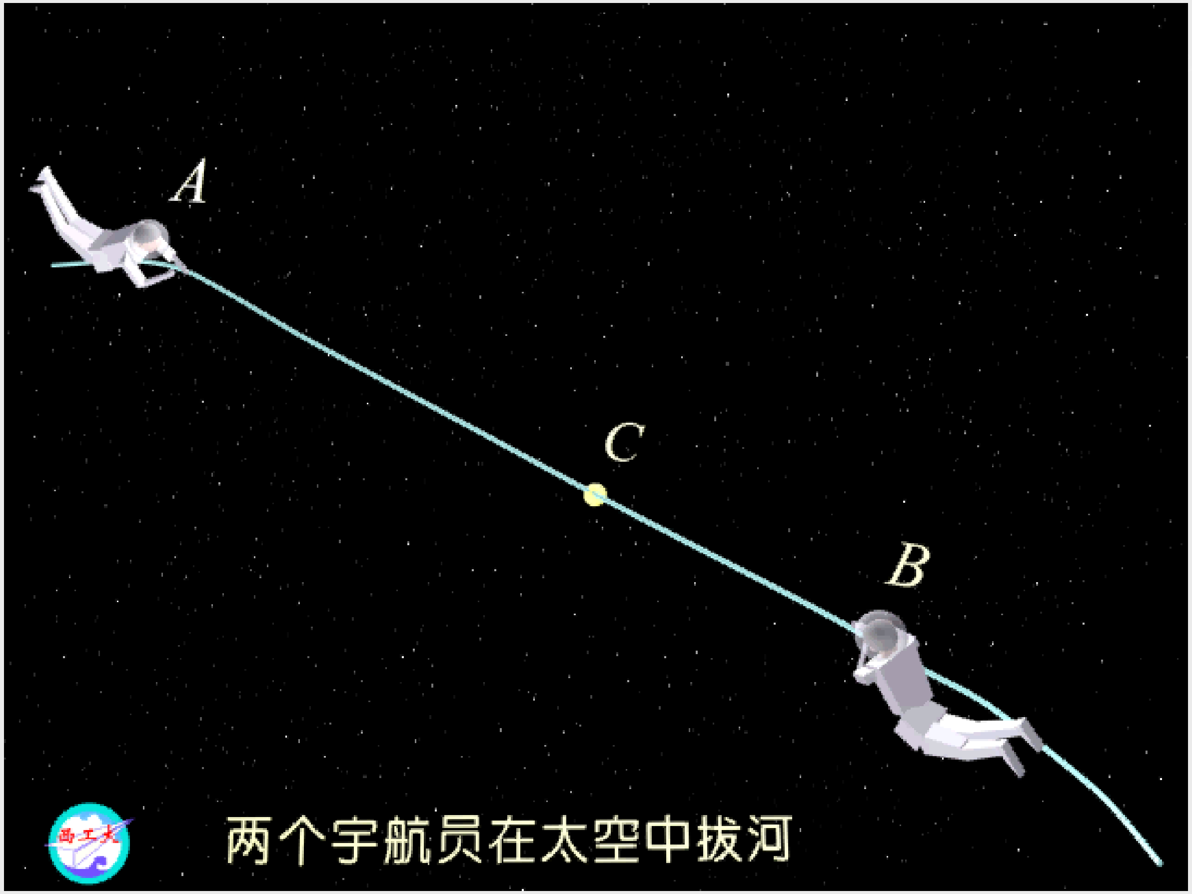
理论力学

吴 佰 建

动力学

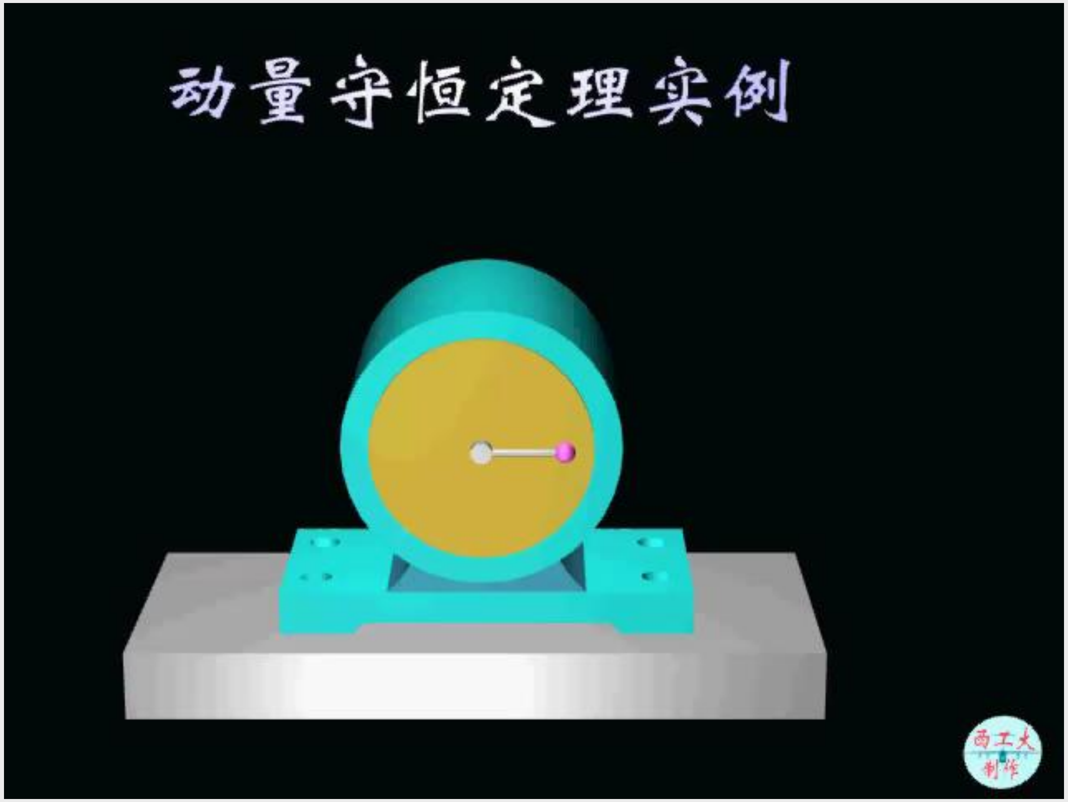
动量定理

实际问题1



太空拔河，谁胜谁负？

实际问题2

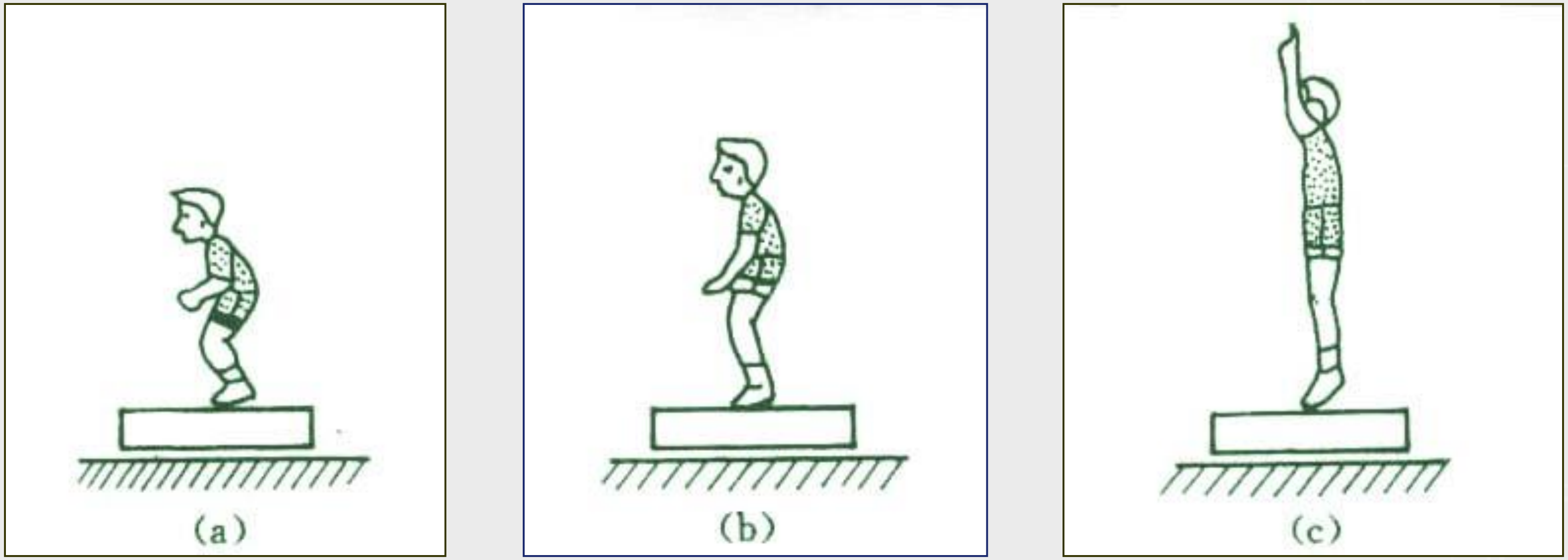


偏心转子电动机工作时为什么会左右运动？

这种运动有什么规律

会不会上下跳动

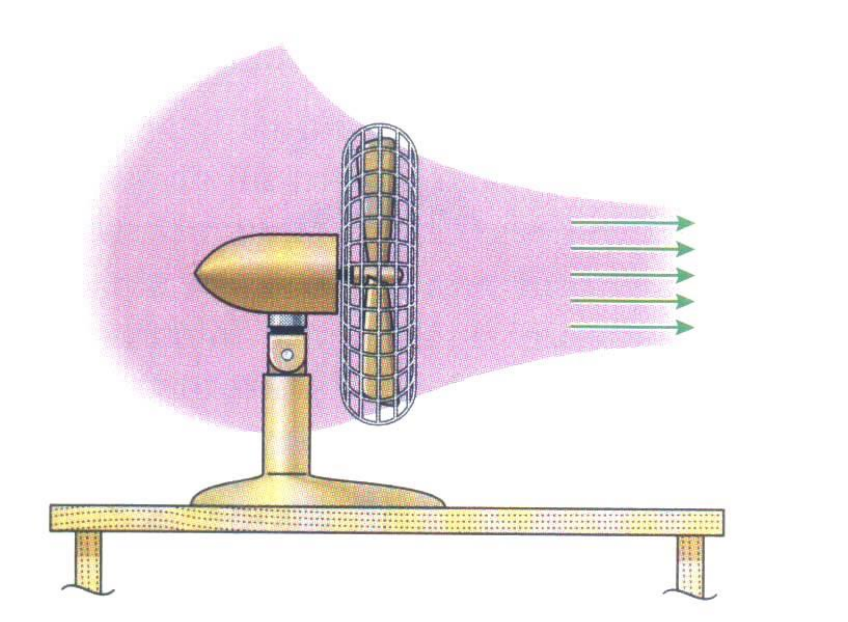
■ 实际问题3



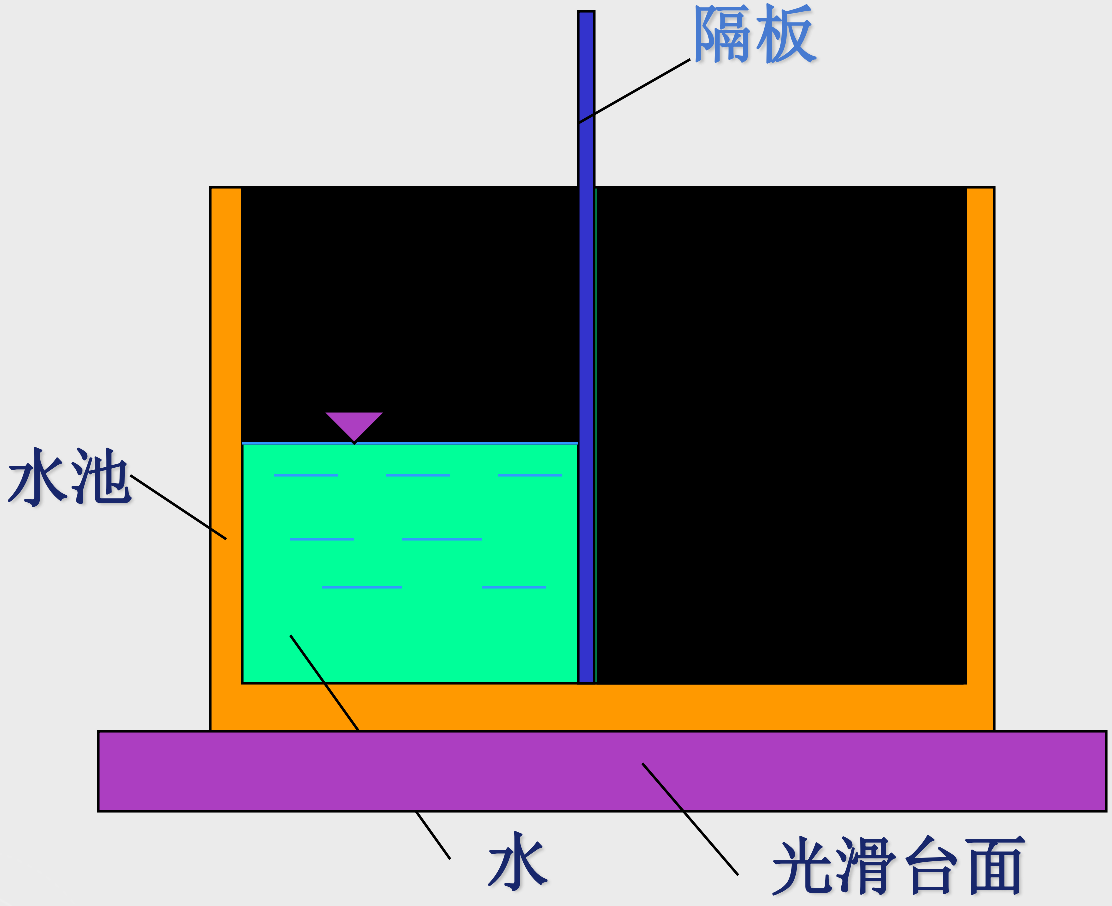
蹲在磅秤上的人站起来时磅秤指示数会不会发生的变化?

■ 实际问题4

台式风扇放置在光滑的台面上的台式风扇工作时，会发生什么现象？



实际问题5



抽去隔板后将会发生什么现象

?

1. 动量和冲量

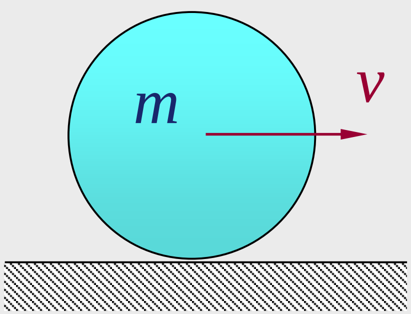
一、动量（Momentum）

定义： $\vec{p} = m\vec{v}$ 　　质点的质量与速度的乘积

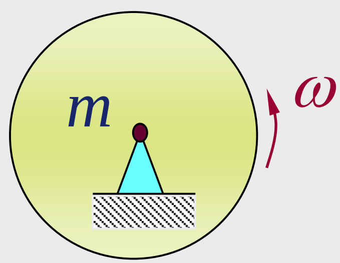
质点系： $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C$ 　　[Kg m/s](国际单位)

刚体系： $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_{Ci}$

$$\vec{p} = \sum m_i v_{ix}\vec{i} + \sum m_i v_{iy}\vec{j} + \sum m_i v_{iz}\vec{k} = mv_{Cx}\vec{i} + mv_{Cy}\vec{j} + mv_{Cz}\vec{k}$$



$p=mv$



$p=0$

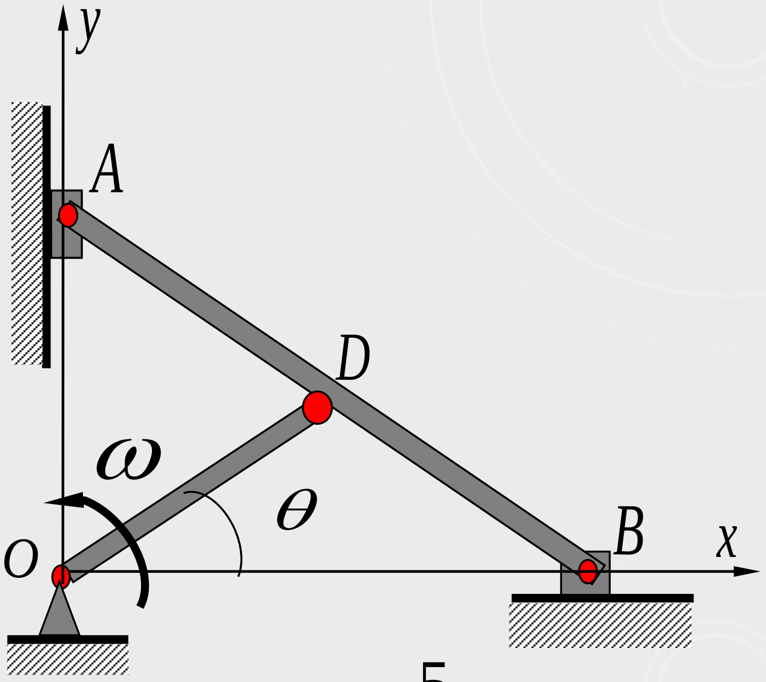
$p=0$

例: 已知椭圆规的匀质杆 *AB* 与质量为 $2m_1$, 匀质杆*OD*质量为 m_1，物块 *A*, *B* 质量为 m_2，*OD*=*AD*=*BD*=*l*。试求物系的动量。

解:

$$x_c = \frac{m_1 \frac{l}{2}\cos\omega t + 2m_1 l\cos\omega t + m_2 2l\cos\omega t}{3m_1 + 2m_2}$$

$$y_c = \frac{m_1 \frac{l}{2}\sin\omega t + 2m_1 l\sin\omega t + m_2 2l\sin\omega t}{3m_1 + 2m_2}$$



$$p_x = m\dot{x}_c = -\omega l\sin\omega t(\frac{5}{2}m_1 + 2m_2) \quad p_y = m\dot{y}_c = \omega l\cos\omega t(\frac{5}{2}m_1 + 2m_2)$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = l\omega(\frac{5}{2}m_1 + 2m_2)$$

$$\tan\alpha = \frac{p_y}{p_x} = \tan\omega t$$

二、冲量（Impulse）

定义：力在某一时间段里的累积效应

1、常力 $\vec{I}=\vec{F}\,t$

2、变力：

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t$$

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\cdot\mathrm{d}t \qquad I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\cdot\mathrm{d}t \qquad I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\cdot\mathrm{d}t$$

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots\cdots\vec{F}_n)\cdot\mathrm{d}t \quad =\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}t+\cdots\cdots+\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_n\cdot\mathrm{d}t$$

$$=\vec{I}_1+\vec{I}_2+\cdots\cdots+\vec{I}_n$$

合力的冲量等于各分力冲量的矢量和

2. 质点的动量定理

微分形式：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=F$$ 或 $$d\left(m\vec{v}\right)=\vec{F}dt$$

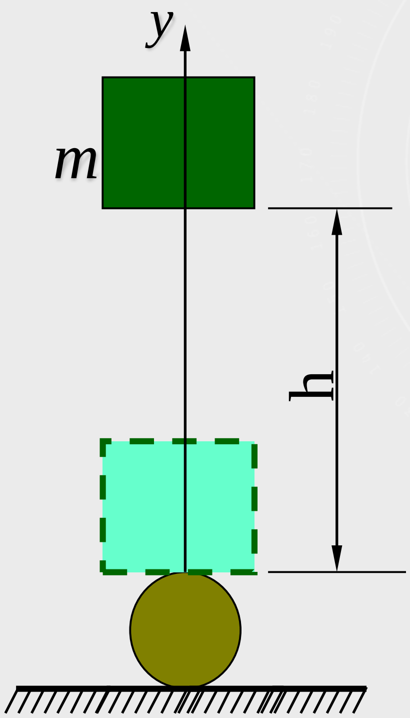
积分形式：

$$m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\vec{I}$$

在某一时间间隔内，质点动量的变化等于力在此段时间内的冲量。（冲量定理）

例 锤的质量 m=3000kg, 从高度h=1.5m处自由下落到受锻压的工件上，工件发生变形，历时t_0=0.01s。

求: 锤对工件的平均压力。



分析:

研究对象：锤

运动分析：自由落体过程 + 锻压过程

前者重力作用，后者重力和平均反力作用。

冲量定理：整个过程。

解： 锤自由落体过程经历的时间t_1

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

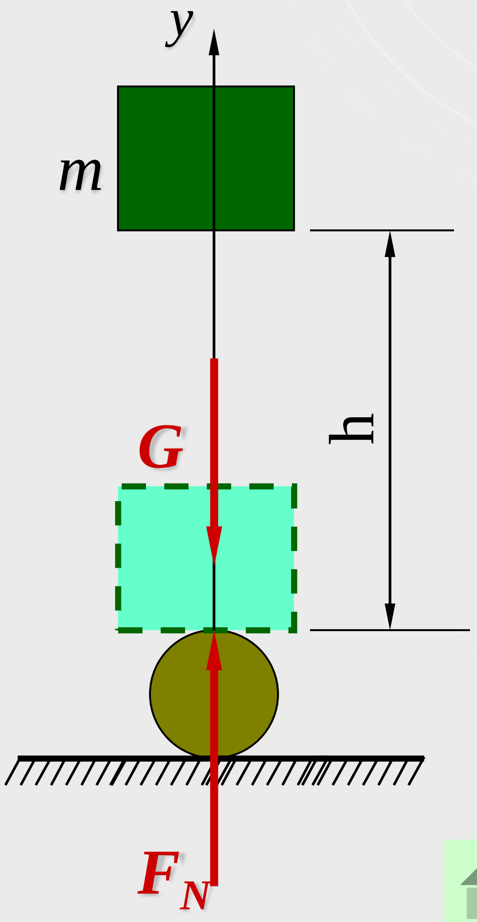
锤的初速度及末速度均为0

由质点的动量定理得

$$0-0=-G(t_1+t_0)+F_N t_0$$

代入已知数据可解得

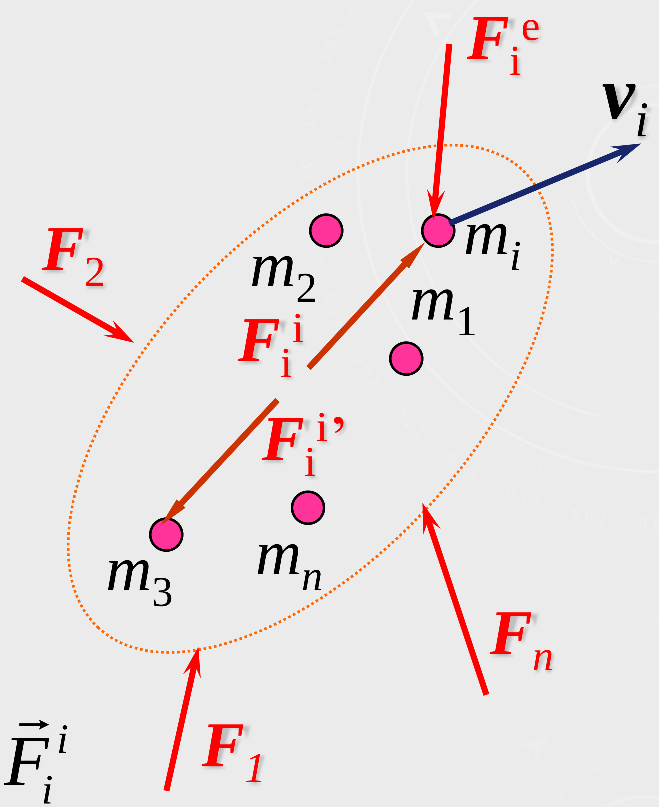
$$F_N = G(\frac{t_1}{t_0}+1)=1656kN$$



3. 质点系动量定理

对于第 *i* 个质点

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m_i\vec{v}_i)}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_i^e+\vec{F}_i^i$$



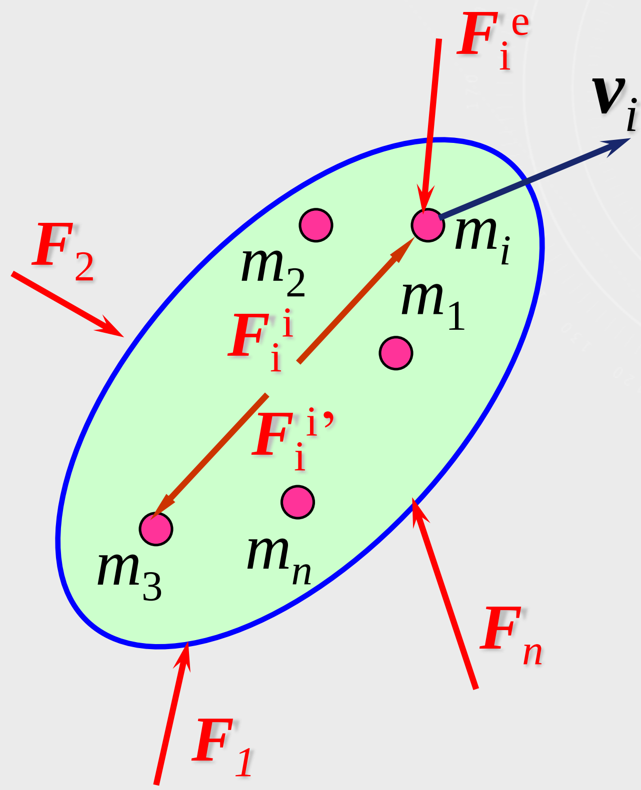
对于质点系

$$\sum\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\sum\frac{\mathrm{d}(m_i\vec{v}_i)}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{F}_i^e+\sum\vec{F}_i^i$$

内力主矢 $\sum\vec{F}_i^i=0$

外力主矢 $\sum\vec{F}_i^e$

质点系动量定理



微分形式 $$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}_i^e$$

质点系的动量矢对时间的导数，等于作用于质点系上的外力主矢。

积分形式 $\vec{p}-\vec{p}_0=\int_{t_0}^{t_1}\sum\vec{F}dt=\vec{I}$

即在某一时间间隔内，质点系动量的变化等于外力系的主矢在此段时间内的冲量。

投影形式为:

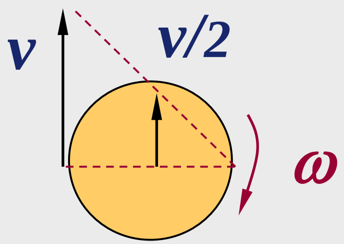
$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_x}{dt}&=\sum F_x^e\\ \frac{dp_y}{dt}&=\sum F_y^e\\ \frac{dp_z}{dt}&=\sum F_z^e\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}p_x-p_{x0}&=I_x\\ p_y-p_{y0}&=I_y\\ p_z-p_{z0}&=I_z\end{aligned}\right\}$$

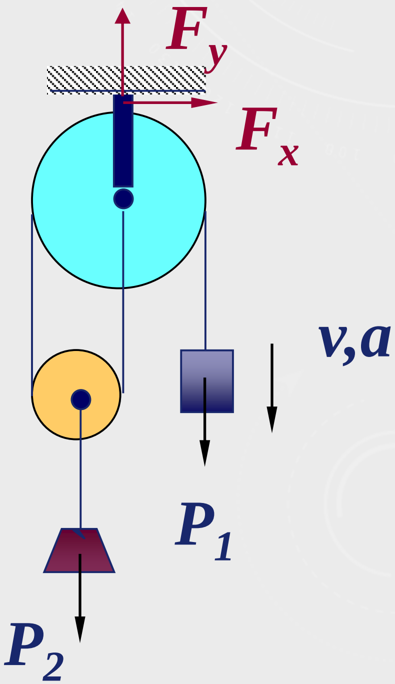
例：图示为起吊机构，已知吊装物体的重量，不计轮子的重量与半径，试求支座处的(全)约束力。

解：$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x=0 \qquad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{P_1}{g}v+\frac{P_2}{g}\frac{v}{2}\right)=-P_1-P_2+F_y$$

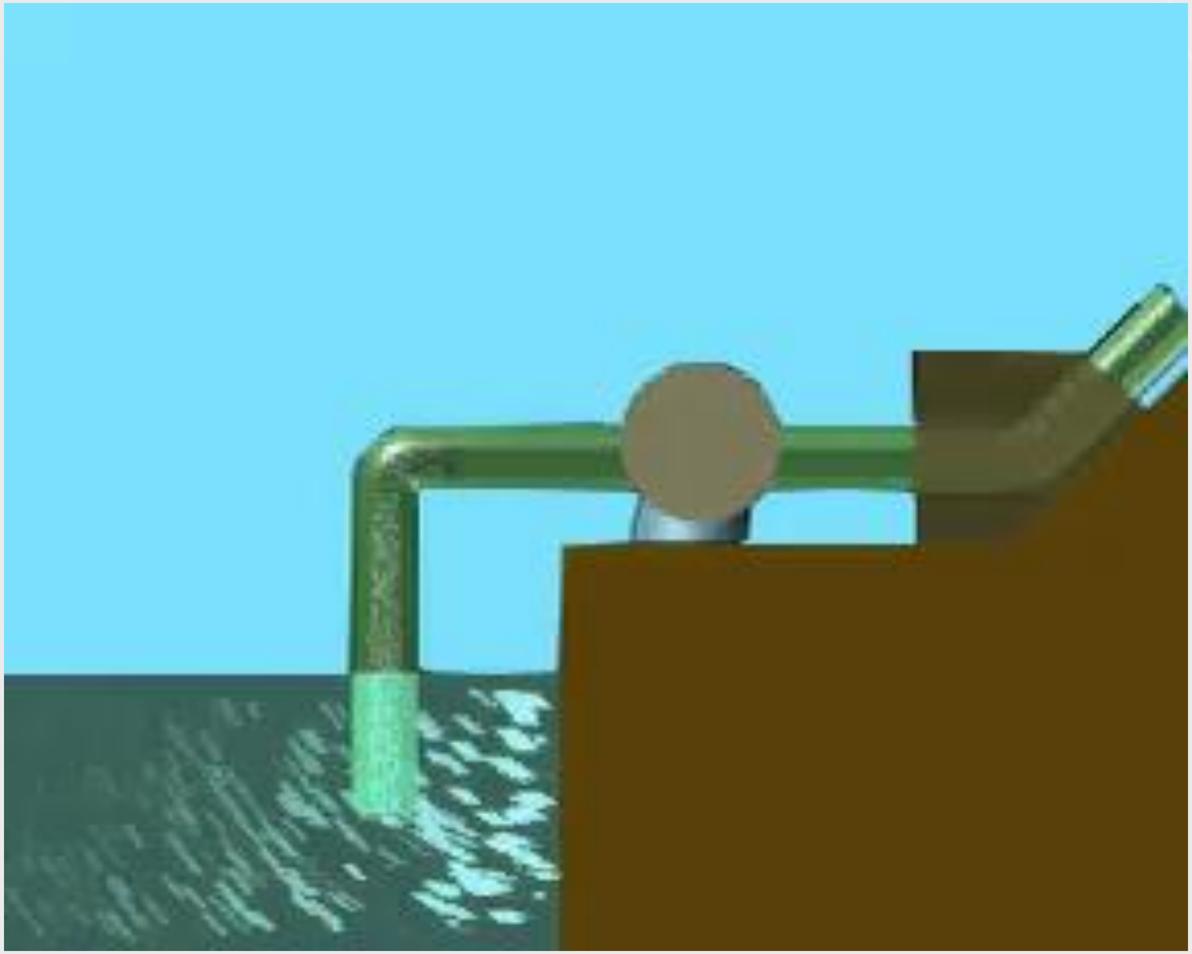
$$F_y=P_1+P_2-\frac{2P_1-P_2}{2g}a$$





全约束力=静约束力 + 动约束力

例：稳态流 (流出=流进) 的动反力计算



流体流过弯管时，两断面平均流速为 v_1, v_2，试求恒定流流体对弯管的附加动压力。流体的密度为ρ; 流量 Q =常量。

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_{abcd} - \vec{p}_{ABCD}$$

$$= \left[(\vec{p}_{abCD})_2 + \vec{p}_{CDcd}\right] - \left[\vec{p}_{ABab} + (\vec{p}_{abCD})_1\right]$$

$$= \vec{p}_{CDcd} - \vec{p}_{ABab} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \rho Q\Delta t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

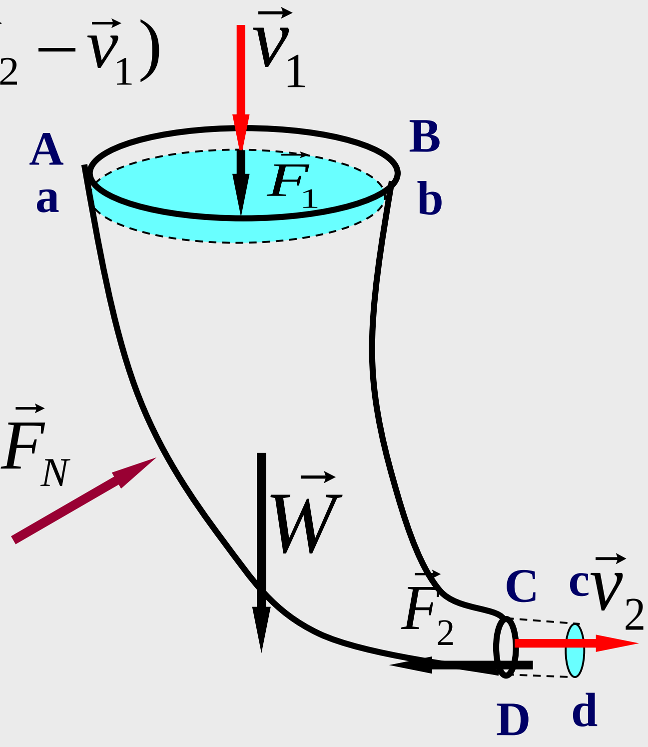
$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$= \vec{W} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\mathrm{N}}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} = -(\vec{W} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \rho\cdot Q\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\vec{F}_{动} = \rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

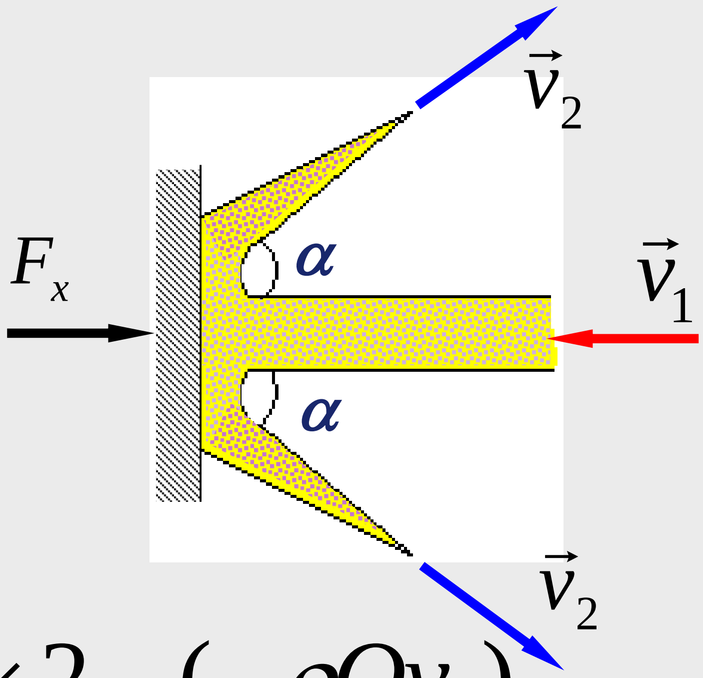
$$\vec{F}'_{动} = \rho Q(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$



欧拉方程

例: 水泥泵以速度v_1将砂浆喷射在墙面上，又以速度v_2反射出去，已知：流量Q，密度ρ，试求墙面受到的力。

解：[流体]



$$\vec{F} = \rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$F_x = (\frac{1}{2}\rho Q v_2 \cos\alpha) \times 2 - (-\rho Q v_1)$$

$$F'_x = \rho Q(v_2 \cos\alpha + v_1)$$

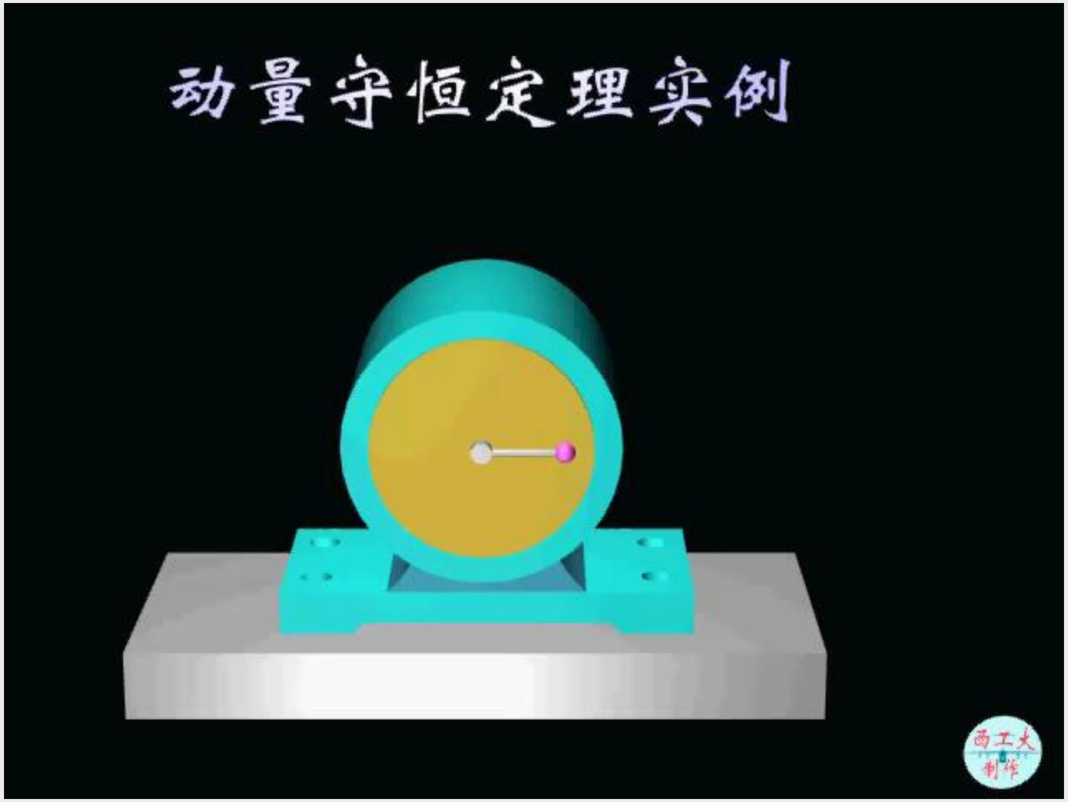
4. 质点系动量守恒

$$\sum \vec{F}_i^{\mathrm{e}} \equiv 0 \qquad \vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C = \text{常矢量}$$

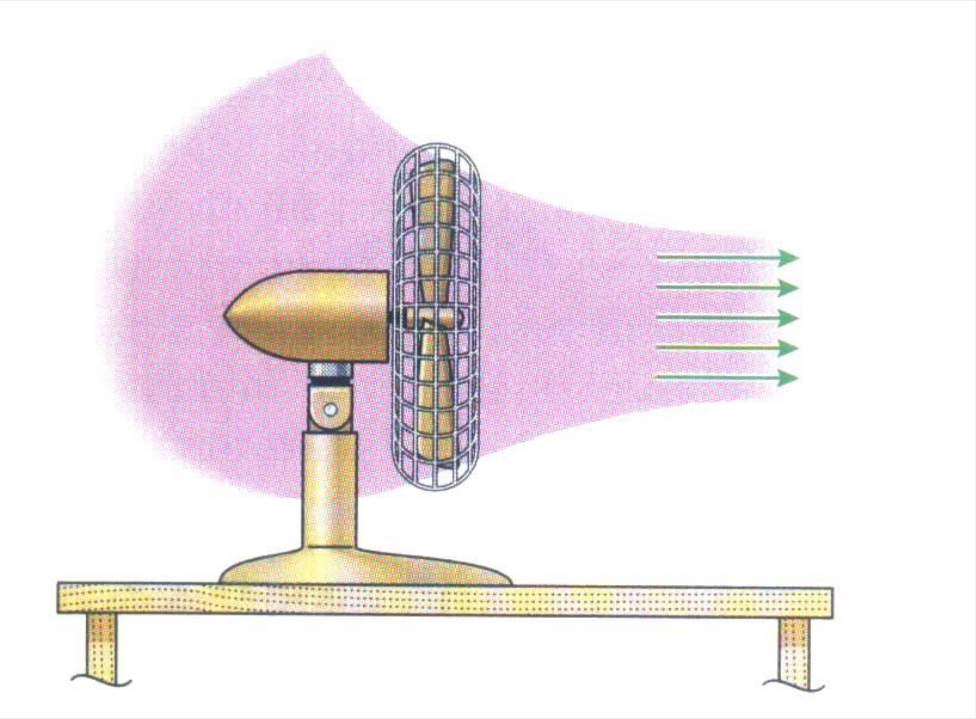
若作用于质点系的外力矢量和恒等于零，则质点系的动量保持为常量。

$$\sum F_{ix}^{\mathrm{e}} \equiv 0 \qquad p_x = \sum m_i v_{ix} = m v_{Cx} = \text{常量}$$

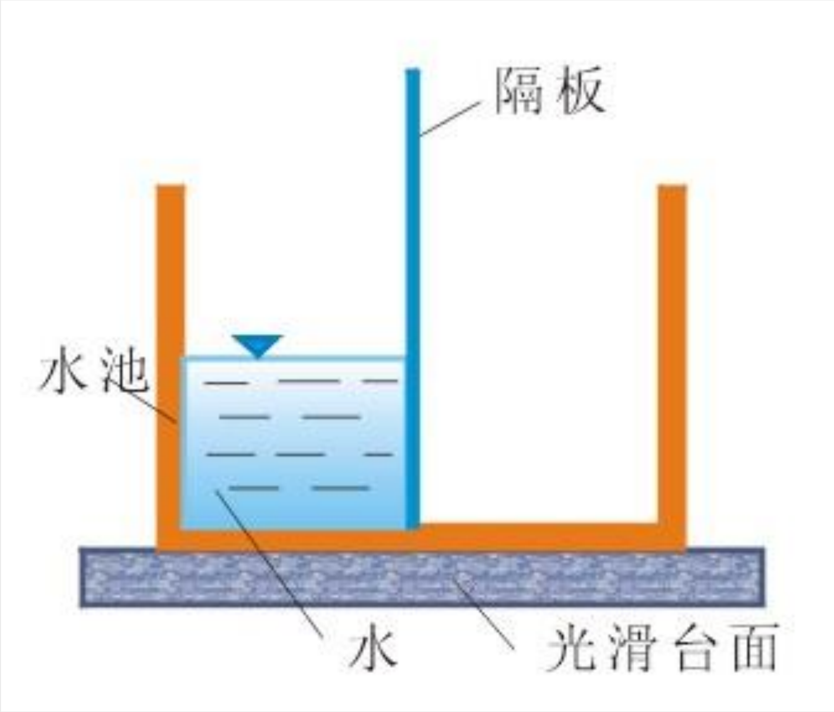
偏心转子电动机工作时为什么会左右运动；



台式风扇放置在光滑的台面上，风扇工作时，会发生什么现象？

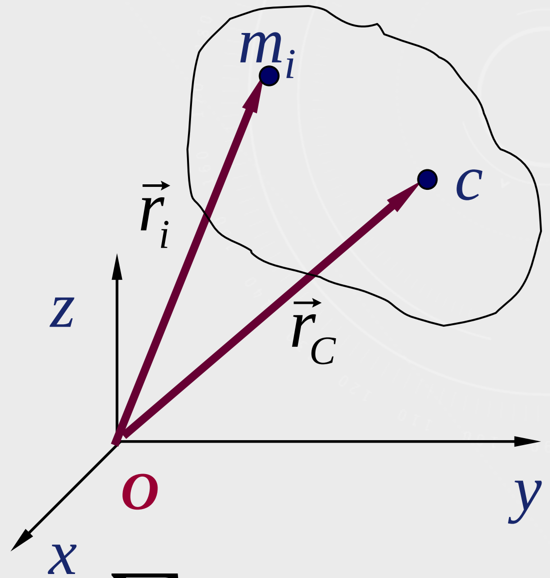


抽去隔板后将会发生什么现象？



5. 质心运动定理

质心公式： $\Sigma m_i\vec{r}_i = \Sigma m_i\vec{r}_C = m\vec{r}_C$



$$\vec{r}_C = \frac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{m}$$

$$x_C = \frac{\Sigma m_i x_i}{m} \qquad y_C = \frac{\Sigma m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\Sigma m_i z_i}{m}$$

求导： $$m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum m_i\vec{r}_i) = \sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m\vec{v}_C = \sum m_i\vec{v}_i$$

再求导： $$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = \sum m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\because \quad m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_i^{\mathrm{e}} + \vec{F}_i^{\mathrm{i}}$$

$$\therefore \quad m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = \sum \vec{F}_i^{\mathrm{e}} + \sum \vec{F}_i^{\mathrm{i}}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_i^{\mathrm{e}}$$

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^{\mathrm{e}}$$

质心运动定理

质点系质量与质心加速度乘积等于作用于质点系上外力主矢量

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_C}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_{ix}^{\mathrm{e}}=F_{\mathrm{R}x}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_c}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_{iy}^{\mathrm{e}}=F_{\mathrm{R}y}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_c}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_{iz}^{\mathrm{e}}=F_{\mathrm{R}z}$$

质心运动定理的直角坐标投影式

$$m\frac{v_c^2}{\rho}=\sum F_{i\mathrm{n}}^{\mathrm{e}}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\sum F_{i\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}$$

$$\sum F_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}=0$$

质心运动定理的自然坐标投影式

刚体系：$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_c}{\mathrm{d}t^2}=\sum m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{ci}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\sum m_i\vec{a}_{Ci}=\sum\vec{F}_i^{\mathrm{e}}=\vec{F}_{\mathrm{R}}$$

刚体系统质心运动定理

质心运动守恒定理

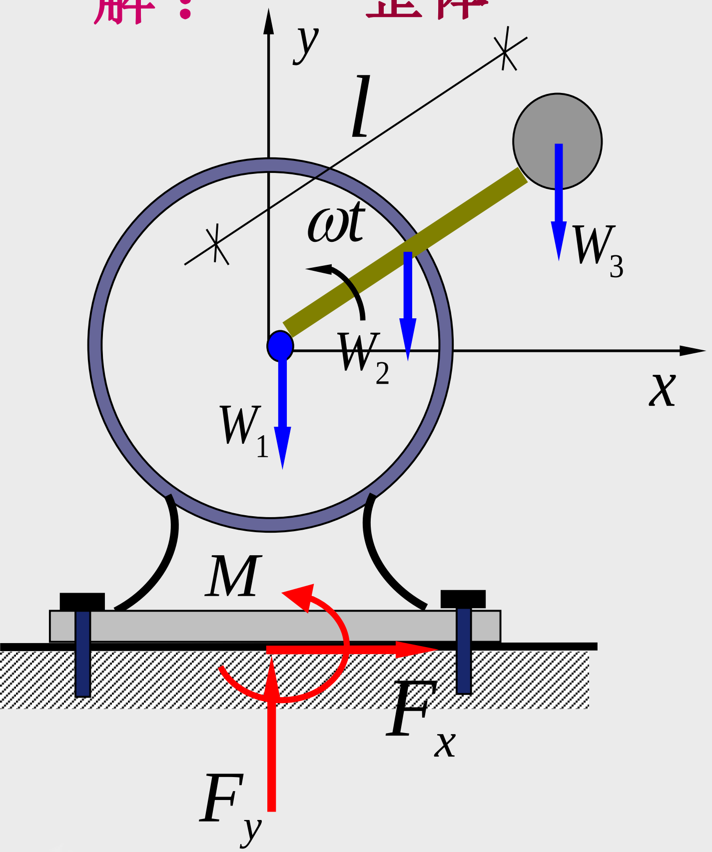
1、 $\sum\vec{F}_i^{\mathrm{e}}\equiv 0$ $\quad\vec{a}_C=0\quad$ $\vec{v}_C=$常矢量

2、 $\sum F_{ix}^{\mathrm{e}}\equiv 0$ $\quad m\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t}=0\quad$ $v_{Cx}=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=$常量

若 $v_{Cx}=0$ 则 $x_C=$常量 即质心沿该轴向无位移

例 电动机重W_1，外壳用螺栓固定在基础上。匀质杆长l，重W_2，一端连一重W_3的小球。电机以匀角速度ω转动，求螺栓和基础作用于电机的最大总水平力及铅直力。

解： "整体"



$$a_{C1x}=0 \quad a_{C2x}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l}{2}\sin\omega t\right)=-\frac{l}{2}\omega^2\sin\omega t$$

$$a_{C3x}=\frac{d^2}{dt^2}(l\sin\omega t)=-l\omega^2\sin\omega t$$

代入质心运动定理

$$-\frac{W_2}{g}\frac{l}{2}\omega^2\sin\omega t-\frac{W_3}{g}l\omega^2\sin\omega t=F_x$$

$$F_x=-\frac{(W_2+2W_3)l\omega^2}{2g}\sin\omega t \qquad F_{x\max}=\frac{(W_2+2W_3)l\omega^2}{2g}$$

$$a_{C1y}=0$$

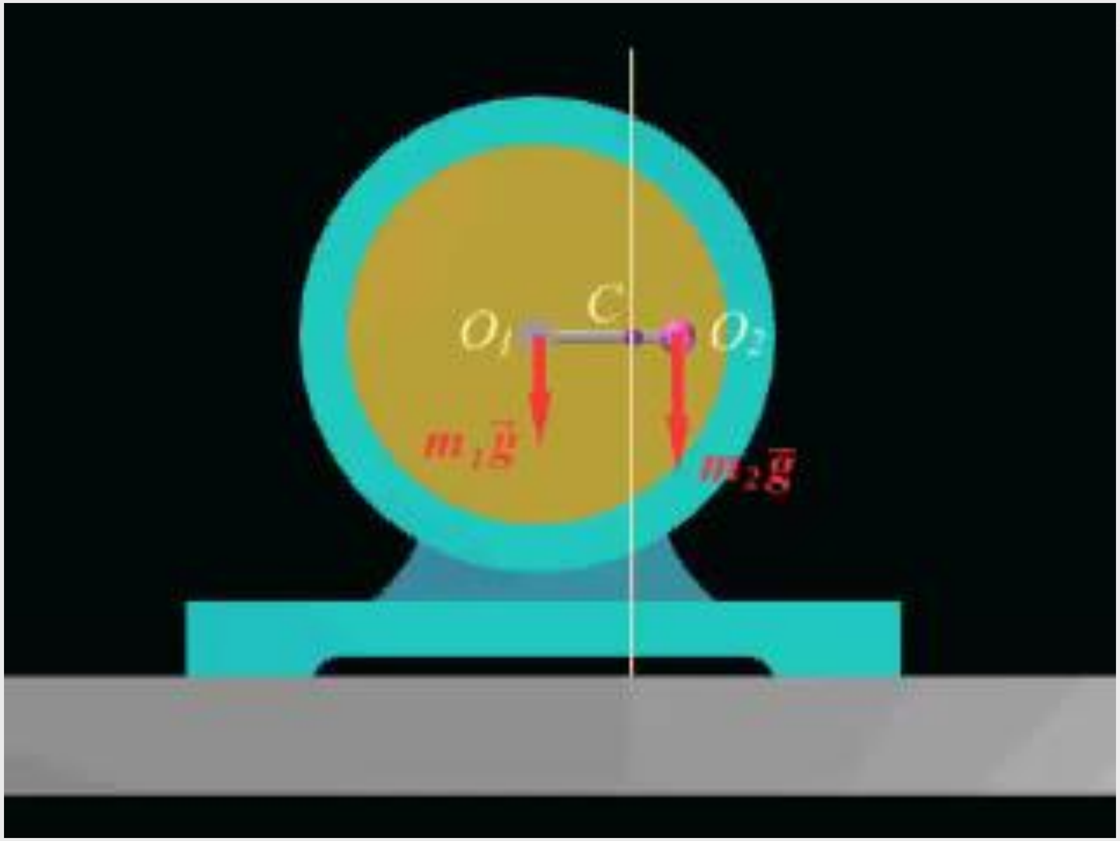
$$a_{C2y}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l}{2}\cos\omega t\right)=-\frac{l}{2}\omega^2\cos\omega t$$

$$a_{C3y}=\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\omega t)=-l\omega^2\cos\omega t$$

$$-\frac{W_2}{g}\frac{l}{2}\omega^2\cos\omega t-\frac{W_3}{g}l\omega^2\cos\omega t=F_y-W_1-W_2-W_3$$

$$F_y=W_1+W_2+W_3-\frac{(W_2+2W_3)l\omega^2}{2g}\cos\omega t \qquad F_{y\max}=W_1+W_2+W_3+\frac{(W_2+2W_3)l\omega^2}{2g}$$

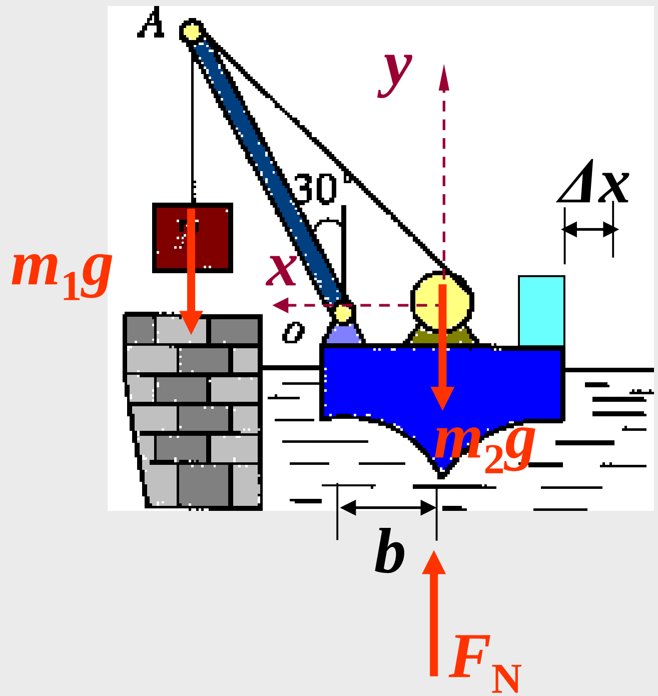
若螺栓不固定？



例 浮吊举起质量 m_1=2000kg 的货物，初始无初速，起重臂与垂直线夹角为30^0，试求夹角转到60^0时浮吊的位移。设浮吊质量m_2=20000kg, *AO*=8m,水的阻力不计。

解： $\because \sum F_{ix} \equiv 0, \qquad \therefore \ddot{x}_C = 0$

$t = 0, \quad v_{cx} = 0, \quad x_c = c$

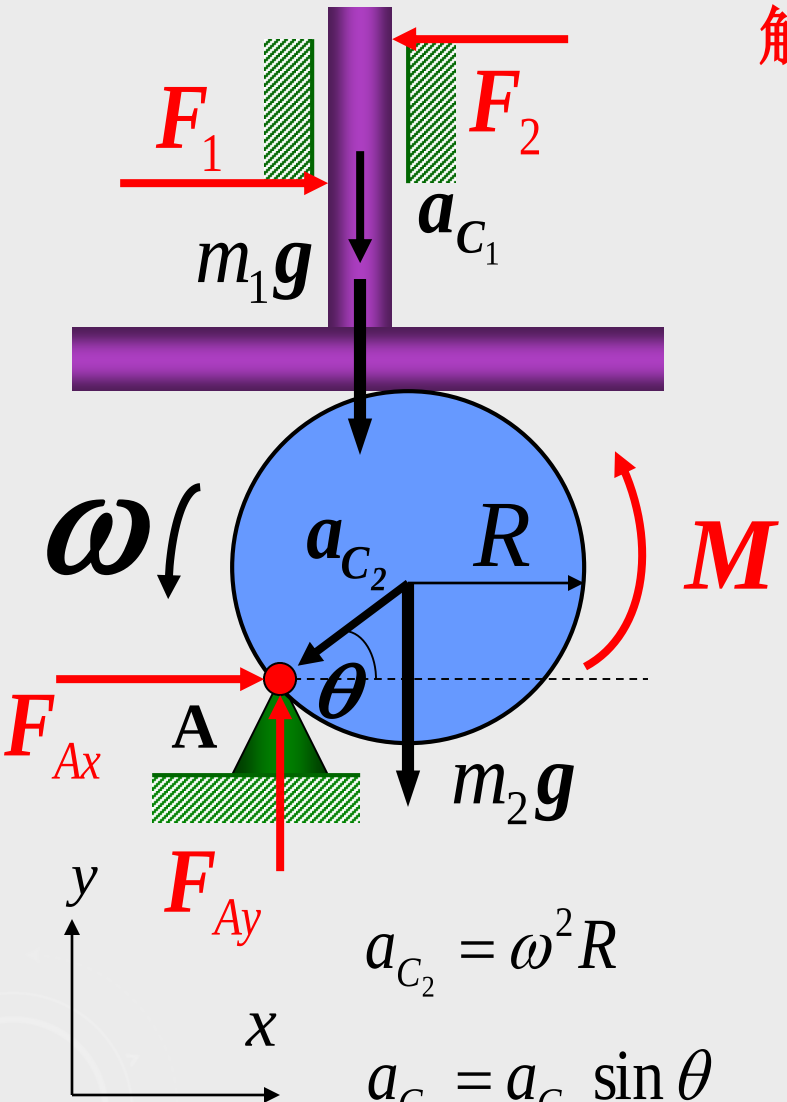


$$x_{c0} = \frac{m_1(b + l \cdot \sin 30^\circ) + m_2 \times 0}{m_1 + m_2}$$

$$x_{c1} = \frac{m_1(b + l\sin 60^\circ - \Delta x) - m_2 \Delta x}{m_1 + m_2}$$

$x_{c0} = x_{c1}$ $\qquad \Delta x = 0.266\text{m}$

例：已知 $m_1, m_2, R, \theta = \omega t, f$ 。求：轴承A的约束力。



$$a_{C_2} = \omega^2 R$$

$$a_{C_1} = a_{C_2} \sin\theta$$

解：受力分析与运动分析

$$\because \ m\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{F}_R$$

$$y: \quad -m_1 a_{C_1} - m_2 a_{C_2} \sin\theta = F_{Ay} - (m_1 + m_2) g$$

$$F_{Ay} = (m_1 + m_2) g - m_1 a_{C_1} - m_2 a_{C_2} \sin\theta$$

$$\boxed{F_{Ay} = (m_1 + m_2) g - (m_1 + m_2) \omega^2 R \sin\theta}$$

如何求轴承A水平方向的约束力?

分别研究圆盘和顶杆

顶杆： $y: \quad -m_1 a_{C_1} = F_N - m_1 g$

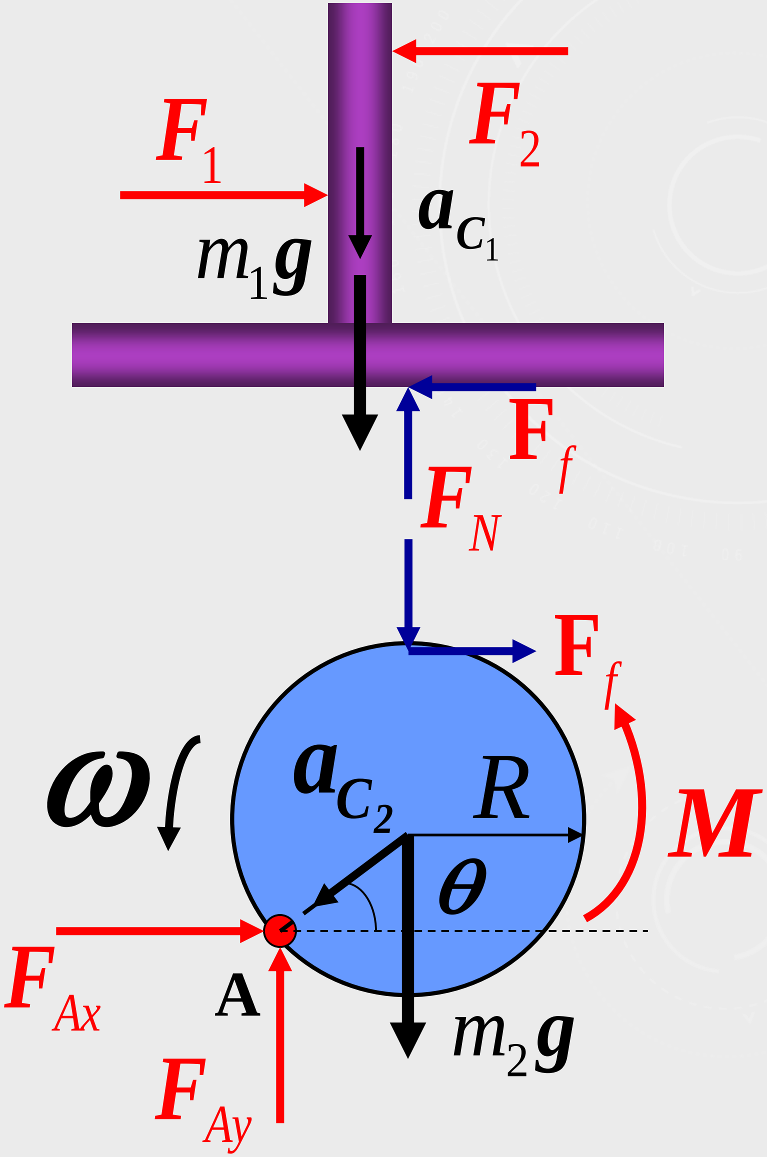
$$F_N = m_1 g - m_1 \omega^2 R \sin\theta$$

$$F_f = f\, F_N$$

圆盘：

$$x: \quad -m_2 a_{C_2} \cos\theta = F_{Ax} + F_f$$

$$\boxed{F_{Ax} = -F_f - m_2 \omega^2 R \cos\theta}$$



问题： 圆盘的角速度满足什么关系时，在运动过程中顶杆不脱离圆盘？