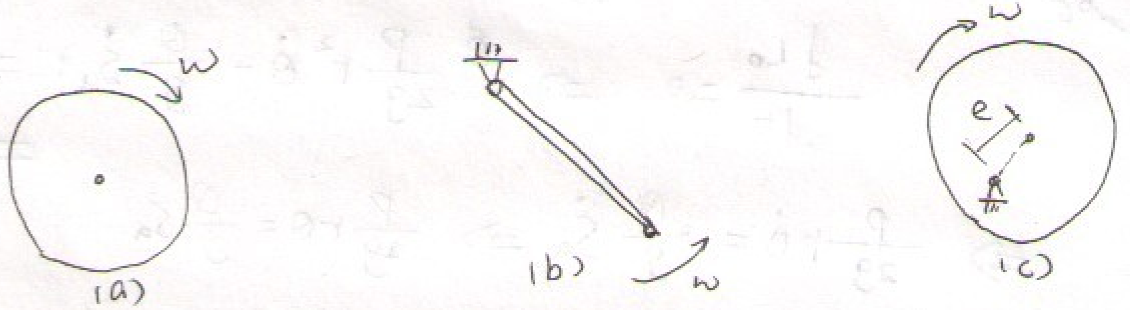
HW9

18-15. 如图 求3种情况物体的动量矩. (a) r, P, ω (b) l, P, ω

(c) r, e, P, ω



(a) (b) (c)

解 (a) $L_O = -\frac{1}{2}mr^2\omega = -\frac{P}{g}r^2\omega$

(b) $L_O = \cancel{\frac{1}{12}m}\,\frac{1}{3}ml^2\omega = \frac{Pl^2\omega}{3g}$

(c) $L_O = -(\frac{1}{2}mr^2 + me^2)\omega = -\frac{P}{g}(\frac{r^2}{2}+e^2)\omega$

或 $L_O = -m\cdot \omega e\cdot e - \frac{1}{2}mr^2\omega = -\frac{P}{g}(\frac{r^2}{2}+e^2)\omega$ (#)

18-16, 如图1970年人造卫星, 地球看作固定点, 近地 439km, 远地2384km

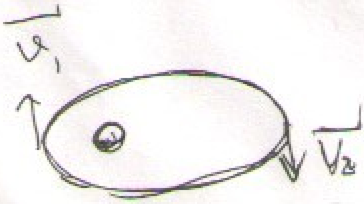
半径为6370km, 求卫星在远地点速度 V_2

如已知在近地点 $v_1 = 8.12$ km/s,

解: 由动量矩守恒, 故有 $mv_1\cdot(439+6370) = mV_2\cdot(2384+6370)$

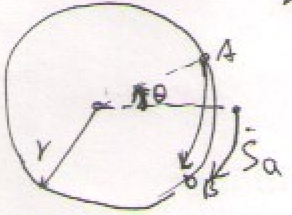
$$V_2 = \frac{8.12\times(\overset{6809}{439+6370})}{(\underset{8754}{2384+6370})} = 6.32\text{km/s}$$

(#)



18-18：水平圆盘均质，重P，半径r，绕轴转动，重Q的人按 $s=at^2/2$ 规律沿盘缘顺时针行走，设开始时静止，求圆盘角速度ω与角加速度

解：设圆盘转角为θ，人（向左转下）的绝对运动的弧长为 s_a。



则系统绕轴角动量守恒，有

$$\frac{dL_O}{dt}=0 \Rightarrow \frac{P}{2g}r^2\dot{\theta}-\frac{Q}{g}\dot{s}_a r=\text{Const}=0\Big|_{t=0}$$

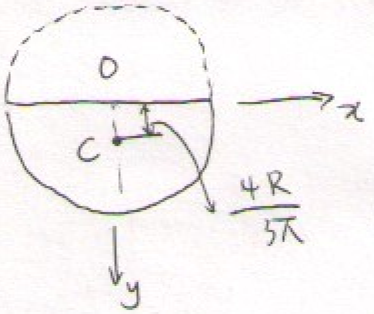
$$\Rightarrow \frac{P}{2g}r\dot{\theta}=\frac{Q}{g}\dot{s}_a \Rightarrow \frac{P}{2g}r\theta=\frac{Q}{g}s_a$$

$$s=\cancel{r\theta+s_a}\ r\theta+s_a=r\theta+\frac{P}{2Q}r\theta$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{s}{\left(1+\frac{P}{2Q}\right)r} \Rightarrow \omega=\dot{\theta}=\frac{2Q}{P+2Q}\frac{\dot{s}}{r}=\frac{2Q}{(P+2Q)r}at$$

$$\alpha=\ddot{\theta}=\frac{2Q}{(P+2Q)r}a \quad (\#)$$

18-21. R, m 均质半圆盘 求 (1) 对x轴的转动惯量 (2) 对垂直于平面且通过圆盘中心的O轴的转动惯量, (3) 对平行于O轴的 ~~质轴~~ 质心C的转动惯量



解: (1) $J_x=\int_{半圆} y^2 dm = \frac{1}{2}\int_{圆} y^2 dm$

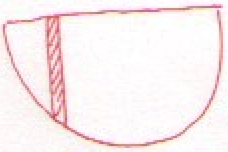
$=\frac{1}{4}\int_{圆}(x^2+y^2)dm = \frac{1}{4}\cdot(2m)r^2=\frac{1}{4}mr^2$

(2) $J_O=\int_{半圆}(y^2+x^2)dm=\frac{1}{2}\int_{圆}(x^2+y^2)dm=\frac{1}{2}mr^2$

(注, 本题也可积分)

(3) $J_C=J_O-md^2=\frac{1}{2}mr^2-m\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$

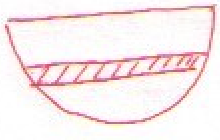
$=\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$ (#)



$\int\frac{1}{3}dm\,\ell^2$

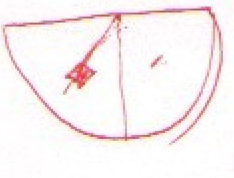
$=\int\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dm$

$=\frac{1}{3}\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\rho\, dx$ 或



$=$ -----

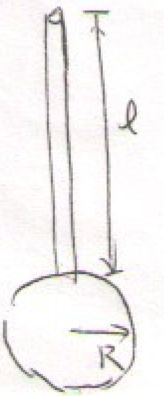
或



$\int(r\cos\theta)^2 dm$

$=\iint(r\cos\theta)^2\rho\, r\, d\theta\, dr$

18-22. 杆 P_1, ℓ 圆盘 P_2, R, 求 J_O

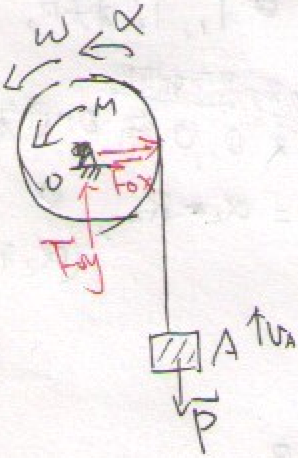


$J_O=\frac{1}{3}\frac{P_1}{g}\ell^2+\frac{P_2}{2g}R^2+\frac{P_2}{g}(\ell+R^2)$

HW9-6

18-20. 如图. 滑轮重Q, 半径R, 对O的回转半径为ρ, 另一端重物P。滑轮上作用一不变转矩M, 求重物A的上升加速度和绳的张力

解: 受力如图; 对O点应用动量矩定理.

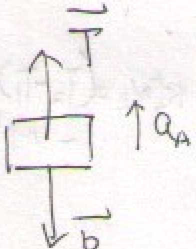


设O轮角速度为ω, 则A的速度为 $v_A = \omega R$

$$L_O = \frac{Q}{g}\rho^2\omega + \frac{P}{g}v_A R$$

$$= \left(\frac{Q}{g}\rho^2 + \frac{P}{g}R^2\right)\omega$$

$$\frac{dL_O}{dt} = \frac{Q\rho^2 + PR^2}{g}\alpha = M - PR$$



$$\Rightarrow \alpha = \frac{(M-PR)g}{Q\rho^2+PR^2} \Rightarrow a_B = \alpha R = \frac{M-PR}{Q\rho^2+PR^2}gR$$

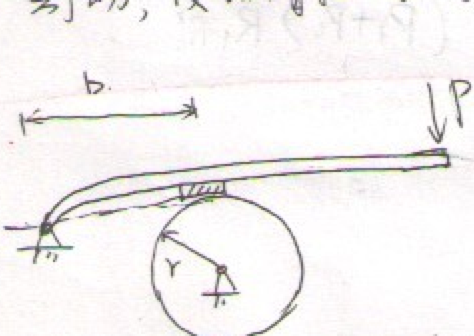
对A受力分析如图 有

$$\frac{P}{g}a_A = \vec{T} - P \Rightarrow T = P + \frac{P}{g}a_A = \frac{MR+Q\rho^2}{PR^2+Q\rho^2}P.$$ (#)

18-19. 如图, 均质轮重W, 半径r, 回转半径ρ, 以角速度ω转动。用闸杆制动, 设动摩擦因子f, 求若要求t秒内停止, 需加的力P

解. 对AB杆和轮轮受力分析如图.

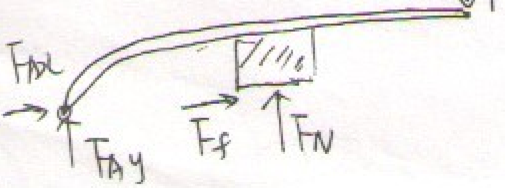
AB杆静止, O轮作定轴转动.



有 对[AB]杆有 $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$

$$F_N b - P l = 0 \Rightarrow F_N = \frac{Pl}{b}$$

有: $F_f = fF_N = \frac{Pl}{b}f$



对轮O 有: $J_O\alpha = \Sigma M_O$

运动方程:

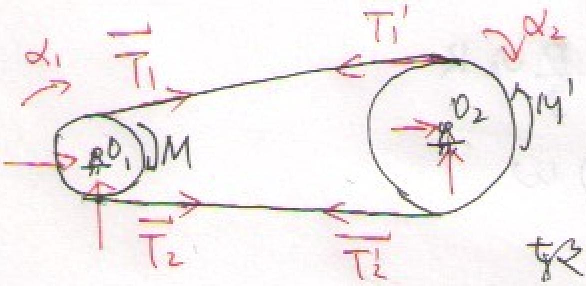
$$\Rightarrow \frac{W}{g}\rho^2\alpha = F_f R \Rightarrow \alpha = \frac{Pl}{b}fR\frac{g}{W\rho^2}$$

$$\cancel{\Rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{W\rho^2\omega b}{fPg}}$$

$$\alpha = \frac{w_0}{t} \Rightarrow \frac{fPlRg}{wbl^2} = \frac{w_0}{t}$$

$$\Rightarrow P = \frac{w_0 l^2 b}{fgRlt} W$$

18-29 两带轮 R_1, R_2 重量 P_1, P_2，若轮 O_1 作用 M，O_2 作用阻力矩 M'，带轮视为均质圆盘，求 O_2 角加速度



解：轮 O_1, O_2 受力分析如图. T_1, T_2 未知，约束反力未知.

轮 $O_1 O_2$ 运动分析：O_1O_2都是定轴转动 设 O_1, O_2 角加速度分别为 α_1, α_2 则 $\alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2$，($\alpha_2$ 未知)

轮 O_1 的运动方程.

$$J_{O_1}\alpha = M + T_1 R_1 - T_2 R_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}R_1^2\alpha_1 = M + (T_1 - T_2)R_1$$

轮 O_2 的运动方程

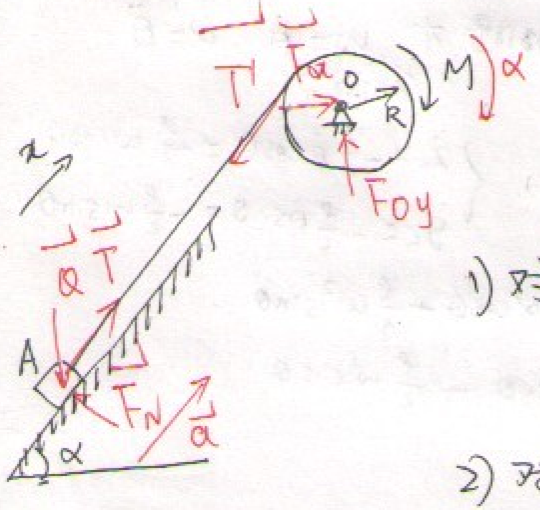
$$J_{O_2}\alpha = (T_2 - T_1)R_2 - M' \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_2^2\alpha_2 = (T_2 - T_1)R_2 - M'$$

消去 $(T_1 - T_2)$ 有， $\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}R_1\alpha_1 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_2\alpha_2 = M - M'$

$$\Rightarrow \alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2 = \cancel{\frac{M-M'}{2(P_1+P_2)}} g \quad \frac{\frac{M}{R_1} - \frac{M'}{R_2}}{(P_1+P_2)} 2g$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\frac{M}{R_1} - \frac{M'}{R_2}}{P_1 + P_2} 2\frac{g}{R_2} = \frac{2g(MR_2 - M'R_1)}{(P_1+P_2)R_1R_2^2} \quad (\#)$$

18-24 如图运送机构，卷筒半径R，均质圆盘，重P，倾角α，小车连同矿料重Q，作用主动转矩M，求小车加速度.



解：需分别对A和卷筒受力分析：

其中 T，FN，Fox，Foy 未知

运动分析，设小车加速度a，则卷筒角加速度 $\alpha=\frac{a}{R}$

1) 对A物体 x方向的运动方程

$$\frac{Q}{g}a = T - Q\sin\alpha$$

2) 对卷筒，转动方程：$J_O\alpha = M - TR$

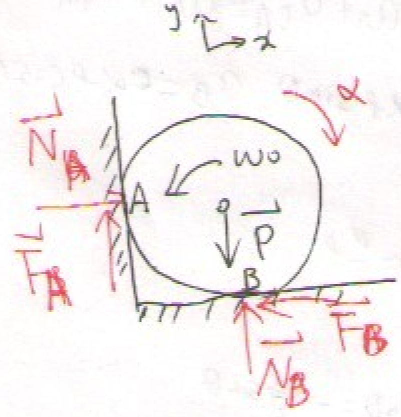
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\alpha = M - TR$$

消去T，得 $\frac{Q}{g}a\cdot R + \frac{P}{2g}R^2\alpha = M - QR\sin\alpha$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q}{g}R + \frac{P}{2g}R\right)a = M - QR\sin\alpha$$

$$a = \frac{2(M - QR\sin\alpha)}{(2Q+P)R}g \quad (\#)$$

18-26 如图，~~电动铰车提升P的重物，重~~：均质圆柱重P，半径r，初始角速度w_0，设A,B摩擦系数为f，问经过多少时间停止转动.



解，该圆柱在墙壁的摩擦作用下减速转动，至停止

1) 受力分析如图 N_A，N_B未知，$F_A = fN_A$，$F_B = fN_B$

运动分析：圆柱作定轴转动，设角加速为α(未知)

2) 对圆柱P，运动微分方程：

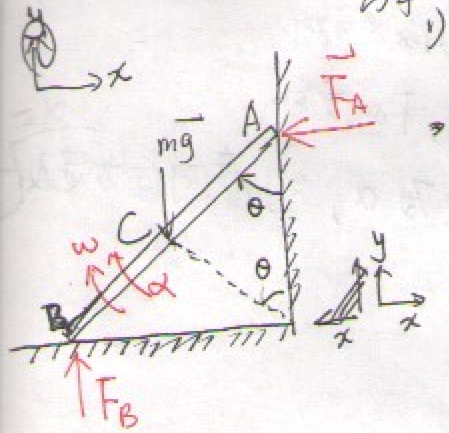
$$\begin{cases} 0 = N_A - F_B \\ 0 = P - F_A - N_B \\ \frac{P}{2g}r^2\alpha = F_A r + F_B r \end{cases} \Rightarrow$$

$$N_A = \frac{f}{1+f^2}P,\quad N_B = \frac{P}{1+f^2}$$

$$\alpha = \frac{f(1+f)}{1+f^2}\frac{2g}{r}$$

$$t = \frac{w_0}{\alpha} = \frac{1+f^2}{f(1+f)}\frac{r w_0}{2g}$$

18-29 如图AB杆质量m，长度l，略去摩擦，求杆在起始时角加速度



解：1) 受力分析 如图 $\vec{F_A}$, $\vec{F_B}$ 未知

运动分析：θ可用于描述AB的位置. 有 $\underbrace{\omega=\dot{\theta}}_{AB角速度}$, $\alpha=\ddot{\theta}$

由几何关系
$$\begin{cases} x_c = -\frac{l}{2}\sin\theta \\ y_c = \frac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_c = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta = -\frac{l}{2}\omega\cos\theta \\ \dot{y}_c = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta = -\frac{l}{2}\omega\sin\theta \end{cases}$$

有.
$$\begin{cases} \ddot{x}_c = -\frac{l}{2}\alpha\cos\theta + \frac{l}{2}\omega^2\sin\theta \\ \ddot{y}_c = -\frac{l}{2}\alpha\sin\theta - \frac{l}{2}\omega^2\cos\theta \end{cases}$$

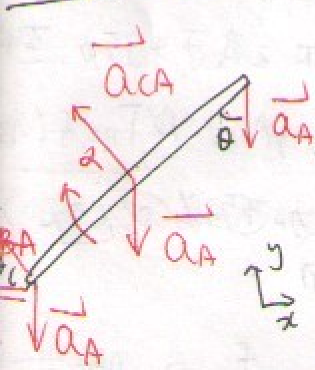
2) 刚体平面运动 微分方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = \frac{ml}{2}(-\alpha\cos\theta + \omega^2\sin\theta) = -F_A \\ m\ddot{y}_c = \frac{ml}{2}(-\alpha\sin\theta - \omega^2\cos\theta) = F_B - mg \\ \frac{1}{12}ml^2\alpha = -F_A\frac{l}{2}\cos\theta + F_B\frac{l}{2}\sin\theta \end{cases}$$

当 t=0 时, ω=0, 有
$$\begin{cases} \ddot{x}_c = -\frac{l}{2}\alpha\cos\theta \\ \ddot{y}_c = -\frac{l}{2}\alpha\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_A = \frac{ml}{2}\alpha\cos\theta, \quad F_B = -\frac{ml}{2}\alpha\sin\theta + mg \\ \alpha = \frac{-2g}{3l}\sin\theta \end{cases}$$

(#)

解法2 (只对于运动分析部分可运用几何方法而非解析方法)



① 速度分析：无初速度 ω=0, $v_A=v_B=0$

② 加速度分析：以A为基点 $\vec{a_B} = \vec{a_A} + \vec{a_{BA}} = \vec{a_A} + \vec{a_{BA}^{\tau}}$

因 $a_{BA} = \alpha l$, $\Rightarrow a_A = \alpha l\sin\theta$, $a_B = \alpha l\cos\theta$

同样, 有 $\vec{a_c} = \vec{a_A} + \vec{a_{CA}}$

其中 $a_A = \alpha l\sin\theta$, $a_{CA} = \frac{\alpha}{2}l$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{cx} = -\frac{\alpha l}{2}\cos\theta \\ a_{cy} = \frac{\alpha l}{2}\sin\theta - \alpha l\sin\theta = -\frac{\alpha l}{2}\sin\theta \end{cases}$$

(下同)