

第四章 导热问题的数值解法

——复杂导热问题的近似解法

热传导方程求解的困难

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

- 几何条件复杂的问题
- 边界条件复杂的问题
- 热物性随位置变化的问题
- 热物性随温度变化的问题
- 移动边界的问题



第四章 导热问题的数值解法

——复杂导热问题的近似解法

内容简介:

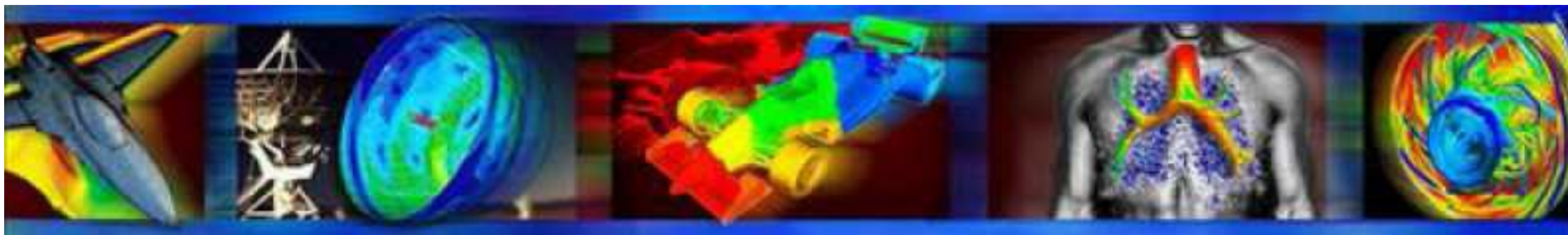
本章介绍了数值求解物理问题的基本思想，以**二维稳态导热问题**和**一维非稳态导热**为例，介绍了采用有限差分法数值求解导热问题的基本过程。

学习重点:

- 掌握从能量守恒定律出发建立离散方程的方法
- 代数方程的迭代求解方法

数值解法的应用

数值解法是目前各行各业解决工程问题和进行科学研究的一种重要方法。如：航空航天、冶金、电力、电子、化工、建筑、能源动力、机械等。



§ 4-1 数值求解的基本思想

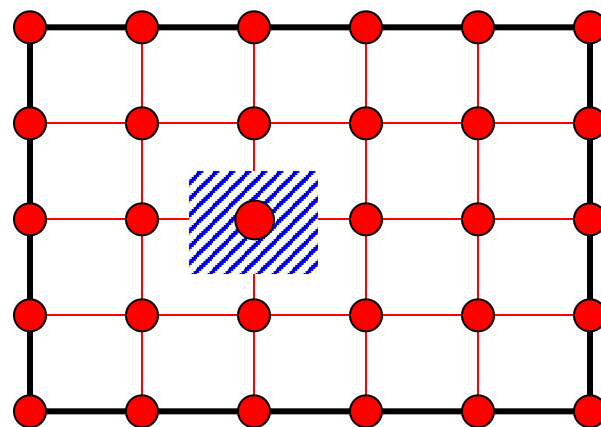
一、基本思想

分析解：对导热微分方程在定解条件下的积分求解

数值解：用求解区域上空间、时间坐标系中的离散点的温度分布代替连续的温度场，用大量的代数方程代替微分方程

离散 ← 连续

代数方程 ← 微分方程



$$t = f(x, y, z, \tau)$$

分析解和数值解的比较

①分析解

- (1) 能获得研究问题的**精确解**，可以为实验和数值计算提供比较依据
- (2) 局限性很大，对**复杂问题**无法求解
- (3) 分析解具有普遍性，各种情况的影响清晰可见

②数值解

- (1) 近似解
- (2) 弥补了分析法的缺点，适应性强，特别对于复杂问题更显其优越性，原则上可以求解一切导热问题。
2D, 3D, 复杂几何形状, 复杂BC, 物性不均匀等
- (3) 与实验法相比成本低

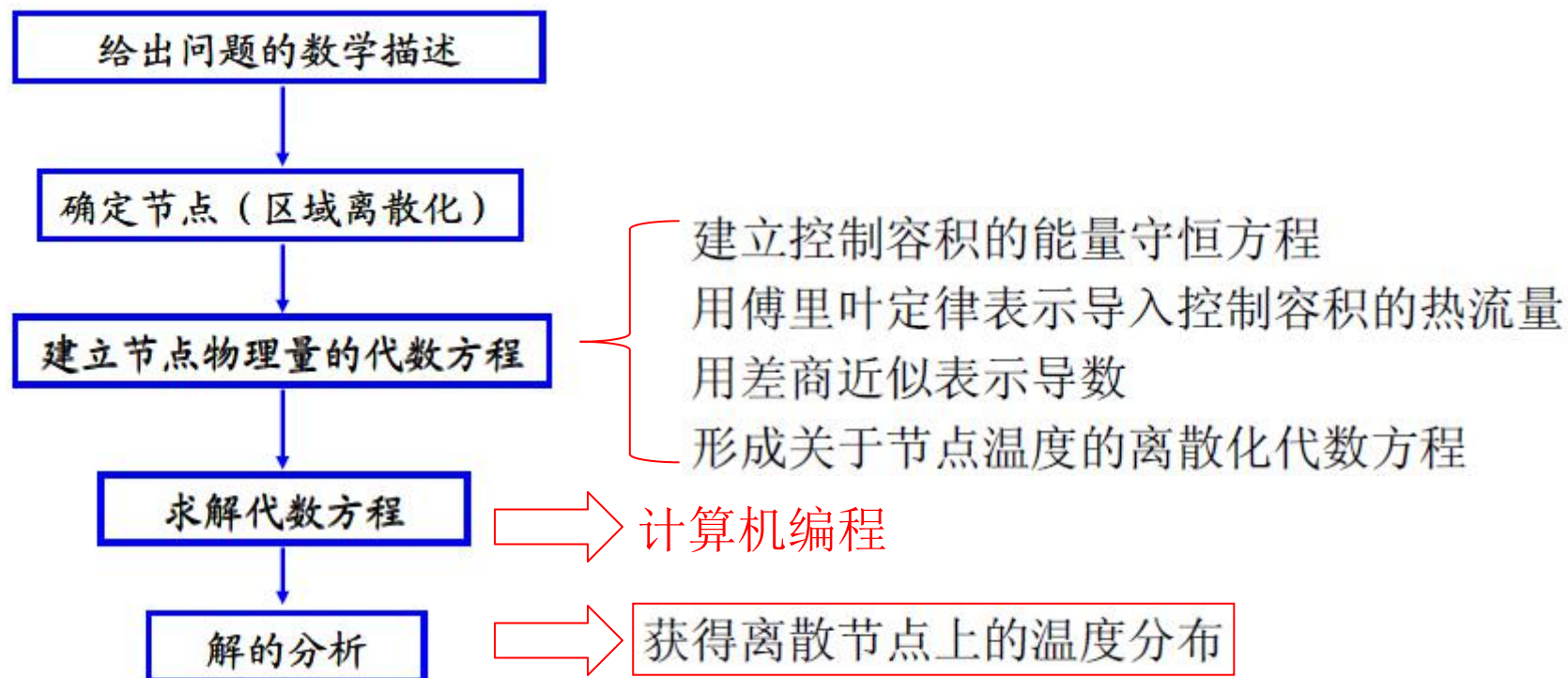
数值求解基本思路

- 连续的温度场
- ↓
- 有限的离散值
- ↓
- 建立这些值的代数方程
- ↓
- 求解
- ↓
- 离散点上被求物理量的数值

数值解的定义： 离散点上被求物理量的值的集合，
称为该物理量的数值解

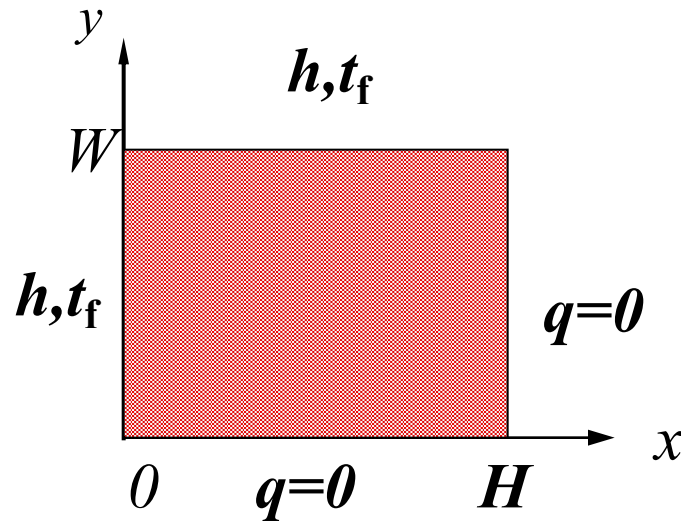
二、基本步骤

数值解法的基本步骤



1. 给出问题的数学描述

物理问题：2D, 矩形域, 稳态, 无内热源, 常物性的导热问题, IIBC & IIIBC



数学描述

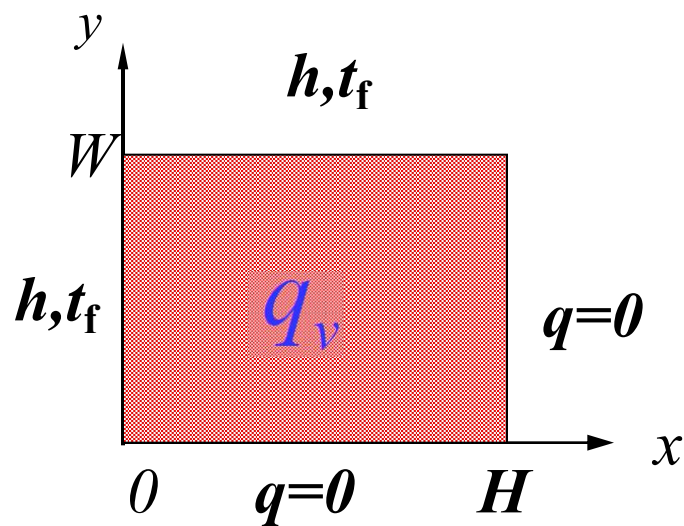
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

$$x = 0 \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial x} = h(t - t_f)$$

$$x = H \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

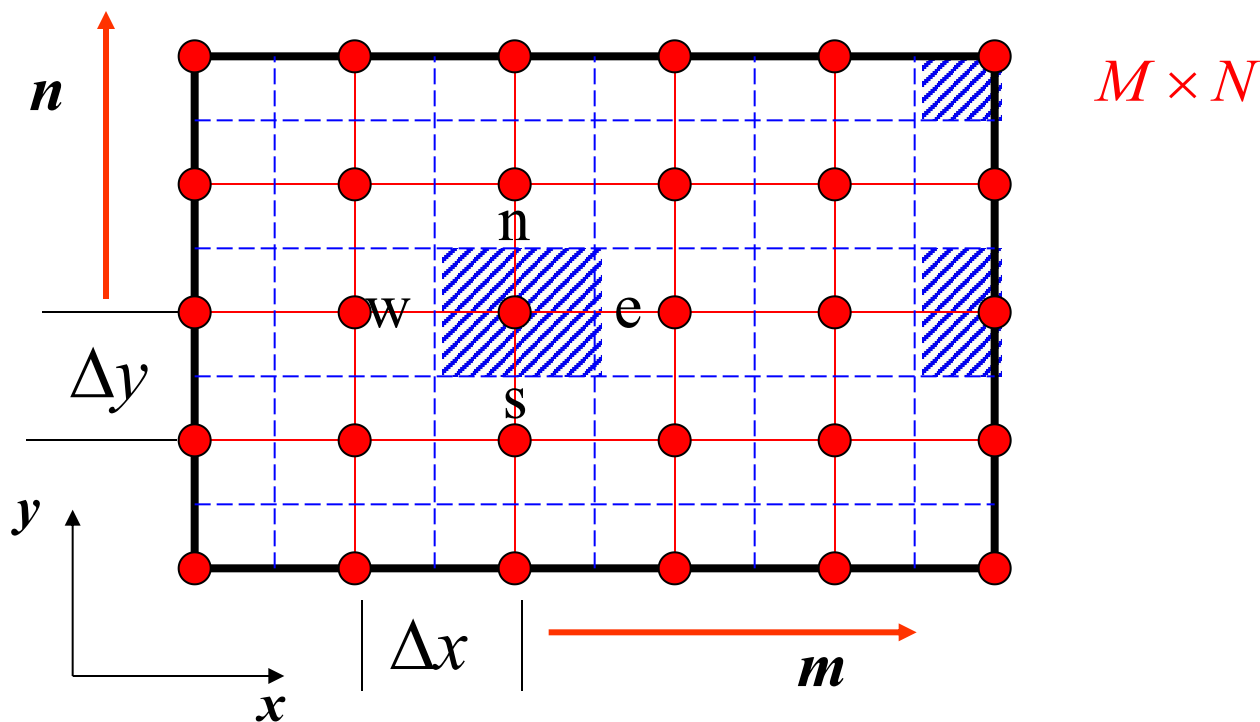
$$y = 0 \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

$$y = W \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} = h(t - t_f)$$



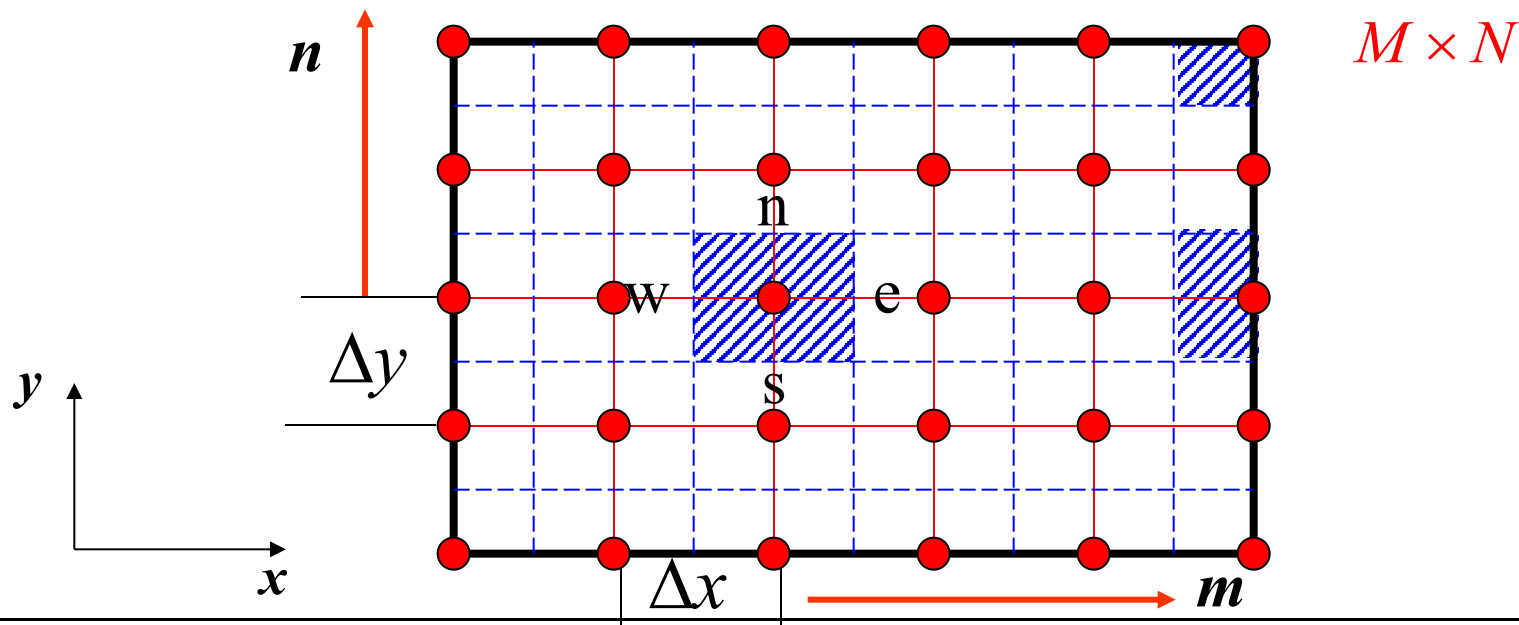
2. 离散化（区域和时间的离散）

- 将求解区域按照一定规则划分为许多小区域，这个过程称作区域离散。每个小的区域（**控制容积, CV**）的物理量值由一个点——**节点**来表示。
- 若是非稳态问题，还需将**时间**离散化



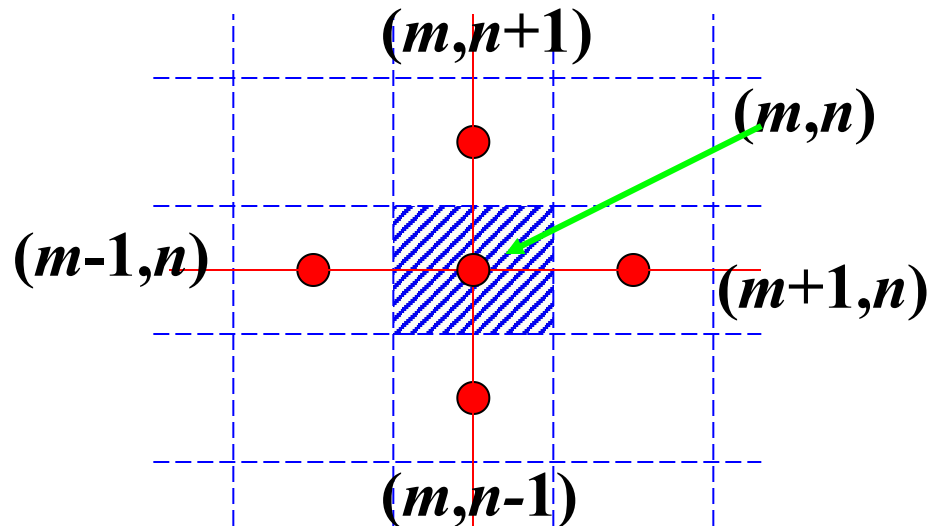
离散化方法中的常用术语

- **离散化** (Discretization)——把求解的区域划分成若干互不重叠的子区域;
- **节点** (Nodes)——用来表示子区域状态的特征点, 如果节点处于区域的边界则成为边界节点, 否则成为内部节点;
- **网格** (Grids)——节点间按照一定的规则分割所形成的几何图形;
- **控制容积** (微元体) ——包围一个节点的子区域



3. 建立节点物理量的代数方程(重要)

每一个节点都与它相邻的节点存在一定的关系，通过相应的物理定律，可建立它们之间的关系式（代数方程式），此关系式又称作节点的离散方程。



Example:

$$t_{m,n} = \frac{1}{4} (t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1})$$

步骤:

建立控制容积的能量守恒方程

用傅里叶定律表示导入控制容积的热流量

用差商近似表示导数

形成关于节点温度的离散化代数方程

4. 求解代数方程组

把所有节点的离散方程联立起来，会组成一个封闭的方程组，对代数方程组的求解可采用直接解法或迭代求解，更多的是采用迭代解法。

$$a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n = b_1$$

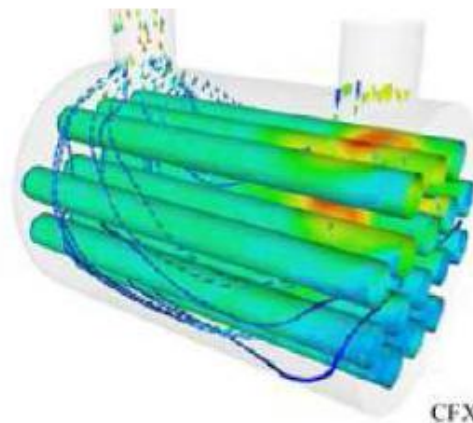
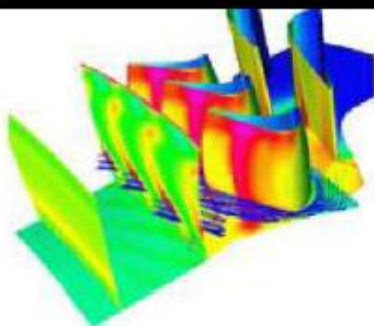
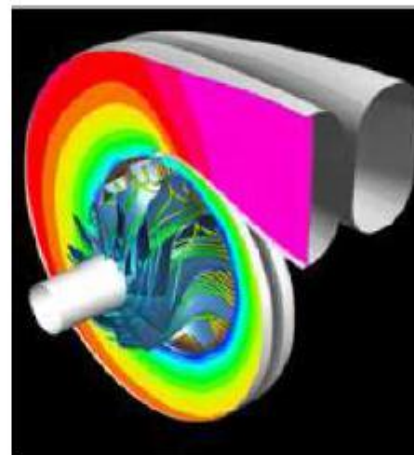
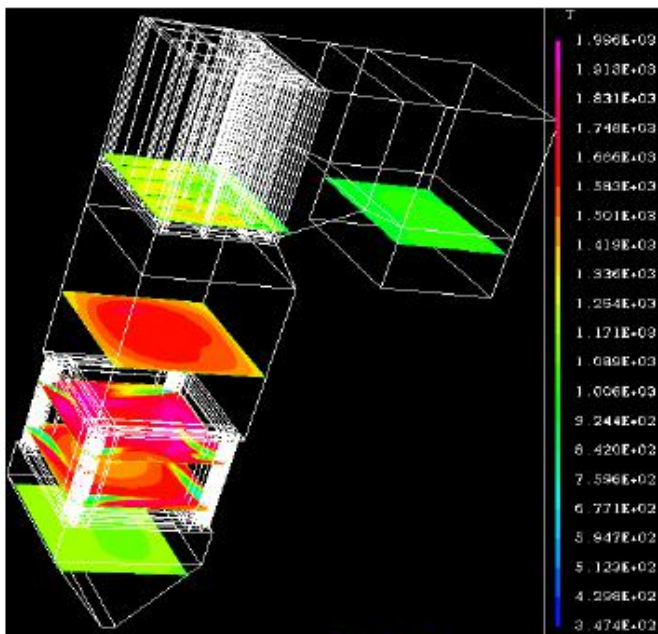
$$a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nn}t_n = b_n$$

5. 进行解的分析

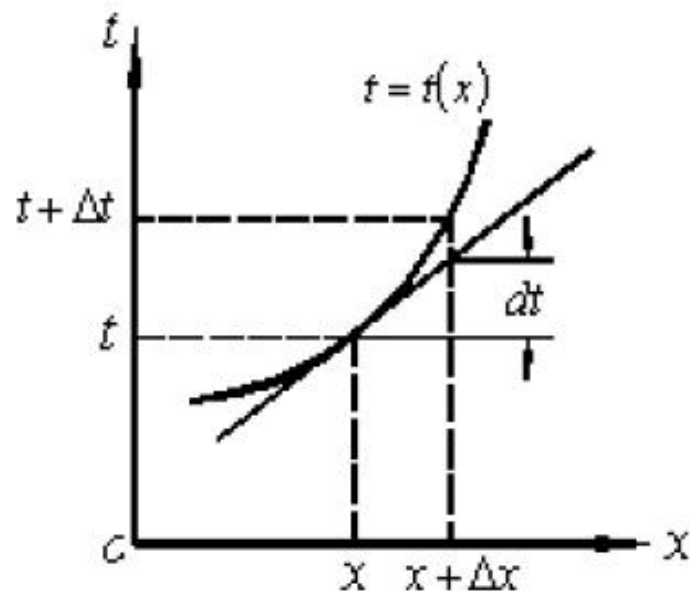
对解的结果（温度分布）进行进一步的分析，获得定性或定量上的一些新的结论。



§ 4-2 导数的有限差分近似表达式

有限差分的数学基础是用差商代替微商，即用有限差分代替导数。

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}\end{aligned}$$



利用泰勒级数可以得到更多形式的微分的差商表示，
也可以看到其误差。

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots$$

改写，可得

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} - \dots \\ &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

式中 $O(\Delta x)$ 是用差商代替微商的误差。

此种格式被称为向前差分

同样:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots$$

改写, 可得

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} - \dots \\ &= \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

此种格式被称为向后差分



如果将下面两式相减，

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots$$

可得一阶导数的中心差分表达式

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

如果将下面两式相加，

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots$$

可得二阶导数的中心差分表达式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

4-3 稳态导数的数值分析

下面以一个有热源的二维稳态导热问题为例。

一、给出问题的数学描述

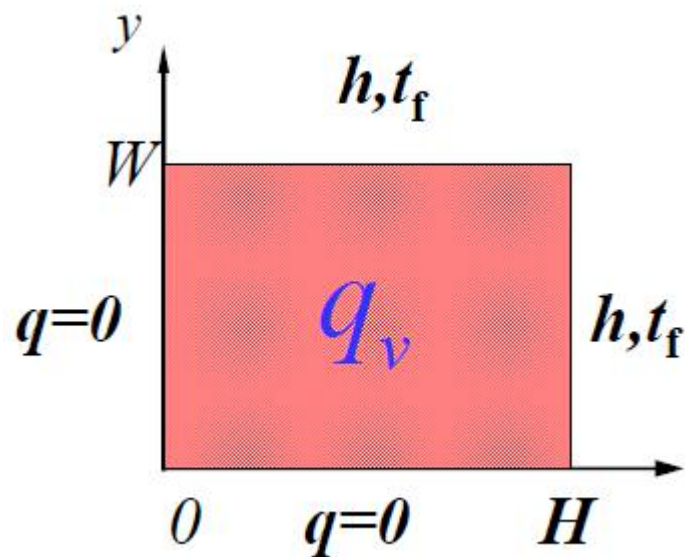
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

$$x = 0 \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial x} = h(t - t_f)$$

$$x = H \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

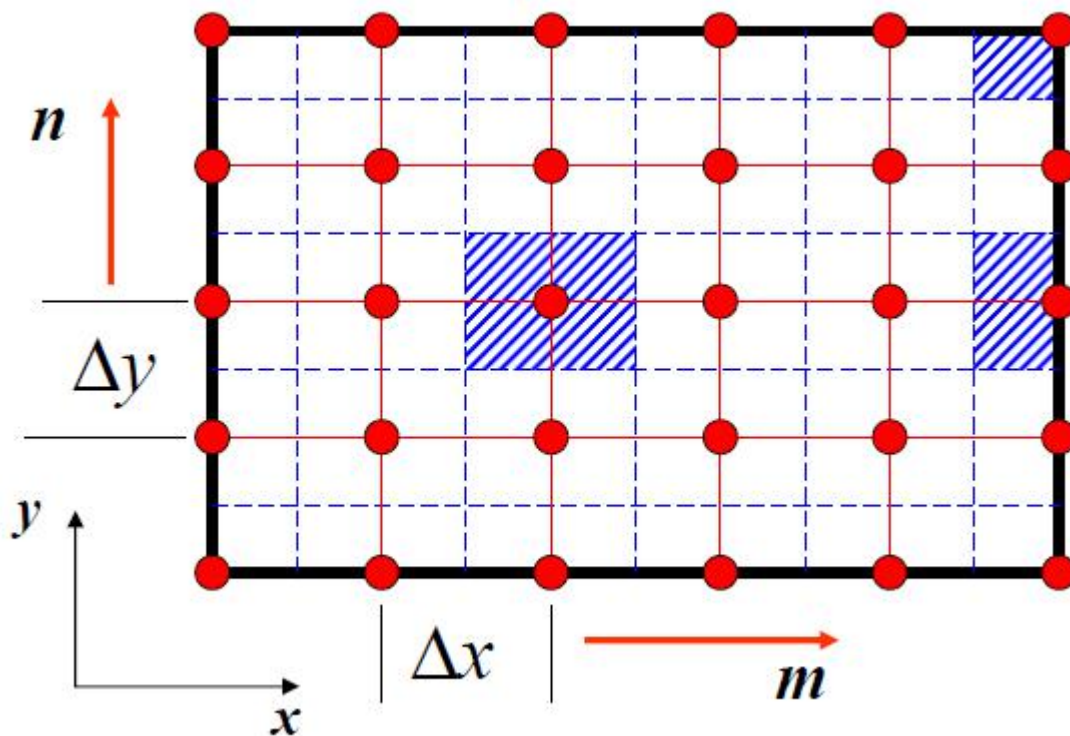
$$y = 0 \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

$$y = W \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} = h(t - t_f)$$



二、区域的离散

将二维矩形区域按照下图的格式进行离散化，相邻两个节点间的距离称为**步长**，记为 Δx 、 Δy 。区域内部的节点称为**内节点**，边界上的节点称为**外节点**。



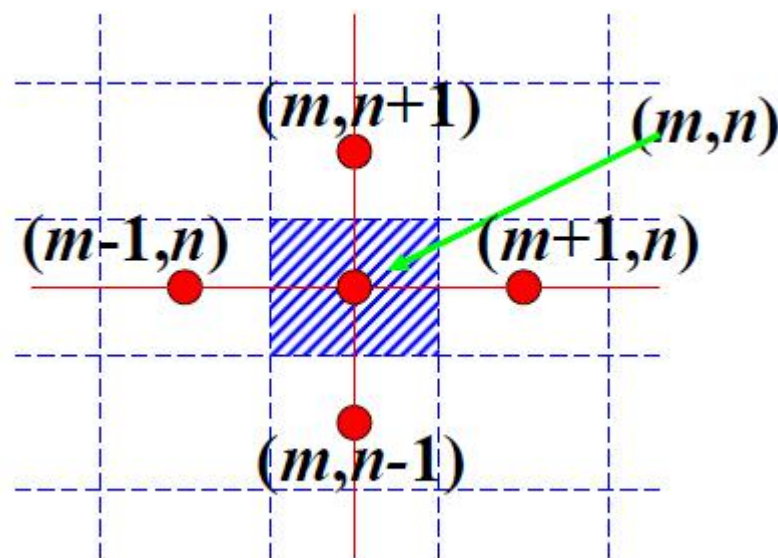
三、建立节点的离散方程

1. 内部节点

(1) 微商的差分表示法

如对于图中的节点 (m, n) ,
导热微分方程表示为:

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n} + \left. \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right|_{m,n} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$



$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n} + \left. \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right|_{m,n} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

回顾Taylor展开法：

假定满足连续性条件，都可作Taylor展开

$$t_{m+1,n} = t_{m,n} + \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m,n} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2!} + \left. \frac{\partial^3 t}{\partial x^3} \right|_{m,n} \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots o(\Delta x^4)$$

$$t_{m-1,n} = t_{m,n} - \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m,n} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2!} - \left. \frac{\partial^3 t}{\partial x^3} \right|_{m,n} \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots o(\Delta x^4)$$

两式左右两边分别相加，得到二阶导数的中心差分表

达式
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

可得

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right)_{m,n} \approx \frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)_{m,n} \approx \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2}$$

截断误差:

未明确写出的级数余项中的 Δx 的最低阶数为2

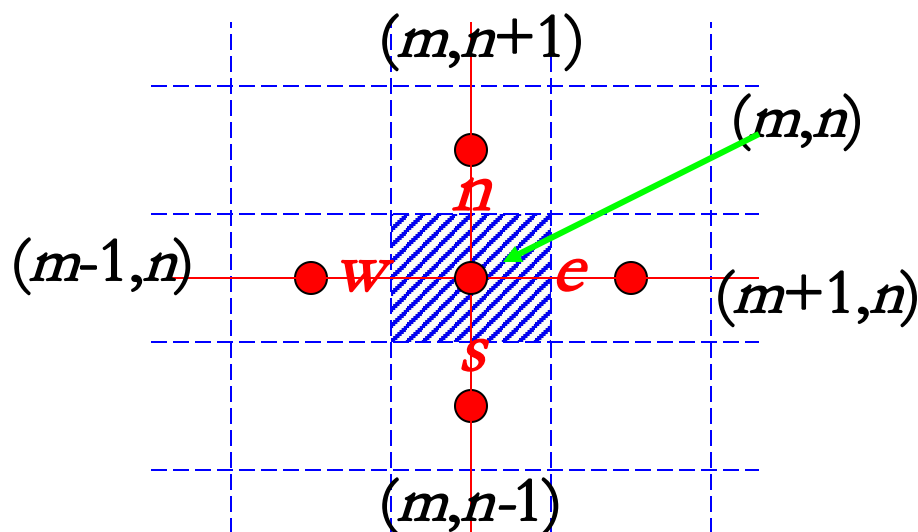
代入控制方程:
$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n} + \left. \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right|_{m,n} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

可得
$$\frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

(2) 热平衡法 (重要)

1) 基本思想：对每个节点所代表的控制体列能量守恒方程式，从而得出该点与其它节点的关系式

2) 依据定律：能量守恒定律；Fourier定律



3) 具体推导

节点 (m,n) 控制体能量守恒方程:

$$\Phi_n + \Phi_s + \Phi_e + \Phi_w + q_v dx dy = 0$$

规定热量进入为正 $Q = \frac{\Delta t}{\delta / (\lambda A)}$

$$\Phi_w = \lambda(1 \cdot \Delta y) \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

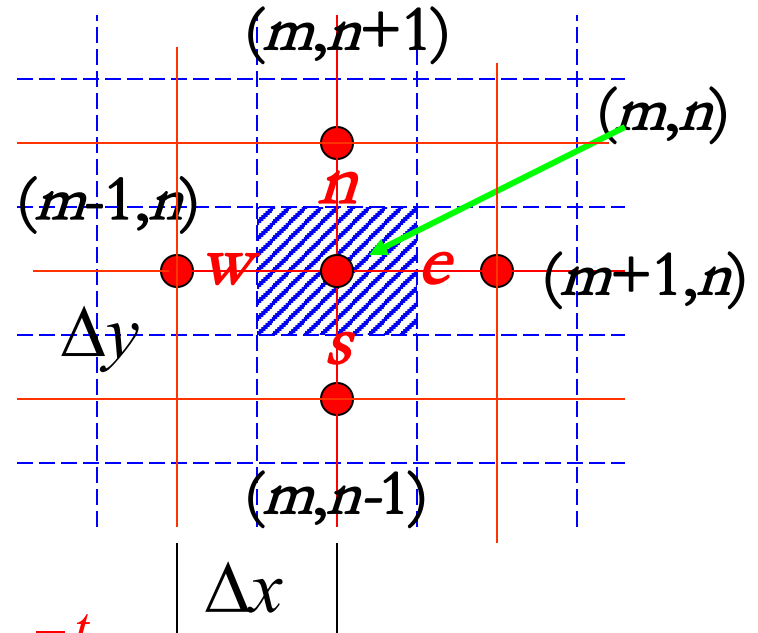
$$\Phi_e = \lambda(1 \cdot \Delta y) \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_s = \lambda(1 \cdot \Delta x) \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\Phi_n = \lambda(1 \cdot \Delta x) \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

代入能量守恒方程式，并整理得

$$\frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$



2. 边界节点

(1). 方法：热平衡法

原因：

第一类边界：方程封闭

第二、三类边界：边界相邻内节点方程建立时，
引入边界未知温度，方程不封闭

边界条件表示（导入为正）：

第二、三类边界： $q_w = \text{const}$ $q_w = h(t_f - t_{m,n})$

(2) 建立IIBC & IIIBC边界节点离散方程

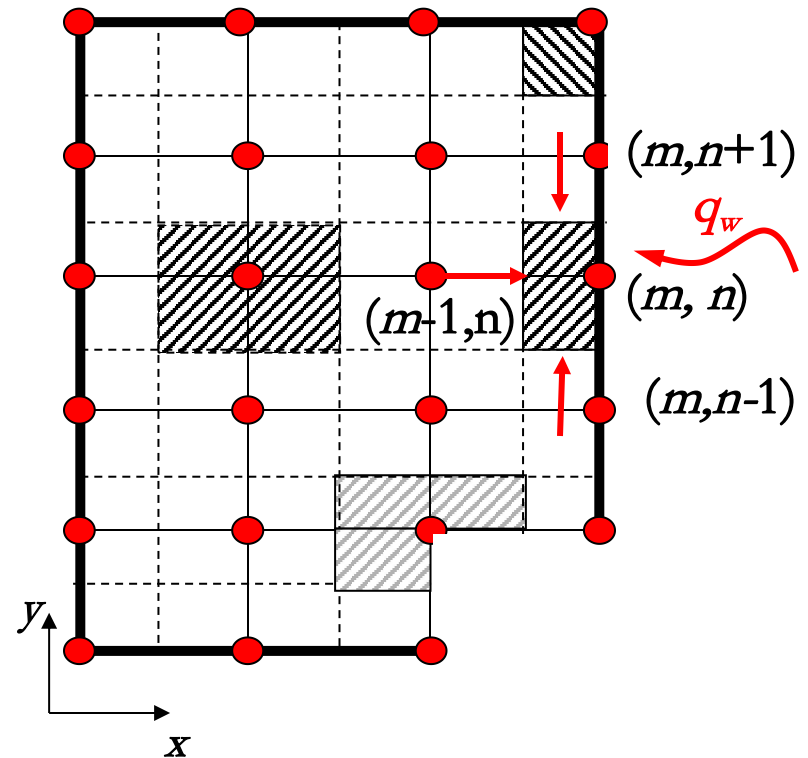
为不失一般性，假设物体内部有内热源， Δx 及 Δy 均匀

1. 平直边界

$$\lambda \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} \Delta y + \lambda \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} + \lambda \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x \Delta y}{2} \dot{\Phi}_{m,n} + \Delta y q_w = 0$$

$$\Delta x = \Delta y \quad t_{m,n} = ?$$

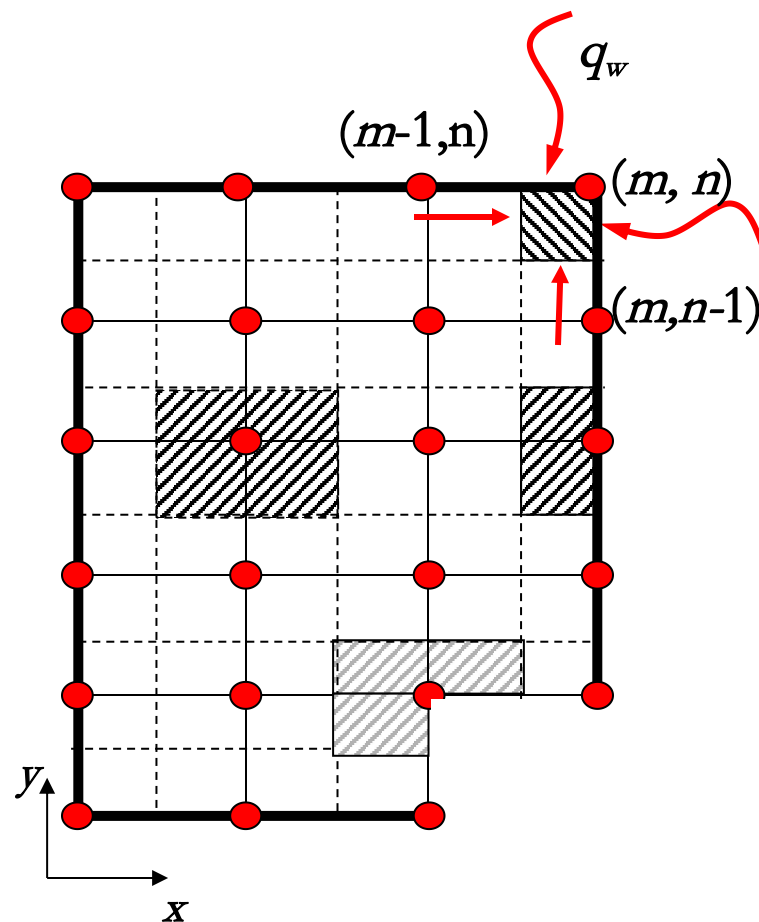
$$\text{IIIBC} \quad q_w = h \cdot (t_f - t_{m,n})$$



2. 外角点

$$\lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{2} q_w + \frac{\Delta x}{2} q_w + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2} = 0$$

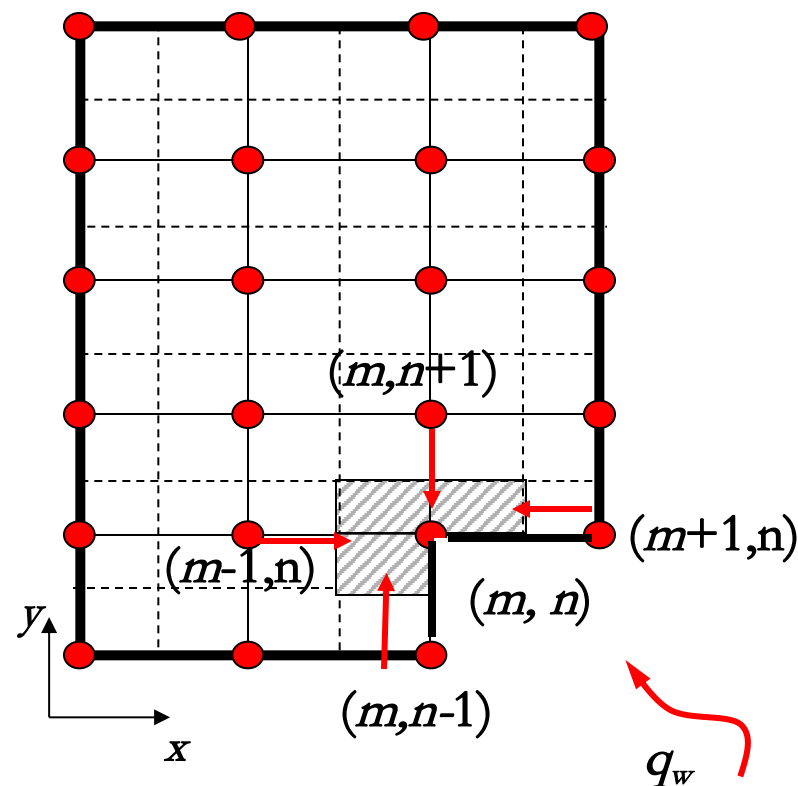
IIIBC $q_w = h \cdot (t_f - t_{m,n})$



3. 内角点

$$\begin{aligned} & \lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \left(\lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{2} q_w \right) \\ & + \lambda \Delta x \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \left(\lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2} q_w \right) \\ & + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{3\Delta x \Delta y}{4} = 0 \end{aligned}$$

IIIBC $q_w = h \cdot (t_f - t_{m,n})$



四、代数方程组求解

写出所有内节点和边界节点的温度差分方程
 n 个未知节点温度, n 个代数方程式:

$$t_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n + b_1$$

$$t_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n + b_2$$

.....

$$t_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nn}t_n + b_n$$

代数方程组的求解方法: 直接解法、迭代解法

1. 直接解法

① Cramer法则

$$c_1 = a_1 x + b_1 y$$

$$c_2 = a_2 x + b_2 y$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{array} \right.$$

求解n阶线性方程组，
需计算n+1个行列式，

每个行列式是n! 个乘积
的和，

每个乘积是n个数相乘，需要做n-1次乘法，

共需乘法次数(n+1)n!(n-1)，

如果取n=20，N=9.7×10²⁰，

1亿次乘法/s的计算机，需计算30.8万年

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} \\ = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

② Gauss消元法

共需乘法次数 $n^3/3+n^2-n/3$,
如果取 $n=20$, $N=3060$

适用变量个数小于50

直接解法缺点：所需内存较大,方程数目多时不便、
不适用于非线性问题。

2.迭代法 (近似解)

假设初场，不断更新，收敛

①Jacobi迭代，迭代代入值总为上轮得到的值

②Gauss-Seidel迭代，将本轮得到的值也代入，计算机内存更省

线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n &= b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nn}t_n &= b_n \end{aligned} \right\}$$

任一方程改写为

$$t_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}t_j \right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

例如：根据第 k 次迭代的数值 $t_1^{(k)}$ 、 $t_2^{(k)} \dots t_n^{(k)}$

可以求得节点温度：

$$t_1^{(k+1)} = a_{11}t_1^{(k)} + a_{12}t_2^{(k)} + \dots + a_{1n}t_n^{(k)} + b_1^{(k)}$$

在计算后面的节点温度时应按下式（采用最新值）

Gauss-Seidel迭代

$$t_2^{(k+1)} = a_{21}t_1^{(k+1)} + a_{22}t_2^{(k)} + \dots + a_{2n}t_n^{(k)} + b_2^{(k)}$$

$$t_3^{(k+1)} = a_{31}t_1^{(k+1)} + a_{32}t_2^{(k+1)} + \dots + a_{3n}t_n^{(k)} + b_3^{(k)}$$

.....

$$t_n^{(k+1)} = a_{n1}t_1^{(k+1)} + a_{n2}t_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn-1}t_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}t_n^{(k)} + b_n^{(k)}$$

③迭代收敛

$$\left| t_{m,n}^{(k+1)} - t_{m,n}^{(k)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{是否合理?}$$

$$\left| \frac{t_{m,n}^{(k+1)} - t_{m,n}^{(k)}}{t_{m,n}^{(k)}} \right| \leq \varepsilon \quad \xrightarrow{\text{分母可能为零}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{分母加小量, 如 } 10^{-20} \\ \left| \frac{t_{m,n}^{(k+1)} - t_{m,n}^{(k)}}{t_{m,n}^{(k)}} \right| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

$\varepsilon \approx 10^{-3} - 10^{-6}$

④主对角占优原则

迭代公式的选择应使每一个迭代变量的系数总是大于或等于该式中其他变量系数绝对值的代数和，此时，用迭代法求解代数方程，一定收敛

用每个方程采用导出改方程的中心节点的温度作为迭代变量，符合对角占优原则。

计算例题

		200				
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)			
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)			
100						
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	300		
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)			
		200				

迭代公式

$$t_{2,2}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (t_{3,2}^{(n)} + t_{1,2}^{(n)} + t_{2,3}^{(n)} + t_{2,1}^{(n)})$$

$$t_{3,2}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (t_{4,2}^{(n)} + t_{2,2}^{(n+1)} + t_{3,3}^{(n)} + t_{3,1}^{(n)})$$

$$t_{2,3}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (t_{3,3}^{(n)} + t_{1,3}^{(n)} + t_{2,4}^{(n)} + t_{2,2}^{(n)})$$

$$t_{3,3}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (t_{4,3}^{(n)} + t_{2,3}^{(n+1)} + t_{3,4}^{(n)} + t_{3,2}^{(n)})$$

§ 4-3 一维非稳态导热问题的数值求解

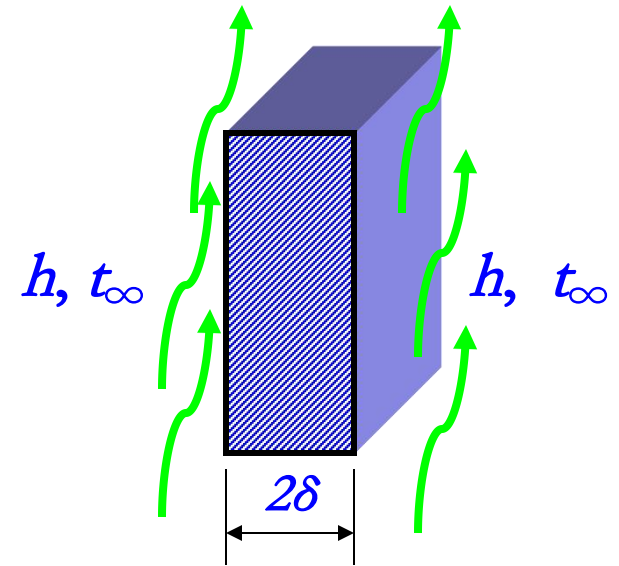
在非稳态导热问题中，不但需要对空间区域进行离散，还需要对时间变量进行离散。

接下来以一个一维非稳态导热问题为例，重点介绍对非稳态项的离散方法，以及不同离散方法对计算带来的影响等。

一、物理问题和数学描述

厚度 2δ 的无限大平壁， λ 、 a 为已知常数， $\tau=0$ 时温度为 t_0 ，突然将其放置于两侧温度为 t_∞ 并保持不变的流体中，两侧表面与流体之间的表面传热系数为 h 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \quad t = t_0 \\ x = 0, \quad \partial t / \partial x = 0 \\ x = \delta, \quad -\lambda \partial t / \partial x = h(t|_{\delta} - t_\infty) \end{array} \right.$$



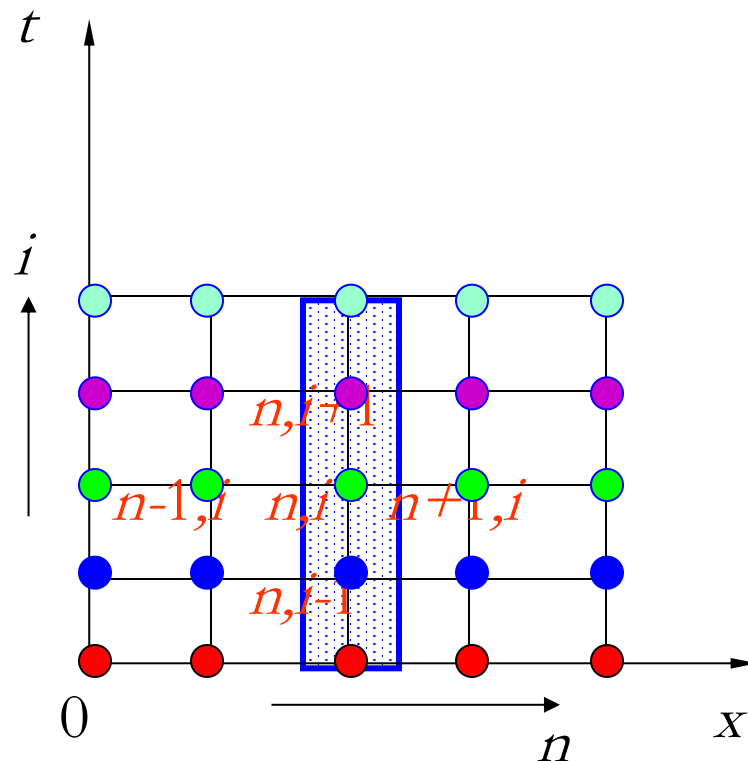
二、离散方程的建立

1. 热平衡法

① 内节点

对于节点 n 在 i 时刻的所代表的控制容积建立热平衡关系。

从左右两侧导入的热量等于单位时间容积的内能增量。



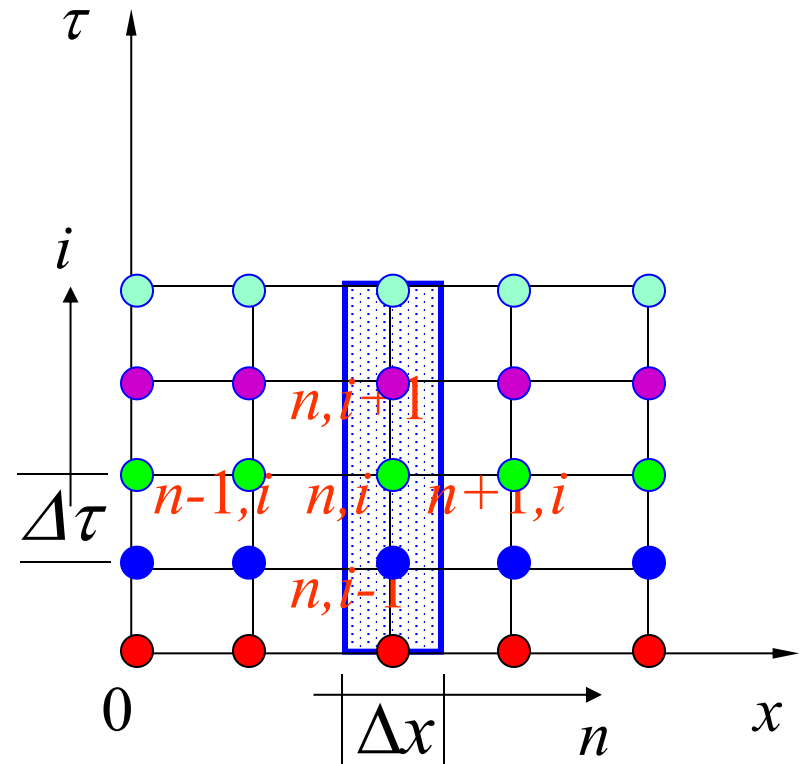
$$\Phi_w = \lambda \cdot 1 \frac{t_{n-1}^{(i)} - t_n^{(i)}}{\Delta x}$$

$$\Phi_e = \lambda \cdot 1 \frac{t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}}{\Delta x}$$

$$\Delta E = \rho V c \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \rho \Delta x c \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau}$$

$$\Delta E = \Phi_w + \Phi_e$$

$$\Rightarrow \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1}^{(i)} - 2t_n^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2}$$

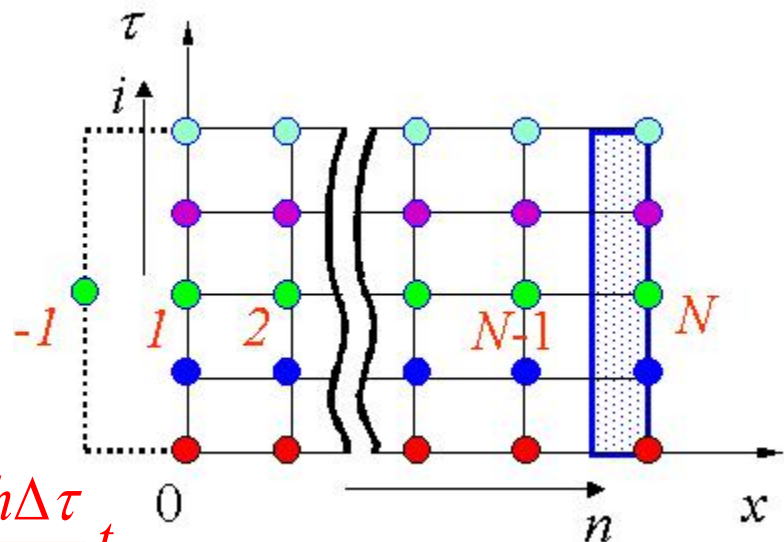


②右端边界节点

$$\lambda \cdot 1 \frac{t_{N-1}^{(i)} - t_N^{(i)}}{\Delta x} + h(t_f - t_N^{(i)}) = \frac{\Delta x \rho c}{2} \frac{(t_N^{(i+1)} - t_N^{(i)})}{\Delta \tau}$$



$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} \left(1 - 2 \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} - \frac{2h \Delta \tau}{\rho c \Delta x} \right) + 2 \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} t_{N-1}^{(i)} + \frac{2h \Delta \tau}{\rho c \Delta x} t_f$$



③左端对称 $t_{-1}=t_2$

$$\frac{t_1^{(i+1)} - t_1^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{-1}^{(i)} - 2t_1^{(i)} + t_2^{(i)}}{\Delta x^2}$$



$$t_1^{(i+1)} = \left(1 - 2 \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} \right) t_1^{(i)} + 2 \left(\frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} \right) t_2^{(i)}$$

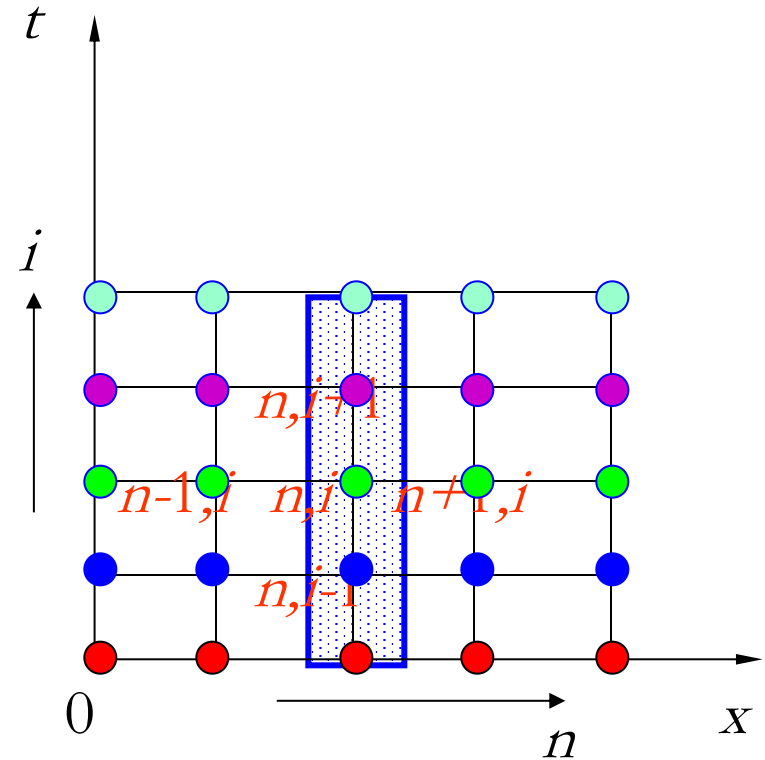
2. 直接用差分代替微分

① 向前差分(forward difference)

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i} \approx \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau}$$

$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1}^{(i)} - 2t_n^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow t_n^{(i+1)} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} (t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}) + \left[1 - \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] t_n^{(i)}$$



② 向后差分(backward difference)

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i} \approx \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau}$$

$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1}^{(i+1)} - 2t_n^{(i+1)} + t_{n-1}^{(i+1)}}{\Delta x^2} \Rightarrow \left(1 + \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \right) t_n^{(i+1)} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} (t_{n-1}^{(i+1)} + t_{n+1}^{(i+1)}) + t_n^{(i)}$$

三、两种差分格式的比较(稳定性分析)

扩散项用*i*时层值表示得到的离散方程又称为显式格式。该格式的优点是求解方便，但是对时间步长和空间步长有限制，否则会出现不合理的结果。

根据稳定性要求，限制条件为节点 $t_n^{(i)}$ 前面的系数 ≥ 0

扩散项用*i*+1时层值得到的离散方程又称为隐式格式。该格式的优点是无条件稳定，但缺点是需对每一个时间层进行联立求解。

显式

内部节点

$$\begin{cases} t_i^{(k+1)} = \left[1 - \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \right] t_i^{(k)} + \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} (t_{i-1}^{(k)} + t_{i+1}^{(k)}) \\ t_i^{(k+1)} = (1 - 2Fo) t_i^{(k)} + Fo (t_{i-1}^{(k)} + t_{i+1}^{(k)}) \end{cases}$$

边界节点

$$\begin{cases} t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - \frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c\Delta x} \left(\frac{t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}}{\Delta x} \right) + \frac{2h\Delta\tau}{\rho c\Delta x} (t_\infty - t_i^{(k)}) \\ t_i^{(k+1)} = [1 - 2Fo(1 + Bi)] t_i^{(k)} + 2Fo t_{i-1}^{(k)} + 2Bi Fot_\infty \end{cases}$$

根据主对角占优原则, 节点 $t_i^{(k)}$ 前面的系数 ≥ 0 , 即

$$\begin{aligned} 1 - 2Fo &\geq 0 \\ 1 - 2Fo(1 + Bi) &\geq 0 \end{aligned}$$

隐式

内部节点

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} t_i^{(k+1)} + \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} (t_{i-1}^{(k+1)} + t_{i+1}^{(k+1)})$$

$$t_i^{(k+1)} (1 + 2Fo) = t_i^{(k)} + Fo (t_{i-1}^{(k+1)} + t_{i+1}^{(k+1)})$$

边界节点

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - \frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c\Delta x} \left(\frac{t_i^{(k+1)} - t_{i-1}^{(k+1)}}{\Delta x} \right) + \frac{2h\Delta\tau}{\rho c\Delta x} (t_\infty - t_i^{(k+1)})$$

$$t_i^{(k+1)} [1 + 2Fo(1 + Bi)] = t_i^{(k)} + 2Fo t_{i-1}^{(k+1)} + 2Bi Fo t_\infty$$

根据主对角占优原则，稳定！！

本章小结

- 掌握数值计算的基本思想及步骤
- 掌握导热问题的数学描述方法
- 掌握从能量守恒定律出发建立离散方程的方法
- 代数方程的迭代求解方法

二维稳态导热计算练习（上机作业）

		200				
(1,4)		(2,4)	(3,4)	(4,4)		
(1,3)		(2,3)	(3,3)	(4,3)		
100						
(1,2)		(2,2)	(3,2)	(4,2)	300	
(1,1)		(2,1)	(3,1)	(4,1)		
		400				



计算要求

1. 分别给出**G-S**迭代和**Jacobi**迭代程序
2. 计算程序可适应不同节点数目
3. 程序中给出两种自动判定收敛的方法
4. 考察节点数目与收敛速度的关系
5. 绘出最终结果的等值线



报告要求

1. 原始题目及要求
2. 离散化的代数方程
3. 源程序
4. 两种方法收敛速度的对比
5. 节点数目对收敛速度的影响
6. 典型计算结果的等温线图
7. 计算小结

