

理论力学

吴佰建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

静力学

✓受力分析

✓力系等效（简化）

➤力系的平衡、物体系的平衡

➤重点：平面物体系统的平衡及应用。

平面力系的平衡

0. 二力平衡与三力平衡

二力平衡原理

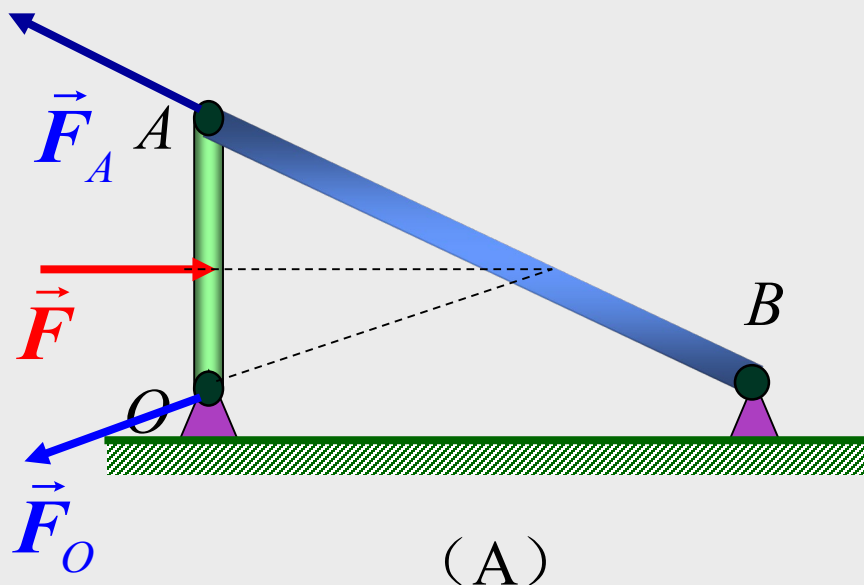
作用于一个刚体上的二力为平衡力系的充分必要条件是：此二力等值、反向、共线。

三力平衡定理

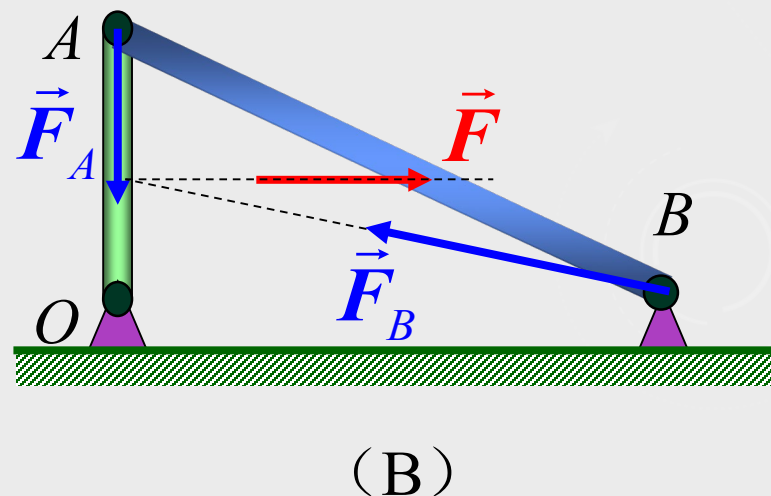
作用于刚体上的三个力若为平衡力系，则这三个力共面；或汇交于一点，或平行。

例1: 结构如图所示, 已知主动力 F , 确定铰链 O 、 B 约束力的方向 (不计构件自重)

(A) 对 $[OA$ 杆]



(B) 对 $[AB$ 杆]



基本原理

设空间任意力系 $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \Leftrightarrow \{\vec{F}_R, \vec{M}_O\}$

其平衡的充分必要条件是 $\vec{F}_R = 0, \vec{M}_O = 0$

{ 平面汇交力系
平面力偶系
平面任意力系

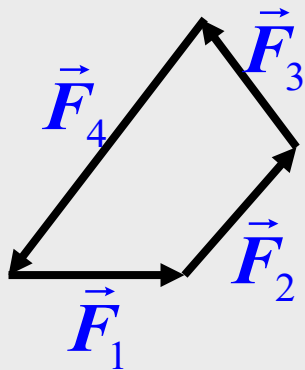
问题：力系的平衡方程的

- 数目？
- 形式？

1.1 汇交力系的平衡条件

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} = \{\vec{F}_R\} = \{\mathbf{0}\}$$

◆ 几何平衡条件



$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \mathbf{0}$$

力多边形
自行封闭

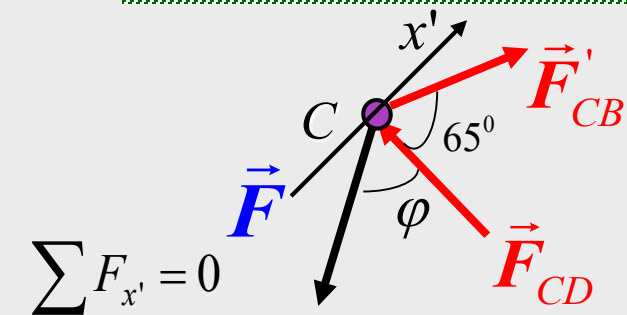
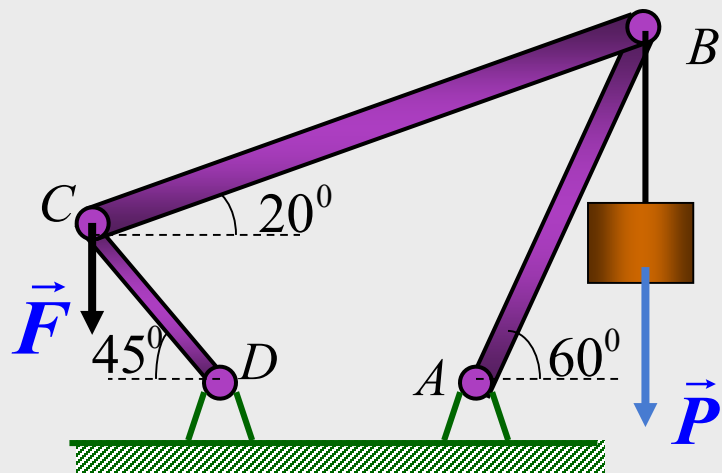
◆ 解析平衡条件

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x = 0 \\ F_{Ry} &= \sum F_y = 0 \end{aligned} \right\}$$

2个独立平衡方程

问题：两根轴必须垂直吗？

例2: 已知物体的重量为 P , 求 (a) 平衡时铅垂力 F ,
(b) 维持平衡时 F 的最小值及其方向 (不计构件自重)

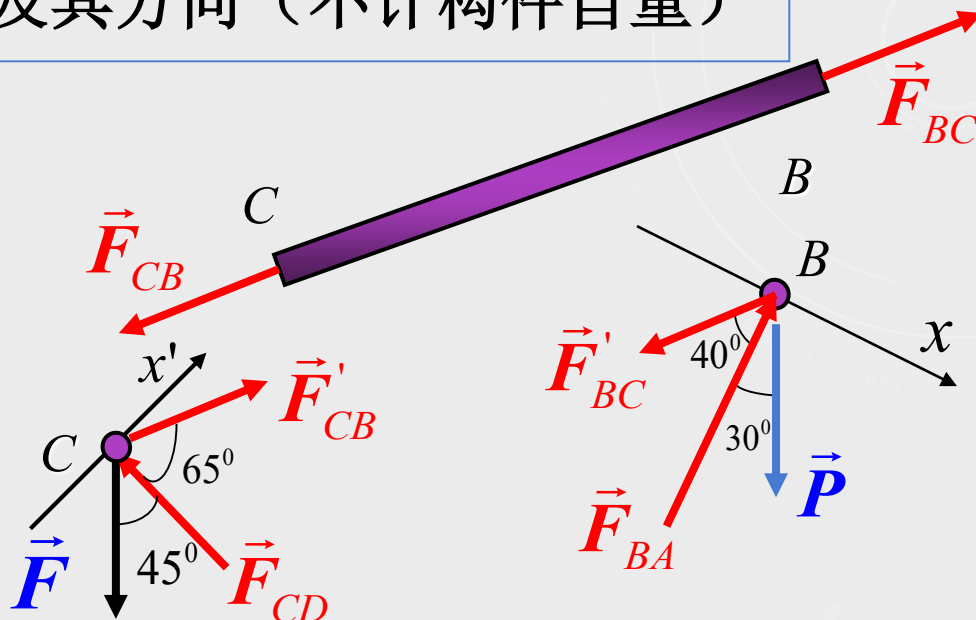


$$\sum F_{x'} = 0$$

$$F_{CC} \sin 65^\circ - F \sin \varphi = 0$$



$$F = \frac{\sin 65^\circ}{\sin \varphi} F_{CC} \rightarrow F_{\min} \mid_{\varphi=90^\circ}$$



[销钉C]

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$F_{CB} \sin 65^\circ - F \sin 45^\circ = 0$$



$$F = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 45^\circ} F_{CB}$$

[销钉B]

$$\sum F_x = 0$$

$$P \sin 30^\circ - F_{BC} \sin 40^\circ = 0$$



$$F_{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} P$$

1.2 力偶系的平衡条件

力偶系： $\{\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n\} = \{\vec{M}_R\} = \{0\}$

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n M_{ix} \vec{i} + \sum_{i=1}^n M_{iy} \vec{j} + \sum_{i=1}^n M_{iz} \vec{k} = 0$$

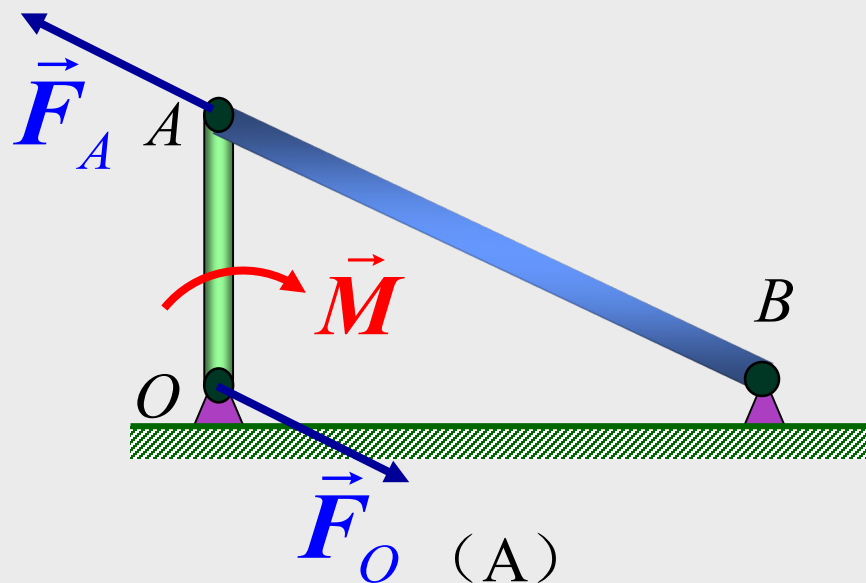
平面力偶系：

$$\sum M_z = 0$$

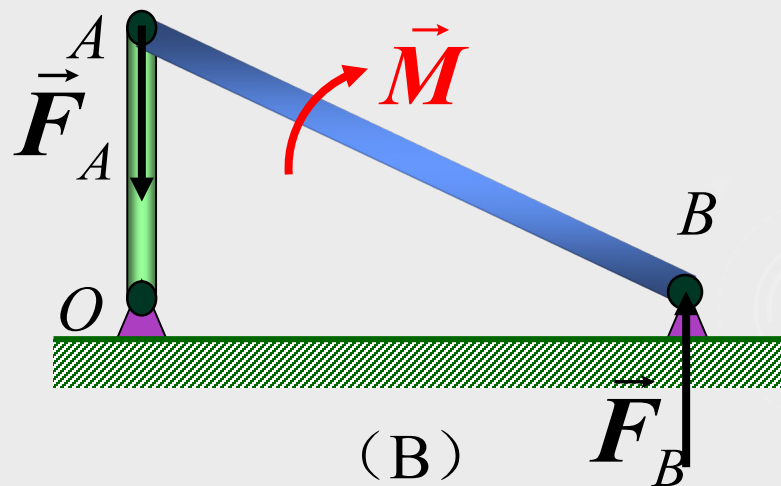
1个独立平衡方程

例3: 结构如图所示, 已知主动力偶 M , 哪种情况铰链的约束力小, 并确定约束力的方向 (不计构件自重)。

1、作用OA杆

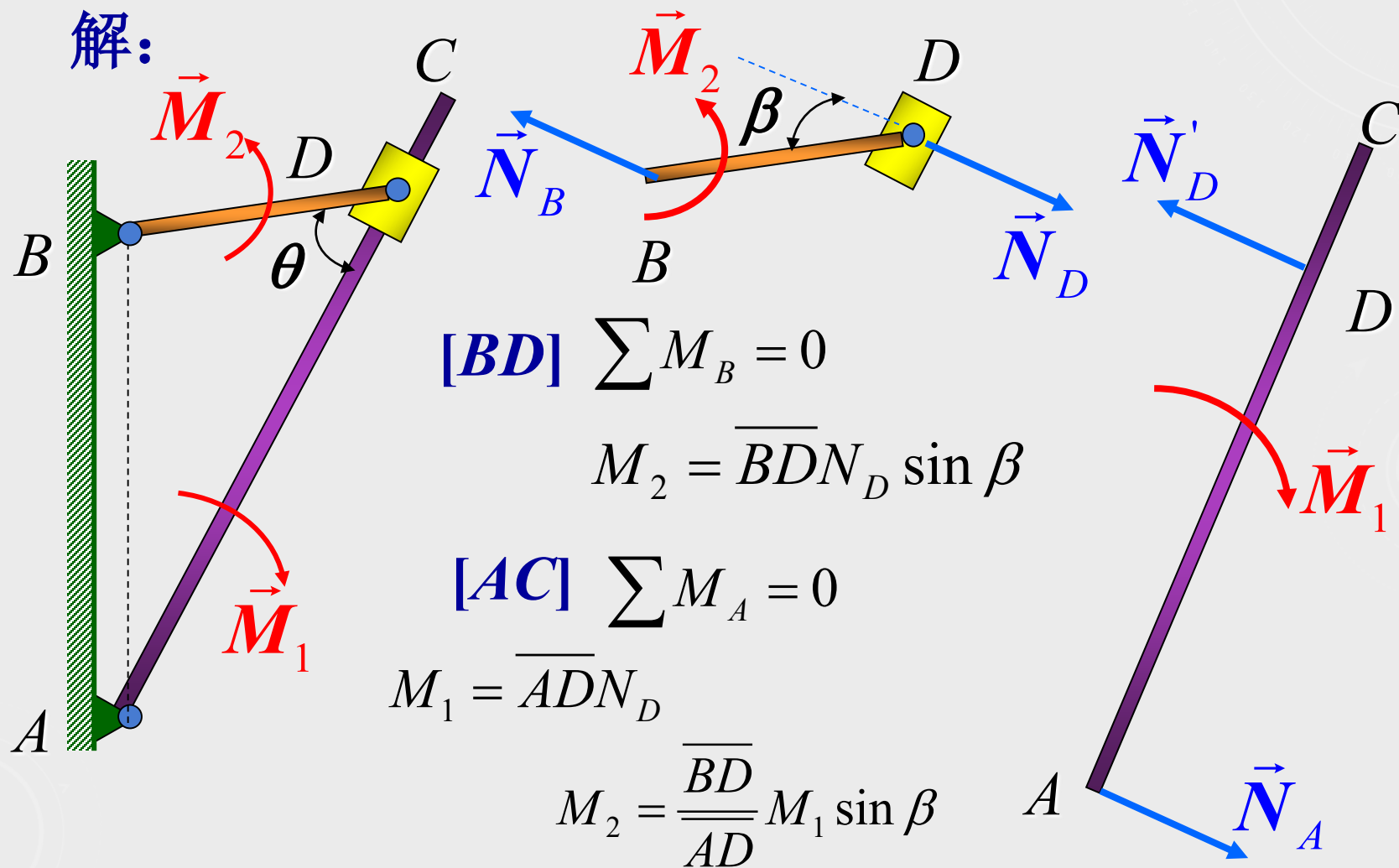


2、作用在AB杆



力偶是自由矢量?

例4: 已知 $AD=2a$ $BD=a$, θ , 不计摩擦。求当系统平衡时, 力偶 M_1, M_2 应满足的关系。



1.3 平面任意力系的平衡条件

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_{ix} \cdot \vec{i} + \sum_{i=1}^n F_{iy} \cdot \vec{j} + \sum_{i=1}^n F_{iz} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^n M_{iOx} \cdot \vec{i} + \sum_{i=1}^n M_{iOy} \cdot \vec{j} + \sum_{i=1}^n M_{iOz} \cdot \vec{k} = 0$$

平面力系:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_o(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

3个独立平衡方程

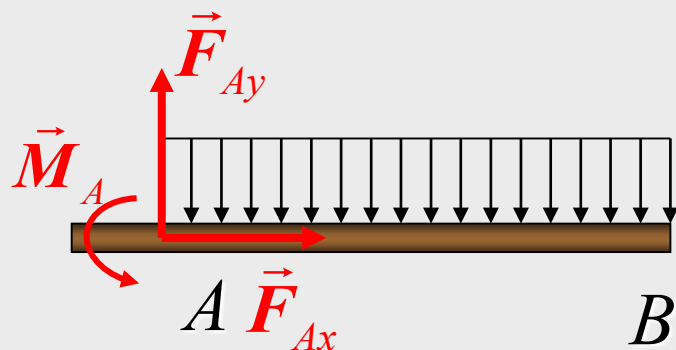
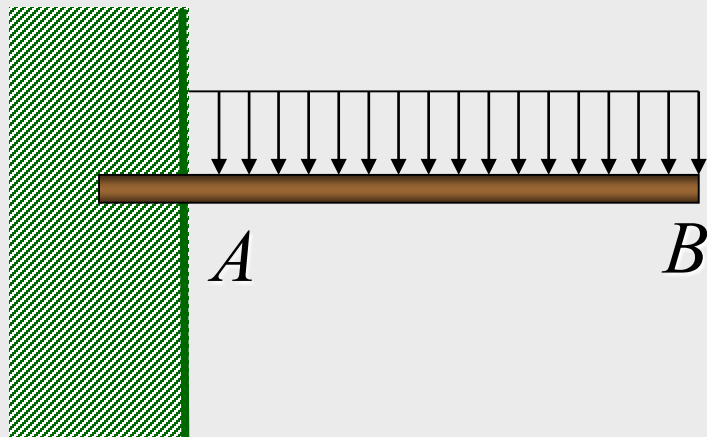
基本形式

一
矩
式

平面任意力系平衡的充分必要条件:

力系的各力在该平面内任意两根不相平行的坐标轴上投影的代数和及对平面内任意点的矩的代数和等于零。

例6: 已知 AB 梁长为 l , 其上受有均布载荷 q ,
求: 梁 A 端的约束力。



解: $[AB]$, 受力分析

$$\sum F_x = 0, \Rightarrow F_{Ax} = 0$$

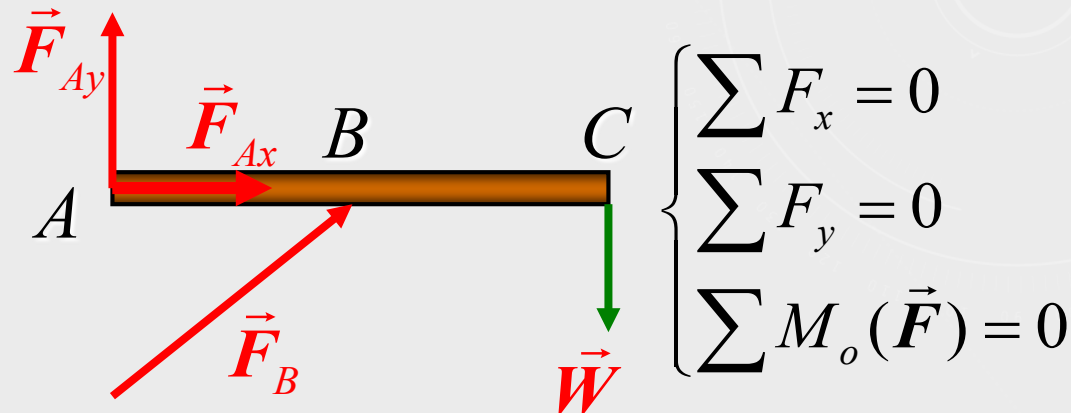
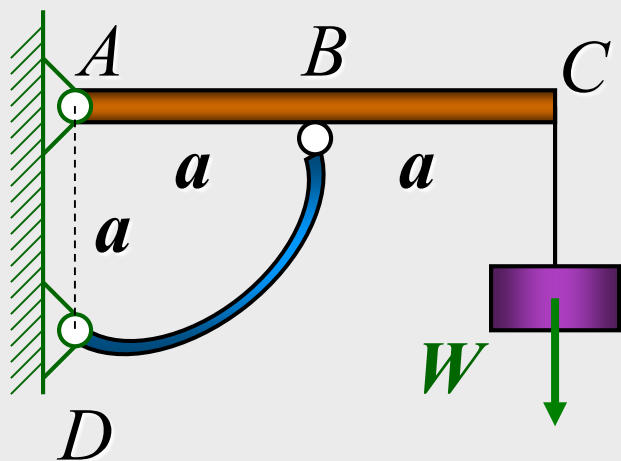
$$\sum F_y = 0, \Rightarrow$$

$$F_{Ay} - \int_0^l q dx = 0, \quad F_{Ay} = ql$$

$$\sum M_A = 0, \Rightarrow$$

$$M_A - \int_0^l xq dx = 0, \quad M_A = \frac{1}{2}ql^2$$

例5: 结构如图, 已知 W , a , 求杆 A 、 B 处的约束力



[AC杆]:

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0 \quad W \cdot 2a - \frac{\sqrt{2}}{2} F_B \cdot a = 0 \quad \longrightarrow \quad F_B = 2\sqrt{2}W$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_B = 0 \quad \longrightarrow \quad F_{Ax} = -2W$$

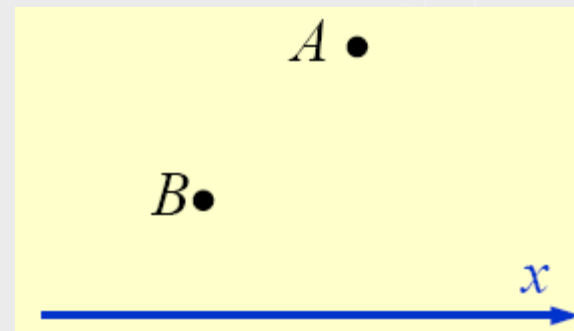
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_B - W = 0 \quad \longrightarrow \quad F_{Ay} = -W$$

能否用对B点列平衡方程? $F_{Ay} \cdot a + W \cdot a = 0$

平衡方程的其他形式:

二
矩
式

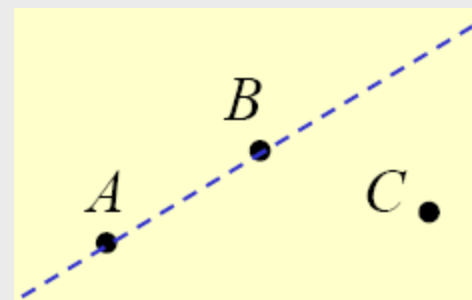
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$



Why?

三
矩
式

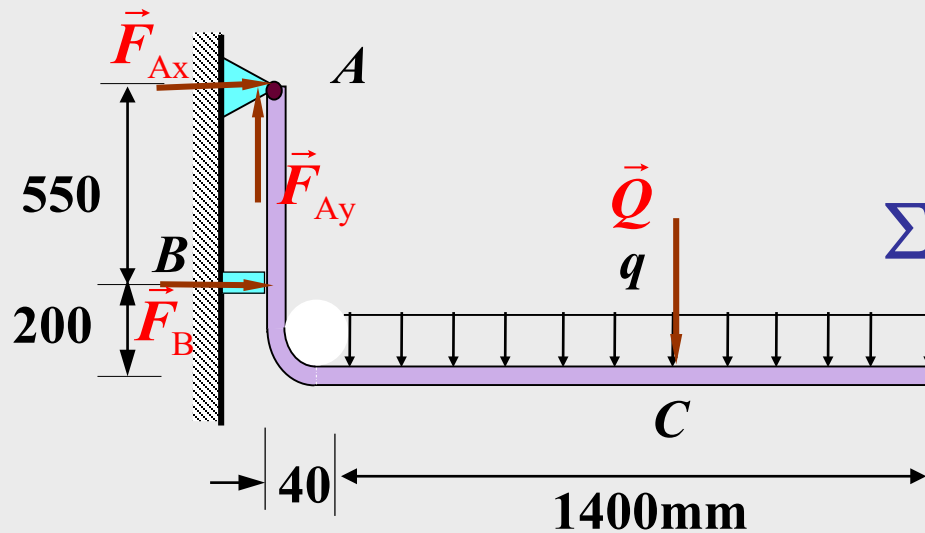
$$\begin{cases} \sum M_A(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$



A 、 B 、 C 三点不共线

例 7: 图示为叉车的钢叉简图, 已知: 货物均重为 $q=1500$ N/m, 其它尺寸如图示, 求: 约束 A , B 处的约束反力。

解: [叉车] 受力分析如图



$$Q = 1.4 \times q = 2.1 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_B \cdot 550 - (1400 \cdot 0.5 + 40)Q = 0$$

$$F_B = 2.8 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - Q = 0$$

$$F_{Ay} = Q = 2.1 \text{ kN},$$

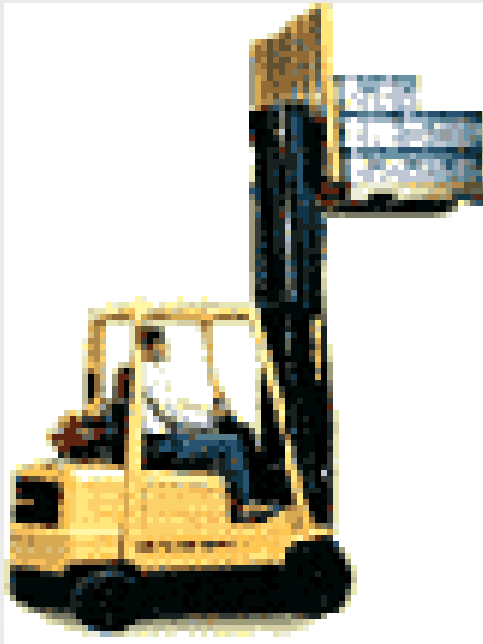
$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_B = 0 \quad F_{Ax} = -2.8 \text{ kN}$$

Try 两矩式? $\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum F_y = 0$

$$\sum M_B = 0, \quad -F_{Ax} \cdot 550 + (1400 \cdot 0.5 + 40)Q = 0,$$

$$F_{Ax} = -2.8 \text{ kN}.$$

可校核方程: $\sum M_C = 0$, 应满足。



例8： 图示雨篷结构，因雨篷对称结构可简化为平面结构，自重不计，已知 F ，求：三根支撑杆的约束反力。

解： 雨棚受力如图

$$\sum M_A = 0, \quad \sqrt{2}F_1 - 5F = 0,$$

$$F_1 = \frac{5F}{\sqrt{2}}$$

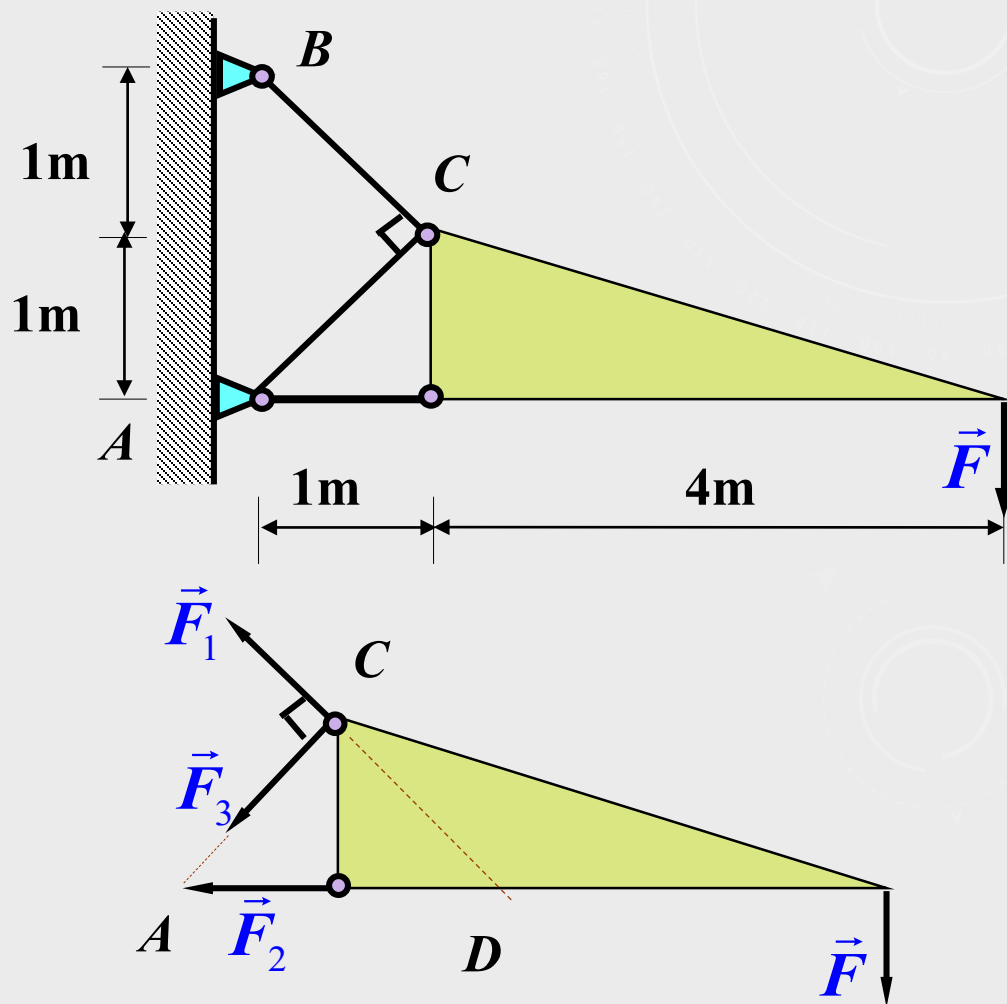
$$\sum M_C = 0, \quad F_2 + 4F = 0,$$

$$F_2 = -4F$$

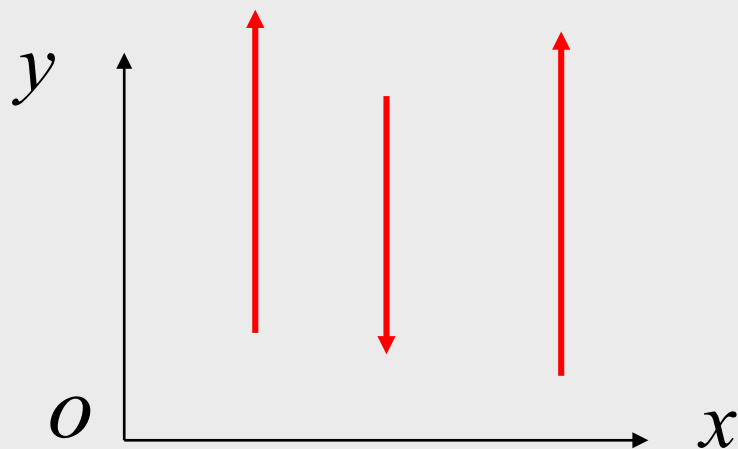
$$\sum M_D = 0, \quad \sqrt{2}F_3 - 3F = 0,$$

$$F_3 = \frac{3F}{\sqrt{2}}$$

可以校核方程： $\sum F_x = 0$ ， 应满足。



平面平行力系



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

2个独立平衡方程

两矩式

$$\begin{cases} \sum M_A(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

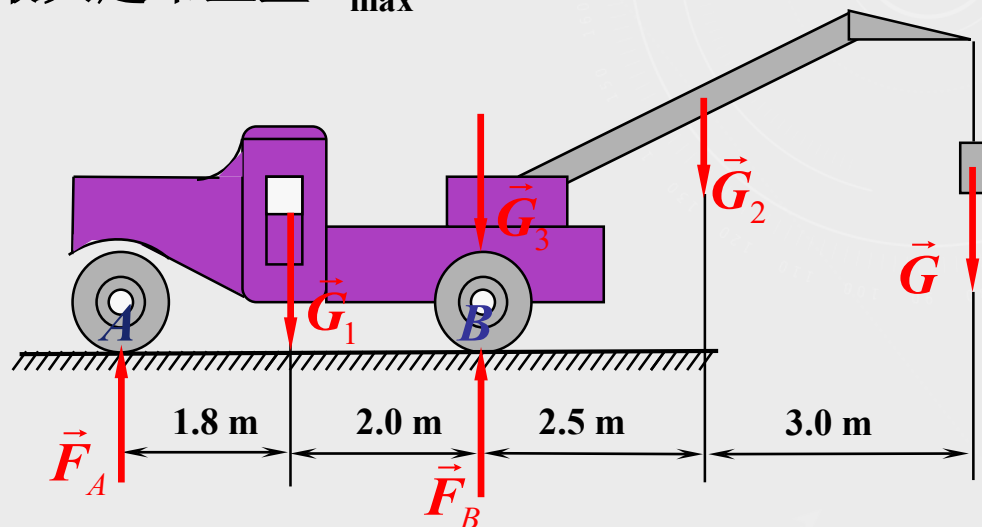
AB连线不与力线平行

例9：一种车载式起重机，车重 $G_1 = 26 \text{ kN}$ ，起重机伸臂重 $G_2 = 4.5 \text{ kN}$ ，起重机的旋转与固定部分共重 $G_3 = 31 \text{ kN}$ 。尺寸如图所示。设伸臂在起重机对称面内，且放在图示位置，试求车子不致翻倒的最大起吊重量 G_{\max} 。

解： [汽车] 受力分析如图

极限状态 $F_A = 0$

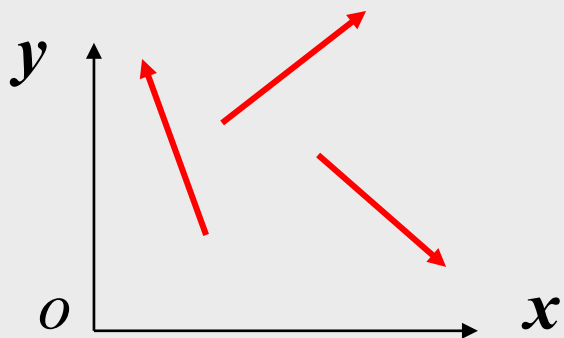
$$\sum M_B(\vec{F}) = 0,$$



$$-G_{\max}(2.5 \text{ m} + 3 \text{ m}) - G_2 \times 2.5 \text{ m} + G_1 \times 2 \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow G_{\max} = \frac{1}{5.5} (2G_1 - 2.5G_2) = 7.5 \text{ kN}$$

平面任意力系的平衡条件 $\vec{F}_R = 0, \vec{M}_O = 0$



一
矩
式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_o(\vec{F}) = 0 \end{cases} \quad \text{基本形式}$$

二
矩
式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

A 、 B 连线与 x 轴不垂直

三
矩
式

$$\begin{cases} \sum M_A(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

A 、 B 、 C 三点不共线

TAKE-HOME MESSAGE

- ✓ **受力分析！** 一定要从受力分析入手。
- ✓ 不必过于在意约束力的真实方向。
- ✓ **逐步选择更合理的投影轴和取矩点。**

习题作业：3-2, 4, 5, 8, 9(a)