理论力学

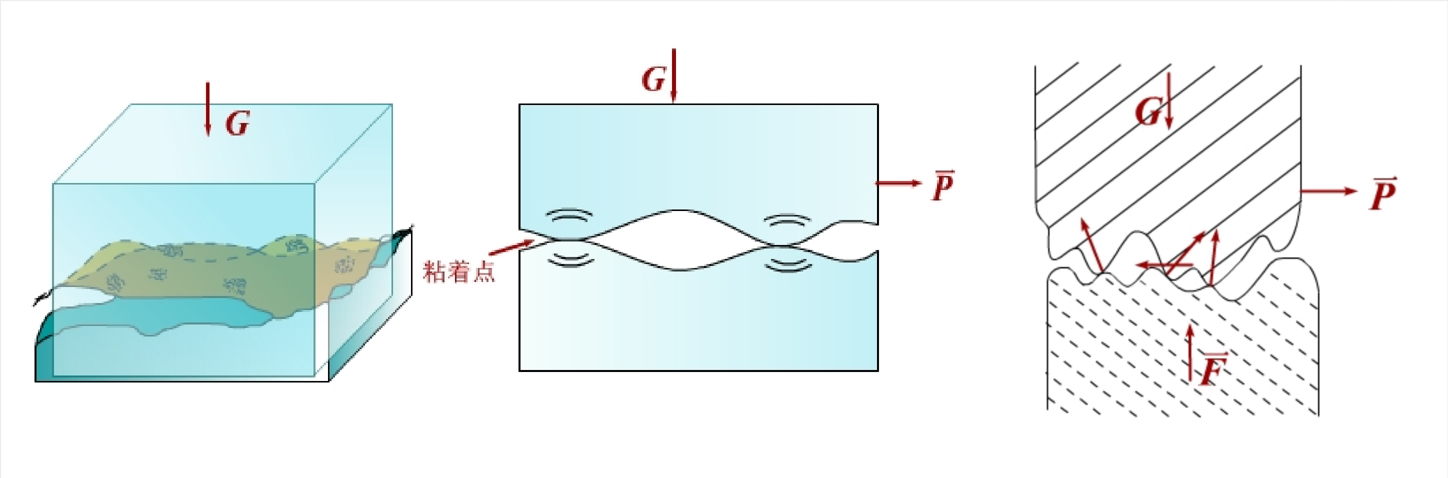
吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

摩擦及摩擦平衡

摩擦

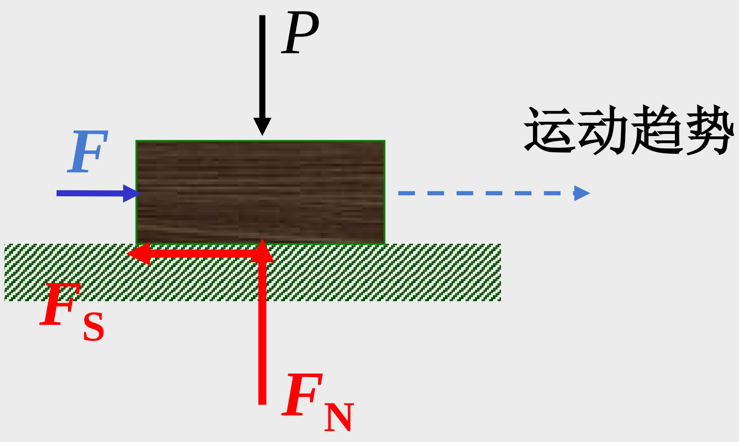
➢ 机理

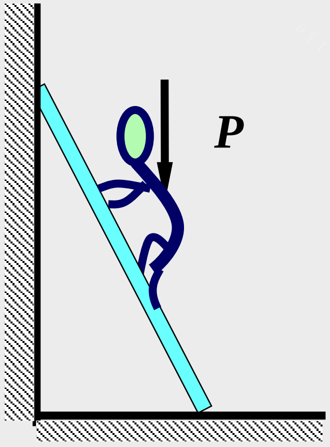


➢ 分类

滑动摩擦	干摩擦	静摩擦
滚动摩擦	湿摩擦	动摩擦

1. 滑动摩擦





F_s: 静滑动摩擦力，方向与运动趋势相反。

滑动摩擦力分为三个阶段：

(1) 大小： $F_s=F$， 范围： $0 \le F_s \le F_{max}$

（2）静摩擦定律(Coulomb)

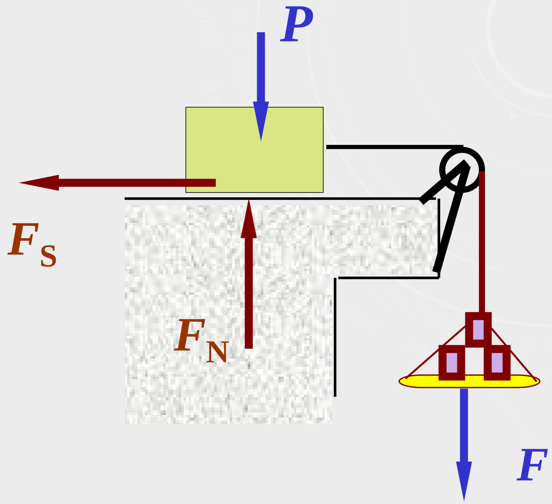
摩擦定律
(库仑定律)

$$F_{max} = f_s F_N$$

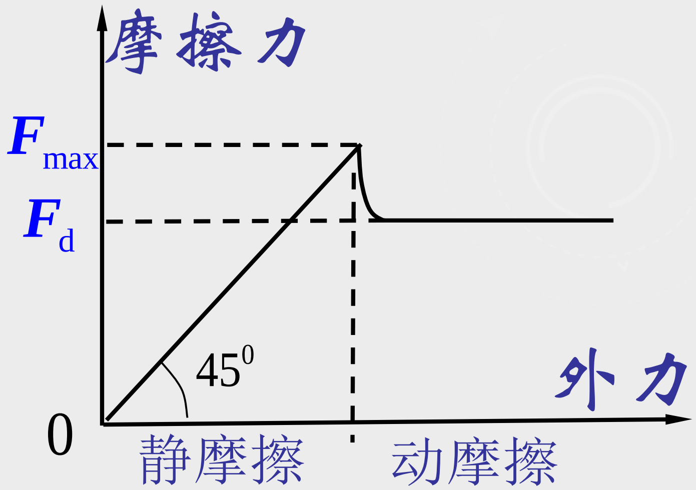
f_s 静摩擦因数

（3）动滑动摩擦力

$$F_d = f_d F_N$$

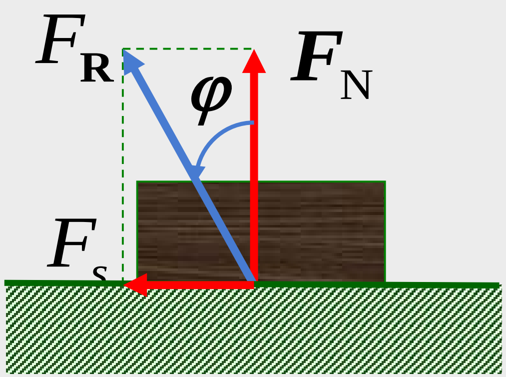


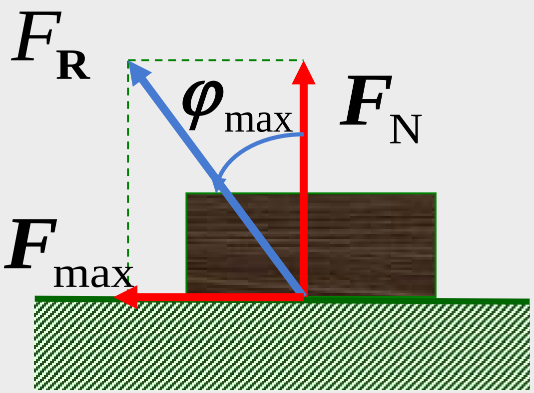
查尔斯·奥古斯丁·库仑
1736 -1806

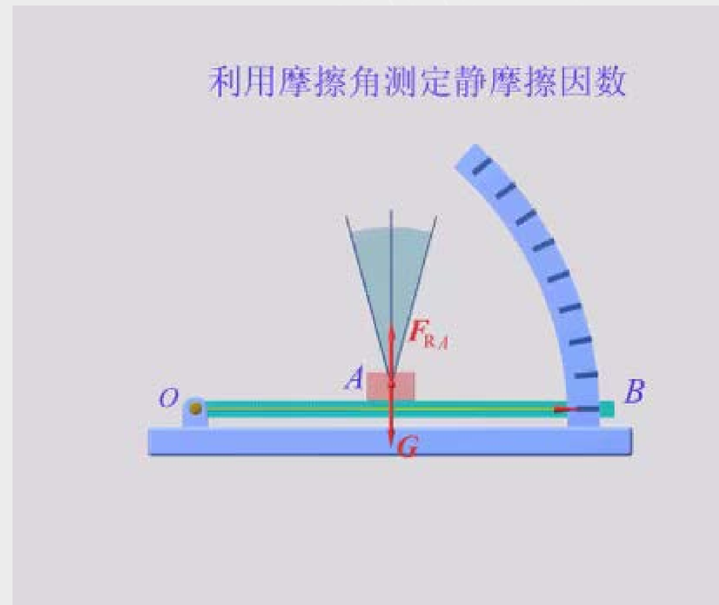


2. 摩擦角和自锁现象

(1) 摩擦角







$$\vec{F}_R = \vec{F}_s + \vec{F}_N$$

$$F_R = \sqrt{F_s^2 + F_N^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{F_s}{F_N}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{max} + \vec{F}_N$$

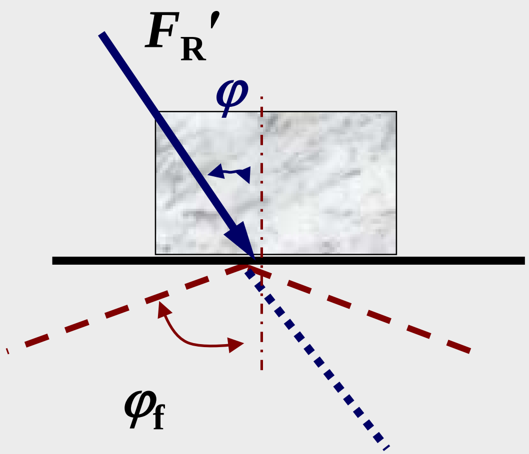
$$\tan\varphi_f = \frac{F_{max}}{F_N}$$

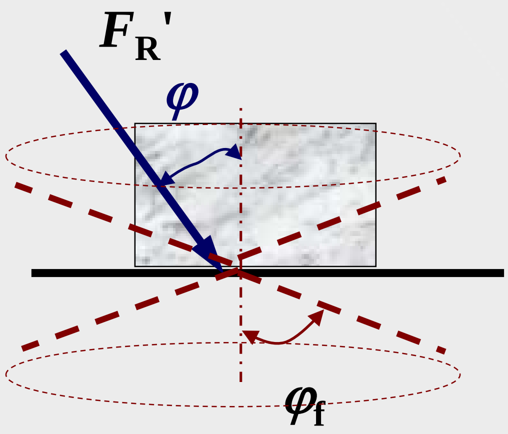
$$\because F_{max} = f_s F_N$$

$$\therefore \tan\varphi_f = f_s$$

φ_f ——摩擦角

摩擦角的正切值等于静摩擦因数





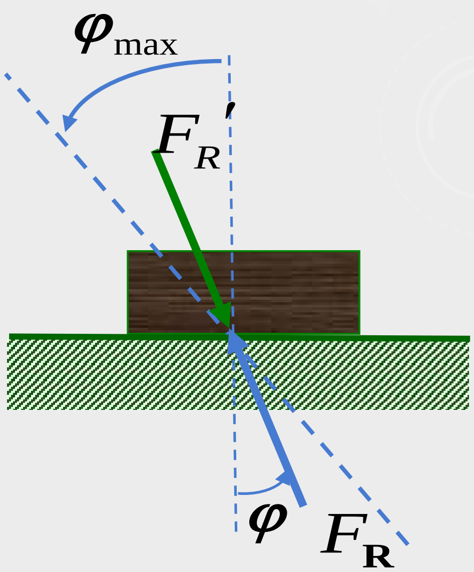
摩擦锥

(2) 自锁

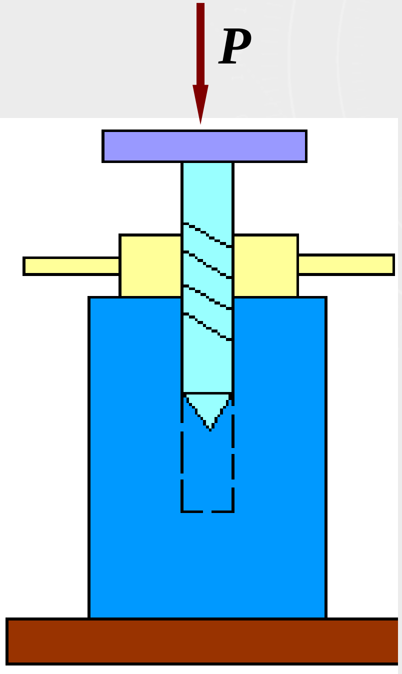
自锁条件 $\varphi \leq \varphi_{max}$

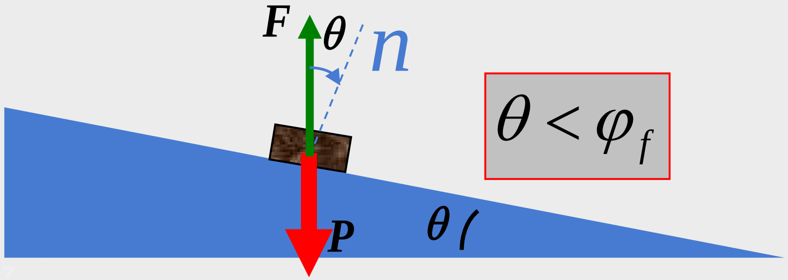
（不滑动的条件）

主动力的合力位于摩擦锥之内，则无论这个力有多大，物体总处于平衡

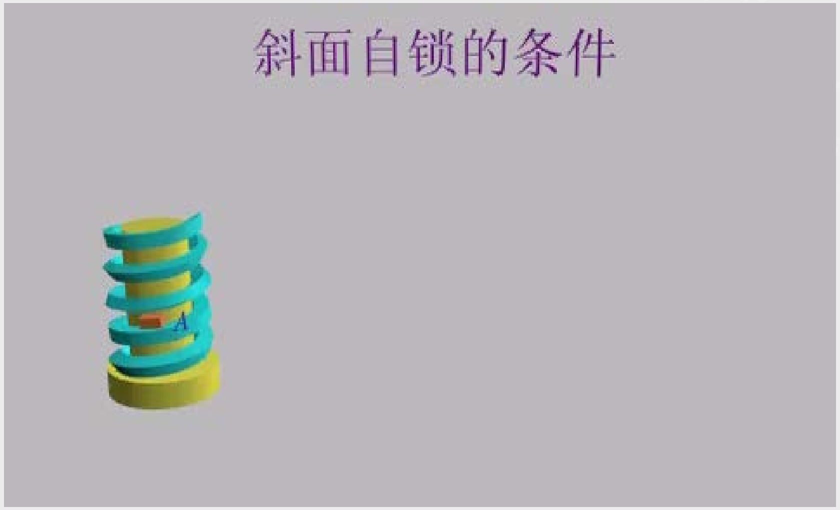


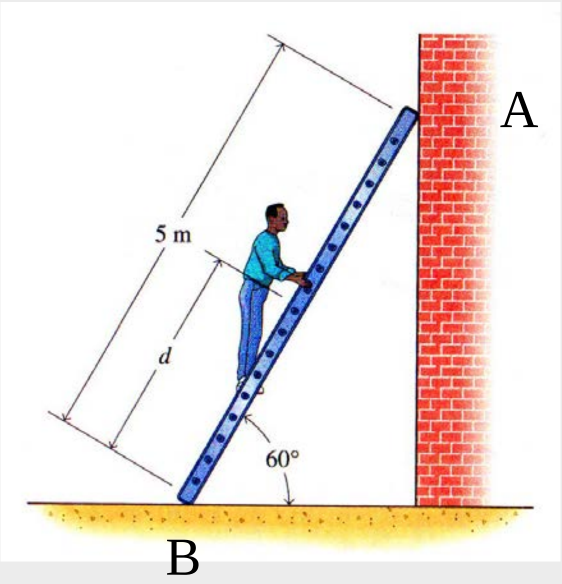
千斤顶楔螺纹角值



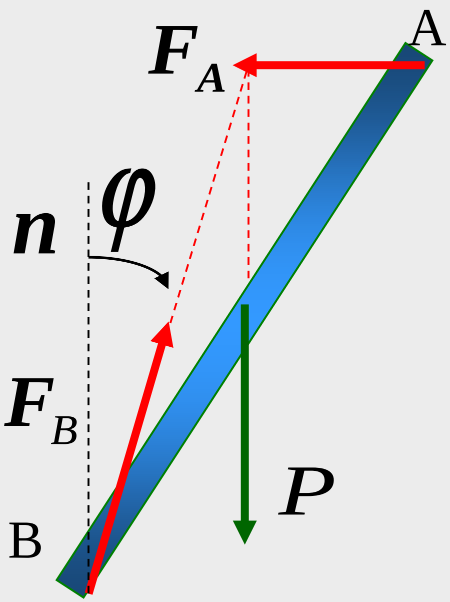


$\theta < \varphi_f$





问题：假设墙壁光滑，若使梯子不滑动，地面与梯子间的静滑动摩擦因数 f_s 至少为多大(不计梯子自重, 人重为W).



研究梯子，画受力图

$$\tan\varphi \le \tan\varphi_{\max} = f_s$$

$$\because 0 \le \varphi \le 30^0$$

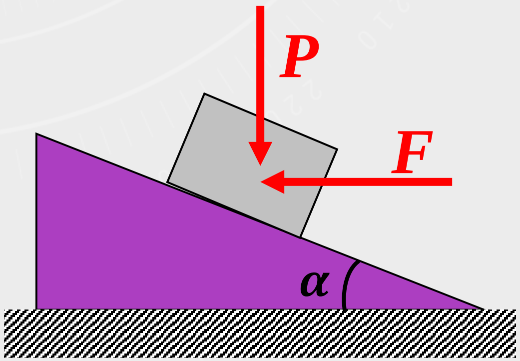
$$\therefore \tan 30^0 \le f_s$$

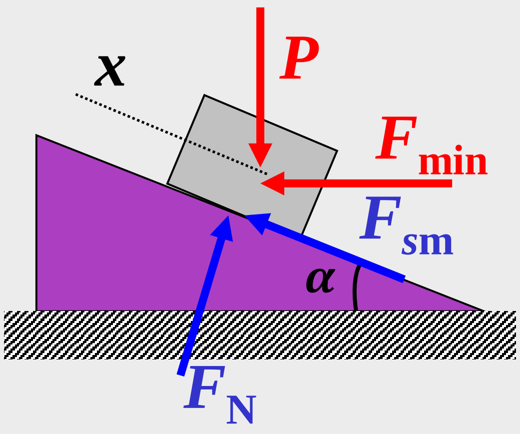
3. 考虑摩擦时物体的平衡问题

（1）几何法：利用摩擦角的概念

（2）解析法：平衡方程+补充方程

例1：重P的物块放在倾角α（$\alpha>\varphi_m$）的斜面上，另加水平力F使物块保持平衡。已知摩擦因数 f_s，求力F的最小值和最大值。





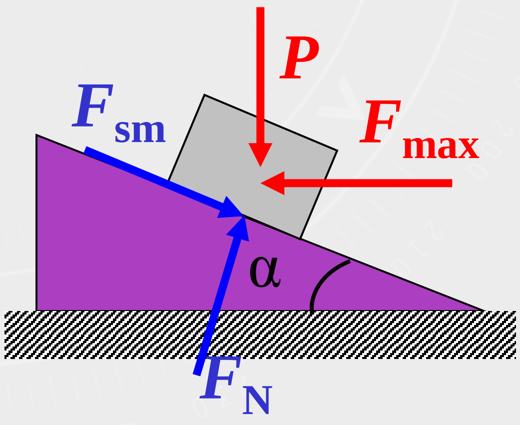
解：解析法 1、求最小值

$$\sum F_{ix}=0 \qquad F_{\min}\cos\alpha+F_{\mathrm{sm}}-P\sin\alpha=0$$

$$\sum F_{iy}=0 \qquad F_{\mathrm{N}}-F_{\min}\sin\alpha-P\cos\alpha=0 \qquad F_{\mathrm{sm}}=f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$$

$$F_{\min} = \frac{\sin\alpha - f_s \cos\alpha}{\cos\alpha + f_s \sin\alpha} P = P\tan(\alpha - \varphi_m)$$

2、求最大值



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$F_{\max}\cos\alpha - F_{\mathrm{sm}} - P\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$F_{\mathrm{N}} - F_{\max}\sin\alpha - P\cos\alpha = 0$$

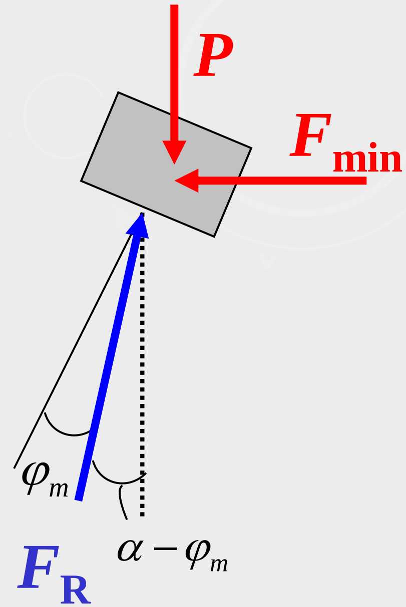
$$F_{\mathrm{sm}} = f_s F_{\mathrm{N}}$$

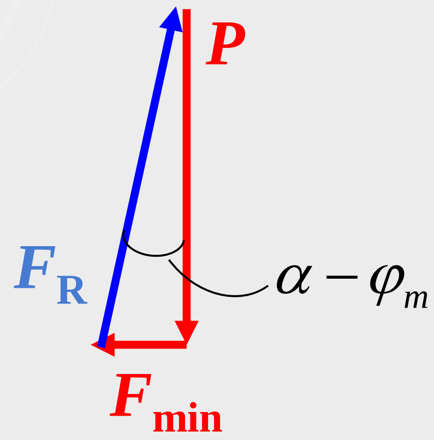
$$F_{\max} = \frac{\sin\alpha + f_s \cos\alpha}{\cos\alpha - f_s \sin\alpha} P = P\tan(\alpha + \varphi_m)$$

几何法

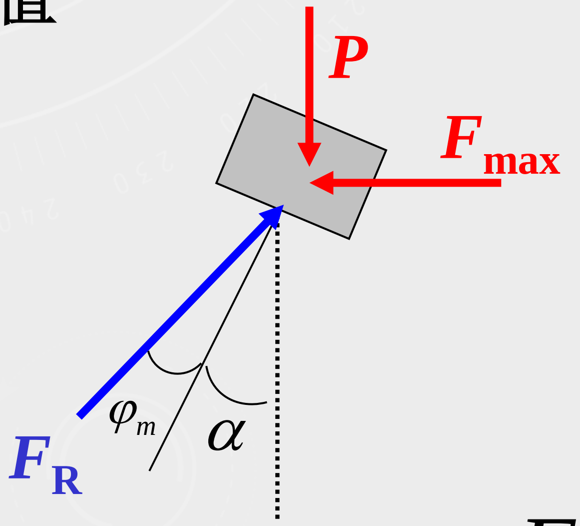
最小值

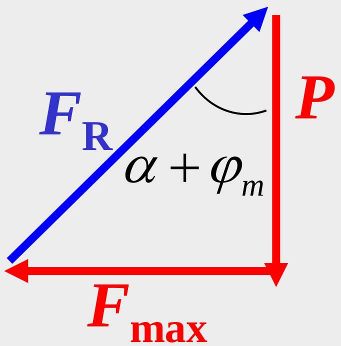
$$F_{\min} = P\tan(\alpha - \varphi_m)$$





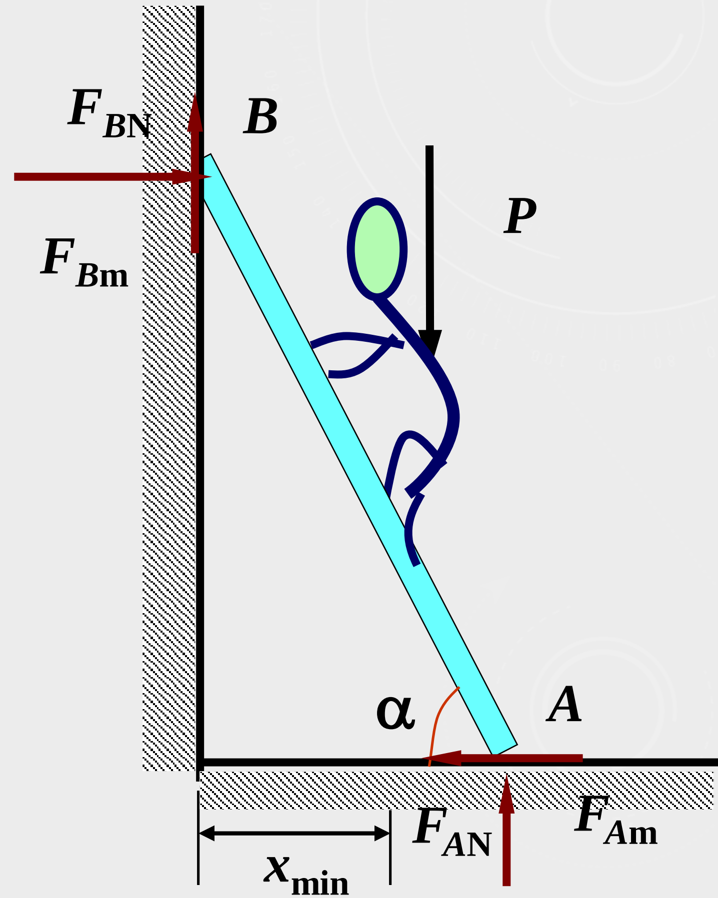
最大值





$$F_{\max} = P\tan(\alpha + \varphi_m)$$

例2： 人重为P，不计重量的梯子放在粗糙的地面、墙面上，梯长 L, 求平衡时 $x_{\min}$。



解：

$$\sum F_{ix}=0,\quad F_{BN}-F_{Am}=0,$$

$$\sum F_{iy}=0,\quad F_{AN}+F_{Bm}-P=0,$$

$$\sum M_{iB}=0,\quad F_{Am}L\sin\alpha+Px_{\min}-F_{AN}L\cos\alpha=0,$$

$$F_{Am}=f_A F_{AN},\qquad F_{Bm}=f_B F_{BN}$$

$$x_{\min}=\frac{(\cos\alpha-f_A\sin\alpha)L}{1+f_A f_B}$$

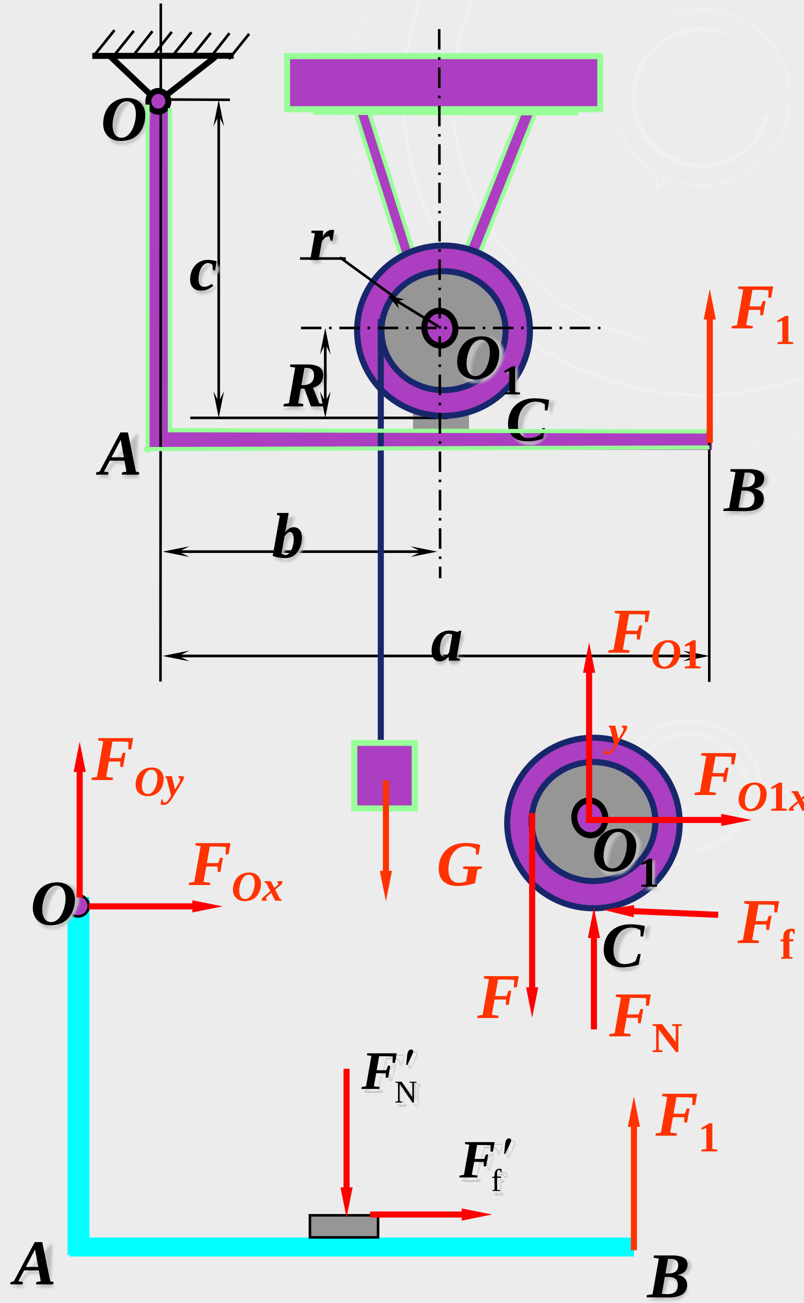
讨论：

1. $f=f_A=f_B$

$$x_{\min}=\frac{(\cos\alpha-f\sin\alpha)L}{1+f^2}$$

2. $x_{\min}$与P无关。

例3： 制动器如图所示。制动块与鼓轮表面间的摩擦因数为 f_s，试求制动鼓轮转动所必需的力F_1。



解： [鼓轮] $\sum M_{O1}(\mathbf{F})=0,\quad Fr-F_fR=0$

$$F_f=\frac{r}{R}F=\frac{r}{R}G$$

[杠杆] $\sum M_O(\mathbf{F})=0,\quad F_1a+F_f'c-F_N'b=0$

$$F_N'b-F_1a=F_f'c=\frac{r}{R}Gc$$

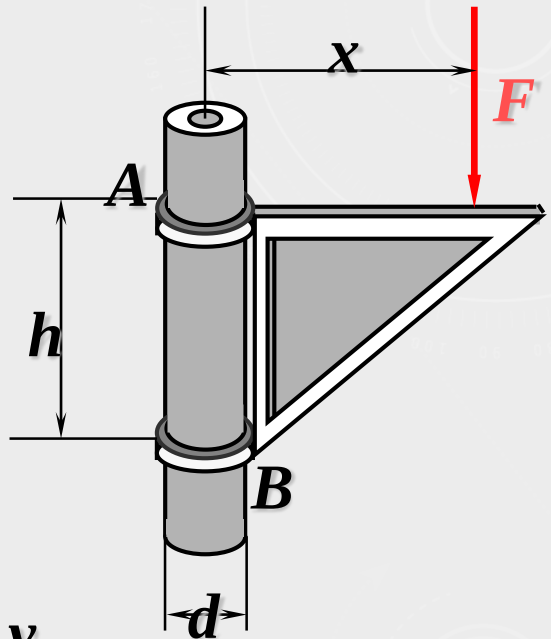
$$F_N'=\frac{F_1a+\frac{r}{R}Gc}{b}$$

又 $F_f'\le f_sF_N'$

所以 $\frac{rG}{R}\le f_s\frac{F_1a+\frac{r}{R}Gc}{b}$

得 $F_1\ge\frac{rG(b-f_sc)}{f_sRa}$

例4：支架套在固定圆柱上，h = 20cm。支架和圆柱间的摩擦因数 f_s 为0.25。问x至少多远才能使支架不致下滑（支架自重不计）。



解： [支架]

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{NA} + F_{NB} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A + F_B - F = 0$$

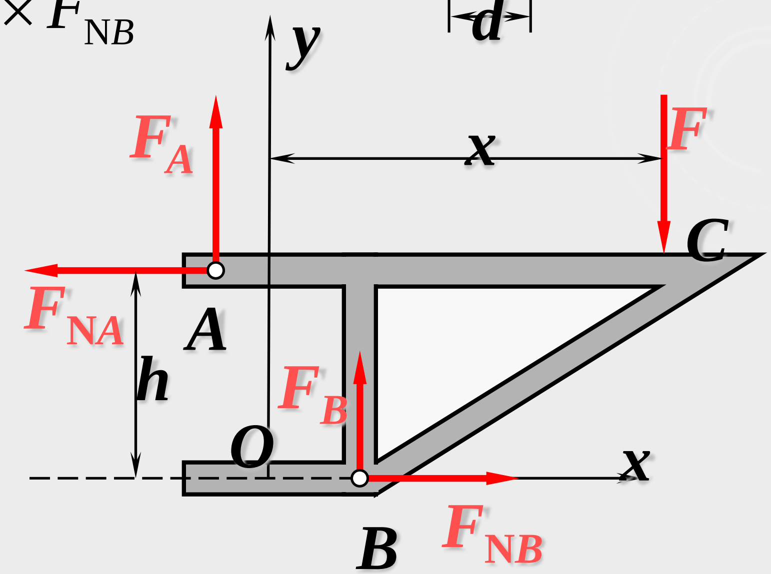
$$\sum M_O = 0, \quad hF_{NA} - \frac{d}{2}(F_A - F_B) - xF = 0$$

补充方程：$F_A = f_s \times F_{NA}$， $F_B = f_s \times F_{NB}$

$$F_{NA} = F_{NB} = 2F$$

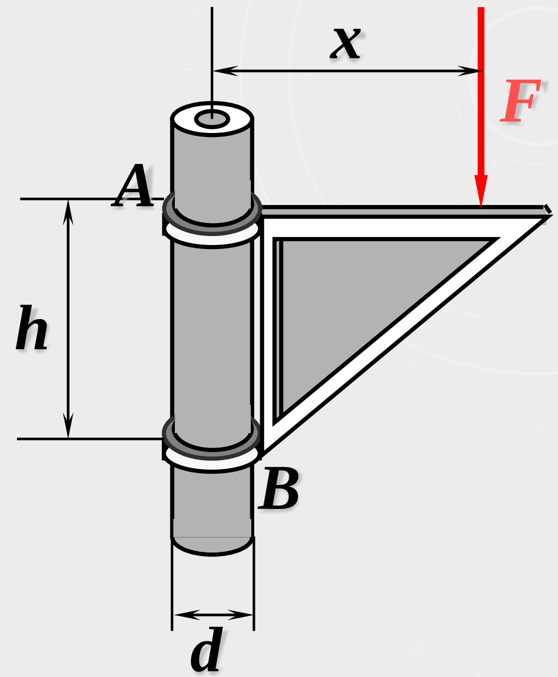
$$x = 2h = 40\ \text{cm}$$

讨论：x与F无关。



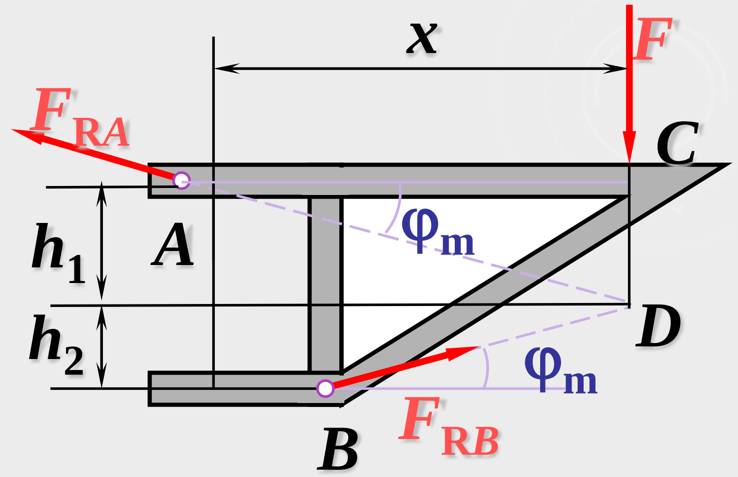
[几何法]

支架受力分析如图所示。



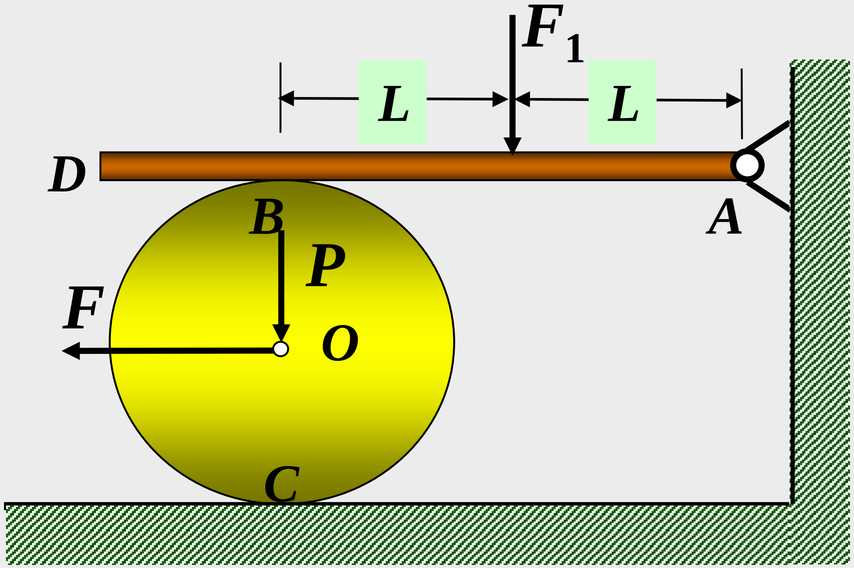
由几何关系得 $h = h_1 + h_2$

$$= (x+\frac{d}{2})\tan\varphi_m + (x-\frac{d}{2})\tan\varphi_m$$

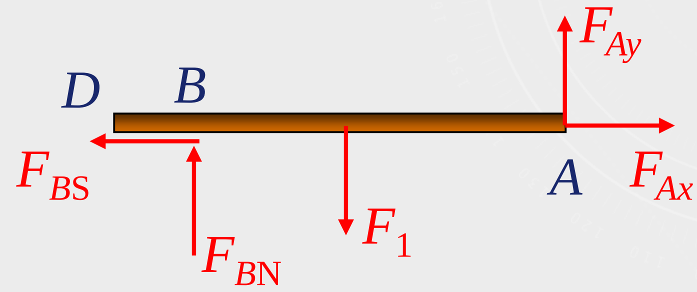


解得 $x = \dfrac{h}{2\tan\varphi_f} = 40\ \text{cm}$

例5：已知如图所示系统中：L=25cm，F_1=20kN，P=20kN，B、C处的静摩擦因数分别为 f_{Bs}=0.6与 f_{Cs}=0.3。试求欲拉动滚子的力 F 应为多大？



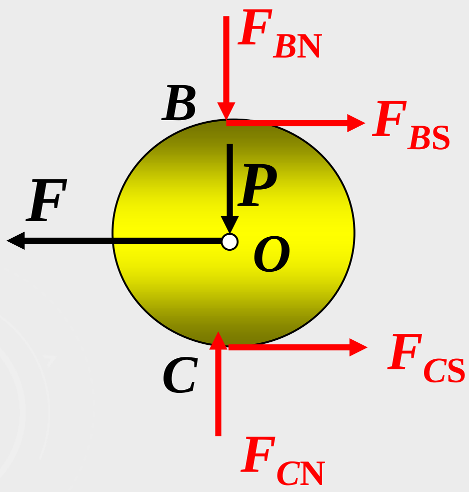
解： 取杆为研究对象：



$$\sum M_A(\vec{F})=0 \qquad F_1L-F_{NB}2L=0$$

得：$$F_{NB}=\frac{1}{2}F_1$$

取轮为研究对象：

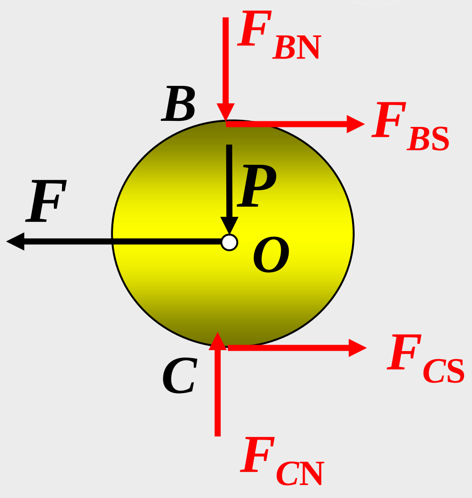


a) 设B处先滑

$$\sum M_C(\vec{F})=0 \qquad FR-F'_{BS}2R=0 \qquad F'_{BS}=\frac{1}{2}F$$

欲滑动，应有

$$F'_{BS}=F_{BS}\geq f_{BS}\cdot F_{NB}\text{，} \quad \text{即} \quad F\geq f_{Bs}F_1=12\ \text{kN}$$



b) 设C处先滑

$$\sum M_B(\vec{F}) = 0 \quad F_{CS}2R - F_1R = 0 \quad F_{CS} = \frac{F_1}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{NC} - P - F'_{NB} = 0$$

$$F'_{NB} = F_{NB} \quad F_{NC} = P + \frac{F_1}{2}$$

欲滑动，应有 $F_{CS} \geq f_{Cs}F_{NC}$ 即 $F \geq 2f_s(P + \frac{1}{2}F_1) = 18$

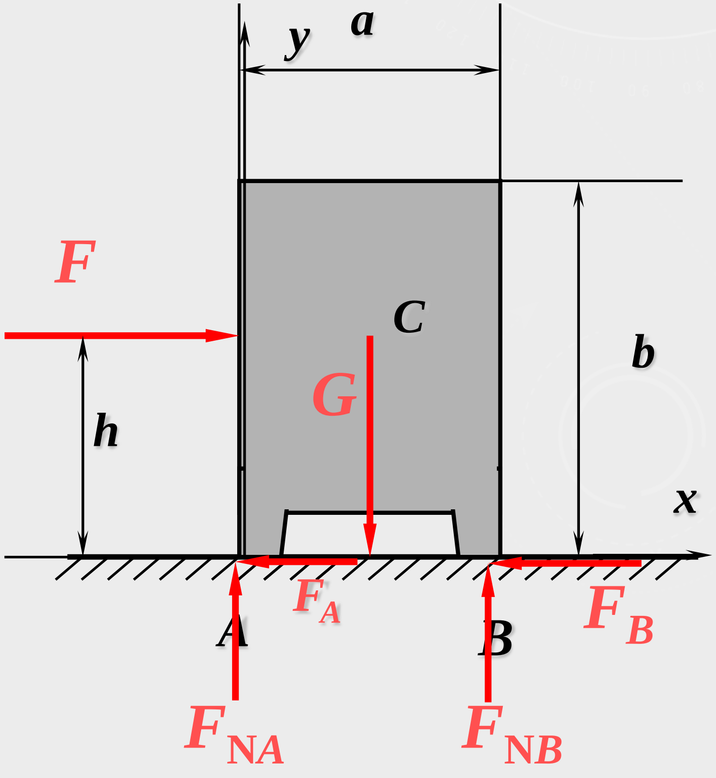
c) F >12kN时可拉动滚子。

4. 有摩擦力存在时的翻倒问题

例6：矩形柜如图，柜重G，重心C在其几何中心，柜与地面间的静摩擦因数是 F_S，施加水平向右的力F，试求平衡时地面的约束力，并求能使柜翻倒或滑动所需推力F 的最小值。

解： 〔矩形柜〕

1．假设不翻倒但即将滑动，临界平衡：



$$\sum F_x = 0 \qquad F - F_A - F_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{NA} + F_{NB} - G = 0$$

补充方程：

$$F_A = f_s F_{NA}\,, \qquad F_B = f_s F_{NB}$$

最小推力： $F_{\min 1}=Gf_{s}$

2.假设矩形柜不滑动但将绕 **B** 翻倒。

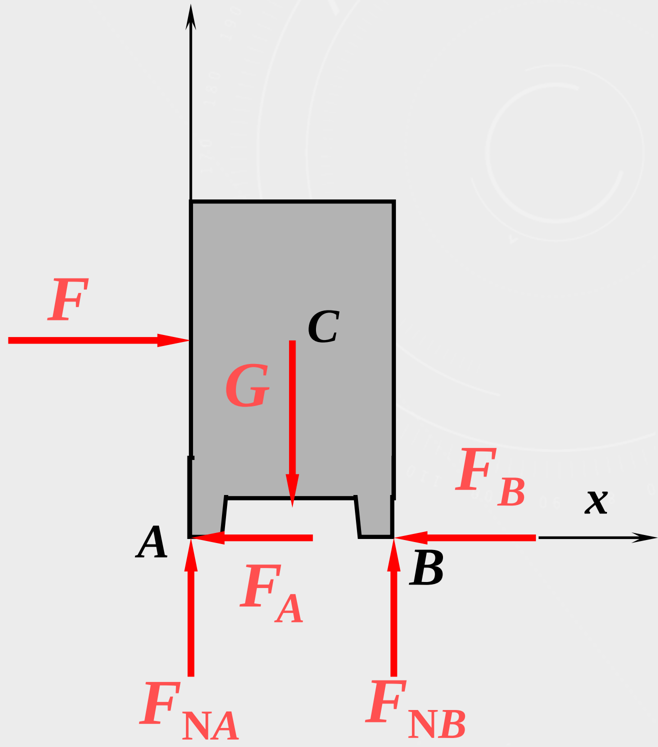
$\sum M_{B}=0 \qquad G\times\frac{a}{2}-F\times h-F_{NA}\times F=0$

柜不绕 **B** 翻倒条件： $F_{NA}\geq 0$

$$F\leq\frac{Ga}{2h}$$

使柜翻倒的最小推力为： $F_{\min 2}=\frac{Ga}{2h}$

$$F=F_{\min 1}=Gf_{s}$$



常见摩擦问题

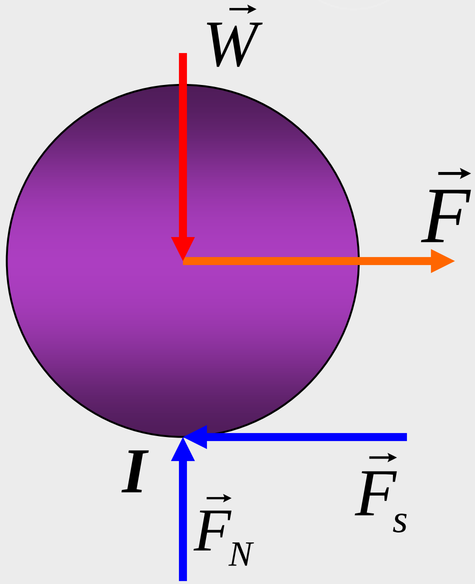
类型：平衡判断，临界平衡，平衡范围

核心：临界平衡。

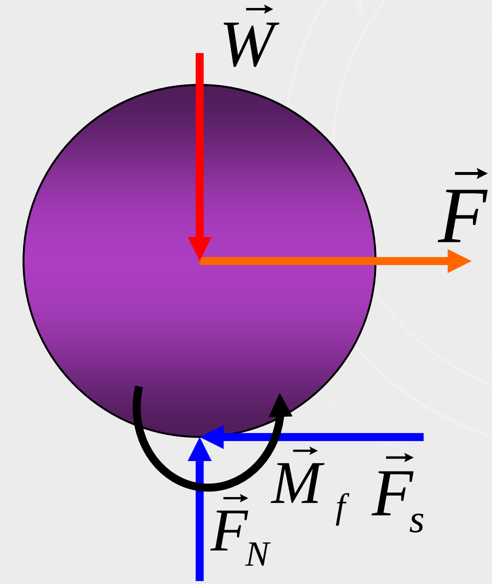
关键：临界状态判断。

方法：合理选用解析法和几何法

5. 滚动摩阻



$$\sum M_I = F \cdot R \neq 0$$

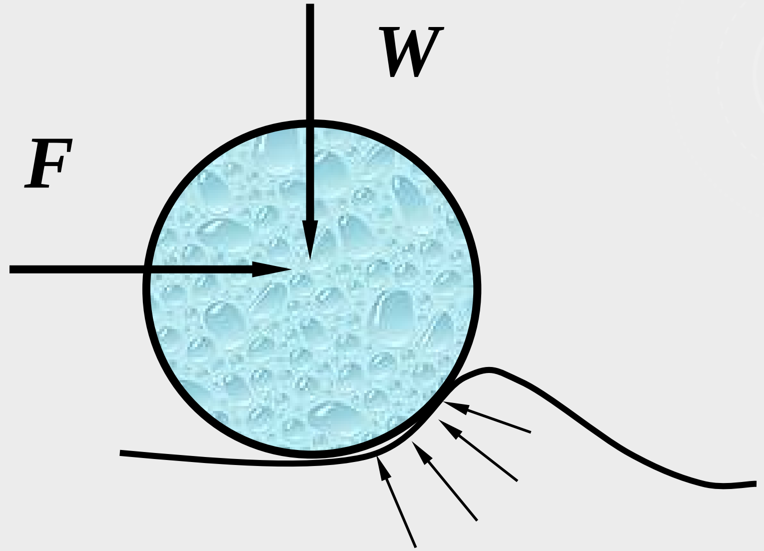


M_{f} $\boxed{\text{滚动摩擦力偶}}$ 与轮子滚动（趋势）方向相反

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad F - F_s = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \qquad W - F_N = 0$$

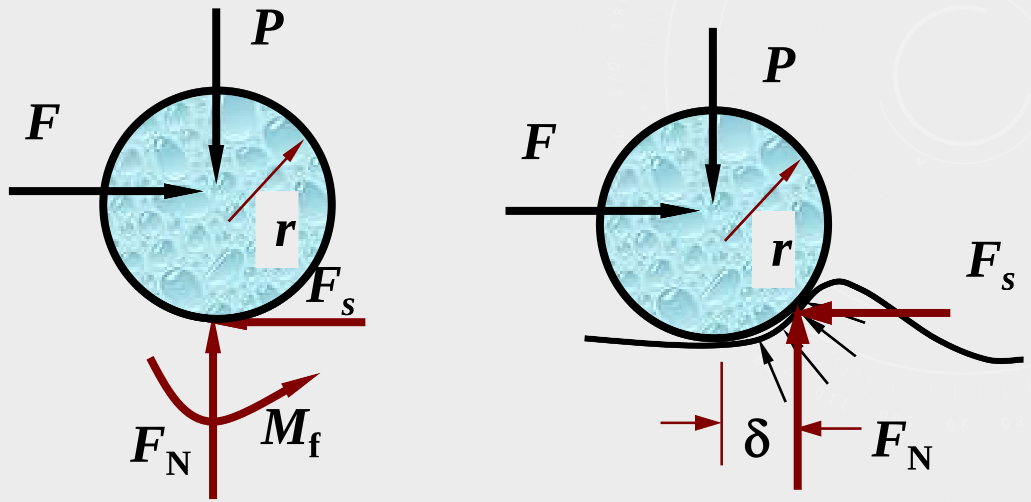
$$\sum M_I = 0 \qquad M_{\mathrm{f}} - Fr = 0$$



$$0 \le M_{f} \le M_{f\,max}$$

$$M_{f\,max} = \delta F_{N}$$

δ---滚动摩阻系数（**mm**）



滑动 or 滚动?

滚动条件：$F\,r \ge M_f = \delta\, F_N$,

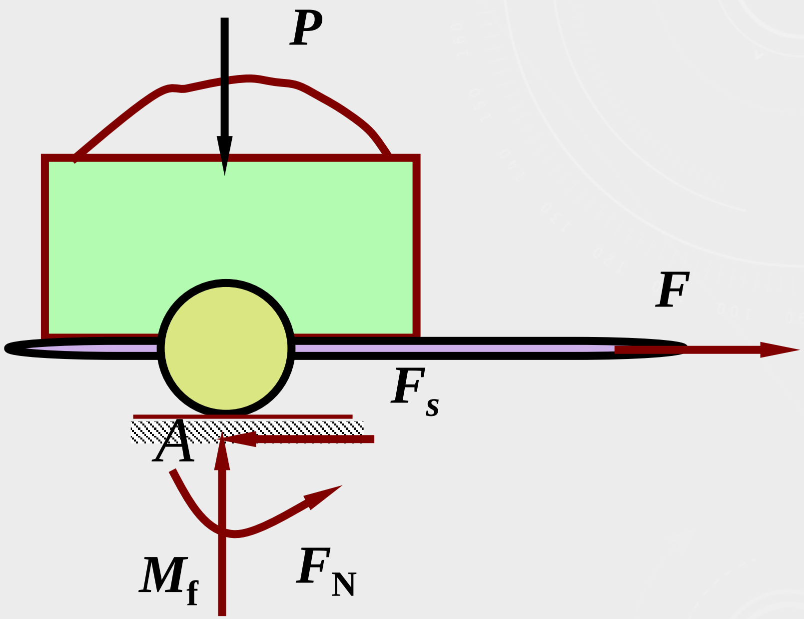
滑动条件：$F \ge F_s = f_s F_N$。

$$\frac{\delta}{r} << f_s$$

易滚难滑

例7： 一手拉小车，已知：$D = 80\text{cm}$, $\delta = 0.15\text{cm}$, $P = 1\text{kN}$, 试求：拉动时力F的值。

解： [整体]



$$\sum M_A = 0 \qquad F\frac{D}{2} - M_f = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \qquad -P + F_N = 0$$

$$M_f = \delta \cdot F_N \qquad F = 2\delta\frac{P}{D} = 3.75\,\text{N}$$

例8： 总重W的拖车在牵引力F 作用下要爬上倾角为θ的斜坡。设车轮半径为r，轮胎与路面的滚动摩阻系数为δ，尺寸如图。试求拖车所需的牵引力。

解： [拖车]

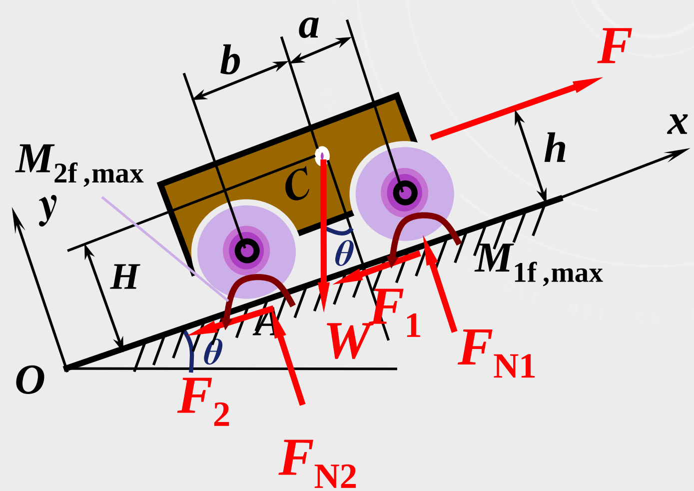
$$\sum F_x=0: \quad F-F_1-F_2-W\sin\theta=0$$

$$\sum F_y=0: \quad F_{N1}+F_{N2}-W\cos\theta=0$$

$$\sum M_A(F)=0,$$

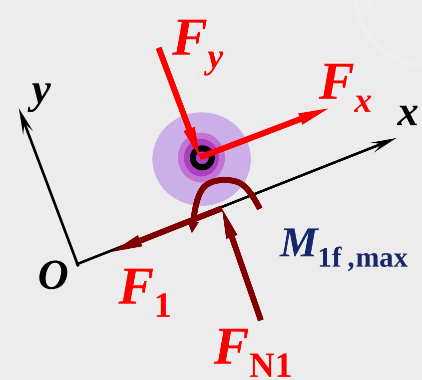
$$-W\cos\theta\times b+W\sin\theta\times H+F_{N1}(a+b)$$

$$-F\times h+M_{1f,\max}+M_{2f,\max}=0$$



[前轮] $\sum M_O(F)=0: \qquad M_{1f,\max}-F_1 r=0$

同样由后轮得 $\quad M_{2f,\max}-F_2 r=0$



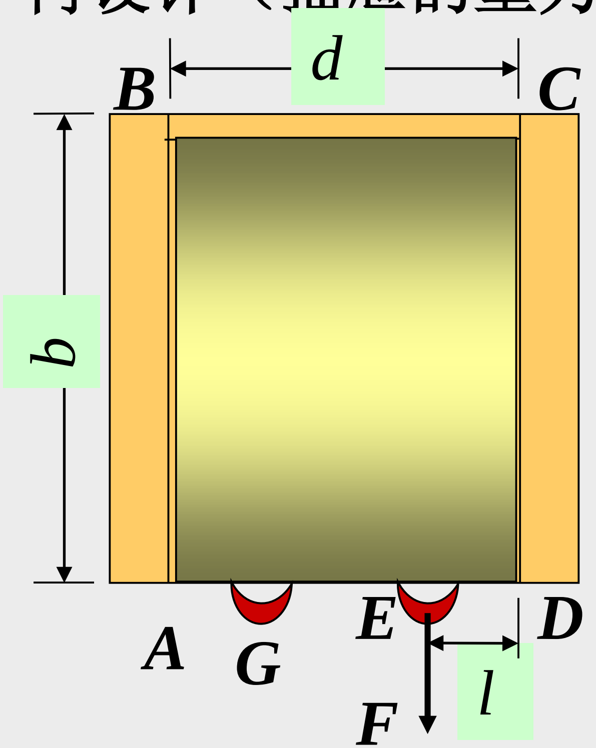
临界时的方程 $\quad M_{1f,\max}=\delta F_{N1} \qquad M_{2f,\max}=\delta F_{N2}$

解方程可得 $F=W\left(\sin\theta+\dfrac{\delta}{r}\cos\theta\right)=10.6\ \text{kN}$

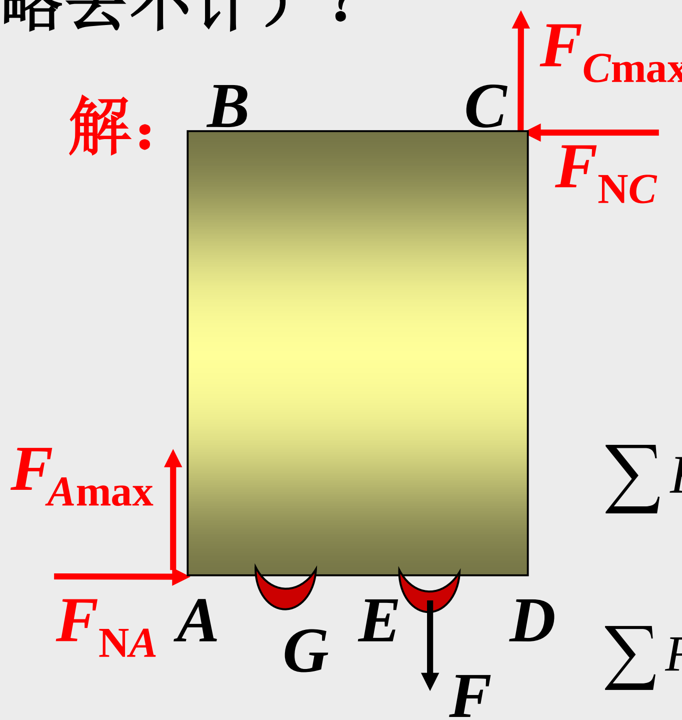
TAKE-HOME MESSAGE

- ✓ 受力分析时画一般情形
- ✓ 要判断需补充几个方程
- ✓ 几何法 VS 解析法

例5： 抽屉*ABCD*的宽为*d*、长为*b*，与侧面导轨之间的静摩擦因数均为f_s。为了使用一个手拉抽屉也能顺利抽出，试问各尺寸应如何设计（抽屉的重力略去不计）？



解：



$$\sum F_{ix}=0 \qquad F_{NA}-F_{NC}=0$$

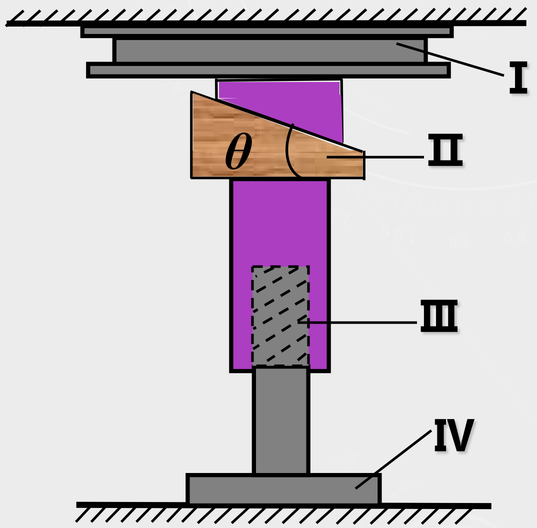
$$\sum F_{iy}=0 \qquad F_{Amax}+F_{Cmax}-F=0$$

$$\sum M_A=0 \qquad F_{NC}\cdot b+F_{Cmax}\cdot d-F(d-l)=0$$

$$F_{Amax}=f_sF_{NA}、F_{Cmax}=f_sF_{NC}$$

联立解得：$b=f_s(d-2l)$　　　能拉动：$b>f_s(d-2l)$

例7： 坑道施工中的联结结构装置如图。它包括顶梁I，楔块II，用于调节高度的螺旋III及底座IV。螺旋杆给楔块以向上的推力F_{N1}。已知楔块与上下支柱间的静摩擦因数均为f_S。求楔块不致滑出所需顶角的大小。



解： 〔楔块〕

$$\sum F_x = 0: \quad F_1 + F_2 \cos\theta - F_{N2} \sin\theta = 0 \qquad （1）$$

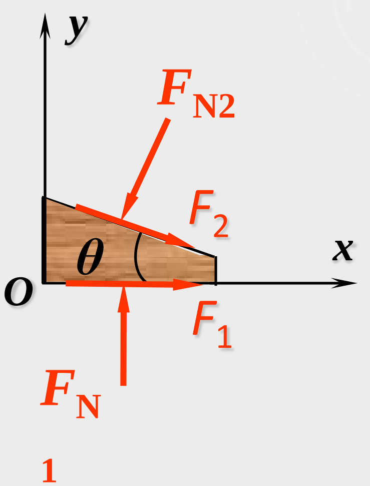
$$\sum F_y = 0: \quad F_{N1} - F_2 \sin\theta - F_{N2} \cos\theta = 0 \qquad （2）$$

补充方程： $F_2 = F_{m2} = f_s F_{N2} \quad F_1 = F_{m1} = f_s F_{N1}$

代入（1）得 $f_s(F_{N1} + F_{N2}\cos\theta) - F_{N2}\sin\theta = 0$

得 $$\frac{F_{N1}}{F_{N2}} = \frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{f_s}$$

代入（2）得 $F_{N1} - f_s F_{N2}\sin\theta - F_{N2}\cos\theta = 0$



得：
$$\frac{F_{\mathrm{N1}}}{F_{\mathrm{N2}}}=f_{\mathrm{s}}\sin\theta+\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta-f_s\cos\theta}{f_s}=f_s\sin\theta+\cos\theta \quad （3）$$

$f_s=\tan\varphi_m$ 代入（3）式

$$\tan\varphi_m=\frac{\sin\theta-\tan\varphi_m\cos\theta}{\tan\varphi_m\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan\varphi_m}{\tan\varphi_m\tan\theta+1}=\tan(\theta-\varphi_m)$$

即： $\theta=2\varphi_m$

所以楔块不致滑出的条件为 $\theta\le2\varphi_m$