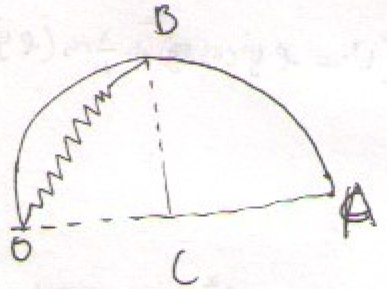
HW 10

18-31 弹簧原长R，刚性系数为k，当弹簧由B→A时，求弹力做功

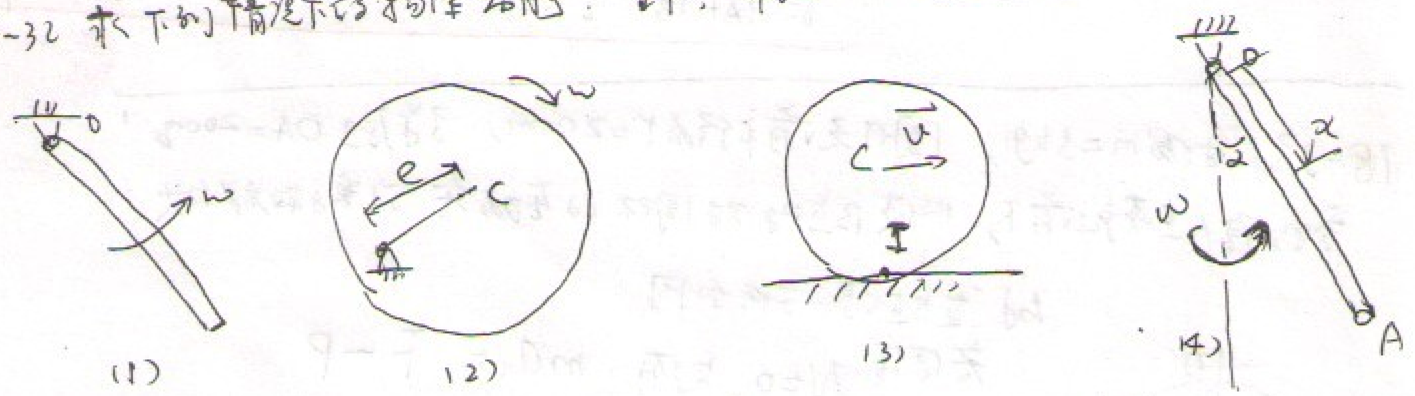
弹力作的功　　解：$\delta_B=(\sqrt{2}-1)R$，$\delta_A=R$

$$\text{有}\quad W_{B\to A}=\frac{1}{2}k(\delta_B^2-\delta_A^2)=\frac{1}{2}k(2-2\sqrt{2})R^2=-(\sqrt{2}-1)kR^2$$



(#)

18-32 求下列情况下各物体的动能：重P，半径r，或长度为l.



解 (1) $T=\frac{1}{2}J_0\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\omega^2=\frac{1}{6}\frac{P}{g}l^2\omega^2$

(2) $T=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2+me^2\right)\omega^2=\frac{P}{4g}(r^2+2e^2)\omega^2$

(3) $T=\frac{1}{2}J_I\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2+mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{3P}{4g}v^2$

或 $T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\cdot J_c\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}v^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{3P}{4g}v^2$

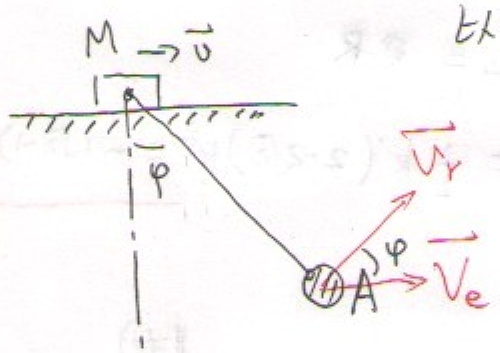
(4) $T=\frac{1}{2}\int v^2dm=\frac{1}{2}\int(\omega\cdot x\cdot\sin\theta)^2\frac{P}{gl}dx=\frac{\omega^2P\sin^2\theta}{2gl}\int x^2dx=\frac{P}{6g}l^2\omega^2\sin^2\theta$

(#)

18-37，已知 M速度为常v，摆长l，摆锤质量为m，振动方程 $\varphi=\varphi(t)$

写出质点系的动能表达式。

解：（用解析法与几何法均可）



以M的平移系为动系，A为动点有

$$\vec{v}_A=\vec{v}_e+\vec{v}_r,\quad v_e=v,\quad v_r=\dot\varphi l$$

则有

$$T_A=\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}m(v+l\dot\varphi\cos\varphi)^2+\frac{1}{2}m(l\dot\varphi\sin\varphi)^2$$

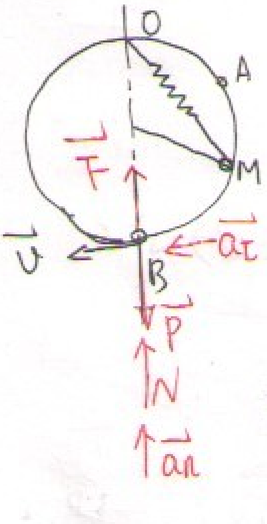
$$T_B=\frac{1}{2}Mv^2$$

有 $T=T_A+T_B=\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}ml\dot\varphi^2+mlv\dot\varphi\cos\varphi$ (#)

18-33，滑块 $m=5kg$，圆环光滑半径为 $r=20cm$，弹簧原长 $OA=20cm$。

滑块自A点静止滑下，欲使B点时对圆环的压力为零，试求弹簧的刚度系数

解 在B点受力分析如图



若使得 $N=0$，则有 $ma_n=F-P$

其中 $a_n=\dfrac{v_B^2}{r}$，$F=kr$，$P=mg$，

由动能定理 求 v_B 大小

$$\frac{1}{2}mv_B^2=T_B-T_A=W_{A\to B}=mg\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}kr^2$$

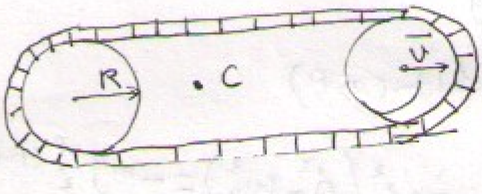
$$\Rightarrow mv_B^2=mg\cdot 3r-kr^2$$

得 $k=\dfrac{2mg}{r}=\dfrac{2\cdot5\,kg\times9.8\,m/s^2}{0.2m}=490N/m=4.9N/cm$

(#)

40. 如图所示，履带式拖拉机车轮为均质圆盘，半径为R，重G_1，履带质量为G_2，当此拖拉机速度为v前进时，物体系总动能.

解:
$$T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}\sum_i m_i V_{ic}^2$$



设物体系质心为C，则C的速度为v

对于C点（固结在C的平移坐标系）

两轮作定轴转动，履带上任一点速度恒定.

有 $$\frac{1}{2}\sum_i m_i V_{ic}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2\cdot\times 2$$

$$+\ \frac{1}{2}m_2\left[\left(\frac{v}{R}\right)\cdot R\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2v^2$$

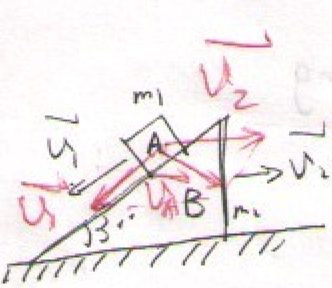
$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\frac{(2G_1+G_2)}{g}v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{G_1}{g}+\frac{G_2}{g}\right)v^2$$

$$=\frac{3G_1+2G_2}{2g}v^2 \qquad (\#)$$

---

41. 滑块A质量为m_1，相对速度v_1，同时m_2滑块B向右运动. 求物体系动能

$$T=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2$$



$$v_B=v_2 \qquad \vec{v}_A=\vec{v}_1+\vec{v}_2$$

$$\begin{cases} v_{Ax}=v_2-v_1\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v_{Ay}=\frac{v_1}{2} \end{cases}$$

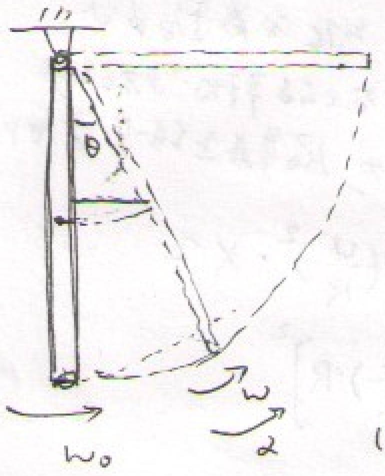
$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1\left[\left(v_2-\frac{\sqrt{3}}{2}v_1\right)^2+\left(\frac{v_1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$=\frac{1}{2}\cancel{m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2(v_2^2+v_1}$$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(v_1^2+v_2^2-\sqrt{3}v_1v_2\right)+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (\#)$$

18-39. 杆质量m，长l，绕O轴转动，如图，(1) 为使杆能从铅直位置转到水平位置，初始速度ω_0至少为多大，(2) 若杆在铅直处角速度为 $\omega_0=\sqrt{6g/l}$，求杆在初始铅直位置和通过水平位置这两瞬时的反力.

解 以θ为坐标描述杆位置.



$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2(\dot\theta)^2$$

$$W_{0\to1}=-mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\Delta T=W \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2(\dot\theta^2-\omega_0^2)=-mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

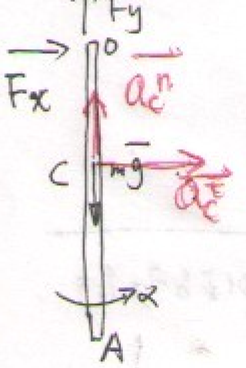
$$\dot\theta^2=\omega_0^2-\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)$$

(1). 水平位置时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，而

$$\omega_0^2-\frac{3g}{l}>0 \Rightarrow \omega_0\geq\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

(2) 由 $\dot\theta^2=\omega_0^2-\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)$

可得 $2\dot\theta\ddot\theta=-\frac{3g}{l}\sin\theta\,\dot\theta \Rightarrow \ddot\theta=-\frac{3g}{2l}\sin\theta$



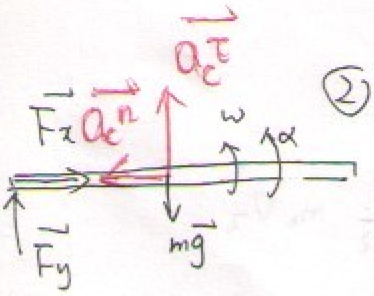
① 铅直位置

$$a_c^\tau=\ddot\theta\frac{l}{2}=-\frac{3}{2}g\sin\theta=0$$

$$a_c^n=\dot\theta^2\frac{l}{2}=\omega_0^2\cdot\frac{l}{2}=\frac{6g}{2}=3g$$

$$m\,a_c^\tau=F_x \Rightarrow F_x=0$$

$$m\,a_c^n=F_y-mg \Rightarrow F_y=4mg$$



② 水平位置

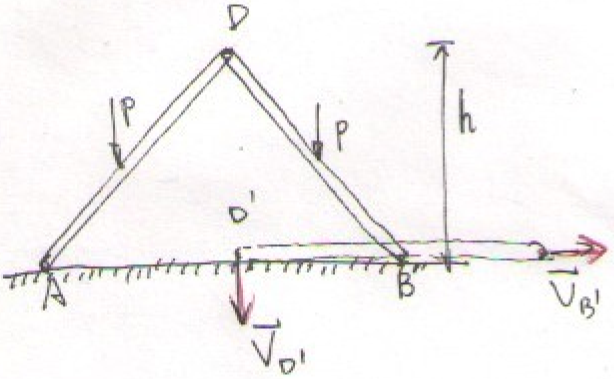
$$a_c^\tau=\ddot\theta\frac{l}{2}=-\cancel{\frac{3g}{2l}}-\frac{3}{2}g$$

$$a_c^n=\dot\theta^2\frac{l}{2}=\left[\omega_0^2-\frac{3g}{l}\right]\frac{l}{2}=\frac{3}{2}g$$

$$\Rightarrow ma_c^\tau=F_y-mg \Rightarrow F_y=ma_c^\tau+mg=-\frac{1}{2}mg\ (\downarrow)$$

$$ma_c^n=-F_x \Rightarrow F_x=-ma_c^n=-m\frac{3}{2}g=-\frac{3}{2}mg\ (\leftarrow)$$

18-43. AD、BD质量为P，长为l，D点铰链，光滑水平面。开始时D高为h，AB两端向外滑动，求D点到达地面的速度



解：由于对称性，D垂直下落

当D点到达地面时，B'D'两点速度方向如图

故取B'为瞬心

且有 $\omega_{B'D'} = \dfrac{v_{D'}}{l}$

系统动能为

$$T = 2T_{B'D'} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\tfrac{1}{3}\ 2\cdot\times\frac{1}{2}J_{B'}\omega_{B'D'}^2$$

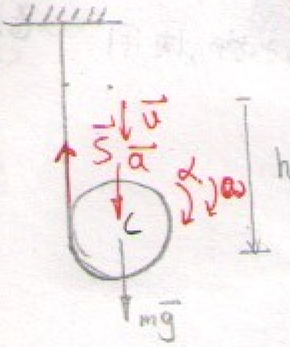
$$= \frac{1}{3}ml^2\cdot\frac{v_{D'}^2}{l^2} = \frac{1}{3}mv_{D'}^2$$

$$W = 2P\cdot\frac{h}{2}$$

有：$\frac{1}{3}mv_{D'}^2 = Ph$

$$v_{D'} = \sqrt{3gh}$$ （解）

补1. 均质圆柱体质量m，绕有细绳，绳上端B固定不动. 圆柱体自由转动，求下落高度h时，质心速度，加速度和绳的张力S.



解: 方法(1) 运动分析: 纯滚动，设质心速度为 $\vec{v}$，加速度为 $\vec{a}$

受力分析. 如图 S 未知.

未知数 $(\vec{a}, \vec{S})$，方程数2 (水平方向自动满足)

有以下刚体运动微分方程

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F} \Rightarrow ma = mg - S \quad (1)$$

$$J_c\alpha = \sum M_c \Rightarrow S r = \frac{1}{2}mr^2\alpha, \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

有即 $S = \frac{1}{2}ma \quad (2)$

由(1),(2)得 $\begin{cases} a = \frac{2}{3}g \\ S = \frac{1}{3}mg \end{cases}$

即质心C作匀加速运动，下落h时，

$$v = \sqrt{2ah} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

方法2 用动能定理 $\Delta T = W_{12}$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

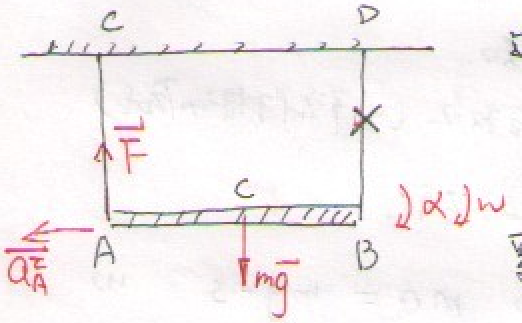
$$W_{12} = mgh \Rightarrow \frac{3}{4}mv^2 = mgh \quad (3)$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

对(3)求导有 $\frac{3}{2}m\cancel{v}a = mg\cancel{v} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g$

本题还可以用动量矩定理求解，请自行思考.

补2：均质棒AB，m=4kg，两端悬挂平行绳，处于水平位置，设其中一绳突然断，求此瞬时另绳张力 F.



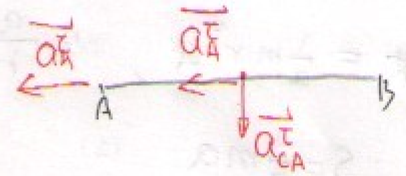
解：设BD断裂

运动分析：2个自由度，可~~用A点~~ 和 ~~A点作圆周运动~~.

因A点作圆周运动 因 v_A 表示运动，再用 ω 表示AB的转动

AB的运动可分解描述

受力分析：$\vec{F}$ 未知（1个未知量）



对AB杆，基点法，以A为基点

$$\vec{a}_C = \vec{a_A^\tau} + \vec{a_{CA}^\tau},$$

$$a_A^\tau = a_A \ (a_A^n = 0), \quad a_{CA}^\tau = \alpha \frac{l}{2}$$

刚体运动微分方程：

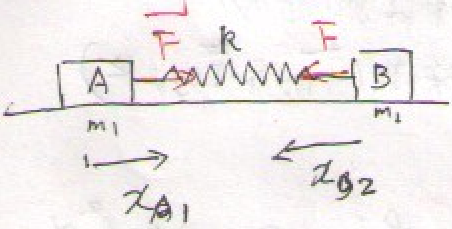
$$m\vec{a_C} = \Sigma \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} m a_A^\tau = 0 \\ m a_{CA}^\tau = mg - F \text{ 即 } \frac{ml}{2}\alpha = mg - F \end{cases}$$

$$J\alpha = \Sigma M_C \Rightarrow \frac{1}{12} m l^2 \cdot \alpha = F \cdot \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg}{4} = 9.8N.$$

补.3. 弹簧两端各系质量为 m_1, m_2 的物体 A, B, 平放光滑水平面。原长度 l_0, 刚度 k。将弹簧拉长到 l, 无初速释放, 当弹簧回到原长时, A, B 速度各为多少?

分析 1) 运动分析 同例题 2, 当弹处于 l 长度时 AB位置为基准位置. 以A, B的位置 x_1, x_2 为坐标 如图.



2) 受力分析: 水平方向不受外力. 只有弹簧力 $\overline{F}$, 内力

两个运动状态可用2个运动定理联立求解, 绕开 $\overline{F}$ 的计算

应用 动量守恒, $m_1 v_1 = m_2 v_2$

动能定理 (能量守恒) $\Delta T = W_{1\to 2}$

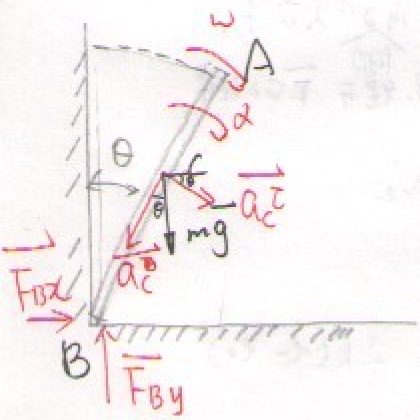
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

$$v_2 = (l-l_0)\sqrt{\frac{k m_1}{m_2(m_1+m_2)}}$$

$$v_1 = (l-l_0)\sqrt{\frac{k m_2}{m_1(m_1+m_2)}}$$

补4：AB长l，质量为m，起初紧靠墙壁，由于微小干扰，杆绕B倾倒，如图。不计摩擦。求(1) B端未脱离~~AB~~墙时AB杆的角速度，角加速度及B处约束力

(2) B脱离时的θ_1角　(3) 杆着地时质心速度及角速度。



解：(1) 当B端未脱离墙时AB作定轴转动

运动未知数 1 (α或ω)　力未知数 ($\vec{F}_{Bx}$和$\vec{F}_{By}$，2)

定轴转动微分方程

$$J_B\alpha = M_B \Rightarrow mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

动能定理：

$$\frac{1}{2}J_B\omega^2 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 3\frac{g}{l}(1-\cos\theta)$$

质心运动定理：

$$\begin{cases} m(a_C^\tau\cos\theta - a_C^n\sin\theta) = F_{Bx} \\ m(a_C^\tau\sin\theta + a_C^n\cos\theta) = mg - F_{By} \end{cases} \quad 其中 \begin{cases} a_C^\tau = \alpha\frac{l}{2} \\ a_C^n = \omega^2\frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{Bx} = m\left[\frac{3g}{4}\cos\theta\sin\theta - \frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta\right] = mg\sin\theta\left(\frac{9}{4}\cos\theta - \frac{3}{2}\right) \\ F_{By} = mg - m\left[\frac{3}{4}g\sin^2\theta + \frac{3}{2}g(1-\cos\theta)\cos\theta\right] = \text{----} \end{cases}$$

(2) 当B脱离时　$F_{Bx} = 0 \Rightarrow \frac{9}{4}\cos\theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$，$\theta = \arccos\frac{2}{3}$

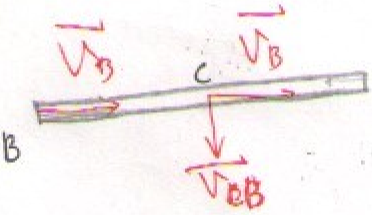
此时 $\omega^2 = \frac{3g}{l}\cdot\frac{1}{3} = \frac{g}{l}$，$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$v_{cx} = v_c\cos\theta = \omega\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos\theta = \frac{1}{3}\sqrt{gl}$$

3) 当B刚离墙壁后，AB的自由度为2，此时AB刚体在水平方向的动量守恒和动能守恒，当AB处于水平位置时有

$$v_{cx} = \frac{1}{3}\sqrt{gl} = const \quad (动量守恒)$$

以B为基点，$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$ 如图.



$$v_{cx} = v_B = \frac{1}{3}\sqrt{gl}$$

$$\vec{v}_{CB} = \omega\cdot\frac{l}{2}$$

由动能定理. 以竖直位置为1位置，水平为2位置有

$$\Delta T = W_{1\to 2}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v_B^2 + v_{CB}^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{gl}{9} + \frac{\omega^2 l^2}{4}\right) + \frac{1}{24}ml^2\omega^2$$
$$+\frac{1}{2}J_c\omega^2$$

$$W_{1\to 2} = mg\cdot\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8}{3}g/l}$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_{CB}^2} = \sqrt{\frac{gl}{9} + \frac{2}{3}gl} = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{gl}$$