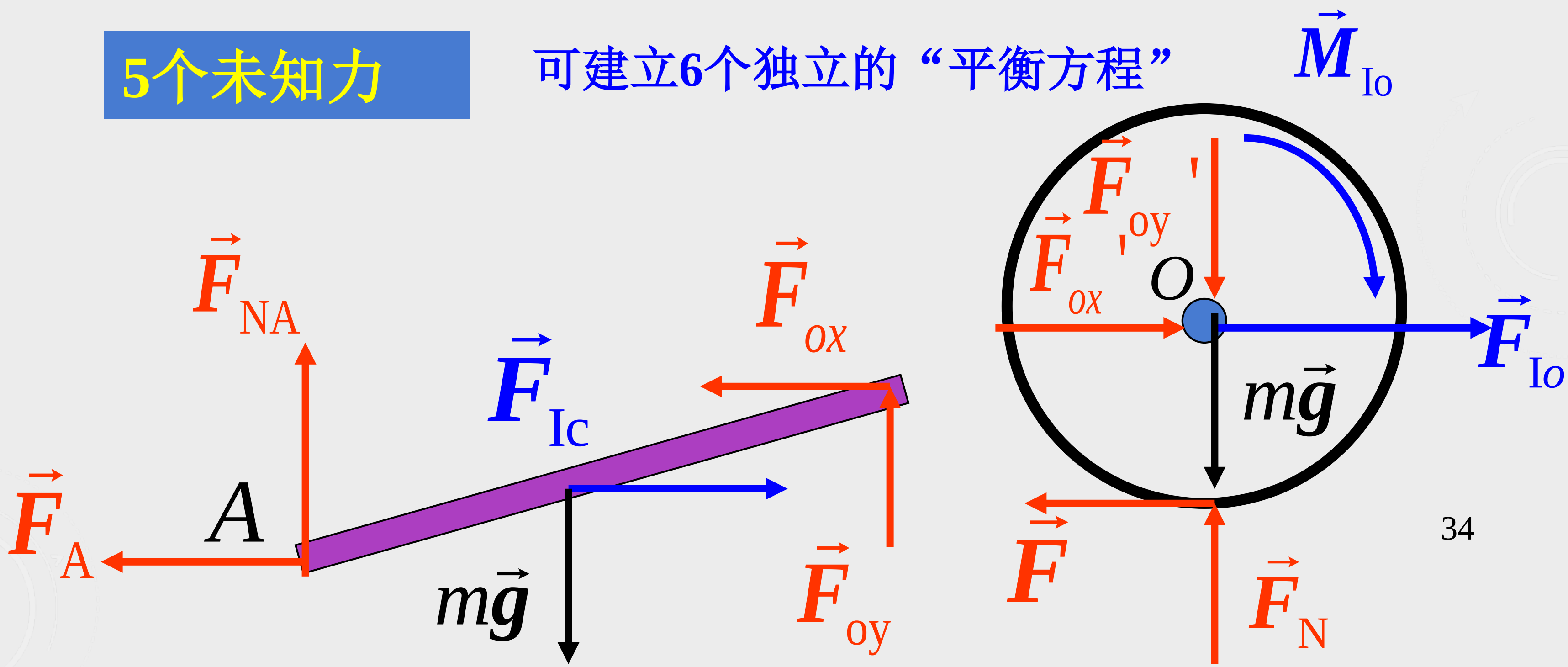
1个自由度

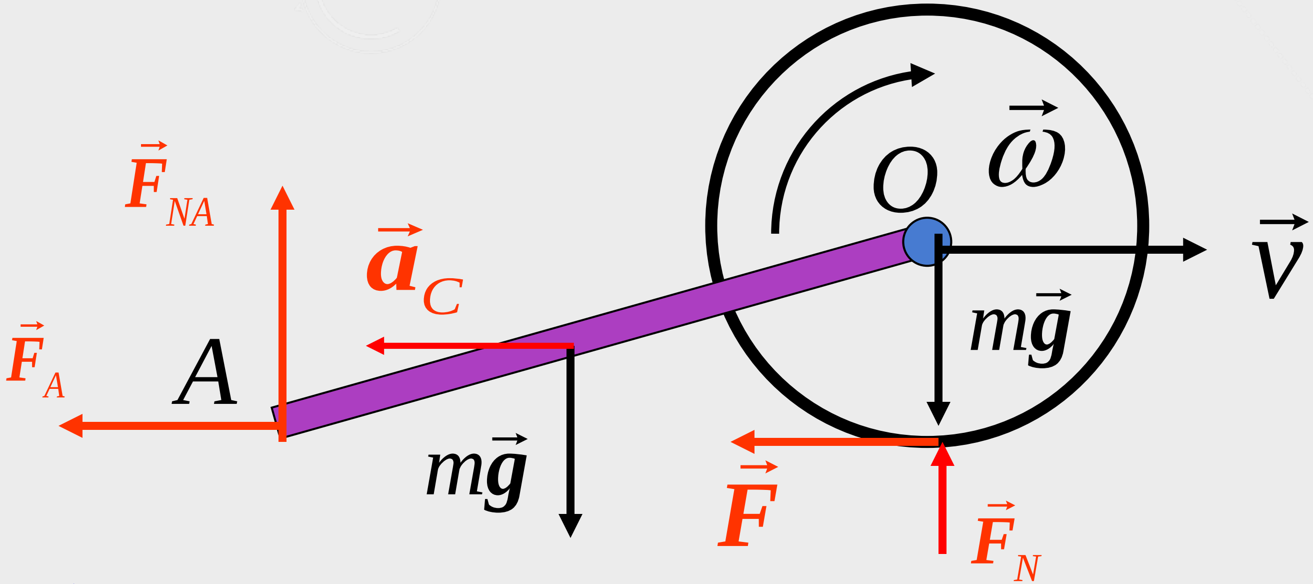
系统有1个运动未知量



5个未知力

可建立6个独立的“平衡方程”





$$\omega = \frac{v}{r}$$

[整体]

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\omega^2 = \frac{5}{4}mv^2 \qquad W = -F_A \cdot s$$

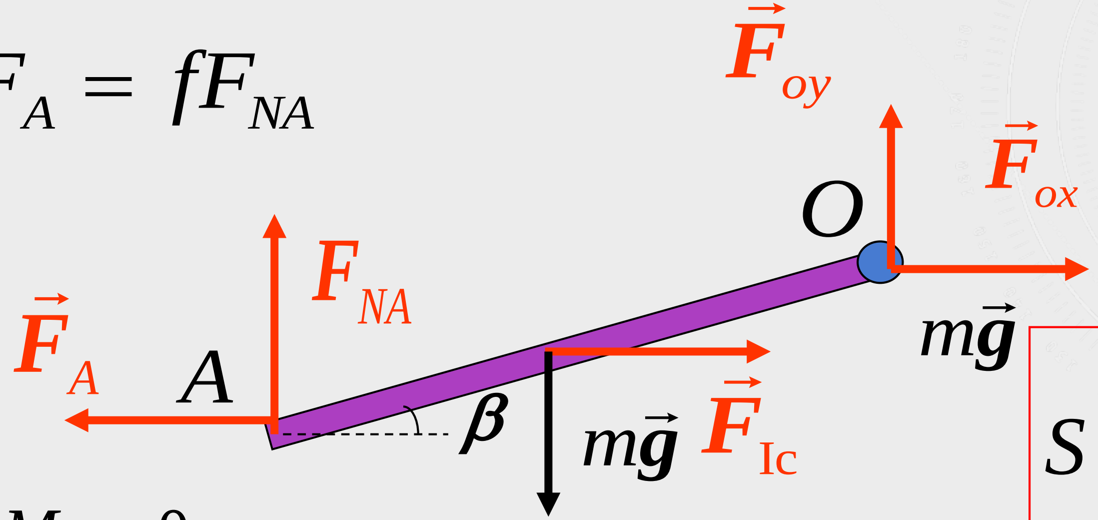
动能定理: $$\frac{5}{4}mv^2 - T_0 = -F_A \cdot s_A$$

对t求导数: $$-\frac{5}{2}mv \cdot a_C = -F_A \cdot v \Rightarrow \frac{5}{2}ma_C = F_A \qquad (1)$$

$$\frac{5}{2}ma_C = F_A \qquad (1)$$

研究OA杆

$$F_A = fF_{NA}$$



$$\boxed{S = \frac{u^2}{2a_C}}$$

应用动静法：$\sum M_o = 0$

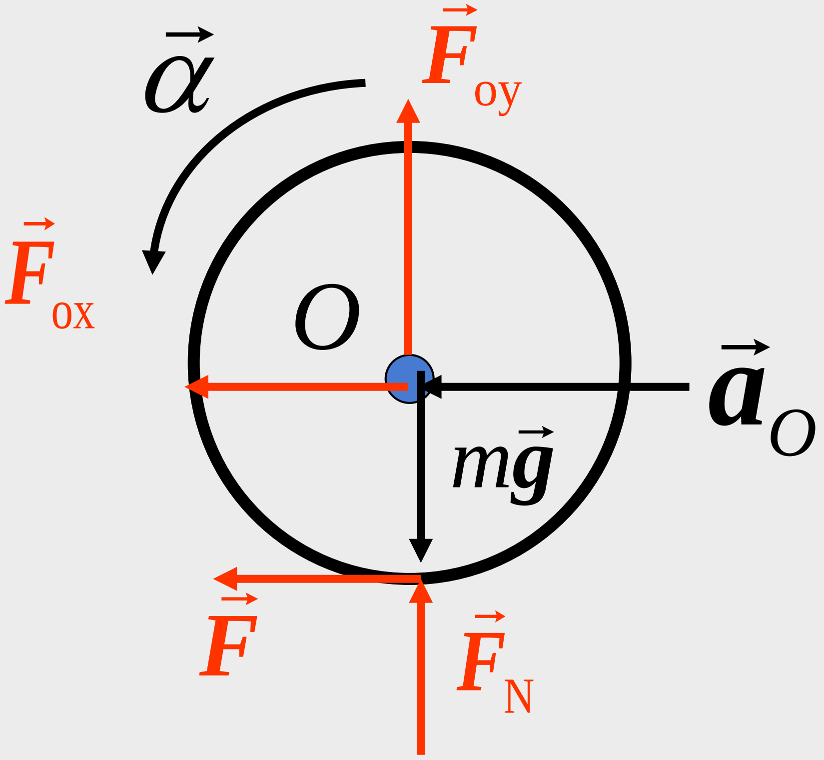
$$mg\frac{L}{2}\cos\boldsymbol{\beta} + F_{\text{Ic}}\frac{L}{2}\sin\boldsymbol{\beta} - F_A L\sin\boldsymbol{\beta} - F_{NA}L\cos\boldsymbol{\beta} = 0$$

$$F_A = f\frac{mg + \tan\beta F_{\text{Ic}}}{2(1+f\tan\beta)} = f\frac{mg + ma_C\tan\beta}{2(1+f\tan\beta)}$$

代入（1）式

$$\frac{5}{2}ma_C = F_A = \frac{mf(g + a_C\tan\boldsymbol{\beta})}{2(1+f\tan\boldsymbol{\beta})} \Rightarrow a_C = \frac{fg}{5+4f\tan\boldsymbol{\beta}}$$

[圆盘]



$$\alpha r = a_O$$

$$J_O\alpha = -Fr$$

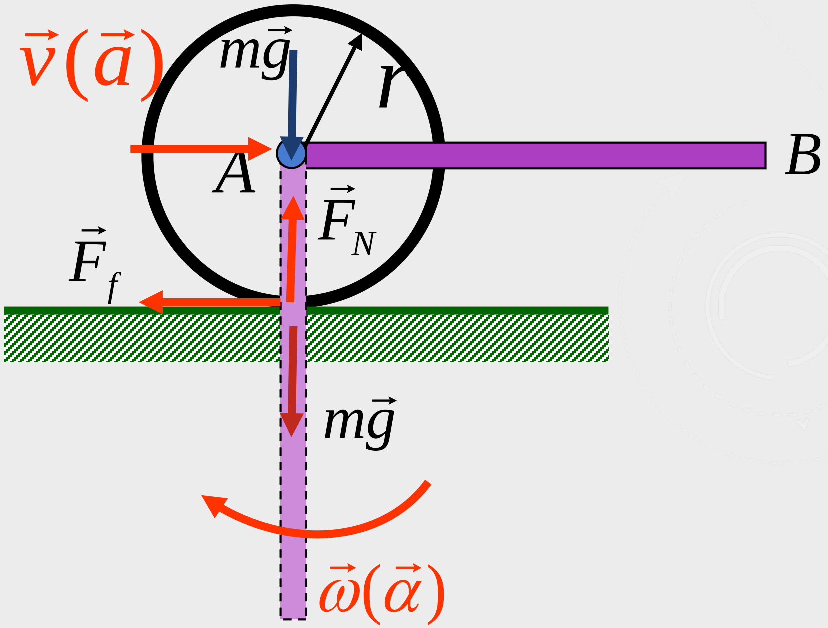
$$F = -\frac{1}{2} m a_C$$

$$a_C = \frac{fg}{5 + 4f\tan\beta} = a_O$$

例： 长为l、质量为m的匀质杆与半径为r、质量为m的匀质圆盘相连。圆盘置于粗糙的水平面上。试求杆AB从水平位置无初速释放后运动到铅垂位置时, (1)杆AB的角速度和圆心A的速度；(2)杆AB的角加速度和圆心A的加速度；(3)地面对圆盘的约束力。

两个自由度问题；
整体没有守恒形式可以用。

冲量定理？



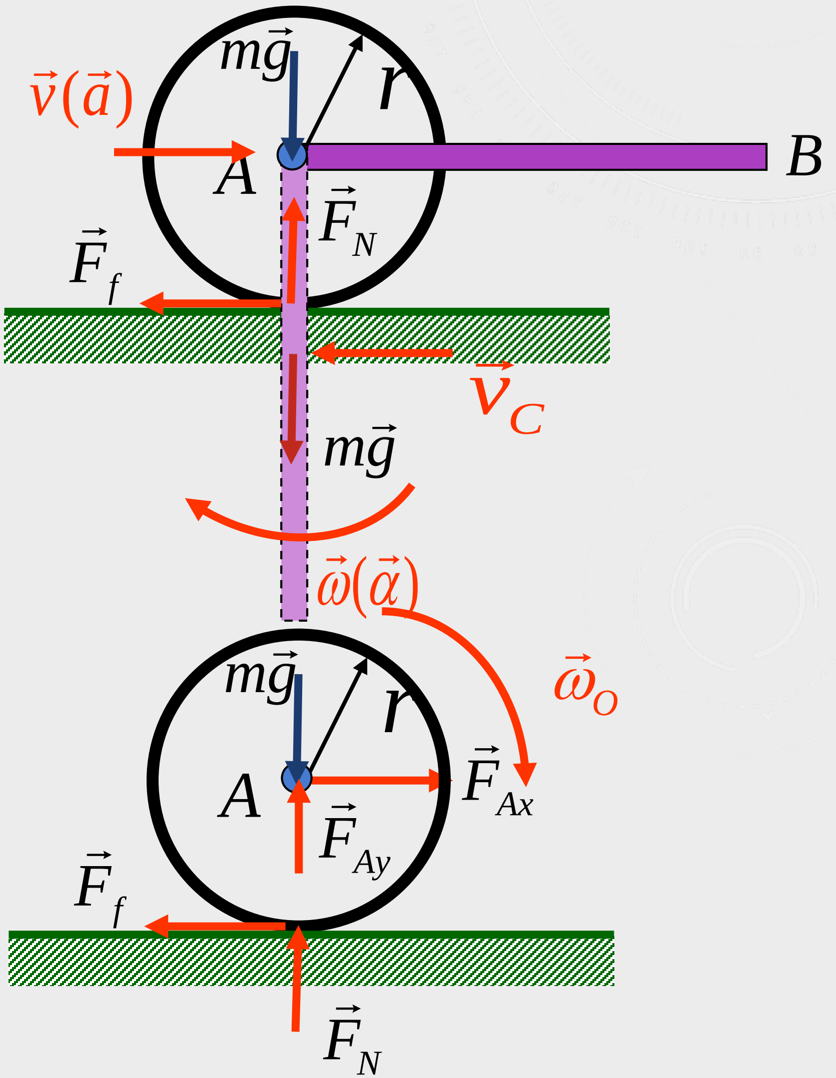
解：[整体]　　动能定理

$$T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)(\frac{v}{r})^2 + \frac{1}{2}mv_C{}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}mr^2)\omega^2$$

其中： $v_C = -v + \omega\frac{l}{2}$

代入得到： $T_2 = \frac{5}{4}mv^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega^2 - \frac{1}{2}ml\omega v$

则： $\frac{5}{4}mv^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega^2 - \frac{1}{2}ml\omega v = \frac{1}{2}mgl$



以1、2两个位置用冲量定理：

“x”　　$-mv + mv_C - 0 = \int_0^{t_1} F_f dt \qquad (1)$

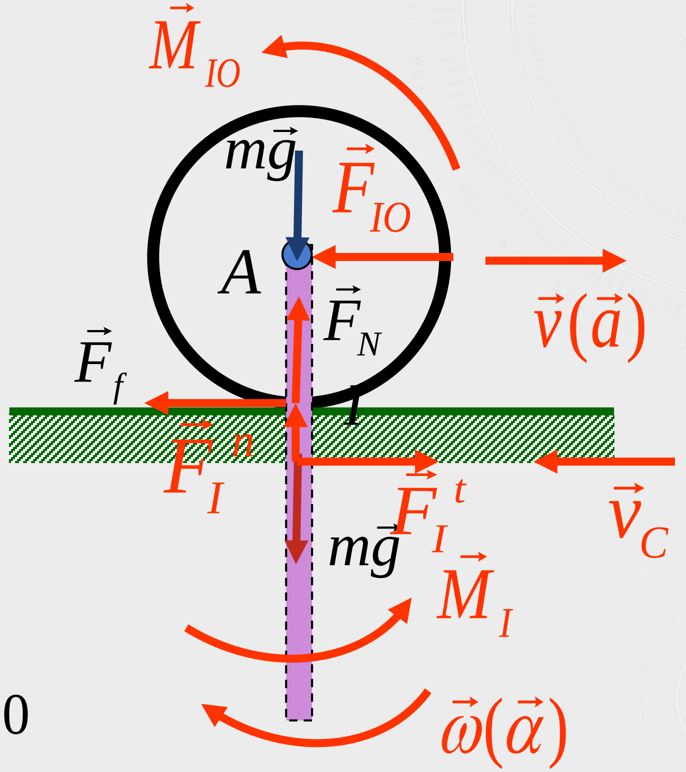
[圆盘]　对A点用冲量矩定理

$$J_A\omega_0 - 0 = r\int_0^{t_1} F_f dt \qquad (2)$$

由(1)(2)，且 $\omega_0 = \frac{v}{r}$ ⇒ $\boxed{v = \frac{1}{5}\omega l}$

动能定理 $\frac{5}{4}mv^2+\frac{1}{6}ml^2\omega^2-\frac{1}{2}ml\omega v=\frac{1}{2}mgl$

$$v=\frac{1}{5}\omega l$$



代入动能定理:

$$\frac{5}{4}m\frac{1}{25}\omega^2l^2+\frac{1}{6}ml^2\omega^2-\frac{1}{2}ml\omega\frac{1}{5}\omega l=\frac{1}{2}mgl$$

$\Rightarrow$ $\omega=\sqrt{\frac{30}{7}\frac{g}{l}}$ $\Rightarrow$ $v=\sqrt{\frac{6}{35}gl}$

[整体] 动静法

$$\sum M_I=0 \qquad F_I^t(\frac{l}{2}-r)+F_{IO}r+M_I+M_{IO}=0$$

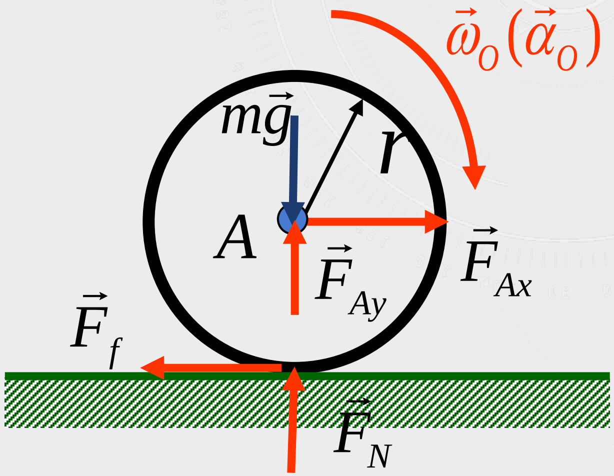
其中: $F_I^t=m(\frac{1}{2}\alpha l-a)$ $\quad F_{IO}=ma$ $\quad M_{IO}=\frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r}$ $\quad M_I=\frac{1}{12}ml^2\alpha$

代入: $(\frac{5}{2}r-\frac{1}{2}l)a+(\frac{1}{3}l^2-\frac{1}{2}lr)\alpha=0$

$$\sum M_I = 0 \qquad F_I^{\,t}\left(\frac{l}{2}-r\right)+F_{IO}r+M_I+M_{IO}=0$$

其中：$F_I^{\,t}=m\left(\frac{1}{2}\alpha l-a\right) \qquad F_{IO}=ma \qquad M_{IO}=\frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r} \qquad M_I=\frac{1}{12}ml^2\alpha$

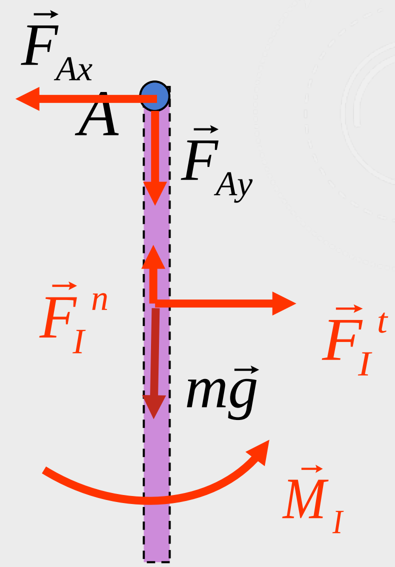
代入：$$\left(\frac{5}{2}r-\frac{1}{2}l\right)a+\left(\frac{1}{3}l^2-\frac{1}{2}lr\right)\alpha=0 \qquad (3)$$



[杆] $\sum M_A = 0 \qquad F_I^{\,t}\frac{l}{2}+M_I=0$

$$\Rightarrow \quad a-\frac{2}{3}\alpha l=0 \qquad (4)$$

由(3)(4): $a=\alpha=0$



[圆盘] $J_C\alpha_0=F_f r \quad \Rightarrow \quad F_f=0$

[整体] “y” $F_N-2mg=m\omega^2\frac{l}{2}$

$$\Rightarrow \quad F_N=\frac{29}{7}mg$$

总结:

（1） 动能定理求运动，动静法求反力；

（2） 正确施加惯性力

（3） 上述的解法不唯一的，无论是求运动还是求反力，都还可以选择其它动力学定理或方程。