HW5

14.1. 已知点的运动方程为 $\vec{r} = \sin 2t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j}$，其中 t 以 s 计，$\vec{r}$ 的大小以 m 计，$\vec{i}$，$\vec{j}$ 分别为 x, y 方向单位向量，求 t = π/8 s 时，点的速度和加速度

解：$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\cos 2t\,\vec{i} - 2\sin 2t\,\vec{j}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -4\sin 2t\,\vec{i} - 4\cos 2t\,\vec{j}$

$\vec{v}\big|_{t=\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}\,\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j}$, $v = 2\,m/s$

$\vec{a}\big|_{t=\frac{\pi}{8}} = -2\sqrt{2}\,\vec{i} - 2\sqrt{2}\,\vec{j}$, $a = 4\,m/s^2$

14.4. 已知点的运动方程 $\vec{r} = at\,\vec{i} + b(\cos\omega t)\,\vec{j} + c(\sin\omega t)\,\vec{j}$，式中 a, b, c 和 ω 均为已知常数。求当任意时刻 t 该点的加速度大小和方向余弦表达式。

解：$\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 b\cos(\omega t)\,\vec{j} - c\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{k}$

$a = \omega^2\sqrt{b^2\cos^2\omega t + c^2\sin^2\omega t}$

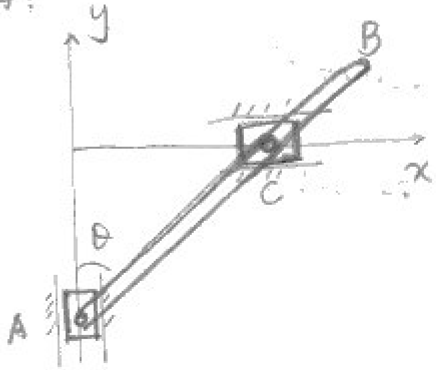
$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = 0$

$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \dfrac{-b\cos\omega t}{\sqrt{b^2\cos^2\omega t + c^2\sin^2\omega t}}$

$\cos(\vec{a}, \vec{k}) = \dfrac{-c\sin\omega t}{\sqrt{b^2\cos^2\omega t + c^2\sin^2\omega t}}$

14.7. 如图，杆长为 l 的 AB 杆。滑块 A, C 各沿 y 和 x 轴作直线运动，设 $BC = a$，$\theta = kt$。试求 B 点的运动方程，并求轨迹方程

解：



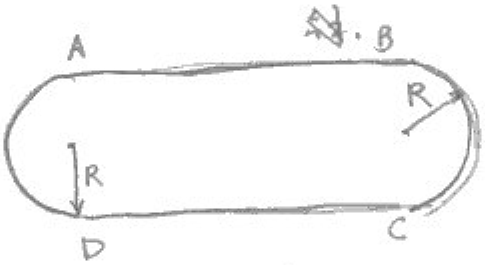
解：取坐标系如图所示，B 点的 x, y 坐标分别为

$$\begin{cases} x = l\sin\theta = l\sin kt \\ y = a\cos\theta = a\cos kt \end{cases}$$

因此有：

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

14.8. 如图所示，平面封闭曲线由两根长直线段和两个半径 $R = 30\,m$ 的半圆组成，全长为 1000m，一物体沿此曲线作匀速运动，在 75s 内通过全程。求该物体在运动中加速度的最大和最小值。



解：运动过程中 $V = \frac{s}{t} = \frac{1000\,m}{75\,s} = \frac{40}{3}\,m/s$

当在直线段运动时

$$a = a_{min} = 0$$

在曲线段运动时

$$a_{max} = \frac{V^2}{R} = \frac{\left(\frac{40}{3}\right)^2}{30} = 5.93\,m/s^2$$

14.9. 一质点在水平面以大小不变的速度 v_0 沿方程 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$ ($b>c$, b、c 为大于 0 的常数) 的轨道运动，求质点的最大和最小加速度的大小，方向及在轨道上相应的位置。

解：由于匀速运动有：$\vec{a}=\vec{a}_n$，其中 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$.

考察椭圆上不同位置的曲率大小：

令 $\begin{cases} x=b\cos\theta \\ y=c\sin\theta \end{cases}$ 有：$\frac{dy}{dx}=\frac{c\cos\theta}{-b\sin\theta}=-\frac{c}{b}\,\mathrm{ctan}\,\theta$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{c}{b}\frac{d\,\mathrm{ctan}\,\theta}{d\,b\cos\theta}=-\frac{c}{b^2}\frac{1}{\sin^3\theta}$，有：$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{bc}{(b^2\sin^2\theta+c^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$

∴ 由于 $b>c$，当 $\sin\theta=0$ 时 $(b,0)$ 处 $\frac{1}{\rho}$ 取最大为 $\frac{b}{c^2}$，有 $\boxed{a_{max}=\frac{bv_0^2}{c^2}}$

当 $\cos\theta=0$ $(0,c)$ 处，有 $\boxed{a_{min}=\frac{cv_0^2}{b^2}}$，方向指向中心 O

14.10. 点在平面上运动，在直角坐标系 Oxy 内运动方程为 $x=at\cos\omega t$，$y=at\sin\omega t$，其中 a,ω 为大于零的常数。求在运动开始 ($t=0$) 和 $t\to\infty$ 时该点轨迹的曲率半径。

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{d(at\cos\omega t)}{d(at\sin\omega t)}=\frac{\cos\omega t-\omega t\sin\omega t}{\sin\omega t\,\cancel{+\omega t\cos\omega t}}=$

由运动方程求 $V_x=\frac{dx}{dt}=a\cos\omega t-a\omega t\sin\omega t$，$V_y=a\sin\omega t+a\omega t\cos\omega t$

速度 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=a\sqrt{1+(\omega t)^2}$

有. $a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{a\omega^2 t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}$，有 $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$

$$\begin{cases} a_x=-a\omega\sin\omega t-a\omega^2t\cos\omega t-a\omega\sin\omega t=-2a\omega\sin\omega t-a\omega^2t\cos\omega t \\ \cancel{a_y=a\omega\cos\omega t-a\omega^2\sin\omega t+a\omega\cos\omega t} \\ a_y=a\omega\cos\omega t-a\omega^2t\sin\omega t+a\omega\cos\omega t=2a\omega\cos\omega t-a\omega^2t\sin\omega t \end{cases}$$

$a=a\sqrt{4\omega^2+\omega^4t^2}=a\omega\sqrt{4+\omega^2t^2}\implies a_n=\frac{a\omega(\omega^2t^2+2)}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}$

$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{a^2(1+\omega^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{a\omega(\omega^2t^2+2)}$　$\boxed{当\ t=0\ 时\ \rho=\frac{a}{2\omega}}$，$\boxed{当\ t\to\infty\ 时，\rho\to\infty}$

14-10也可以用数学软件直接求解 $\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(\sqrt{1+y'})^3}$

In [7]:

```
from sympy import *
init_printing(use_latex='mathjax')
a, w, t =symbols('a w t')
x=a*t*cos(w*t)
y=a*t*sin(w*t)
df=simplify(diff(y,t)/diff(x,t))
```

In [8]:

```
ddf=simplify(diff(df,t)/diff(x,t))
```

In [11]:

```
df
```

Out[11]:

$$-\frac{tw\cos(tw)+\sin(tw)}{tw\sin(tw)-\cos(tw)}$$

In [12]:

```
ddf
```

Out[12]:

$$-\frac{w\left(t^2w^2+2\right)}{a(tw\sin(tw)-\cos(tw))^3}$$

In [15]:

```
rho=simplify((sqrt(1+df**2))**3/ddf)
```

In [16]:

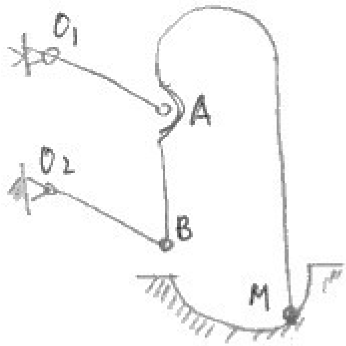
```
rho
```

Out[16]:

$$-\frac{a}{w\left(t^2w^2+2\right)}\left(\frac{t^2w^2+1}{(tw\sin(tw)-\cos(tw))^2}\right)^{\frac{3}{2}}(tw\sin(tw)-\cos(tw))^3$$

In [ ]:

14-12. 搅拌机如图，已知 $O_1A=O_2B=R$，$O_1O_2=AB$，杆 O_1A 转速 $n\frac{r}{min}$，求BAM上M点的轨迹、速度和加速度

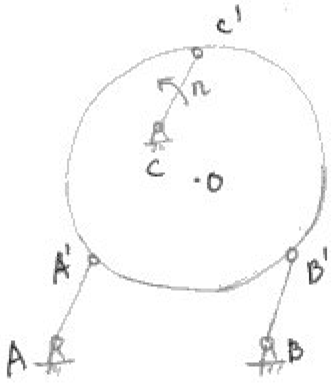


解：杆BAM做平移，有M的运动与B和A点相同。

有：$V_M=V_A=\omega R=\frac{2\pi n}{60}\cdot R=\frac{\pi n R}{30}$

$$a_M=\omega^2 R=\frac{V_A^2}{R}=\omega^2 R=\frac{\pi^2 n^2 R}{900}$$

14-13. 如图，筛子由平行的曲柄带动。ABC和A'B'C'为等边三角形。曲柄 $r=15cm$，转速 $n=45r/min$，求筛面中心O的运动轨迹、速度和加速度。



解：由A'B'C'作平移，有O点的运动与ABC相同，

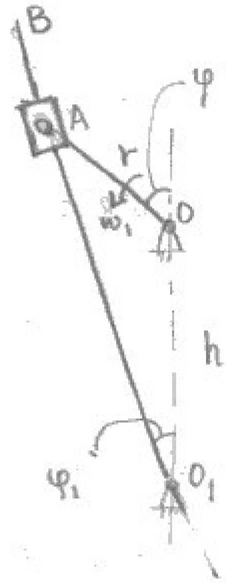
$$V_O=\omega r=\frac{2\pi n}{60}\cdot 15=0.707\ m/s$$

$$a=\frac{V^2}{r}=\omega^2 r=0.333\ m/s^2.$$

14.15, $\overline{OA}=r$, $\overline{OO_1}=h$, ω已知.

求 O_1B 转动方程、角速度、角加速度.

解:



令 OA与 OO_1轴夹角为 φ, O_1B与 OO_1轴夹角为 φ_1

有 $\varphi=\omega t$

且 $\varphi_1=\arctan\dfrac{r\sin\varphi}{h+r\cos\varphi_1}$

可有: $\omega_1=\dfrac{d\varphi_1}{dt}=\dfrac{r^2\omega+hr\omega\cos\omega t}{h^2+r^2+2rh\cos\omega t}$

$$\alpha_1=\cancel{\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega r^2+hr\omega\cos\varphi}{(h+r\cos\varphi)^2}\right]}$$

$$=\cancel{\frac{-\sin\varphi(\omega^2 r)(h^2-rh\sin\varphi\cos\varphi-2r^2\sin\varphi)}{(h+r\cos\varphi)^3}}$$

另 ______

$$\alpha_1=\frac{d\omega_1}{dt}=-\frac{(h^2-r^2)hr\omega^2\sin\omega t}{(h^2+r^2+2rh\cos\omega t)^2}$$

(过程附后).

14-15 也可用数学软件计算

In [12]: (一不小心布置了如此难算的题目)

```
from sympy import *
init_printing(use_latex='mathjax')
r, w, h, t =symbols('r w h t')
phi=atan((r*sin(w*t))/(h+r*cos(w*t)))
```

In [13]:

```
phi
```

Out[13]:

$$\operatorname{atan}\left(\frac{r\sin(tw)}{h+r\cos(tw)}\right)$$

In [14]:

```
w2=diff(phi,t)
```

In [16]:

```
simplify(w2)
```

Out[16]:

$$\frac{rw\left(h\cos(tw)+r\right)}{h^2+2hr\cos(tw)+r^2}$$

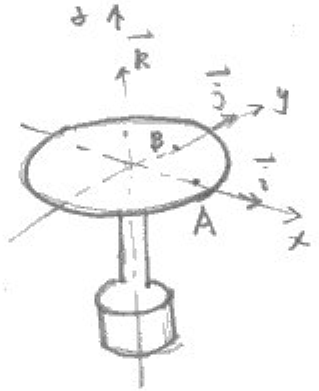
In [17]:

```
simplify(diff(w2,t))
```

Out[17]:

$$\frac{hrw^2\left(-h^2+r^2\right)\sin(tw)}{\left(h^2+2hr\cos(tw)+r^2\right)^2}$$

14-19 圆盘绕z轴转动。已知 B点 $\vec{V}_B = 20\vec{i}$ cm/s，A点切向加速度 $a_\tau = 45\vec{j}$ cm/s². 求 角速度和 B点全加速度向量表达式。OA =15 cm, OB=10cm



解：可得 $\omega = \dfrac{V_B}{\overline{OB}} = 2\ rad/s$

$\alpha = \dfrac{a_\tau}{\overline{OA}} = 3\ rad/s^2$

有 $\vec{\omega} = -2\vec{k}$ rad/s

$\vec{\alpha} = 3\vec{k}$ rad/s²

$\vec{r}_B = 10\vec{j}$ cm

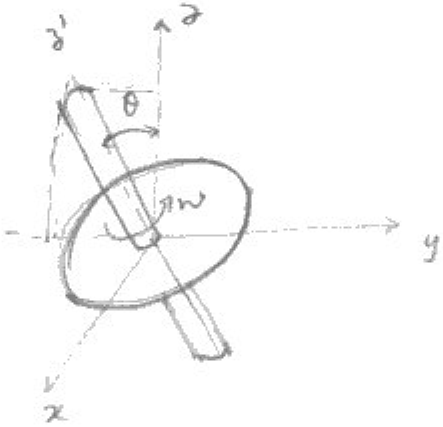
有: $\vec{a}_B = \vec{\alpha} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B)$

$= -30\vec{i} - 40\vec{j}\ (cm/s^2)$

14.20. 圆盘 $\omega = 50$ rad/s，绕z'转动，$\theta = \arctan(3/4)$

$P = (60\vec{i} + 64\vec{j} + 48\vec{k})$ mm，求 P点速度和加速度

解：如图



$\vec{\omega} = 50 \cdot (0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

$= (0, -30, 40)$ rad/s

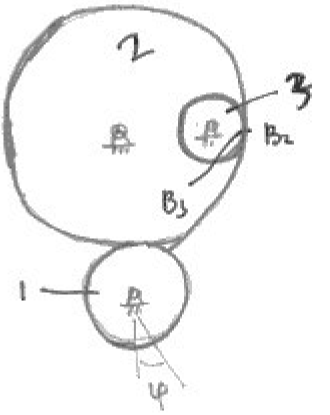
$$\vec{V}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -30 & 40 \\ 60 & 64 & 48 \end{vmatrix}$$

$= -4\vec{i} + 2.4\vec{j} + 1.8\vec{k}$ m/s

$\vec{a}_p = \vec{\alpha} \times \vec{r}_p + \vec{\omega} \times \vec{V}_p = \vec{\omega} \times \vec{V}_p = -150\vec{i} - 160\vec{j} - 120\vec{k}$ m/s²

14-21. 已知 轮1, $\varphi(t) = bt^2$, r_1, r_2, r_3

求：轮3角速度 及 轮2、轮3接触点 B_2和B_3的速度加速度.



解：由于 $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{r_1}{r_2}$ ，$\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}$

有：$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1$ ( )

$\omega_3 = \frac{r_1}{r_3}\omega_1$ ( )

且有：$\alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$ ( )

$\alpha_3 = \frac{r_1 \alpha_1}{r_3}$ ( )

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = 2bt \quad , \quad \alpha_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 2b$$

则：轮3角速度 $\omega_3 = 2bt\frac{r_1}{r_3}$ ，$\alpha_3 = 2b\frac{r_1}{r_3}$

$$a_{B_2} = \sqrt{(a^{\tau}_{B_2})^2 + (a^{n}_{B_2})^2} = \sqrt{(\alpha_2 r_2)^2 + (\omega_2^2 r_2)^2}$$

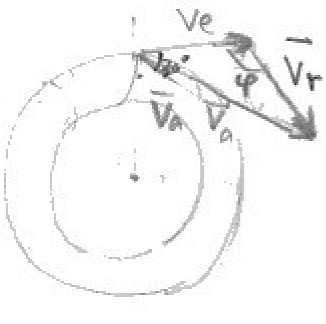
$$= 2br_1\sqrt{1 + \frac{4b^2 r_1^2 t^4}{r_2^2}}$$

$$a_{B_3} = \sqrt{(a^{\tau}_{B_3})^2 + (a^{n}_{B_3})^2} = \sqrt{(\alpha_3 r_3)^2 + (\omega_3^2 r_3)^2}$$

$$= \sqrt{(2br_1)^2 + \frac{(2btr_1)^4}{r_3^2}} = \cancel{2br_1\sqrt{1 + \frac{4b^2t^2}{r_3^2}}}$$

$$= \frac{2br_1}{\cancel{r_3}}\sqrt{1 + \frac{4b^2 r_1^2 t^4}{r_3^2}}$$

15-6 如图. $V_a = 15m/s$, $\theta = 60^\circ$, $R = 2m$, 转速 $n = 30 r/min$.



解. 以 水流为动点, 转轮为动系.

速度如图

$$V_e = \omega R = \frac{2\pi n}{60} \cdot 2 = 2\pi \, m/s$$

$$V_a = 15 \, m/s$$

余弦定理 $V_r = \sqrt{V_e^2 + V_a^2 - 2V_eV_a\cos 30^\circ} = 10.06 \, m/s$

正弦定理 $\frac{V_a}{\sin\varphi} = \frac{V_r}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin\varphi = 0.746$

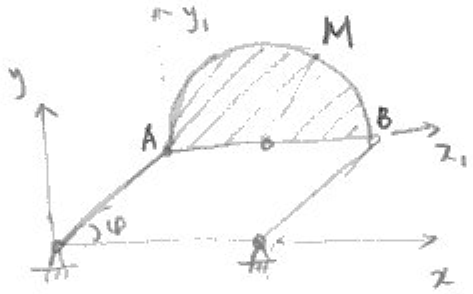
$$\varphi = 131.79^\circ$$

有 $\angle(\vec{V_r}, \vec{r}) = 41.79^\circ = 41^\circ 48'$

15-7. 已知: $O_1A = O_2B = 18cm$, $R = 18cm$, $\varphi = \pi t/18$,

$S = \overset{\frown}{BM} = \pi t^2 cm$, 求 $t = 3s$ 时, M 的速度 ~~和加速度~~。

解 以 M 为动点, 动系固连在 ABM 上,

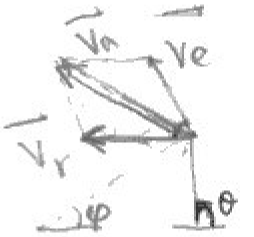


$t = 3s$ 时.

$\varphi = \frac{\pi}{6}$, $V_e = \frac{\pi}{18} \cdot 18 = \pi \, cm/s$

$S = 9\pi \, cm$, $\theta = \frac{9\pi}{18} = \frac{\pi}{2}$

$V_r = \dot{S} = 2\pi t \Big|_{t=3} = 6\pi \, cm/s$



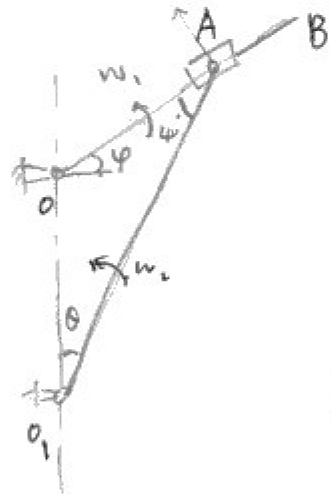
有 $V_a = \cancel{\sqrt{V_e^2 + V_r^2 - 2V_eV_r\cos 60}}$

$= \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_eV_r\cos 60^\circ} = \sqrt{43}\pi \, cm/s$

$= 6.56 \, cm/s$

15-8 如图摇杆机构，已知 $\overline{OO_1} = 20$，某瞬时

$\theta = 20°$，$\varphi = 30°$，$\omega_1 = 6\,rad/s$ 求 ω_2



(a) 以物块 A为动点，OB为动系

绝对运动：O_1圆周运动

相对运动：直线运动

牵连运动：O轴定轴转动

速度如图：有：

$$V_e = \omega_1 \overline{OA}$$

$$V_a = \frac{V_e}{\cos 40°}$$

$$\omega_2 = \frac{V_a}{\overline{O_1A}} = \frac{\omega_1 \overline{OA}}{\cos 40° \ \overline{O_1A}}$$

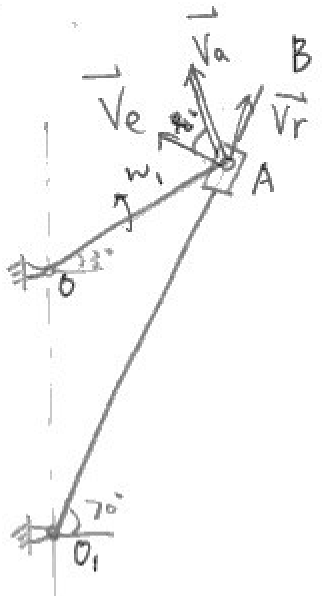
$$= \frac{\omega_1}{\cos 40°} \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 120°} = 3.09\,rad/s$$

(b) 以A为动点，O_1B为动系

绝对运动：O点圆周运动

相对运动：直线运动

牵连运动：O_1轴定轴转动



速度如图：有：$V_a = \omega_1 \overline{OA}$

$$V_e = V_a \cos 40°$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{V_e}{\overline{O_1A}} = \frac{\omega_1 \overline{OA}}{\overline{O_1A}} \cdot \cos 40°$$

$$= \omega_1 \frac{\sin 20°}{\sin 120°} \cdot \cos 40° = 1.82\,rad/s$$