

第4章 计算机控制系统的基本控制策略

4.1 计算机控制系统数学基础

4.2 离散系统的模拟化设计方法

4.3 数字PID控制算法

4.4 直接数字设计方法-解析设计方法

4.5 复杂计算机控制系统设计方法

4.6 先进PID控制系统设计方法

本次课程内容

第4章 计算机控制系统的基本控制策略

◆ 计算机控制系统数学基础

- 信号与系统

- z 变换与脉冲传递函数

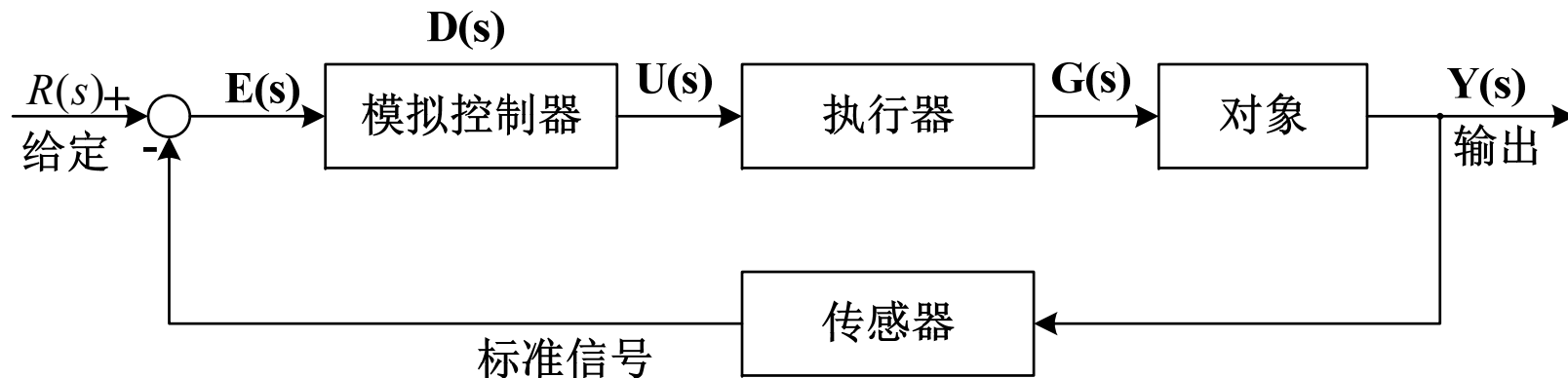
◆ 离散系统的模拟化设计方法

- 数字控制器的模拟化设计

- 连续系统的离散化方法

计算机控制系统数学基础

➤ 信号与系统

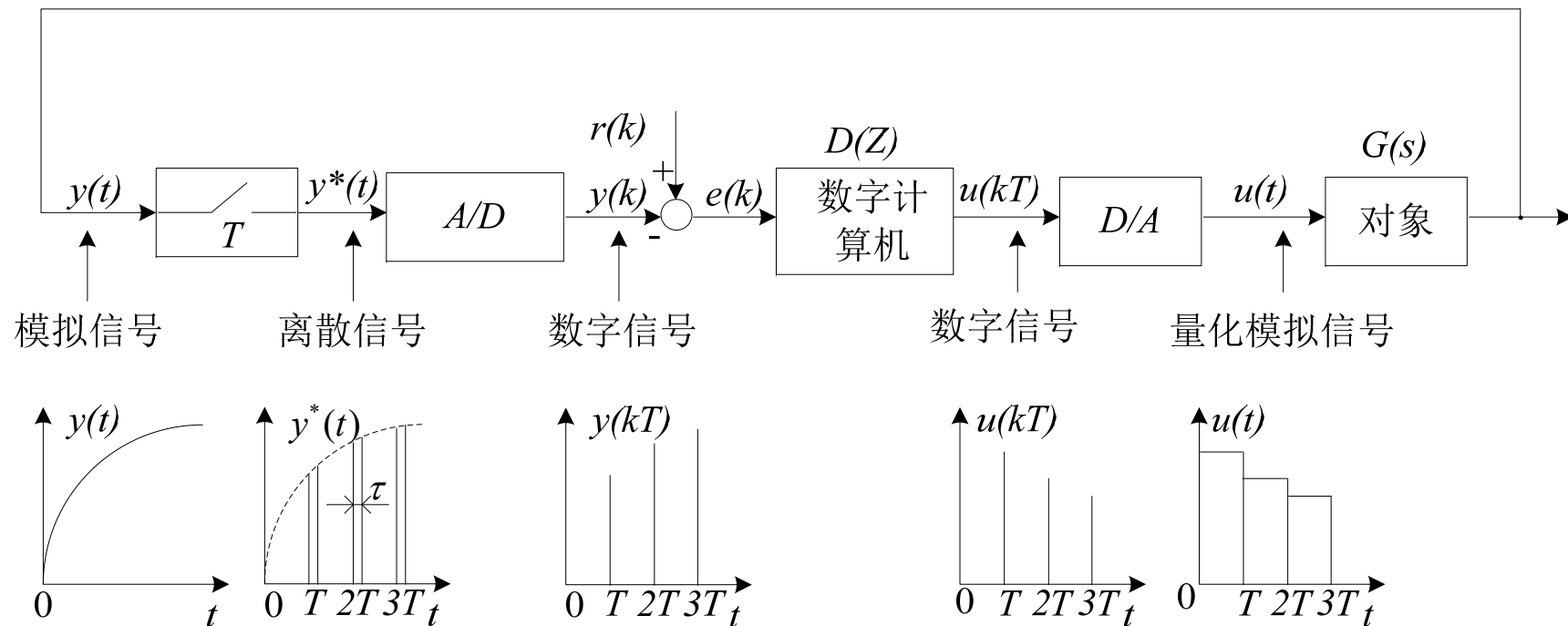


连续控制系统框图

- 连续控制系统中，控制器的输入、输出皆为**连续的信号量**。

计算机控制系统数学基础

➤ 信号与系统



数字控制系统框图

- **DDC: 用数字控制器代替模拟控制器，对对象直接进行控制。**

计算机控制系统数学基础

➤ 计算机控制系统理论

1. 离散系统理论——离散系统的设计和分析方法：

- a. **差分方程和 z 变换理论**，利用脉冲传递函数来分析离散系统。
- b. **常规控制设计方法**，包括模拟设计方法和直接数字设计方法；
- c. 按极点配置设计法 d. 最优设计方法 e. 智能控制及其它先进控制方法

2. 采样系统理论（包括离散系统理论）

- a. **采样理论、采样信号的恢复**
- b. 连续模型以及性能指标的离散化
- c. 性能指标函数的计算
- d. 采样控制系统的仿真
- e. **采样周期的选择**

3. 数字系统理论（包括离散系统理论和采样系统理论）

数字量化效应等，如量化误差、非线性特性的影响、**数字控制器的实现**等。

* 计算机控制系统中，对象是连续的，控制器是离散的，如何将连续环节离散化，或将离散环节与连续环节连接，是要重点解决的问题。

计算机控制系统数学基础

➤ 信号与系统

- **香农 (Shannon) 定理**: 如果连续信号 $f(t)$ 由不同频率的谐波组成, 各次谐波中最高频率为 ω_c , 则当它被采样为脉冲系列 $f^*(t)$ 时, 只要选择采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_c$, 就可以从 $f^*(t)$ 完全复现 $f(t)$ 。
- 当计算机控制系统的采样频率 ω_s 与系统瞬态响应主要振荡频率 ω_m 相比足够高 ($\omega_s \geq 20\omega_c$), 且每次采样时间 Δt 远小于采样周期 T_s 时, 可以应用连续域的离散等效设计方法进行系统分析和整定。- **模拟设计方法**
- 在计算机控制系统, 如果采样周期较大, **量化效应**不可忽视时, 必须依据采样控制理论设计控制器 (按某些约束条件直接设计控制器) - **直接数字设计方法**。

计算机控制系统数学基础

➤ 信号与系统

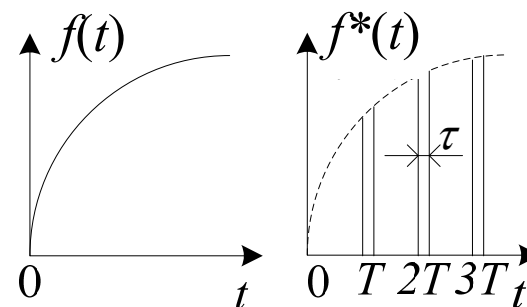
	输入、输出 关系描述	经典理论应用主要数 学方法	现代控制理论描述
连续时间系统	微分方程	拉氏变换、传递函数	状态方程
数字离散系统	差分方程	z 变换、脉冲传递函数	离散时间状态方程

连续系统与数字离散系统的对应表

计算机控制系统数学基础

➤ 拉普拉斯变换和z变换

模拟信号: $f(t)$



采样信号: $f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$

拉普拉斯变换: $F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

z变换: $F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}$ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = e^{Ts} \\ F(z) \neq F(s)|_{s=z} \end{array}$

计算机控制系统数学基础

➤ z 变换和脉冲传递函数

- 单位阶跃信号: $f(t) = 1$

$$F(z) = Z[1] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (1)$$

$$z^{-1}F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} = z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (2)$$

(1)-(2)

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 速度信号: $f(t) = t$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nTz^{-n} = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + \dots + nTz^{-n} + \dots \quad (1)$$

$$z^{-1}F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nTz^{-n-1} = Tz^{-2} + 2Tz^{-3} + \dots + nTz^{-n-1} + \dots \quad (2)$$

(1)-(2)

$$(1 - z^{-1})F(z) = Tz^{-1} + Tz^{-2} + \dots + Tz^{-n} = T\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - 1\right) = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

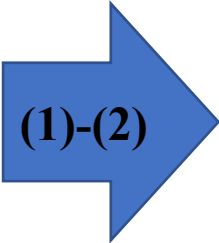
计算机控制系统数学基础

➤ z变换

- 加速度信号: $f(t) = \frac{t^2}{2}$


$$\begin{aligned} F(z) &= Z\left[\frac{t^2}{2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nT)^2}{2} z^{-n} = \frac{T^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n} \\ &= \frac{T^2}{2} (1z^{-1} + 2^2 z^{-2} + 3^2 z^{-3} + \dots + n^2 z^{-n} + \dots) \quad (1) \end{aligned}$$

$$z^{-1}F(z) = \frac{T^2}{2} (1z^{-2} + 2^2 z^{-3} + 3^2 z^{-4} + \dots + n^2 z^{-n-1} + \dots) \quad (2)$$



(1)-(2)

$$\begin{aligned} (1-z^{-1})F(z) &= \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [n^2 - (n-1)^2] z^{-n} = \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2nz^{-n} - z^{-n}) \\ &= \frac{T^2}{2} \left[2 \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - 1 \right) \right] = \frac{T^2 z^{-1} (1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^2} \end{aligned}$$


$$F(z) = \frac{T^2 z^{-1} (1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

计算机控制系统数学基础

➤ 拉氏变换和z变换对照表

$x(t)$	$x(kT)/x(k)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	$\delta(k)$	1	1
1(t)	$x(k)=1, k=0,1,2,\dots$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
	a^k		$\frac{z}{z-a}$
	ka^k		$\frac{az}{(z-a)^2}$
e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin\omega t$	$\sin\omega kT$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$e^{-akT}\sin\omega kT$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

计算机控制系统数学基础

➤ z反变换

- 由函数 $F(z)$ 求离散序列 $f(k)$ 的过程:

例题 已知: $F(z) = \frac{10z}{z^2 - 5z + 4}$, 求 $f(k)$ 。

1、长除法:

$$\begin{array}{r} 10z^{-1} + 50z^{-2} + 210z^{-3} + \dots \\ z^2 - 5z + 4 \overline{) 10z} \\ \underline{10z - 50 + 40z^{-1}} \\ 50 - 40z^{-1} \\ \underline{50 - 250z^{-1} + 200z^{-2}} \\ 210z^{-1} - 200z^{-2} \\ \underline{210z^{-1} - 1050z^{-2} + 840z^{-3}} \\ 850z^{-2} - 840z^{-3} \end{array}$$




$$F(z) = 10z^{-1} + 50z^{-2} + 210z^{-3} + \dots$$



$$f(0) = 0, f(1) = 10, f(2) = 50, f(3) = 210, \dots$$



$$f^*(t) = 10\delta(t-T) + 50\delta(t-2T) + 210\delta(t-3T) + \dots$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

$$f(k) = z^{-1} [F(z)]$$

计算机控制系统数学基础

➤ z 反变换

- 由函数 $F(z)$ 求离散序列 $f(k)$ 的过程:

例题 已知: $F(z) = \frac{10z}{z^2 - 5z + 4}$, 求 $f(k)$ 。

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

↓

$$f(k) = z^{-1}[F(z)]$$

2、部分分式展开法:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 5z + 4} = \frac{10}{(z-1)(z-4)} = -\frac{10}{3(z-1)} + \frac{10}{3(z-4)}$$

↓

$$F(z) = -\frac{10z}{3(z-1)} + \frac{10z}{3(z-4)}$$

查 z 变换表: ↓

$$f(k) = -\frac{10}{3} \cdot 1(k) + \frac{10}{3} 4^k = \frac{10}{3} (4^k - 1)$$

计算机控制系统数学基础

➤ z变换和脉冲传递函数

线性性质: $Z[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(z) + bF_2(z)$

平移定理: $Z[f(t - nT)] = z^{-n}F(z)$

初值定理: $f(t)_{t=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$

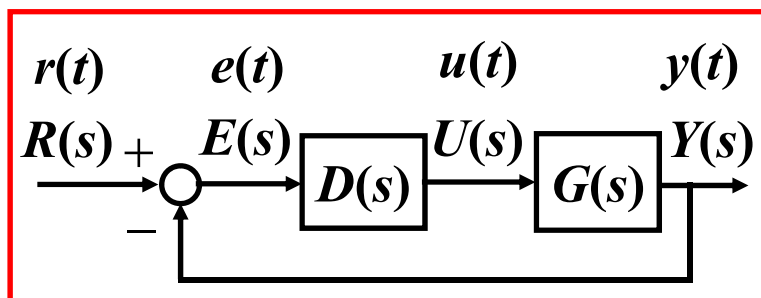
终值定理: $f(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$

脉冲传递函数: 在初始条件为零时，系统输出量z变换与输入量z变换之比。

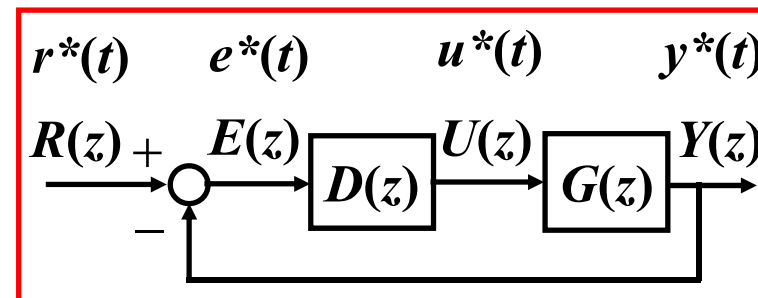
$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \omega(mT)z^{-m} = \omega(0) + \omega(T)z^{-1} + \omega(2T)z^{-2} + \dots$$

计算机控制系统数学基础

➤ 传递函数和脉冲传递函数



连续系统



离散系统

控制器:
$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

对象:
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

闭环:
$$\phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)}$$

$$\phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

本次课程内容

第4章 计算机控制系统的基本控制策略

◆ 计算机控制系统数学基础

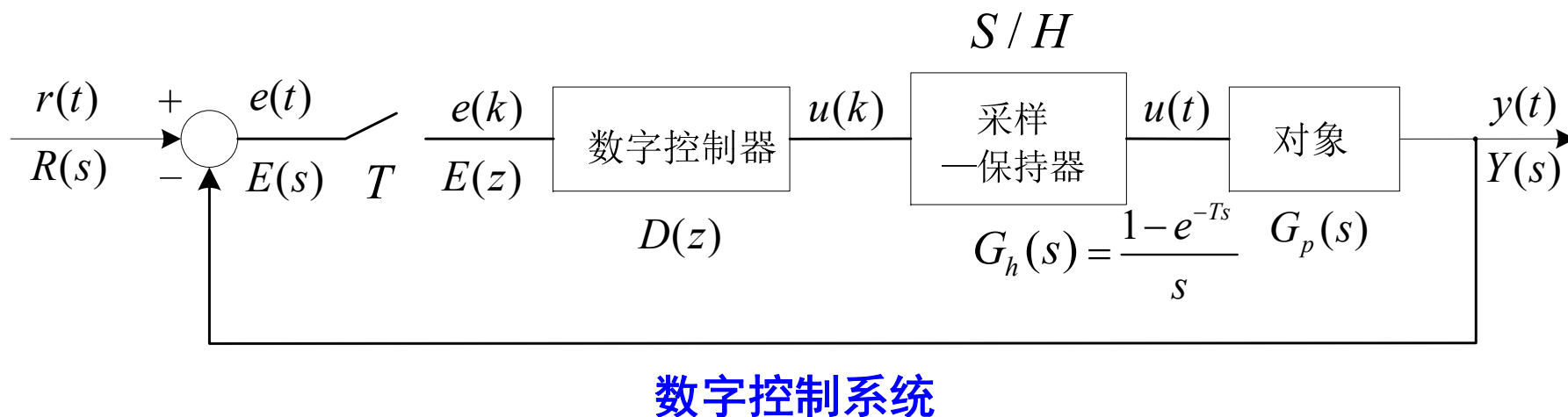
- 信号与系统
- Z变换与脉冲传递函数

◆ 离散系统的模拟化设计方法

- 数字控制器的模拟化设计思路
- 连续系统的离散化方法

数字控制器的模拟化设计思路

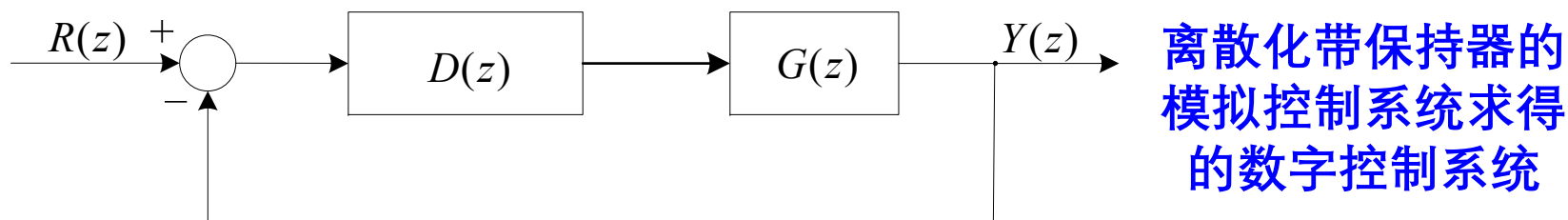
- 数字控制器的模拟化设计思路：将连续域设计好的模拟控制器 $D(s)$ ，按离散等效的方法离散获得数字控制器。
- 数字控制系统中保持电路产生时间迟延，这附加迟延会引起相位滞后并降低闭环系统的稳定裕量。
- 设计模拟控制器，要考虑构成数字控制系统时必然存在的零阶保持器。



数字控制器的模拟化设计思路

➤设计步骤

- (1) 根据广义对象 $G(s)=G_h(s)G_p(s)$ ，设计模拟控制器 $D(s)$ 。
- (2) $D(s)$ 离散化获得 $D(z)$
 - 采用离散化方法。正确选择 T ，每个震荡周期至少采样6-10个点。
- (3) 检验闭环系统性能，闭环仿真
 - 将含有保持器的广义对象 $G(s)$ 离散化得出差分方程，构成离散系统，检验数字控制系统对各种输入信号之响应，进行闭环仿真。



- 如果设计不达标，需重新设计（重选合适的离散化方法、提高采样频率、修正 $D(s)$ ）。
- (4) 编制程序在计算机上实现 $D(z)$

本次课程内容

第4章 计算机控制系统的基本控制策略

◆ 计算机控制系统数学基础

- 信号与系统
- Z变换与脉冲传递函数

◆ 离散系统的模拟化设计方法

- 数字控制器的模拟化设计
- 连续系统的离散化方法

连续系统的离散化方法

- 模拟化设计数字控制器的重要步骤，是将**连续系统离散化**。
即将连续时间传递函数 $F(S)$ \rightarrow 离散传递函数 $F(Z)$ 、差分方程。
- 对模型离散化时，要考虑**离散等效性问题**，可考察一下特性：
 - (1) 脉冲响应特性
 - (2) 阶跃响应特性，如超调量、振荡次数、上升时间、过渡时间等。
 - (3) 频率特性，如通频带、增益裕量、相位裕量、以及闭环频率响应峰值等。
 - (4) 稳态增益
 - (5) 零极点分布

连续系统的离散化方法

典型的离散化方法有如下几种：

- 一、差分变换法**
- 二、双线性变换法**
- 三、脉冲响应不变法**
- 四、阶跃响应不变法**
- 五、零极点匹配法**

一、差分变换法

特点：用一阶差分代替微分。

设连续系统传递函数： $D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$

该系统的微分方程： $\frac{du(t)}{dt} = e(t)$

在 $t=kT$ 时刻的一阶差分：

后向

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=kT} = e(kT) \approx \frac{u(kT) - u[(k-1)T]}{T}$$

整理后： $u(kT) = u[(k-1)T] + Te(kT)$

前向

$$e(kT) \approx \frac{u[(k+1)T] - u(kT)}{T}$$

$$u(kT) = u[(k+1)T] - Te(kT)$$

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te[(k-1)T]$$

一、差分变换法

后向

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te(kT)$$

z 变换:

$$U(z) = z^{-1}U(z) + TE(z)$$

脉冲传递函数:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

前向

$$u[(k+1)T] = u(kT) + Te(kT)$$

$$zU(z) = U(z) + TE(z)$$

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{z - 1}$$

$$s = \frac{z - 1}{T}$$

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$$

一、差分变换法

后向

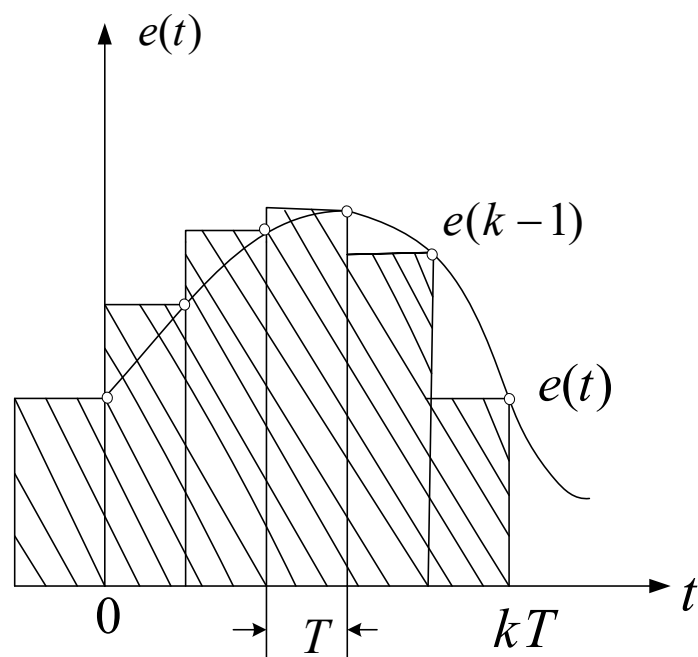
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

差分变换公式:

$$D(z) = D(s) \bigg|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

区别:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te(kT)$$

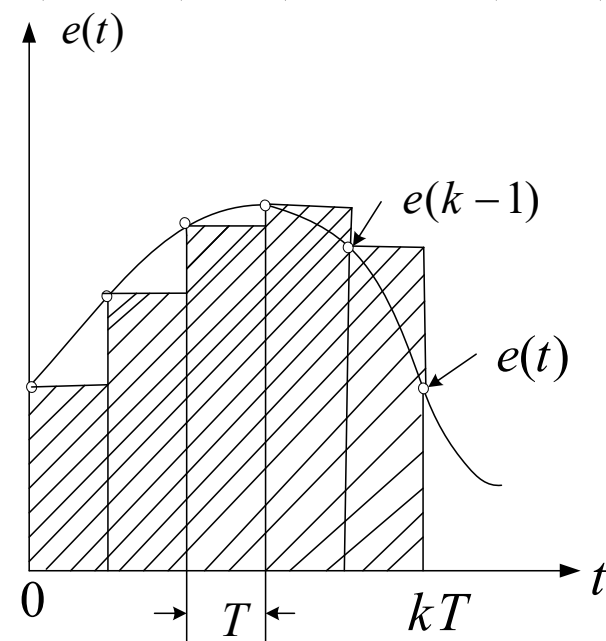


前向

$$s = \frac{z - 1}{T}$$

$$D(z) = D(s) \bigg|_{s = \frac{z - 1}{T}}$$

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te[(k-1)T]$$



一、差分变换法

举例：采用差分法对以下传递函数其进行离散化。

$$D(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

解：

1、后向差分：

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T} + 2\right)\left(\frac{1-z^{-1}}{T} + 3\right)} = \frac{T^2}{(1+2T-z^{-1})(1+3T-z^{-1})}$$

2、前向差分：

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T} + 2\right)\left(\frac{z-1}{T} + 3\right)} = \frac{T^2}{(z+2T-1)(z+3T-1)}$$

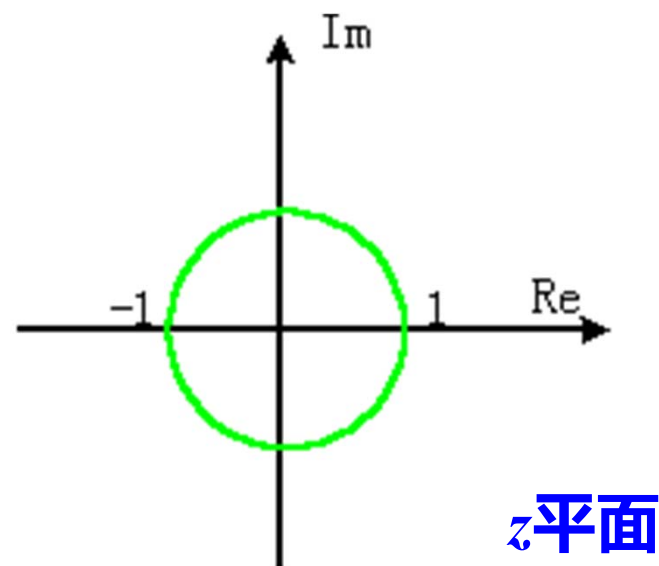
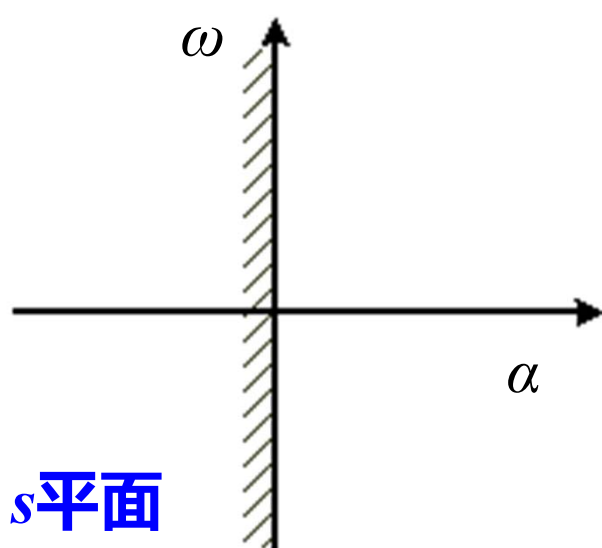
一、差分变换法-稳定性分析

■ Z变换： $z = e^{Ts}$ ， $s = \alpha + j\omega$ ， T 是采样周期， α 实部， ω 虚部

$$z = e^{Ts} = e^{T\alpha} * e^{jT\omega} \rightarrow |z| = e^{T\alpha}$$

■ 系统稳定的充分与必要条件：

- 它的所有极点均落在 s 平面的左半部。
- s 平面的稳定区（左半平面），在 z 平面上是一个单位圆。



一、差分变换法-稳定性分析

s平面稳定区: $\text{Re}(s) < 0$

一阶后向差分稳定性分析

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (z = \sigma + j\omega)$$

$$\text{Re}(s) = \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{T(\sigma^2 + \omega^2)} < 0$$

$$\sigma^2 - \sigma + \omega^2 < 0$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- z 平面上圆心为 $(1/2, 0)$, 半径为 $1/2$ 的圆, 是稳定区域。

一阶前向差分稳定性分析

$$s = \frac{z - 1}{T} \quad (z = \sigma + j\omega)$$

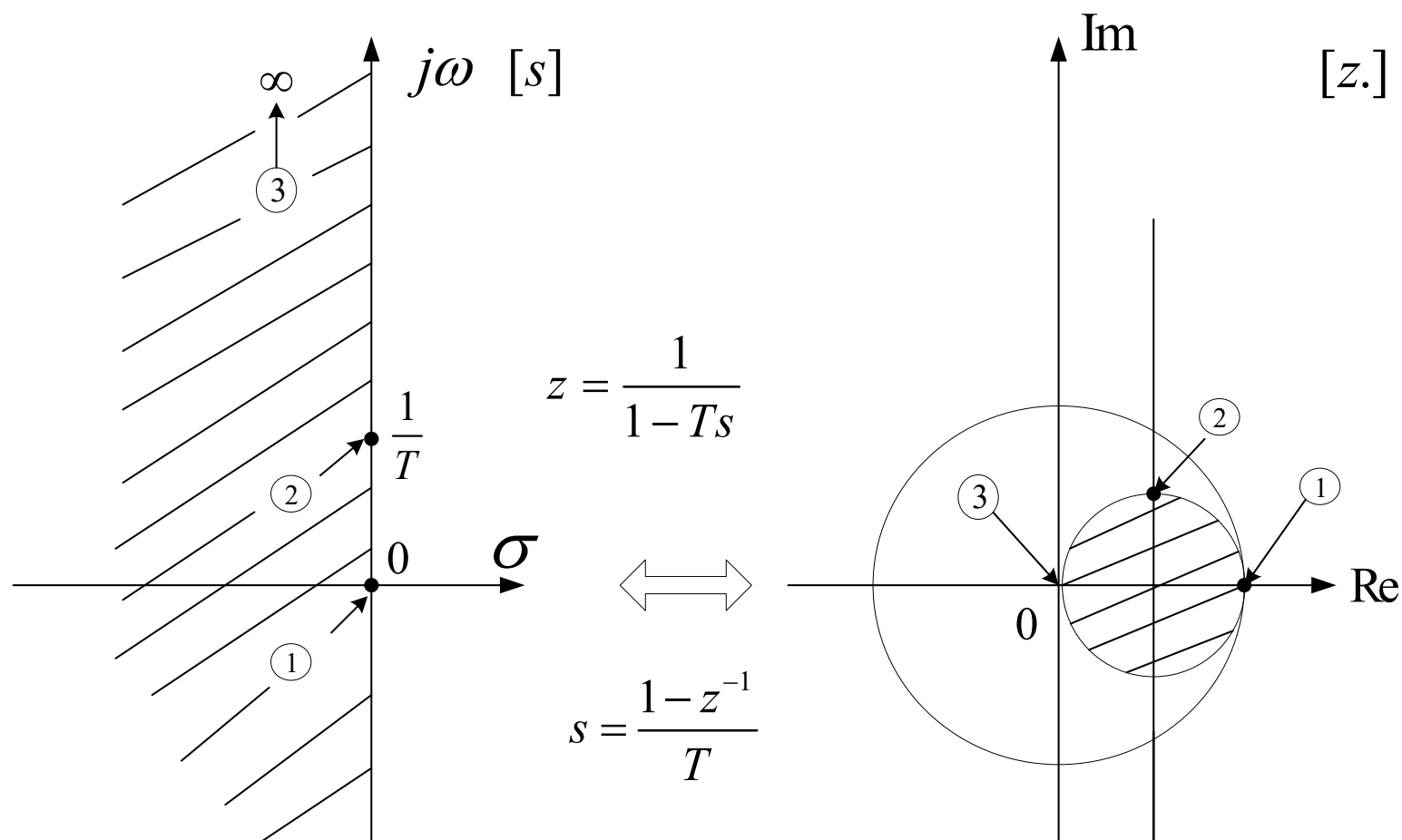
$$\text{Re}(s) = \frac{\sigma - 1}{T} < 0$$

$$\sigma - 1 < 0$$

- z 平面上的 $z < 1$ 的平面。正常 z 平面的稳定区域是单位圆。即前向差分可能会将 s 平面稳定的极点, 映射到 z 平面的单位圆外, 导致系统的不稳定。

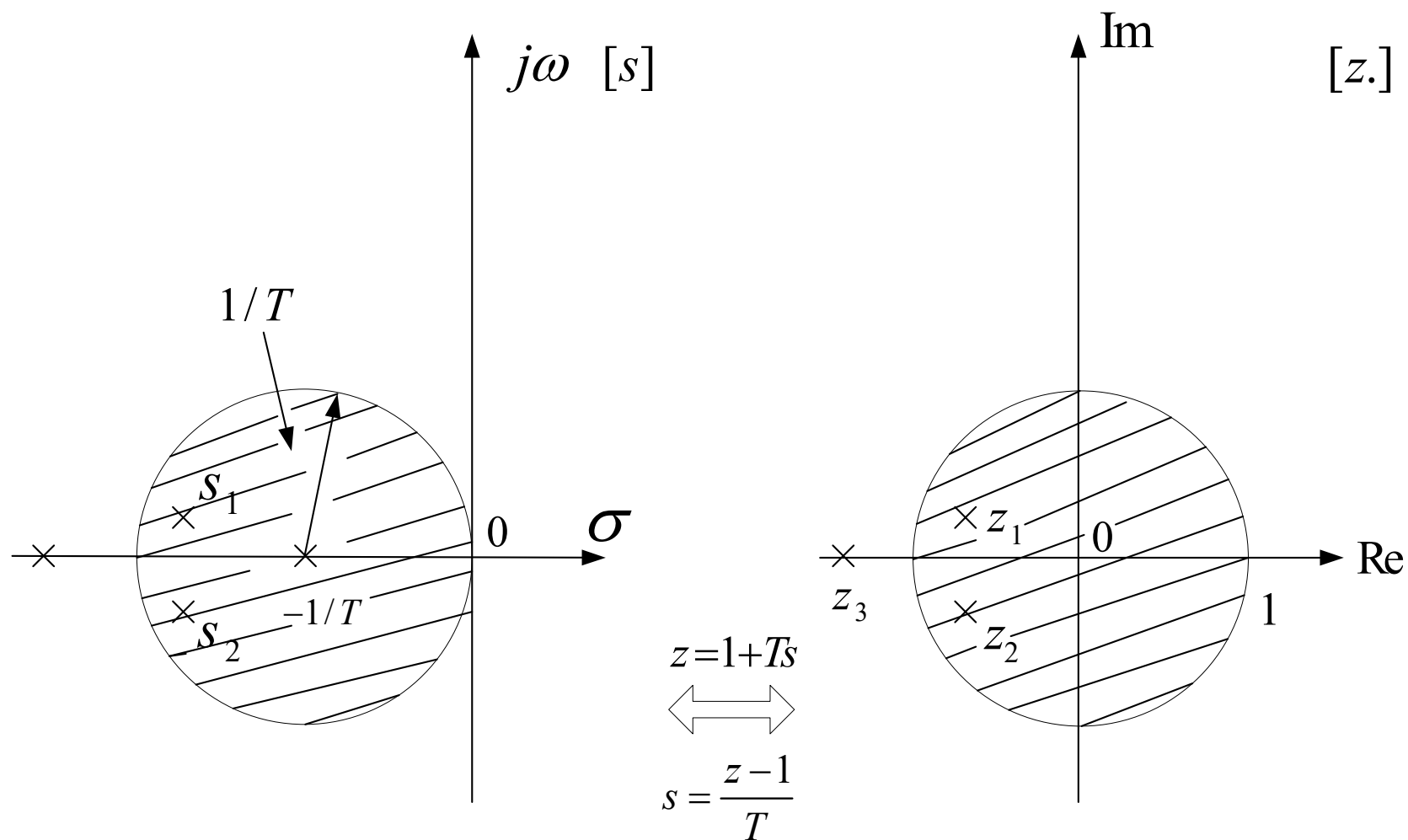
一、差分变换法-稳定性分析

➤ 后向差分将 s 左半平面映射到 z 平面



一、差分变换法-稳定性分析

➤ 前向差分将 s 左半平面映射到 z 平面



一、差分变换法

一阶后向差分特点:

- (1) 公式变换简单, 精度不高
- (2) 若 $D(s)$ 稳定, 则 $D(z)$ 一定稳定。
- (3) 映射后将整个 s 左半平面变换为 z 平面单位圆内的一个小圆。故离散后暂态响应和频率响应特性有较大畸变, 需采用较小的采样周期。

一阶前向差分特点:

- (1) 公式变换简单, 精度差
- (2) 若 $D(s)$ 稳定, 则 $D(z)$ 不一定稳定。只有一部分能映射到单位圆内
- (3) 离散后暂态响应和频率响应特性有较大畸变, 需采用较小的采样周期。

二、双线性变换法

• Z变换定义：

$$z = e^{Ts} = e^{\frac{T}{2}s} / e^{-\frac{T}{2}s}$$

• 泰勒展开：

$$e^{\frac{T}{2}s} = 1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{8}s^2 + \dots$$

$$e^{-\frac{T}{2}s} = 1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{8}s^2 + \dots$$

• 取前两项，以近似式代入：

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

• 双线性变换公式：

$$D(z) = D(s) \Bigg|_{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

二、双线性变换法

例：设 $D(s) = \frac{1}{s}$ ，用双线性变换法离散化。

解： $D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T}{2} * \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$



$$U(z) - Z^{-1}U(z) = \frac{T}{2} * (E(z) + Z^{-1}E(z))$$

对等式两边取 z 反变换：

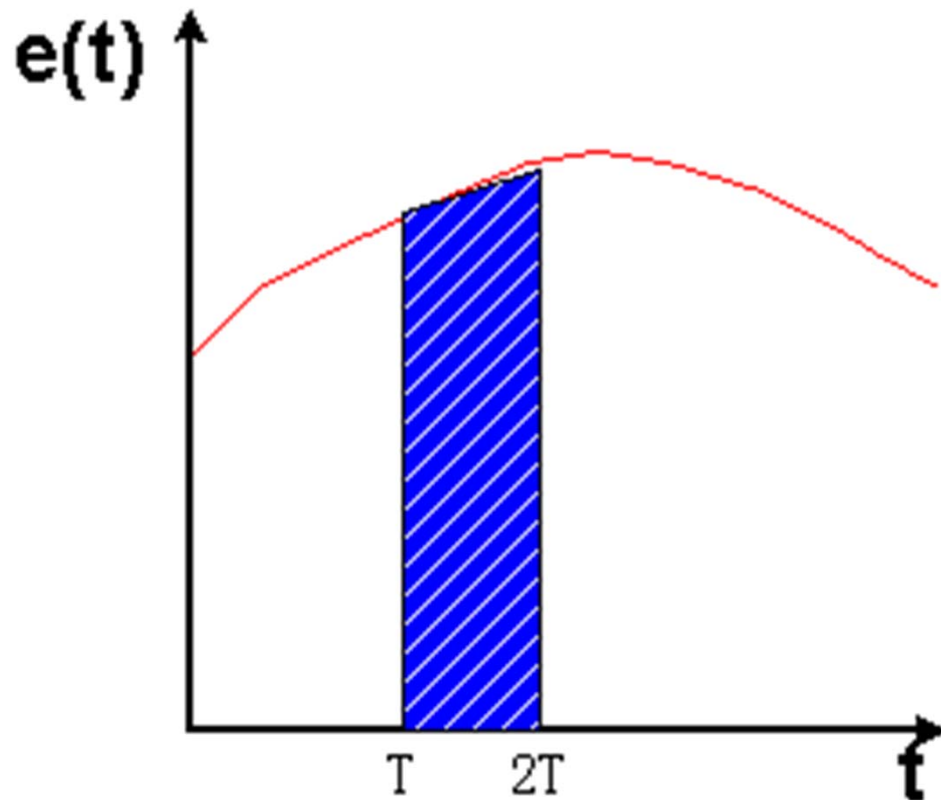
$$u(kT) - u[(k-1)T] = \frac{T}{2} \cdot (e(kT) + e[(k-1)T])$$



$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} \cdot (e(kT) + e[(k-1)T])$$

二、双线性变换法

$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} \cdot (e(kT) + e[(k-1)T])$$



该方法是用梯形面积，来近似曲线面积--**梯形积分法**。

二、双线性变换法

➤ 变换稳定性

$$\operatorname{Re}(s) < 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{Re}\left(\frac{2}{T} * \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) < 0$$

$$D(z) = D(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} * \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}$$

$$z = \sigma + j\omega \quad \longrightarrow \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) < 0$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(\sigma - 1 + j\omega)(\sigma + 1 - j\omega)}{(\sigma + j\omega + 1)(\sigma + 1 - j\omega)}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j2\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}\right] < 0$$

$$\sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

二、双线性变换法

➤ 变换稳定性

$$D(z) = D(s) \left|_{s = \frac{2}{T} * \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}\right.$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

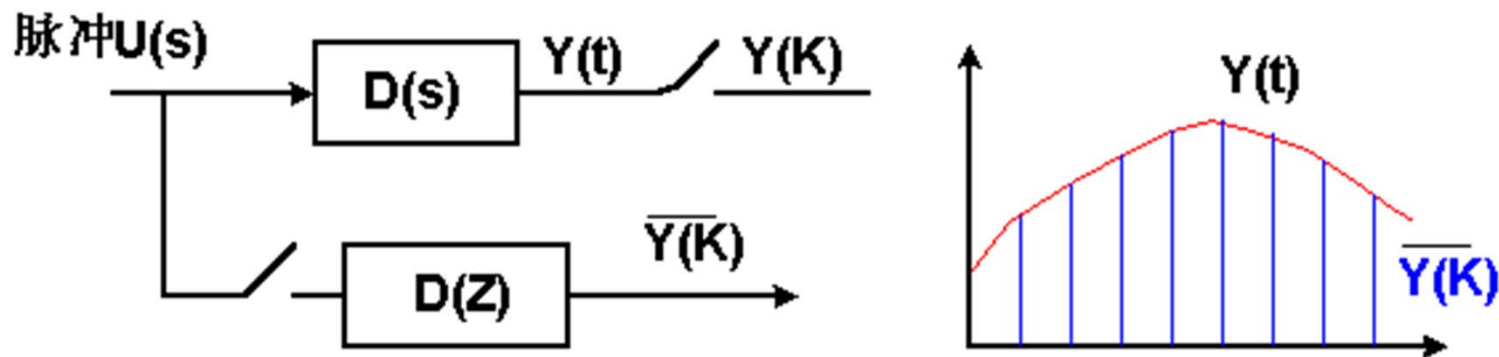
- 上式代表Z平面上以原点为圆心的单位圆。
- z变换的映射是重叠映射,而双线性变换映射是一对一的非线性映射,即整个虚轴对应一个有限长度的单位圆的圆周长。

结论:

1. $D(s)$ 稳定, 则 $D(z)$ 一定稳定。
2. 转换精度高于差分变换。
3. 暂态特性和频率响应特性有畸变。

三、脉冲响应不变法(z变换法)

- 定义：使离散环节的脉冲响应，等于连续环节的脉冲响应函数的采样值。



$$\bar{y}(k) = y(k) \quad \Rightarrow \quad D(z) \cong Z[D(s)]$$

- 对 $D(s)$ 取 z 变换 ($z=e^{Ts}$)，能保证脉冲响应在采样时刻值不变。
- 该方法需要进行增益匹配。

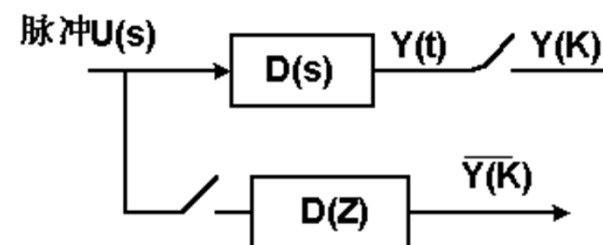
三、脉冲响应不变法(z变换法)

增益匹配方法1: $D(z) \cong T * Z[D(s)]$

增益匹配方法2: 稳态增益法

$$D(z) \cong K * Z[D(s)]$$

$$K \text{ 满足: } D(s) \big|_{s=0} = D(z) \big|_{z=1}$$



总结:

- (1) z 变换总是把稳定的 $D(s)$ 映射为稳定的 $D(z)$,所以脉冲不变法不存在稳定性问题
- (2) 此法确定等效离散滤波器并不容易, 复杂滤波器 $D(s)$ 的 z 变换, 求解繁杂。

三、脉冲响应不变法(z变换法)

例： $D(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$ ， 用脉冲响应不变法求 $D(z)$, $T=1s$ 。

解： $D(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} = \frac{1}{0.995} * \frac{0.995}{(s + 0.1)^2 + 0.995^2}$

$$D(z) \cong T * Z[D(s)] = T * \frac{1}{0.995} * \frac{z * e^{-0.1T} * \sin(0.995T)}{z^2 - 2ze^{-0.1T} * \cos(0.995T) + e^{-0.2T}}$$

$$D(z) = \frac{0.763z}{z^3 - 0.985z + 0.819} = \frac{0.763z^{-2}}{1 - 0.985z^{-2} + 0.819z^{-3}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$U(z) = 0.985Z^{-2}U(z) - 0.819Z^{-3}U(z) + 0.763Z^{-2}E(z)$$

$$u(k) = 0.985u(k-2) - 0.819u(k-3) + 0.763e(k-2)$$

四、阶跃响应不变法

- 定义：使离散环节的阶跃响应 $D(z)[1/(1-z^{-1})]$ ，等于连续环节的阶跃响应函数的采样值。

即要求：
$$\frac{1}{1-z^{-1}} D(z) = Z\left[\frac{1}{s} D(s)\right]$$

即：
$$D(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{D(s)}{s}\right] = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} D(s)\right]$$

上式右侧可理解为 $D(s)$ 前面有**零阶采样保持器**。

- 特点：

- (1) 如果 $D(s)$ 稳定，则 $D(z)$ 也稳定；
- (2) 如果 $D(s)$ 是一个复杂的传递函数，其 z 变换很可能无法在一般 z 变换表中查到，需要进行部分分式展开。

五、零极点匹配法(根匹配法)

- 零极点匹配法就是利用 z 变换的定义，将模拟控制器的零极点变换为数字控制器 $D(z)$ 的零极点，使 $D(s)$ 和 $D(z)$ 的低频增益相互匹配。

- 零极点匹配法的步骤：

(1) 将 $D(s)$ 变换成零极点形式

$$D(s) = \frac{k \prod_m (s + z_i)}{\prod_n (s + p_i)} = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

(2) 零、极点分别按 $z=e^{Ts}$ 变换，若分子、分母阶次不等，则表明在 $s=\infty$ 处，即在 $z=-1$ 处还有 $n-m$ 零点或极点。

$$D(z) = \frac{k_1 \prod_m (z - e^{-z_i T})}{\prod_n (z - e^{-p_i T})} (z + 1)^{n-m}$$

$D(z)$ 的增益 k_1 :

- 低通滤波，按 $D(s)|_{s=0}=D(z)|_{z=1}$ 匹配
- 高通滤波，按 $D(s)|_{s=\infty}=D(z)|_{z=-1}$ 匹配

- **特点:** 该变换是基于 z 变换进行的， $D(s)$ 稳定， $D(z)$ 一定稳定。

离散化方法小结

后向 差分法	$D(z) = D(s) \Big _{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$	左到小圆	$D(s)$ 稳定, $D(z)$ 一定稳定, 等效精度差, K 不变
前向 差分法	$D(z) = D(s) \Big _{s=\frac{z-1}{T}}$	圆到圆	$D(s)$ 稳定, $D(z)$ 可能不稳 定,等效精度差, K 不变
双线性 变换法	$D(z) = D(s) \Big _{s=\frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}$	左到单位圆	$D(s)$ 稳定, $D(z)$ 也稳定, 低频特性保持好,高频失 真,无混频现象, K 不变
脉冲响应 变换法	$D(z) = z[D(S)]$	左到单位圆 (有重复)	脉冲响应采样值相同, 易生频混, K 改变
阶跃响应 不变法	$D(z) = Z \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} D(s) \right]$	左到单位圆 (有重复)	阶跃响应采样值相同, 稳态增益 K 改变
零极点 匹配法	$D(z) = D(s) \Big _{(S+a) \rightarrow (z-e^{-aT})}$	左到单位圆	z 与 s 域零极点位置一一 对应, 补充 $z=-1$ 零点可 避免频混, K 改变

作业

设有模拟控制器 $D(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)}$ ，分别用后向差分法、双线性变换法、脉冲响应不变法、阶跃响应不变法、零极点匹配法离散化处理，求其对应的数字控制器 $D(z)$ 。采样周期为 0.1s 。