理论力学

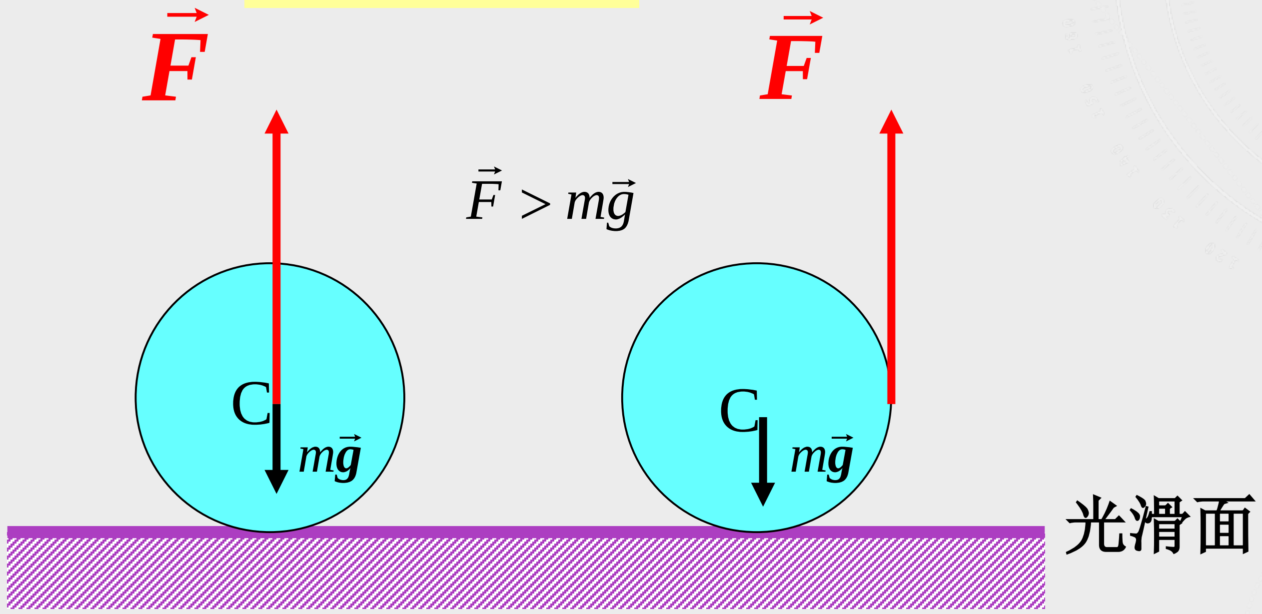
吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

动量矩定理

动量定理：

$$m\ddot{\vec{r}}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}$$



$$\sum M_C\neq 0$$

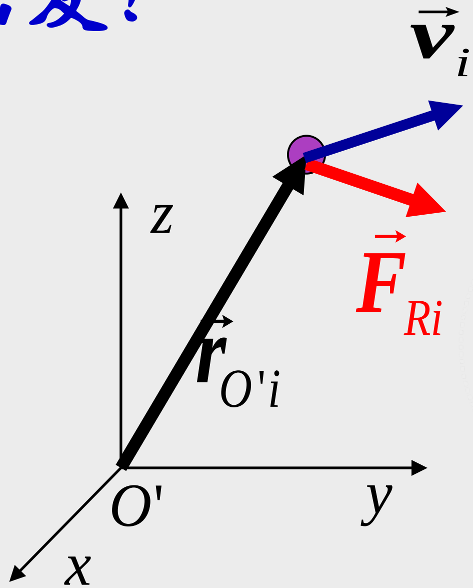
需要建立力对某点的矩与运动之间的关系！

动量矩定理

思考：如何建立力矩与运动的关系？

从牛顿第二定律或动量定理出发！

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O'i}\times\frac{\mathrm{d}m_i\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}}_{?}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O'i}\times\vec{F}_{Ri}}_{\text{力矩}}$$



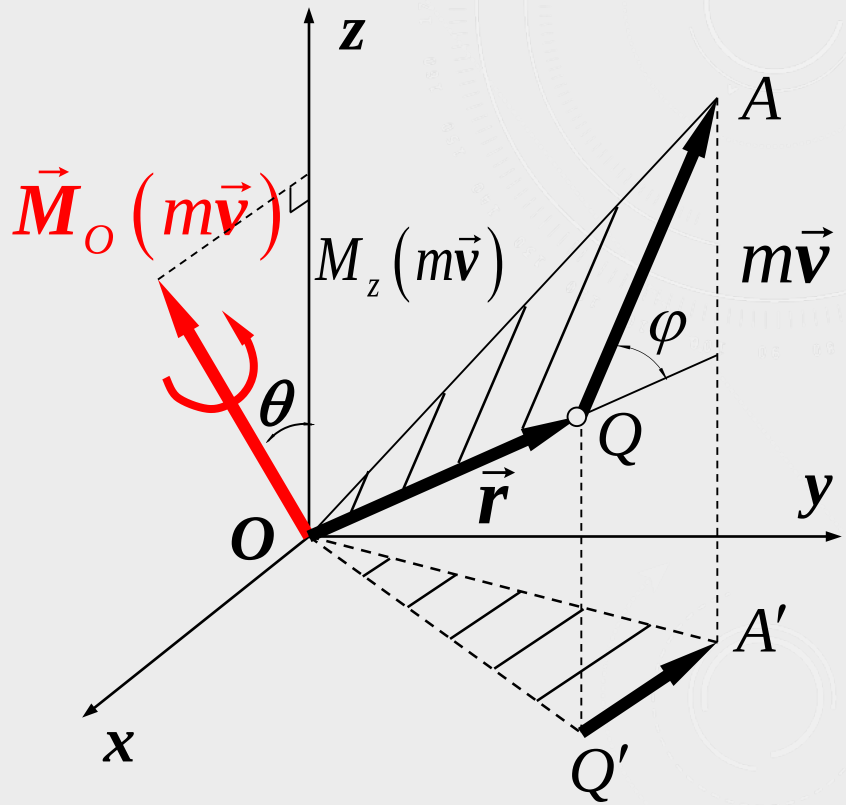
力矩：$\vec{M}_{O'}(\vec{F}_{Ri})=\vec{r}_{O'i}\times\vec{F}_{Ri}$

0. 质点及质点系的动量矩定理

质点的动量矩

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$$

定位矢量



质点对 z 轴的动量矩

$$M_z(m\vec{v}) = \left[\vec{M}_O(m\vec{v})\right]_z$$

对比力对点之矩 $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$

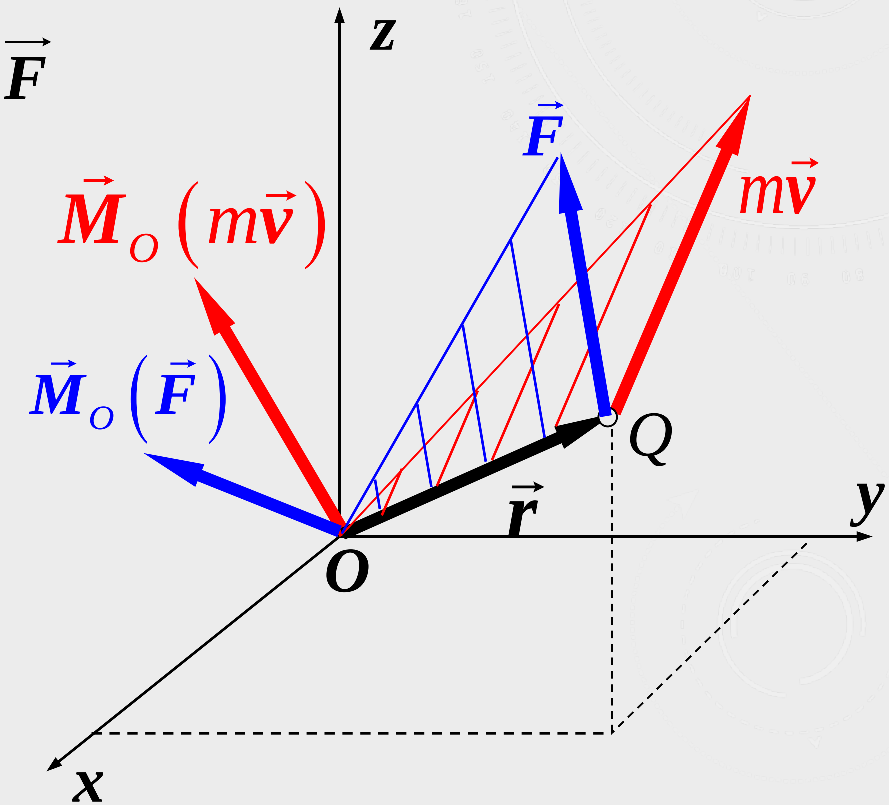
对比力对轴之矩 $M_z(\vec{F}) = \left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z$

质点的动量矩定理

由 $\qquad \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \qquad \vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$

$$\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times m\vec{v})}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\vec{v}$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

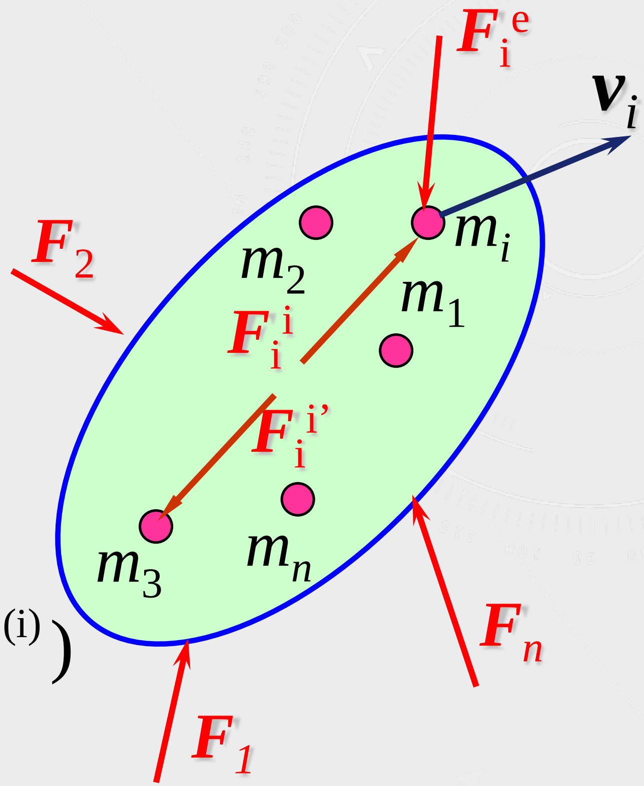


$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_O}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right)}$$

质点对固定点的动量矩对时间的导数等于作用于质点上的力对该点的矩。

设质点系中有n个质点，其中第 i个质点：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_0(m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i)=\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{e})})+\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{i})})$$



则：

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_0(m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i)=\sum\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{e})})+\sum\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{i})})$$

$$\sum\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{i})})=\boldsymbol{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_O=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\boldsymbol{M}_0(m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i)=\sum\boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{e})})$$

质点系的动量矩定理

质点系的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_O = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} &= \sum_j M_x(\vec{F}_j) \\
\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t} &= \sum_j M_y(\vec{F}_j) \\
\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} &= \sum_j M_z(\vec{F}_j)
\end{aligned}\right\}$$

守恒：

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_j \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_j) \equiv 0 \\ \vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(t_0)\end{gathered}}$$

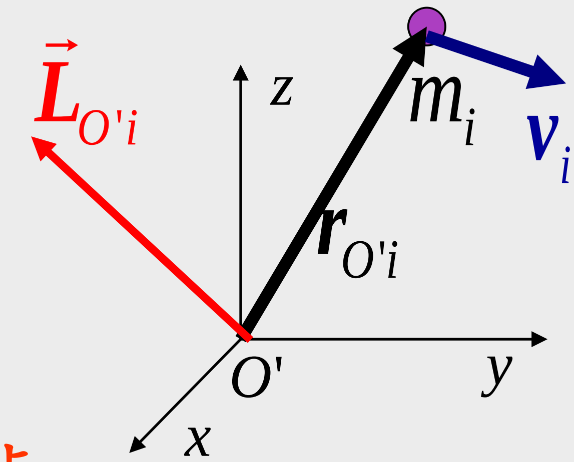
$$\boxed{\begin{gathered}\sum_j M_x(\vec{F}_j) \equiv 0 \\ L_x(t) = L_x(t_0)\end{gathered}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{L}}_O = \sum \vec{\boldsymbol{M}}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{e})})}$$

如何计算质点系的动量矩？

1. 质点系的动量矩

质点的动量矩 (angular momentum)



动量— $m_i\vec{v}_i$

动量矩—动量 $m_i\vec{v}_i$ 对某点或某轴的矩。

"某点"也可以是动点

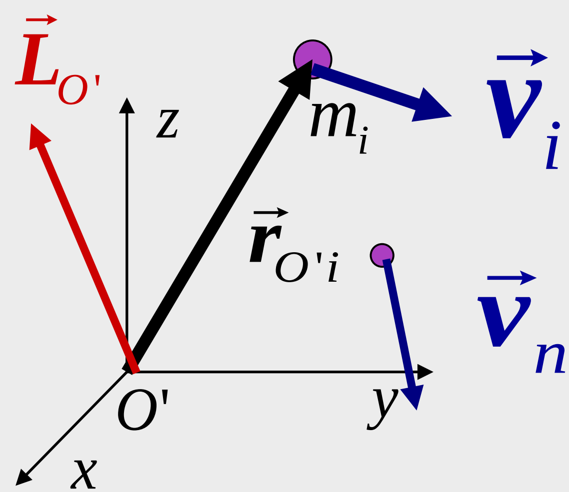
对任意点*O'* 的动量矩：$\vec{L}_{O'i}=\vec{M}_{O'}(m_i\vec{v}_i)=\vec{r}_{O'i}\times m_i\vec{v}_i=L_x\vec{i}+L_y\vec{j}+L_z\vec{k}$

对某 *z* 轴的动量矩：$L_z=M_z(m_i\vec{v}_i)=\pm(m_i v_i')d$

质点系的动量矩：定义

对任意点*O'*的动量矩：

$$\vec{L}_{O'}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O'i}\times m_i\vec{v}_i$$



例：求质点系对C点和对 z 轴的动量矩。两质点质量均为m。

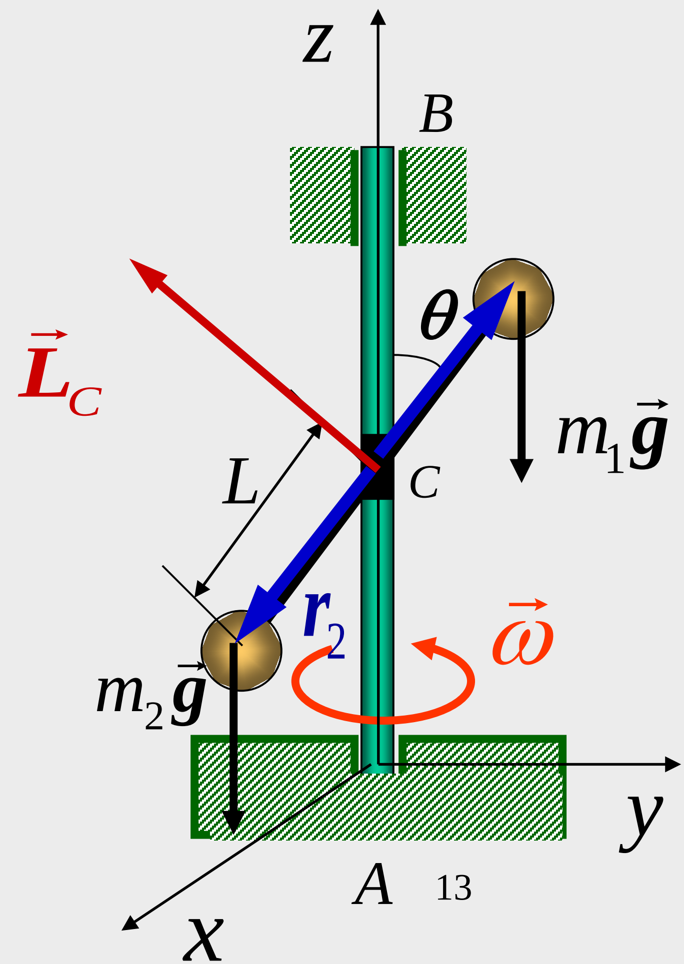
解：根据动量矩的定义

$$\vec{L}_C=\sum_{i=1}^{2}(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)=\vec{r}_1\times m_1\vec{v}_1+\vec{r}_2\times m_2\vec{v}_2$$

$$=2\vec{r}_1\times m\vec{v}_1$$

$$L_C=2Lm(\omega L\sin\theta)=2\omega mL^2\sin\theta$$

$$L_z=L_C\sin\theta=L_z=2\omega mL^2\sin^2\theta$$



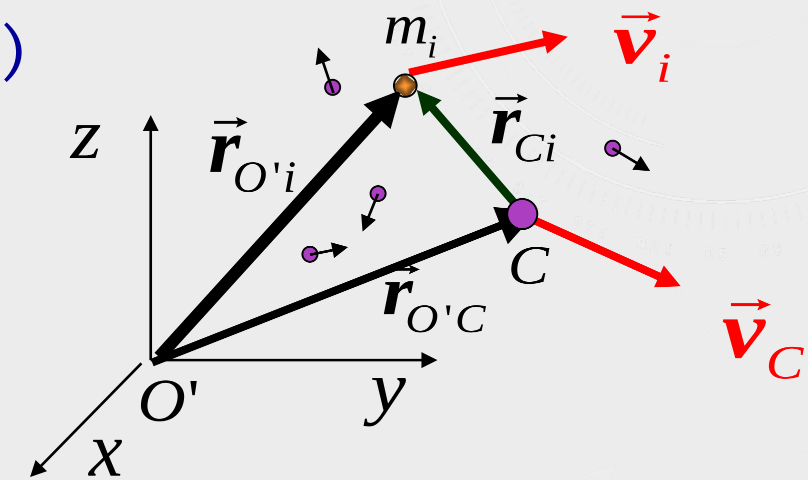
质点系动量矩的一般形式

质点系动量矩：$\boxed{\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C^r} = \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C$

质点系的动量矩(任意点O’为取矩点)

$$\vec{L}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} r_{O'i} \times m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{O'C} + \vec{r}_{Ci}) \times m_i\vec{v}_i$$

$$= \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C + \underline{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Ci} \times m_i\vec{v}_i}$$



以质心C为参照点，
建立随C点平动的坐标系

$$= \vec{L}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Ci} \times m_i(\vec{v}_C + \vec{v}_{iC})$$

$$= m\,\vec{r}_{CC} \times \vec{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Ci} \times \boxed{m_i\vec{v}_{iC}} = \vec{L}_C^r$$

i点相对质心的动量

对质心的相对动量矩：$\vec{L}_C^r = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Ci} \times m_i\vec{v}_{iC}$

@ 当选质心为取矩点：$\vec{L}_C = \vec{L}_C^r$

刚体（系）的动量矩？

质点系的动量矩：一般形式 $\boxed{\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C^r}$

质点系的动量矩：刚体的情形 ？

2. 刚体对轴的转动惯量

一、转动惯量

$$J_l = \sum m_i \rho_i^2 \qquad J_l = \int \rho^2 \cdot dm$$

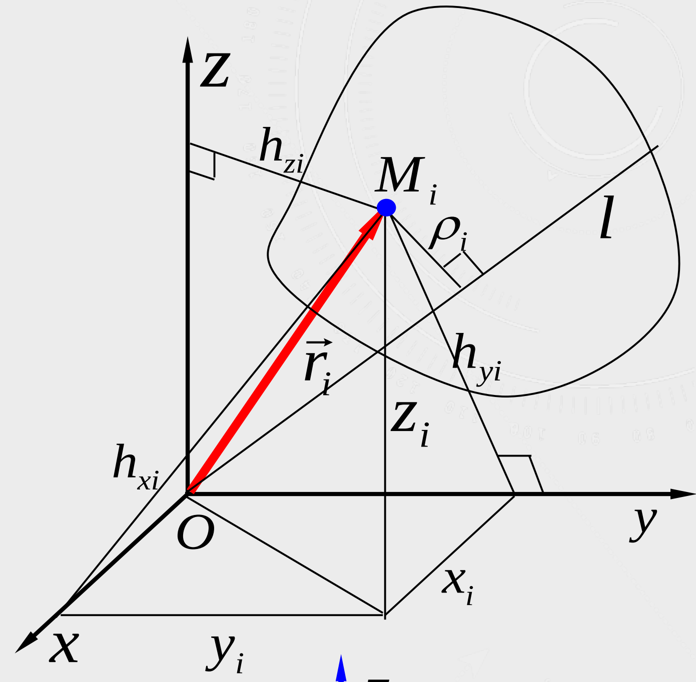
物理意义： 刚体转动时惯性的度量

刚体对坐标轴的转动惯量:

$$J_x = \sum m_i h_{xi}^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

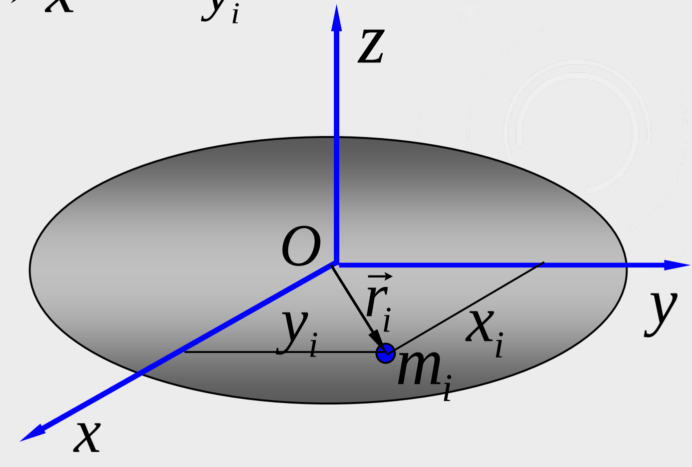
$$J_y = \sum m_i h_{yi}^2 = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

$$J_z = \sum m_i h_{zi}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



不计厚度的平面刚体:

$$J_z = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



二、回转半径

定义：$$\rho_l = \sqrt{\frac{J_l}{m}}$$

物理意义：如果保持刚体对某轴的转动惯量不变，而将其质量集中于一个质点，则该质点到转轴的距离就是刚体对该轴的回转半径。

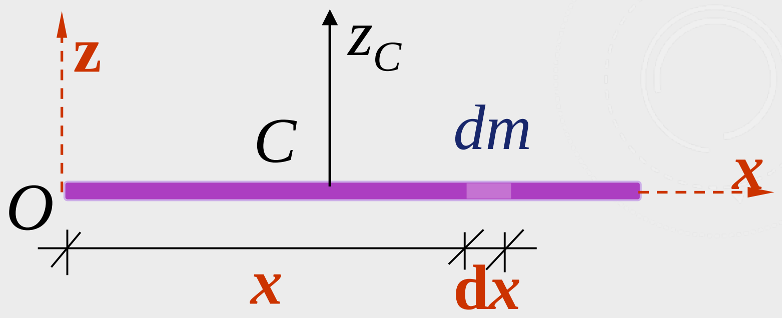
标准构件的回转半径可以查表得到

例：已知质量**m**的匀质杆，杆长为***l***，求转动惯量J_z、J_{zC}

解：

$$J_z = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \cdot \frac{m}{l} \cdot dx = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \sqrt{\frac{1}{3}} l$$



$$J_{z_C} = \int x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \cdot \frac{m}{l} \cdot dx = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\rho_{z_C} = \sqrt{\frac{J_{z_C}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{12}} l$$

例：试计算半径为 **R** 的均质等厚圆板对于中心轴的转动惯量。

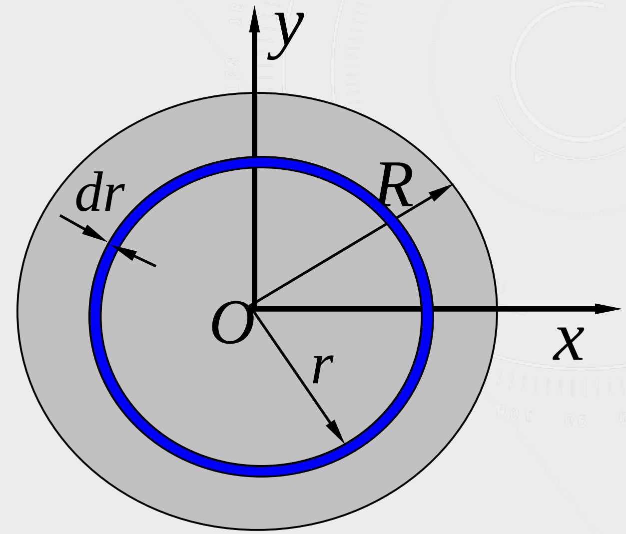
解：

$$dm = 2\pi r \cdot dr \cdot \rho$$

$$J_{0z} = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \rho \cdot dr$$

$$= 2\pi\rho \int_0^R r^3 \cdot dr = \frac{1}{2}\pi R^4 \rho = \frac{1}{2} m R^2$$

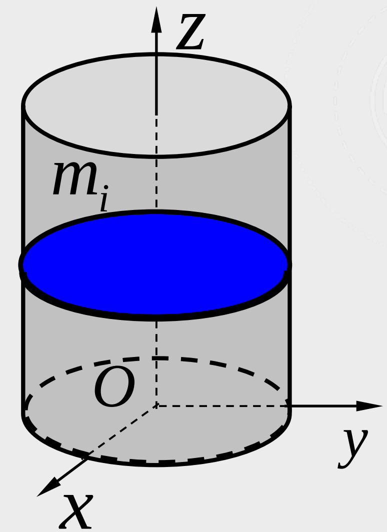
$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_{oz} = \frac{1}{4} m R^2$$



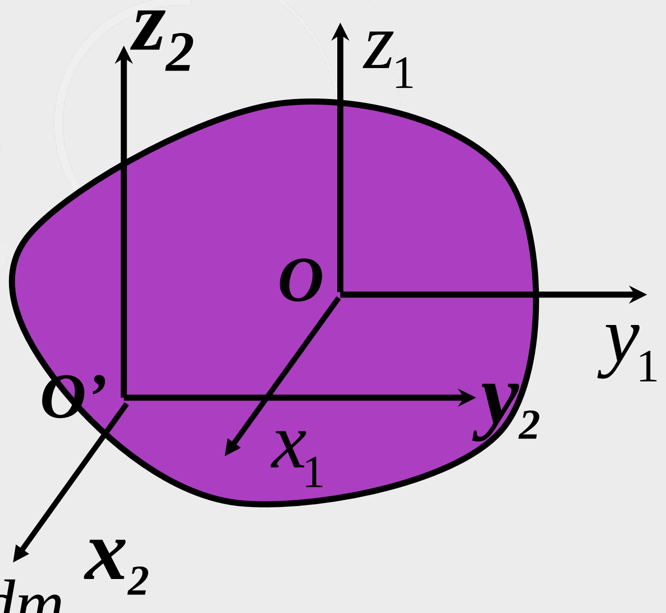
例：试计算半径为 **R** 的均质圆柱体对于中心轴的转动惯量。

$$\because J_{zi} = \frac{1}{2} m_i R^2$$

$$\therefore J_z = \sum \frac{1}{2} m_i R^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$



三、平行轴定理



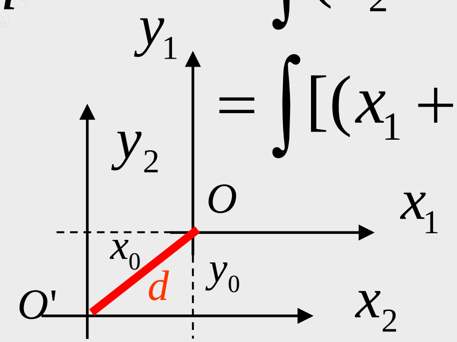
刚体对平行的两根轴的转动惯量之间有没有关系？

设有两根平行的轴z_1 和z_2

$$J_{z_1}=\int r_1^2dm$$
$$=\int(x_1^2+y_1^2)dm$$

$$J_{z_2}=\int r_2^2dm$$
$$=\int(x_2^2+y_2^2)dm$$
$$=\int[(x_1+x_0)^2+(y_1+y_0)^2]dm$$

$$x_2=x_1+x_0$$
$$y_2=y_1+y_0$$



$$J_{z_2}=J_{z_1}+m({x_0}^2+{y_0}^2)+\int(2x_1x_0+2y_1y_0)dm$$

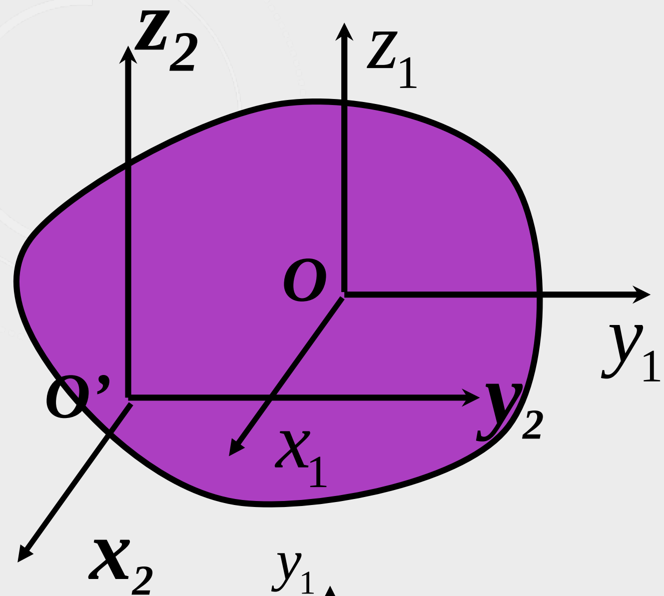
$$=md^2 \qquad =2mx_0x_{c1}+2my_0y_{c1}$$

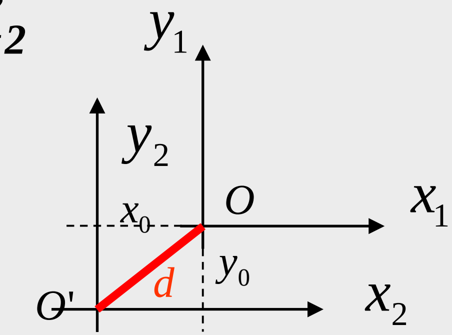
d 为 z_1 和 z_2 之间的距离

$$J_{z_1} = \int (x_1^2 + y_1^2)dm$$

$$J_{z_2} = J_{z_1} + \underbrace{m(x_0{}^2 + y_0{}^2)}_{= md^2} + \underbrace{\int (2x_1x_0 + 2y_1y_0)dm}_{= 2mx_0x_{c1} + 2my_0y_{c1}}$$

$$J_{z_2} = J_{z_1} + md^2 + \underbrace{2mx_0x_{c1} + 2my_0y_{c1}}_{= 0}$$





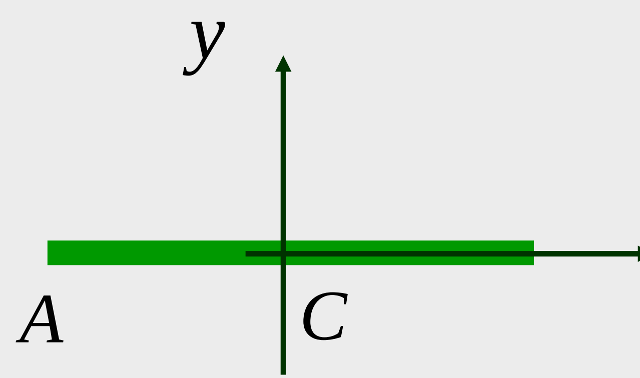
若z_1轴过质心：

$$\boxed{J_{z_2} = J_{Cz} + md^2}$$

平行轴定理

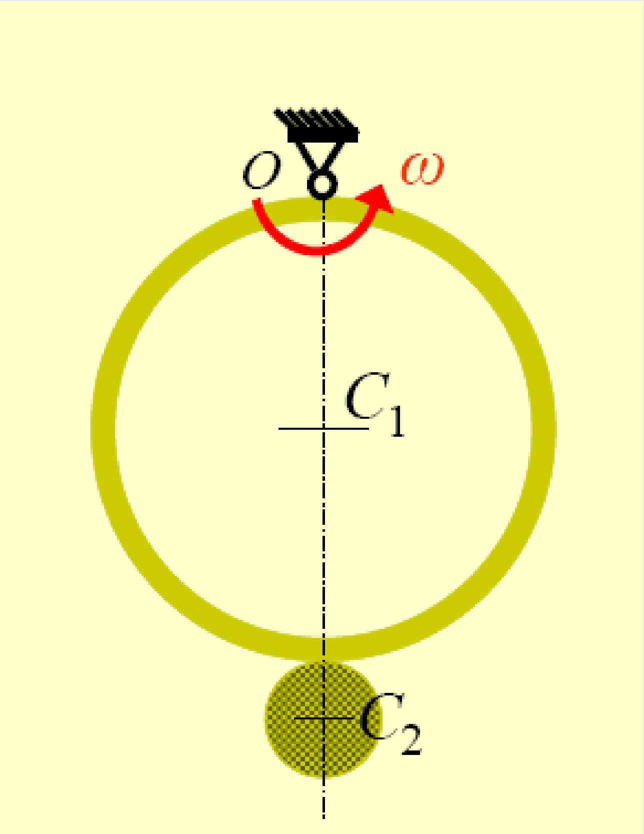
匀质杆对端点的转动惯量：

$$J_A = J_C + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$



问题：对于一组平行轴，对哪根轴的转动惯量最小？

例 **质量为*m*的均质细圆环与相同质量的均质圆盘固结，已知圆环半径是圆盘半径*r*的4倍，求组合体对轴*O*的转动惯量。**



解： 设圆环对O轴的转动惯量为J_{O1}

圆盘对O轴的转动惯量为J_{O2}

组合体对O轴的转动惯量J_O:

$$J_O = J_{O1} + J_{O2}$$

$$J_{O1} = J_{C1} + m(4r)^2 = 32mr^2$$

$$J_{O2} = J_{C2} + m(8r + r)^2 = 81.5mr^2$$

$$J_O = 113.5mr^2$$

3. 刚体的动量矩

质点系的动量矩 ⟹ 刚体？

$$\boxed{\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C^r}$$

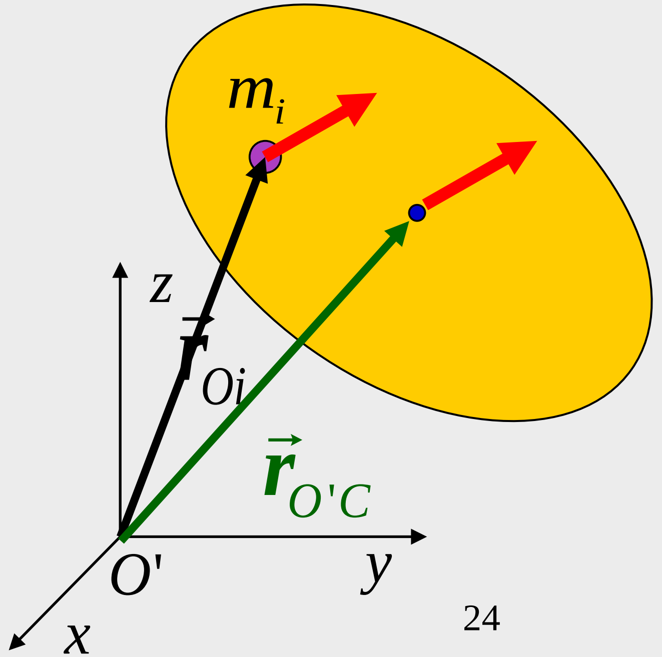
质点系对O’的动量矩 $\vec{L}_{O'}=\vec{r}_{O'C}\times m\vec{v}_C+\vec{L}_C$ $\vec{L}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Ci}\times m_i\vec{v}_i$

运动刚体的动量矩 ⟹ 讨论不同运动形式

（1）平移刚体对O’点的动量矩

$$\vec{L}_{O'}=\vec{r}_{O'C}\times m\vec{v}+\underline{\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Ci}\times m_i\vec{v}}$$

$$=m\vec{r}_{CC}\times\vec{v}=0$$



$$\boxed{\vec{L}_{O'}=\vec{r}_{O'C}\times m\vec{v}}$$

相当于质量集中于质心的单质点问题

（2）定轴转动刚体对转轴 z 的动量矩

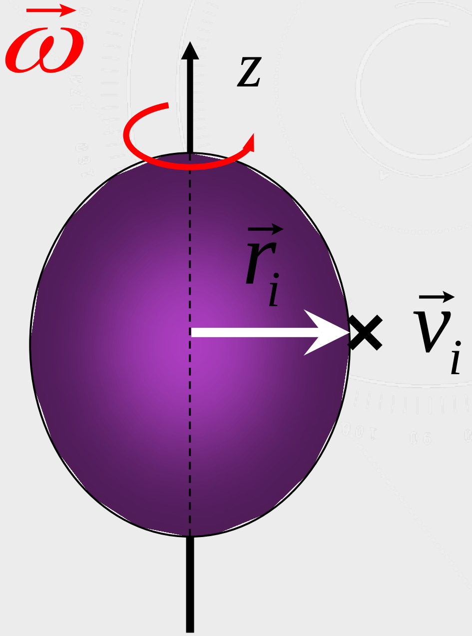
$$L_z=\sum_{i=1}^{n}M_z(m_i\vec{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}(m_iv_i)r_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\omega r_i^2=(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2)\omega$$

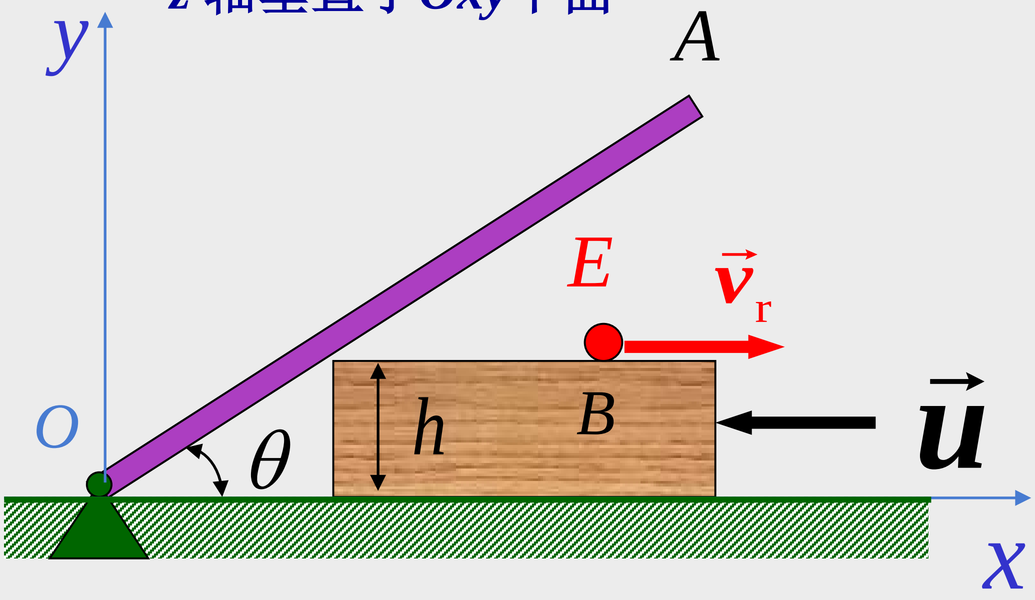
记 $J_z=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2$ 对 z 轴的转动惯量

$$\boxed{L_z=J_z\omega}$$

L_z方向与ω相同



例： 已知：$J_z, m_B, m_E, h, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_r, \omega_{OA}$，求系统对z 轴的动量矩。



解： 分别求每个物体对z轴的动量矩

$$L_{z(OA)} = J_z \omega_{OA}$$

$$L_{z(B)} = \frac{h}{2} m_B u$$

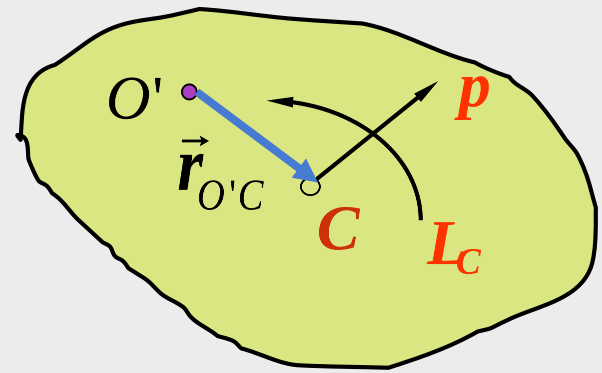
$$L_{z(E)} = h m_E (u - v_r)$$

系统对z轴的动量矩为：

$$L_z = J_z \omega_{OA} + \frac{h}{2} mu + h m_E (u - v_r)$$

质点系对O’的动量矩 $\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C^r$ $\vec{L}_C^r = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{iC}$

(3)平面运动刚体的动量矩



对任意O’点的动量矩：

$$\vec{L}_{O'} = \underline{\vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C} + \underline{J_C \vec{\omega}}$$

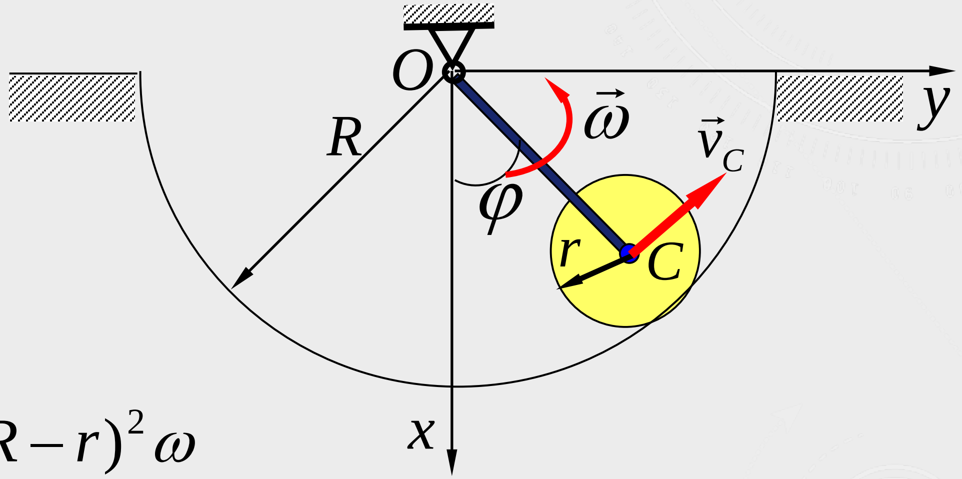
随质心平动的动量对O’之矩

相对质心转动的动量对质心之矩

例： 已知半径为***r***的匀质轮，在半径为***R***的固定凹面上只滚不滑，轮重***Q***，匀质杆***OC***重***P***，杆长***l= R-r***，在图示瞬时杆***OC***的角速度为 ω ，试求系统在该瞬时对***O***点的动量矩。

解：

$$(L_O)_{OC} = J_O\omega = \frac{1}{3}\frac{p}{g}l^2\cdot\omega$$



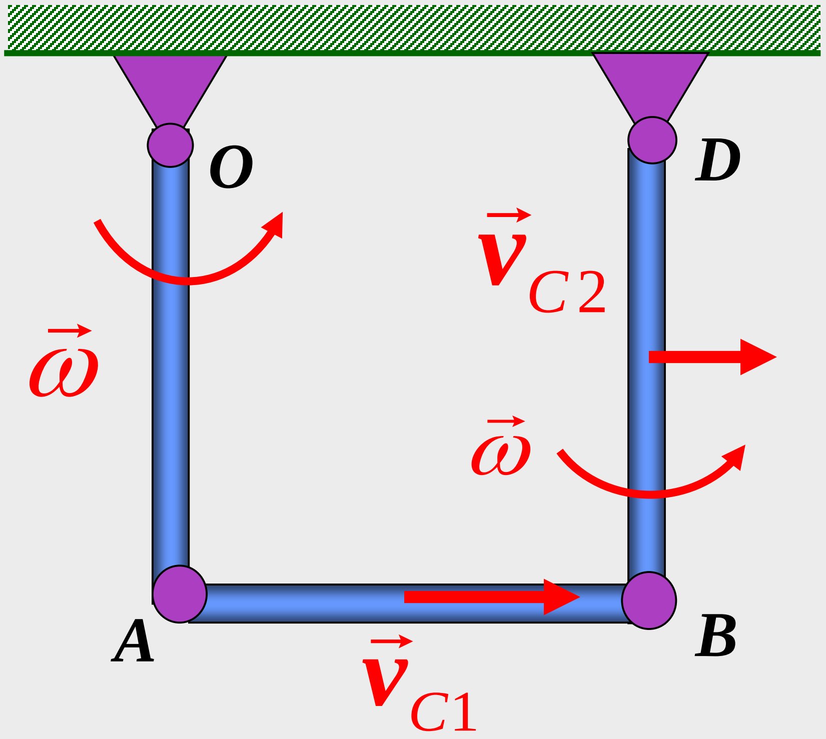
$$(L_O)_C = -J_C\omega_C + \frac{Q}{g}v_C(R-r)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2\frac{(R-r)\omega}{r} + \frac{Q}{g}(R-r)^2\omega$$

$$= \frac{Q}{2g}(R-r)(2R-3r)\omega$$

$$L_O = (L_O)_{OC} + (L_O)_C = \frac{p}{3g}l^2\omega + \frac{Q}{2g}(R-r)(2R-3r)\omega$$

例： 求系统在此瞬时对O轴的动量矩。设各杆长为L，质量为m



解： 分别计算每个刚体对O轴的动量矩

$$L_o(OA) = \frac{1}{3} mL^2\omega$$

$$L_o(AB) = mv_{C1}L = mL^2\omega$$

$$L_o(BD) = mv_{C2}\frac{L}{2} + \frac{1}{12}mL^2\omega$$
$$= \frac{1}{3}mL^2\omega$$

$$L_o = L_o(OA) + L_o(AB) + L_o(BD) = \frac{5}{3}mL^2\omega$$

刚体动量矩的计算

对任一点 O' 的动量矩与(相)对质心动量矩的关系：

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'C} \times \vec{p} + \vec{L}_C{}'$$

（1）平移刚体的动量对O’点之矩

$$\boxed{\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}}$$

（2）定轴转动刚体的动量对转轴z之矩

$$\boxed{L_z = J_z \omega}$$

（3）平面运动刚体的动量矩

对任一点 O'

$$\boxed{\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'C} \times m\vec{v}_C + J_C \vec{\omega}}$$

定轴转动可看作平面运动的特殊情况

4. 质点系的动量矩定理

质点系的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_O=\sum \boldsymbol{M}_0(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}&=\sum_j M_x(\vec{\boldsymbol{F}}_j)\\ \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}&=\sum_j M_y(\vec{\boldsymbol{F}}_j)\\ \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}&=\sum_j M_z(\vec{\boldsymbol{F}}_j)\end{aligned}\right\}$$

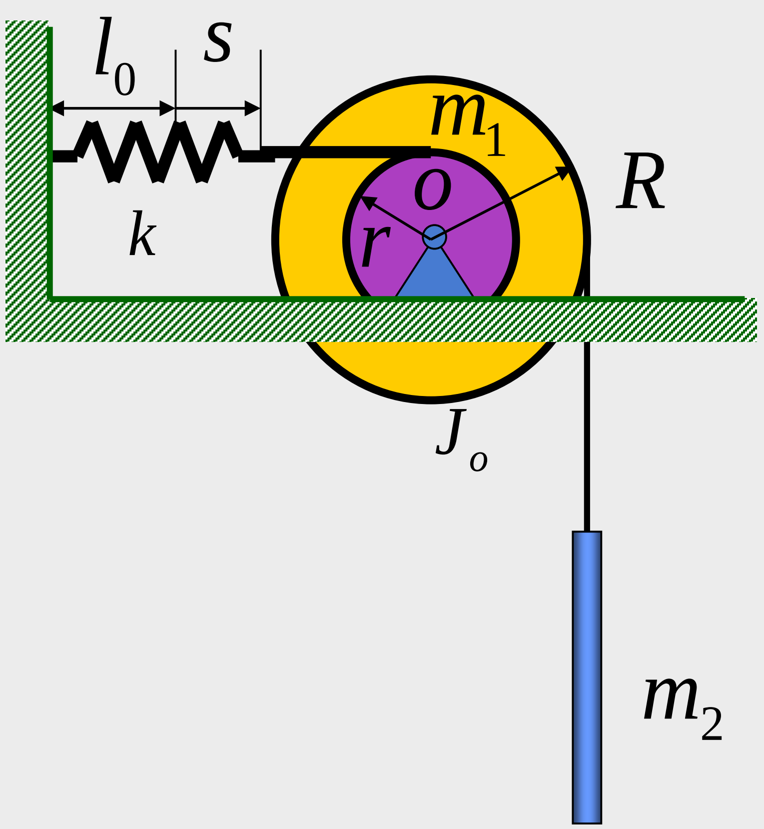
守恒：

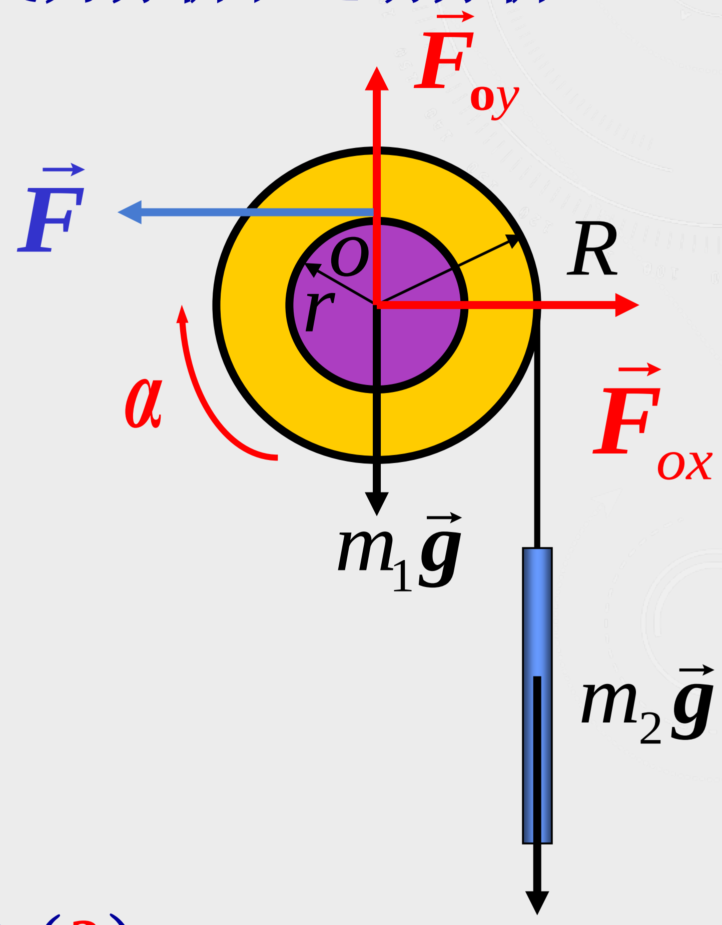
$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_j \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_j)\equiv 0\\ &\vec{\boldsymbol{L}}_O(t)=\vec{\boldsymbol{L}}_O(t_0)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_j M_x(\vec{\boldsymbol{F}}_j)\equiv 0\\ &L_x(t)=L_x(t_0)\end{aligned}}$$

例： 系统如图所示， $m_1 = m, m_2 = 2m$， $R = 2r, J_o = 2mr^2$ 弹簧刚度为**k**，原长 l_0。求弹簧伸长**s**时，杆的加速度和**O**轴的约束力

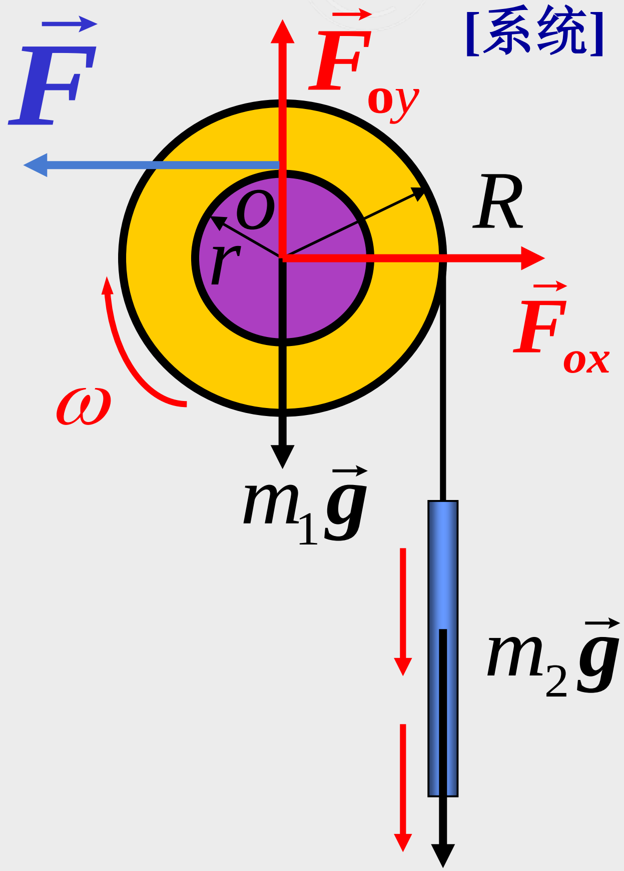
解： 取塔轮和杆为研究对象，进行受力分析和运动分析





1、受力分析： 判断未知量个数（**2**）

2、运动分析： **1**个自由度 以$\theta / \omega / \alpha$为运动未知量



$$m_1 = m, m_2 = 2m,$$

$$R = 2r, \quad J_o = 2mr^2$$

系统对O轴的动量矩：

$$L_o = J_o\omega + m_2 vR = 10mr^2\omega$$

$$M_o = m_2 gR - Fr$$

根据动量矩定理有 $\dfrac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(\boldsymbol{F}_j)$

$$10mr^2\dot{\omega} = 4mgr - ksr$$

$$\dot{\omega} = \frac{2g}{5r} - \frac{ksr}{10mr^2}$$

$$\boxed{a = R\dot{\omega}}$$

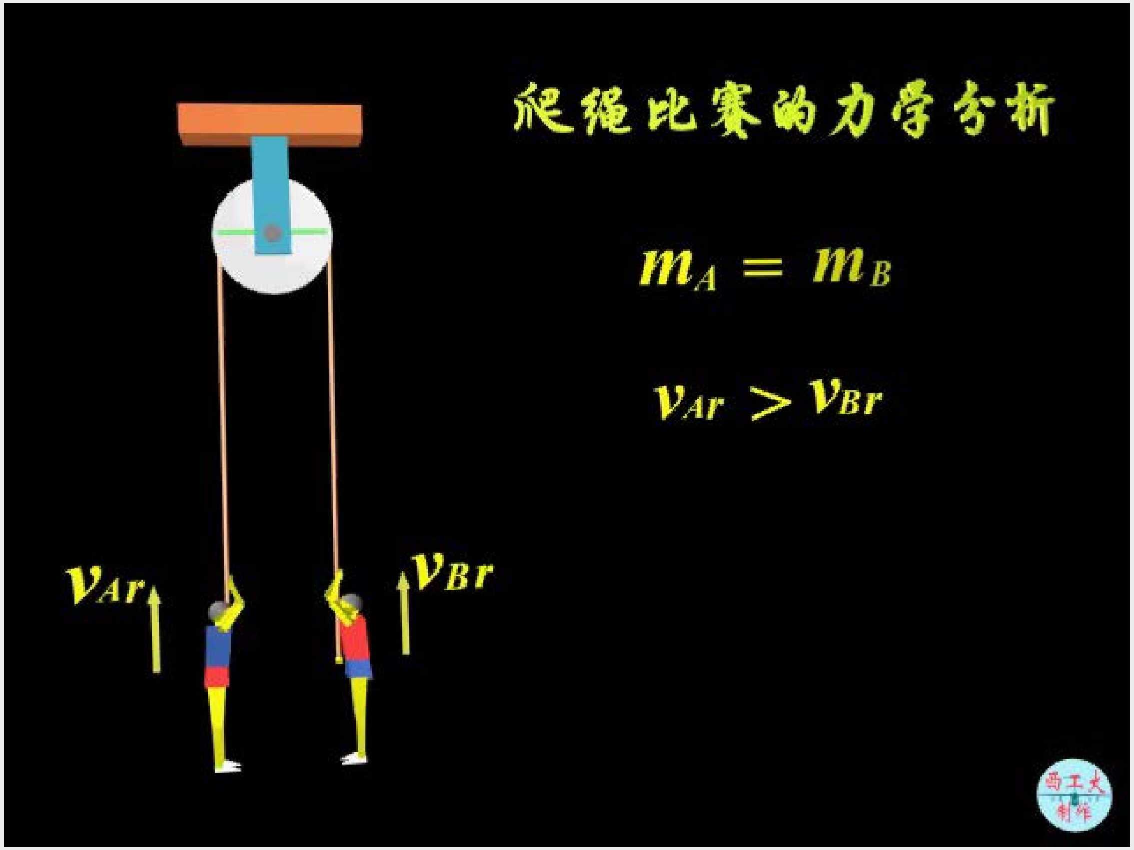
根据质心运动定理有 $m\vec{\boldsymbol{a}}_C = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_j$

$$x: \quad 0 = F_{ox} - F$$

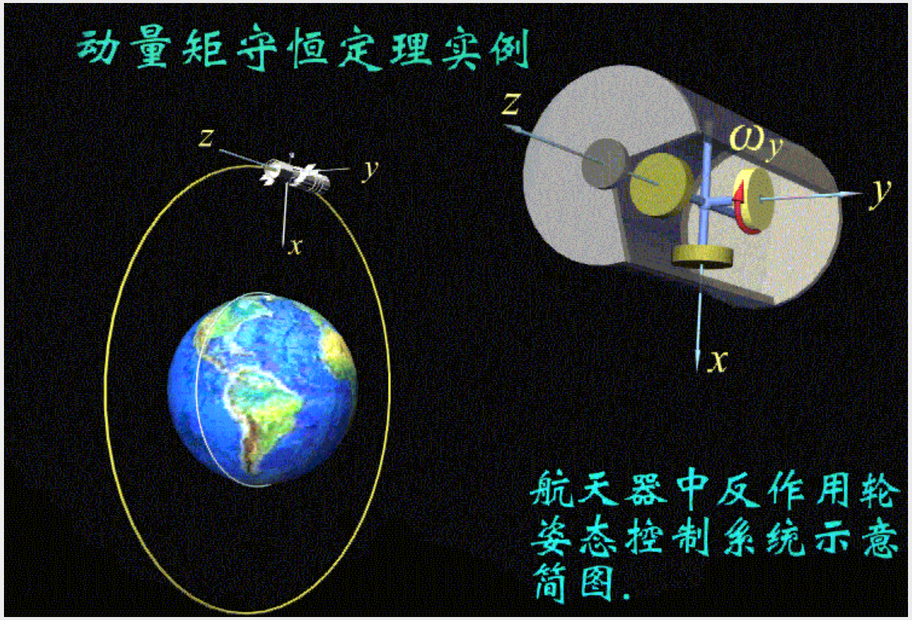
$$y: \quad -m_2 a = F_{oy} - (m_1 + m_2)g$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{ox} &= ks \\ F_{oy} &= (m_1 + m_2)g - m_2 a \end{aligned}}$$

谁最先到达顶点



直升飞机如果没有尾翼将发生什么现象



3. 刚体（平面）运动微分方程

1. 定轴转动刚体

刚体对z轴的动量矩 $L_z = J_z\omega$

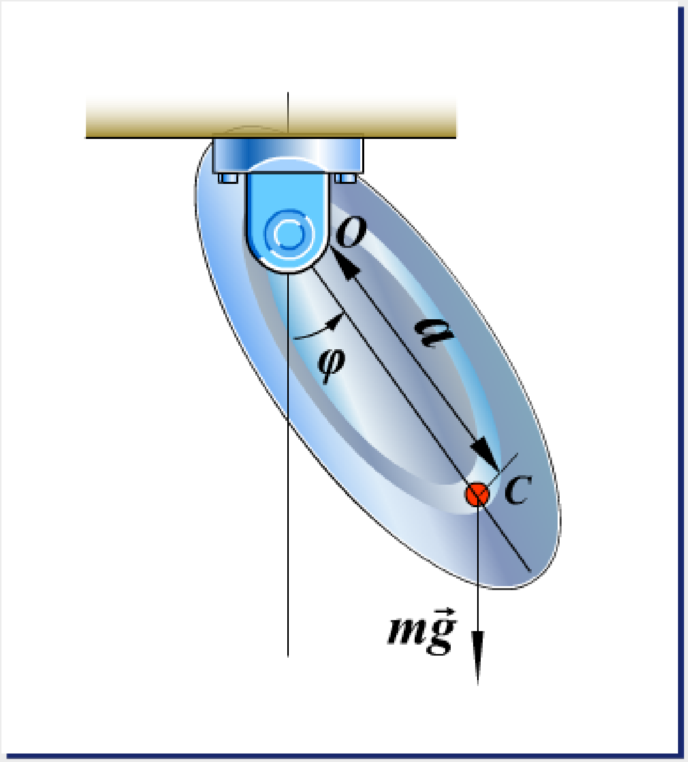
动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_z\omega = J_z\alpha = \sum M_z(\boldsymbol{F})$$

$$J_z\alpha = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i)$$

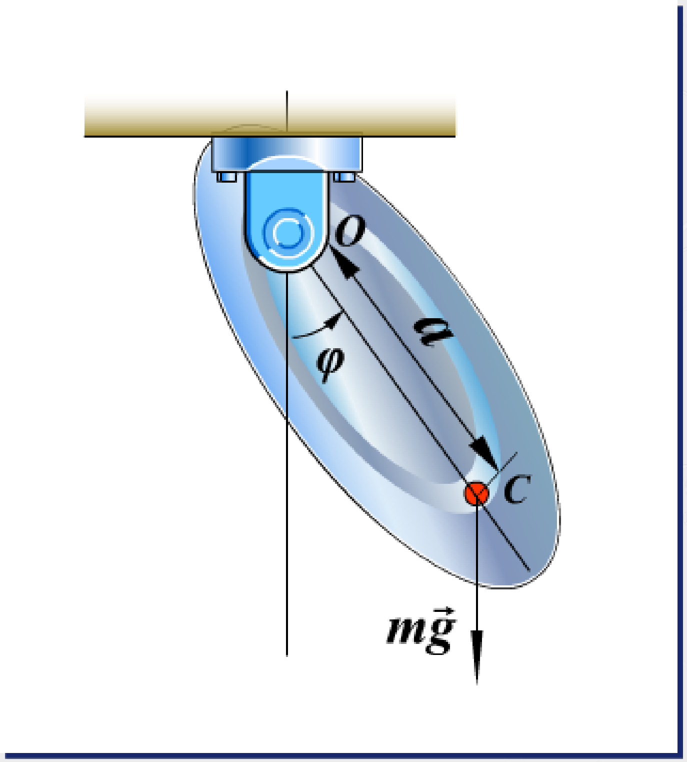
刚体定轴转动时的运动微分方程

质心运动定理： $m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{(e)}$ $m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{(e)}$

例： 物理摆（复摆），已知 m, J_O, a 求微小摆动的周期.



解： $$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-mga\sin\varphi$$



微小摆动时， $\sin\varphi\approx\varphi$

$$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-mga\varphi$$

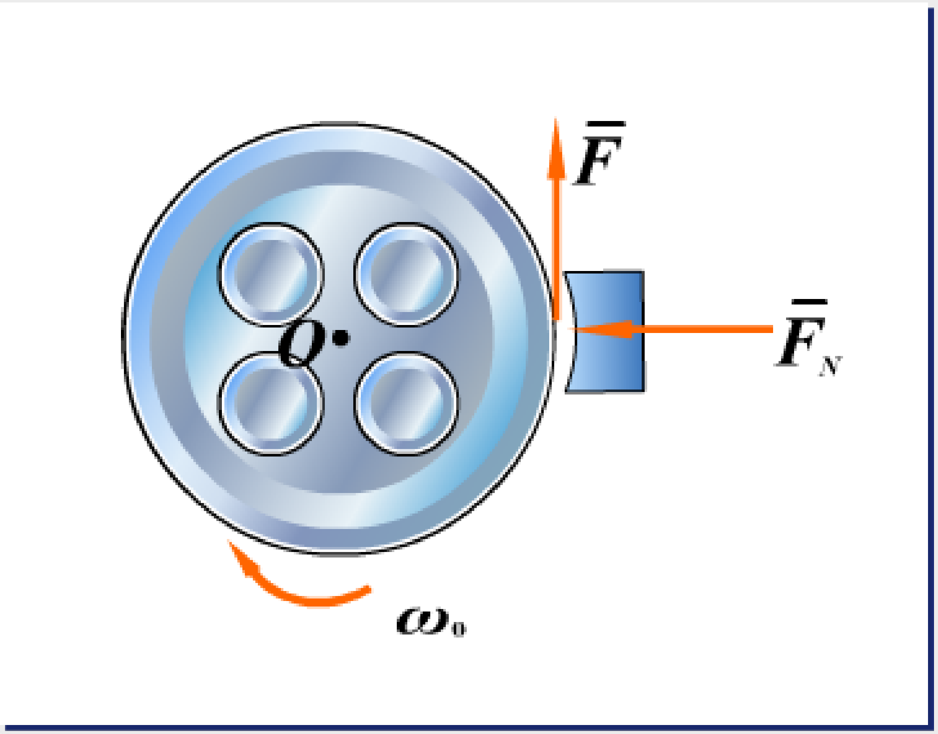
即： $$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mga}{J_O}\varphi=0$$

通解为 $$\varphi=\varphi_O\sin\left(\sqrt{\frac{mga}{J_O}}t+\theta\right)$$

φ_O 称***角振幅***, θ 称***初相位***，由初始条件确定.

周期 $$T=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mga}}$$

例： 已知 J_O, ω_0, F_N, R，动滑动摩擦系数 f，求制动所需时间 t .



解：

$$J_o \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = FR = f\,F_N R$$

$$\int_{-\omega_o}^{0} J_o \mathrm{d}\omega = \int_0^t fF_N R\mathrm{d}t$$

$$t = \frac{J_o\omega_o}{fF_N R}$$

2. 一般平面运动刚体

相对质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_C = \sum M_C(\vec{F}_i)$$

注意：

1. 此处C为动点，动量矩定理只针对固定点，因此上式并非显然成立；
2. 只对质心的情况成立，对其他动点不成立。

对质心的动量矩定理：

注意：只能对**质心**列！

$$\frac{\mathrm{d}(J_C\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t}=\sum_j M_{Cz}(\vec{\boldsymbol{F}}_j) \Rightarrow \boxed{J_C\ddot{\varphi}=\sum_j M_C(\vec{\boldsymbol{F}}_j)}$$

质心运动定理：

$$m\ddot{x}_{\mathrm{C}}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}^{(\mathrm{e})}$$

$$m\ddot{y}_{\mathrm{C}}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}^{(\mathrm{e})}$$

刚体的平面运动微分方程

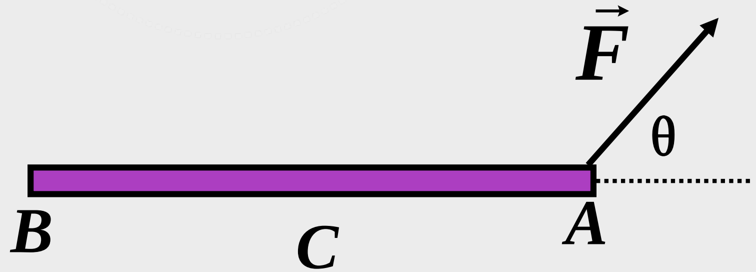
问：平动刚体的动力学方程？

例：质量m、长度l的均质杆静止搁在光滑的水平面上。现在其A端作用一个集中力F如图示（F也在水平面内），试求此时质心C点的加速度和杆的角加速度。

1. 受力分析: ➡ 无未知量

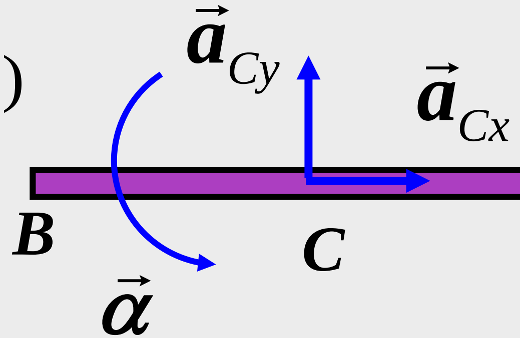
2. 运动分析: 有3个运动未知量

➡ 自由度:3　α、a_{Cx}、a_{Cy}



解：　[AB]

对质心动量矩定理：$J_C\alpha = \sum M_C(F_i)$



➡ $$J_C\alpha = \frac{1}{2}F\sin\theta\cdot l$$

质心运动定理：$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i$

➡ "x": $ma_{Cx} = F\cdot\cos\theta$

"y": $ma_{Cy} = F\cdot\sin\theta$

➡ $$\alpha = \frac{6F\sin\theta}{ml}$$

$$a_{cx} = \frac{F\cdot\cos\theta}{m}$$

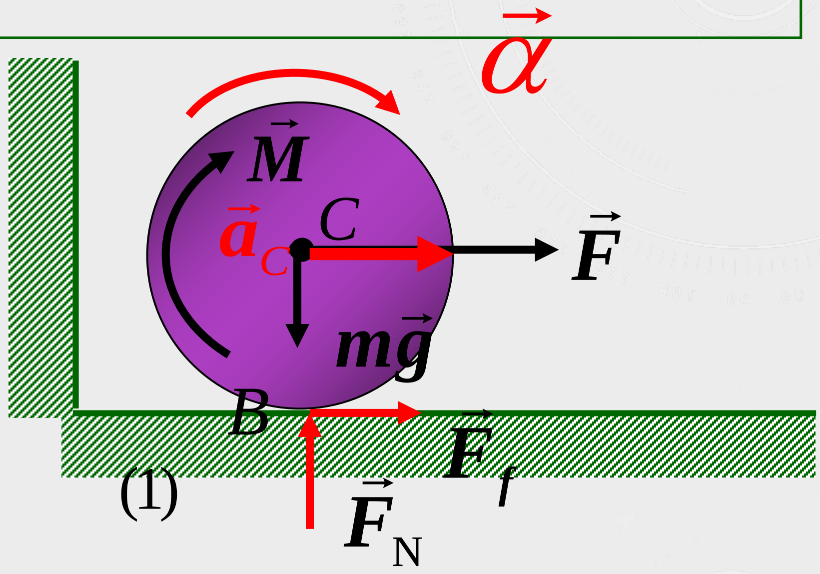
$$a_{cy} = \frac{F\cdot\sin\theta}{m}$$

例：均质圆盘在水平面上纯滚动，其质量和半径分别为：**m, R**．圆盘上作用有力 ***F*** 和力偶 ***M***，求圆盘的角加速度，质心加速度和摩擦力。

[圆轮]　受力分析、运动分析

2个力未知

1个自由度，
1个未知



解：[圆轮]

质心运动定理:

$$"x":\quad m\ddot{x}_{Cx}=\sum F_{ix}\qquad ma_C=F+F_f\qquad (1)$$

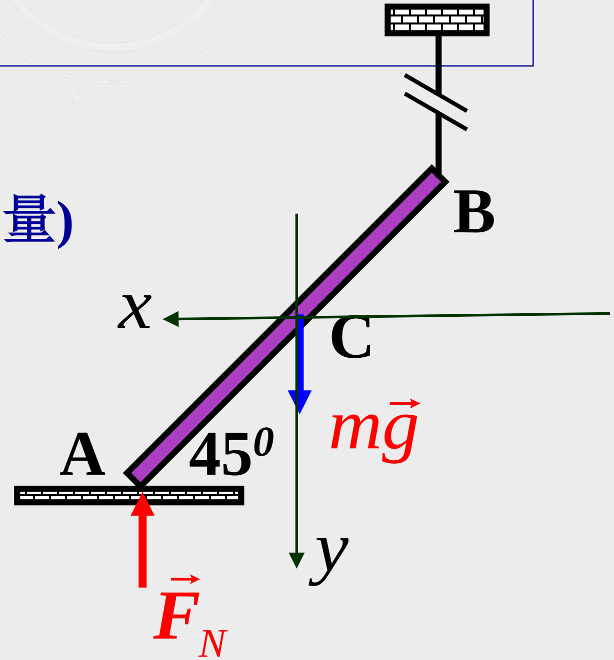
$$"y":\quad m\ddot{x}_{Cy}=\sum F_{iy}\qquad 0=F_N-mg\qquad (2)$$

角加速度：$\frac{1}{2}mR^2\alpha=M-F_fR$　(3)

运动补充方程:　$a_C=R\alpha$　(4)

解得:　$a_C=\dfrac{2(M+FR)}{3mR},\quad \alpha=\dfrac{2(M+FR)}{3mR^2},\quad F_f=\dfrac{2M}{3R}-\dfrac{F}{3}$

例： 质量*m*、长度*l*的均质杆初始时刻被光滑的水平面和绳索约束，平衡于图示位置。现突然将绳索剪断，试求剪断后瞬时A处的约束反力。



1. 受力分析 ⟹ 1未知量

2. 运动分析 ⟹ 2个自由度(有2个运动未知量)

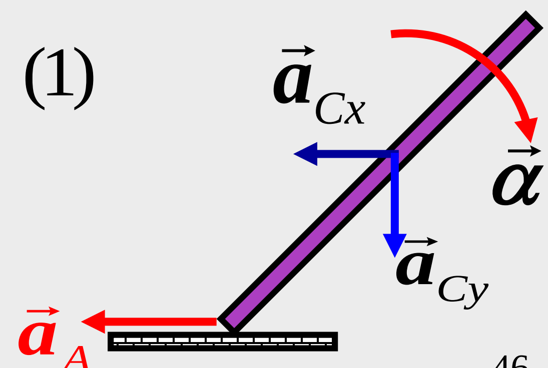
问题： 如何设定运动量

⟹ 以a_A、α为运动未知量

解：[AB杆]

对质心的动量矩定理： $J_C\alpha = \sum M_C(F_i)$

$$J_c\alpha = F_N \cdot \frac{l}{2}\cos 45^0 \qquad (1)$$



质心运动定理:

$$"x": \quad ma_{Cx} = 0 \qquad (2)$$

$$"y": \quad ma_{Cy} = mg - F_N \qquad (3)$$

要建立质心加速度与设定运动量之间的关系

a_{Cx}、$a_{Cy} \Leftrightarrow a_A, \alpha$

$$J_c\alpha = F_N \cdot \frac{l}{2}\cos 45^0 \qquad (1)$$

$$ma_{Cx} = 0 \qquad (2)$$

$$ma_{Cy} = mg - F_N \qquad (3)$$

要建立质心加速度与设定运动量之间的关系

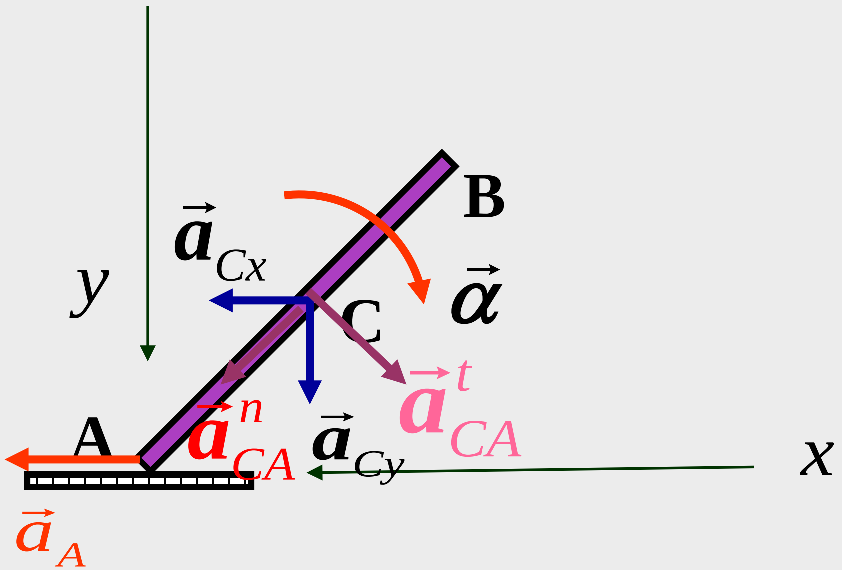
a_{Cx}、a_{Cy} $\Longleftrightarrow$ a_B、α

基点法:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^t$$

$$\text{"}x\text{"}: \quad a_{Cx} = a_A - a_{AC}^t \sin 45^\circ$$

$$\text{"}y\text{"}: \quad a_{Cy} = a_{AC}^t \cos 45^\circ$$



运动补充方程:

$$a_{Cx} = a_A - \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha l \qquad (4)$$

$$a_{Cy} = \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha l \qquad (5)$$

解得: $F_N = \dfrac{2mg}{5}$

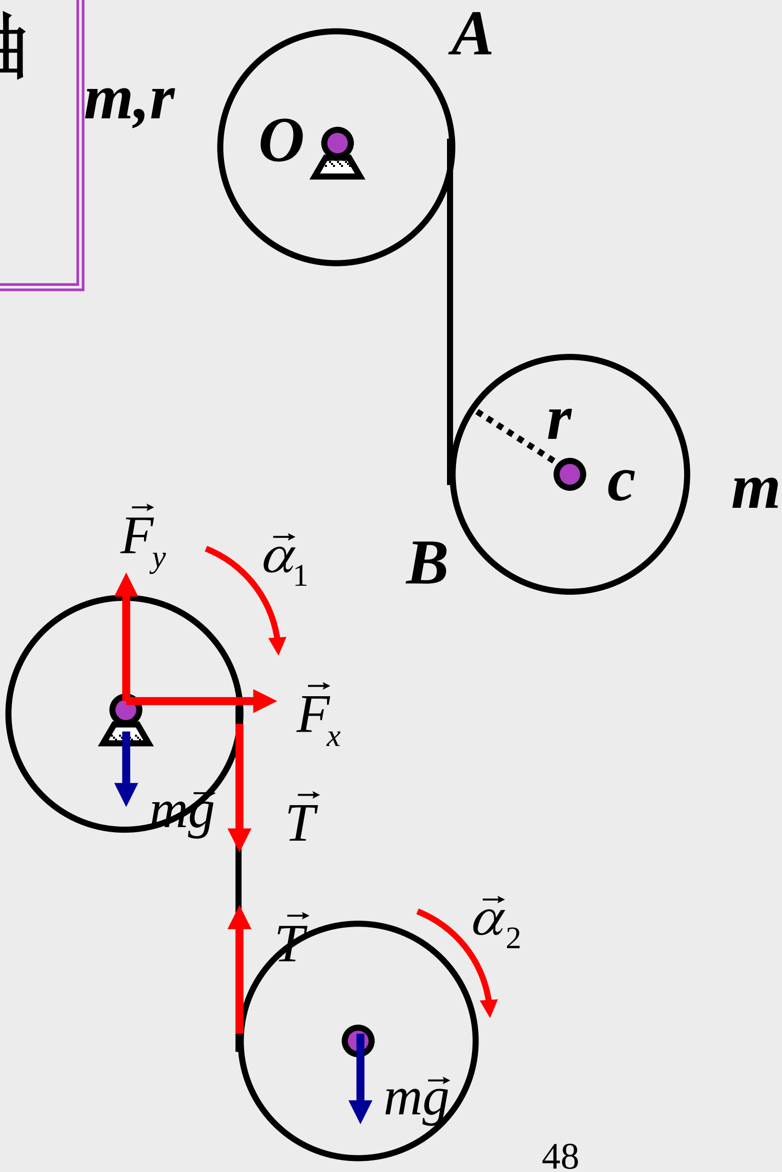
例：*A*、*B*质量均为*m*，半径*r*，轴承摩擦不计。
求：*B*下落时质心加速度.

[整体]：受力分析、运动分析

3未知量　　2未知量

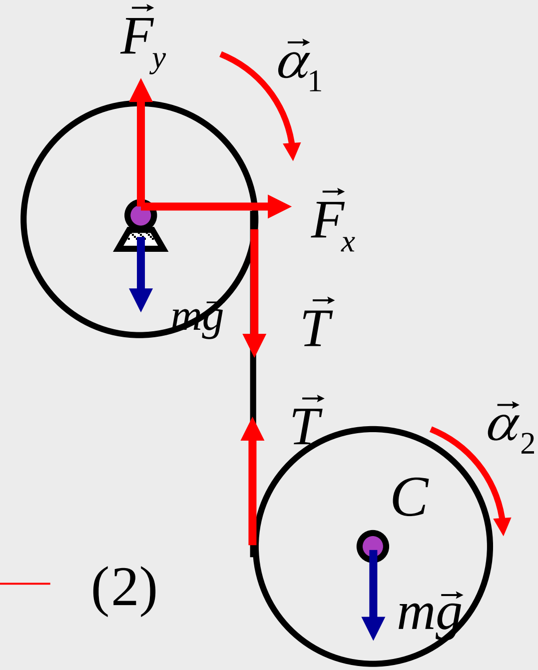
[隔离体]：受力分析

分别隔离两个轮列方程



解：[轮1]： $J_O\alpha_1 = \sum M_O(\vec{F}_i)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mr^2\alpha_1 = Tr \quad —— \quad (1)$$



$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_j \Rightarrow \begin{cases} \cancel{"x" \quad F_x = 0} \\ \cancel{"y" \quad F_y - mg - T = 0} \end{cases}$$

[轮2]： $J_C\alpha_2 = \sum M_C(\vec{F}_i) \Rightarrow \frac{1}{2}mr^2\alpha_2 = Tr \quad —— \quad (2)$

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_j \Rightarrow \begin{cases} \cancel{"x" \quad 0 = 0} \\ "y" \quad -T + mg = ma_C \end{cases} \Rightarrow -T + mg = m(\alpha_1 r + \alpha_2 r) \quad —— \quad (3)$$

由（1）～（3） $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{2g}{5r} \qquad a_c = \dfrac{4g}{5}$

在绳上建立随绳平动的动系，

动系平动加速度： $a_e = \alpha_1 r$

$\Rightarrow a_C = \alpha_1 r + \alpha_2 r$

轮2质心C相对动系的加速度： $a_r = \alpha_2 r$

动力学问题类型

$$ma_{Cx} = F_{Rx}$$
$$ma_{Cy} = F_{Ry}$$
$$J_C\alpha = \sum M_C(\vec{F}_j)$$

1、单刚体问题

未知量：约束力、运动未知量(加速度/速度/位移)

若只要求解运动加速度，需求解代数方程；
若要明确速度或位移与时间的变化，需求解微分方程(组)

关键：正确判断未知量个数，
特别是运动未知量个数(自由度数)。

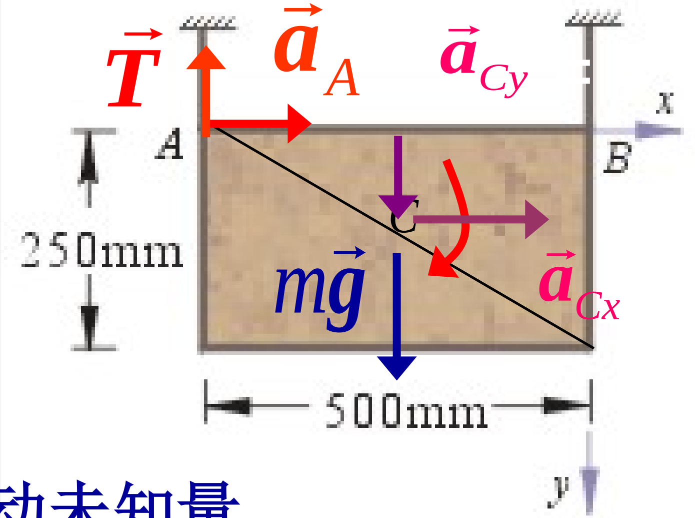
2、多刚体问题　　整体分析、隔离体分析

未知量：约束力、运动未知量(加速度/速度/位移)

外约束力、内连接约束力

3. 附加例题（供自习）

例 4kg的均质板静止悬挂。求：*B*点的绳或弹簧被剪断的瞬时，质心加速度各为多少。



1.考虑第一种情况:

受力分析：1个未知

运动分析：**2个自由度，选a_A、α为运动未知量**

解：[板] 对质心的动量矩定理:

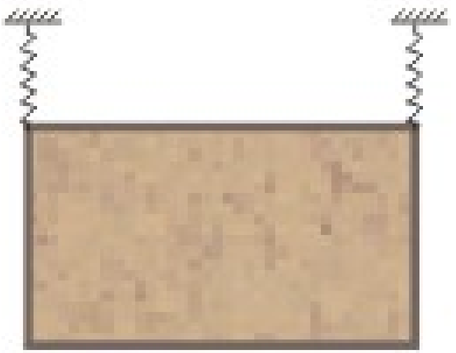
$$J_C\alpha = T\times 0.25 \qquad (1)$$

质心运动定理:

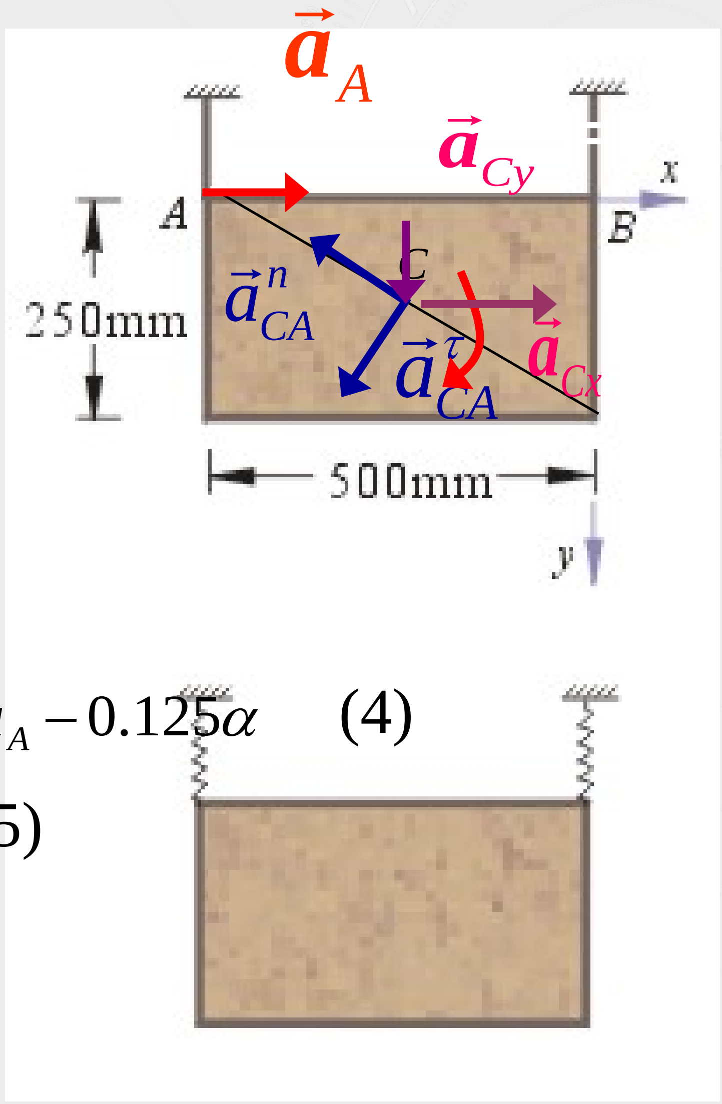
$$"x": \quad ma_{Cx} = 0 \qquad (2)$$

$$"y": \quad ma_{Cy} = mg - T \qquad (3)$$

质心运动可用a_A、α表示



$$
\begin{cases}
J_C\alpha = T\times 0.25 & (1)\\
ma_{Cx} = 0 & (2)\\
ma_{Cy} = mg - T & (3)
\end{cases}
$$



因 $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{CA} + \vec{a}^t_{CA}$

初瞬时 $\omega=0$ 则有 $a^n_{CA} = 0$

所以

$$"x":\ a_{Cx} = a_A - a^t_{CA}\sin\theta = a_A - \alpha|AC|\sin\theta = a_A - 0.125\alpha \qquad (4)$$

$$"y":\ a_{Cy} = a^\tau_{CA}\cos\theta = |AC|\cdot\alpha\cos\theta = 0.25\alpha \qquad (5)$$

联立解(1)～(5)式

$$\alpha = \frac{12}{17}\cdot\frac{g}{0.25}, \qquad a_C = \frac{12}{17}g = 6.92\ \ \mathrm{m/s^2}$$

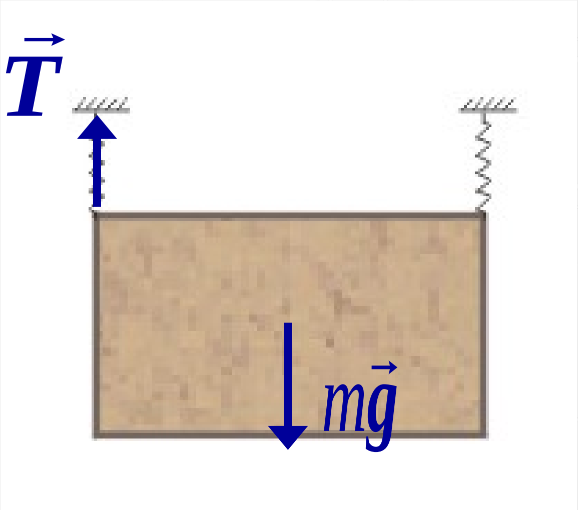
方向竖直向下

2.考虑第二种情况，受力分析如下，

初瞬时弹簧还未变形，弹簧力为

$$T = \frac{1}{2}mg$$

运动分析：3个自由度



解：[板] 对质心的动量矩定理：

$$J_C\alpha = T \times 0.25 \qquad (1)$$

质心运动定理：

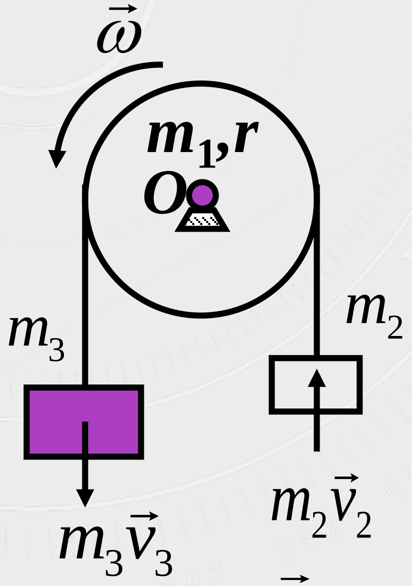
$$"x": \quad ma_{Cx} = 0 \qquad (2)$$

$$"y": \quad ma_{Cy} = mg - T \qquad (3)$$

解得：

$$a_C = a_{Cy} = \frac{g}{2} = 4.9\text{m/s}^2$$

例：几何尺寸和质量如图，圆盘匀质，m_3大于m_2。求图示系统中重物的**加速度**及滑轮两侧**绳的拉力**。



受力、运动分析 （2个力未知，1运动未知）

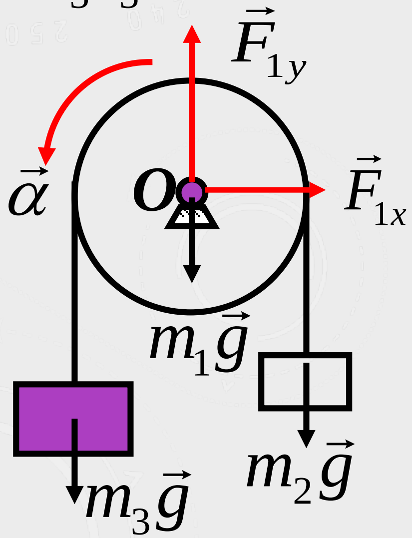
一个自由度，运动无已知 选α为运动未知量

解： [整体] $\dfrac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(\vec{F}_j)$

$$L_o = J_o\omega + m_3 v_3 r + m_2 v_2 r$$

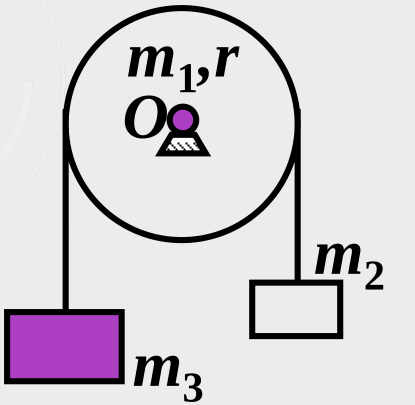
$$= \left(\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_3 r^2 + m_2 r^2\right)\omega$$

$$\left(\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_3 r^2 + m_2 r^2\right)\alpha = m_3 g r - m_2 g r$$



$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{2m_3 g - 2m_2 g}{m_1 r + 2m_3 r + 2m_2 r} \quad \Rightarrow \quad a = r\alpha$$

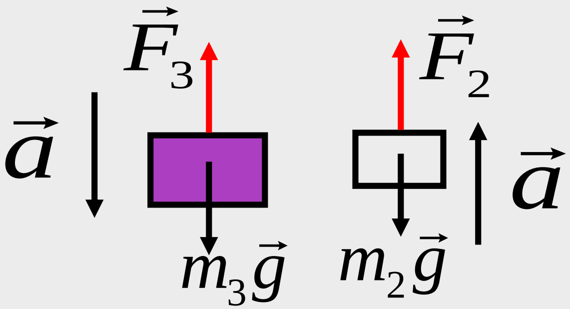
滑轮两侧绳的拉力



[m3]

$$\sum F_y = ma_{Cy} \qquad m_3 a = m_3 g - F_3$$

$$\Rightarrow F_3 = m_3 g - m_3 a = \frac{m_3(m_1 g + 4m_2 g)}{m_1 r + 2m_3 r + 2m_2 r}$$



[m2]

$$\sum F_y = ma_{Cy} \qquad m_2 a = F_2 - m_2 g$$

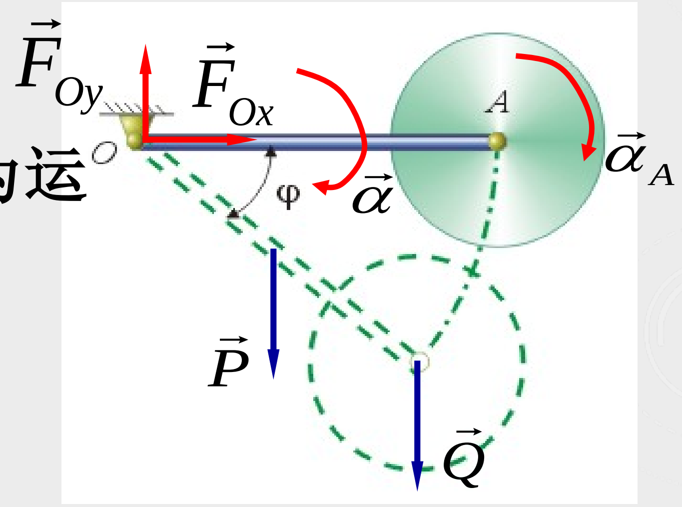
$$\Rightarrow F_2 = m_2 g + m_2 a = \frac{m_2(m_1 g + 4m_3 g)}{m_1 r + 2m_3 r + 2m_2 r}$$

滑轮两侧绳的拉力不同！

例

> 已知杆*OA*长为*l*，重为*P*。可绕过*O*点的水平轴在铅直面内转动，杆的*A*端用铰链铰接一半径为*R*、重为*Q*的均质圆盘，若初瞬时*OA*杆处于水平位置，系统静止。略去各处摩擦，求*OA*杆转到任意位置（用φ角表示）时的角速度ω及角加速度α。

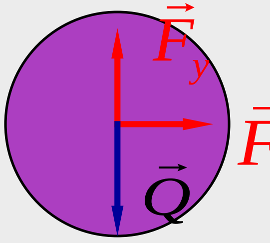
- 受力分析：　2个未知
- 运动分析：2个自由度　以α、α_A为运动未知量



解：　[圆轮] 受力如图

$$J_A\alpha_A = \sum M_A(F_i)$$

$$\longrightarrow J_A\alpha_A=0 \longrightarrow \alpha_A=0$$

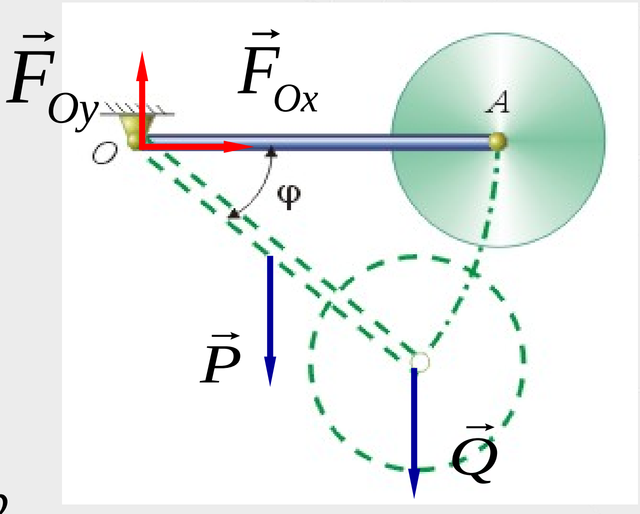


> 因此，$\omega_A=\omega_{A0}=0$，在杆下摆过程中，圆盘作平移。

求*OA*杆的角加速度α

[整体]：对*O*点应用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O(\vec{F}_j)$$



$$L_O=\frac{P}{3g}l^2\omega+\frac{Q}{g}l^2\omega=\frac{P+3Q}{3g}l^2\omega$$

$$\frac{P+3Q}{3g}l^2\alpha=P\frac{l}{2}\cos\varphi+Ql\cos\varphi=\frac{P+2Q}{2}l\cos\varphi$$

由上式解出 $$\alpha=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

求*OA*杆的角速度ω

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\omega=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi \Rightarrow \int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_0^{\varphi}\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$\omega=\sqrt{\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{l}\sin\varphi}$$

例：两根质量m、长度l的均质杆构成的系统如图示，开始静止。在B端受一个已知力F作用，试求此时两根杆的角加速度。

解：受力分析，运动分析

（力整体2未知，运动2未知）

[整体]：对固定点0的动量矩定理

$$\frac{11}{6}ml^2\alpha_1+\frac{5}{6}ml^2\alpha_2=F\cdot 2l \qquad (1)$$

[AB]，

对动点A用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A^{\,r}}{\mathrm{d}t}+\vec{r}_{AC}\times m\vec{a}_A=\sum\vec{M}_A(\vec{F}_j)$$

$$J_A\alpha_2+\vec{r}_{AC}\times m\vec{a}_A=F\cdot l$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{3}ml^2\alpha_2+\frac{1}{2}lm\alpha_1 l=F\cdot l \qquad (2)$$

(1) (2)可解得：α_2、α_1