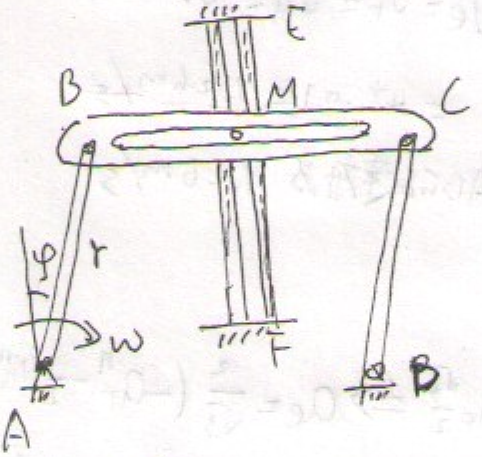
HW6

15-9. 导槽BC和EF间一小圆柱销M，M在导槽EF中运动，已知AB曲柄 $\varphi=\varphi_0\sin\omega t$，式中 $\varphi_0=60^\circ$，$\omega=1\,rad/s$，且 $AD=BC$，$AB=CD=r=0.2$，求当 $\varphi=30^\circ$ 时圆柱销M在导槽E及BC中的速度及加速度。



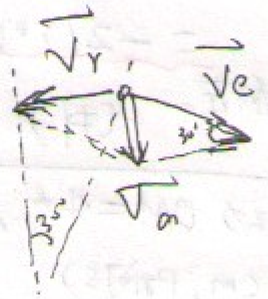
解：以M为动点，BC杆为动系

对于AB杆，$\varphi=\varphi_0\sin\omega t$

有 $\omega_A=\dot\varphi=\omega\varphi_0\cos\omega t$

$\varphi=30^\circ$ 时，$\sin\omega t=\frac{1}{2}$，$\cos\omega t=\frac{\sqrt3}{2}$，$\omega_A=\frac{\pi}{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt3}{6}\ rad/s$

1) 对于速度，如图所示



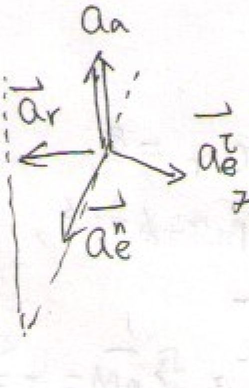
$$\vec{V_a}=\vec{V_e}+\vec{V_r}$$

$$V_e=\omega_A\cdot r=\frac{\sqrt3}{6}\pi\cdot0.2=0.181\,m/s$$

$$V_r=\frac{\sqrt3}{2}V_e=\cancel{\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot0.2\pi}=0.157\,m/s$$

$$V_a=\frac{V_e}{2}=0.0907\,m/s$$

2) 对于加速度，如图所示，由于动系平移 $\vec{a_C}=0$



$$\vec{a_a}=\vec{a_e}+\vec{a_r}$$

对于AB杆：$\alpha_A=\ddot\varphi=-\varphi_0\omega^2\sin\omega t$，$\varphi=30^\circ$ 时 $\alpha_A=-\frac{\pi}{3}\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=-0.524\,rad/s^2$

有：$a_e^\tau=\alpha_A\cdot r=-0.105\,m/s^2$

$$a_e^n=\omega_A^2r=\left(\frac{\sqrt3}{6}\pi\right)^2\cdot0.2=0.164\,m/s^2$$

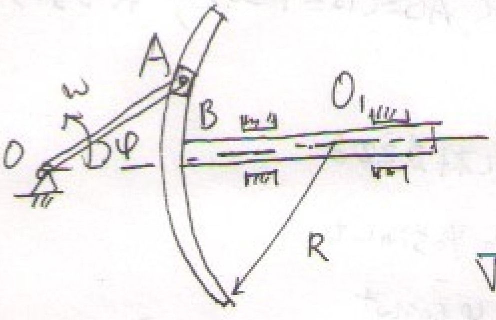
有 $a_a=-\frac{\sqrt3}{2}a_e^n-a_e^\tau\,0.5=-0.090\,m/s^2$ (↓)

$$a_r+a_e^n\frac{1}{2}-a_e^\tau\frac{\sqrt3}{2}=0$$

$$\Rightarrow a_r=a_e^\tau\frac{\sqrt3}{2}-a_e^n\frac{1}{2}=-0.105\frac{\sqrt3}{2}-0.164\cdot\frac{1}{2}=-0.173\,m/s^2\ (\rightarrow)$$

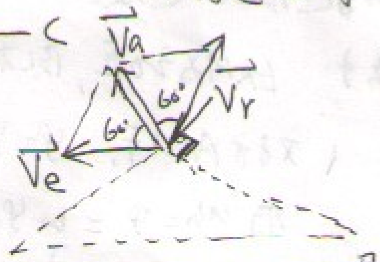
(#)

15-10. 曲柄滑道，R=10cm，OA=10cm，OA角速度 $\omega=4\pi\ rad/s$ 匀速转动，当 $\varphi=30°$ 时，求导杆CB的速度、加速度。



解. 以A为动点，动系固接于ABC杆

1) 对于速度有 $\vec{V_a}=\vec{V_e}+\vec{V_r}$

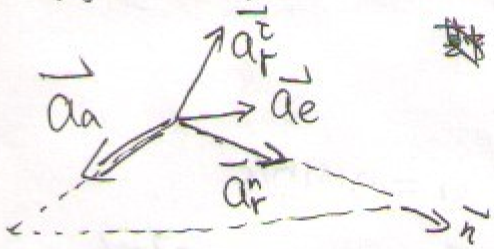


$V_e=V_r=V_a=\omega\cdot\overline{OA}$

$=4\pi\cdot0.1=1.26m/s$

即AB的速度为 1.26m/s

2) 对于加速度，有 $\vec{a_a}=\vec{a_e}+\vec{a_r}$ （牵连平移）



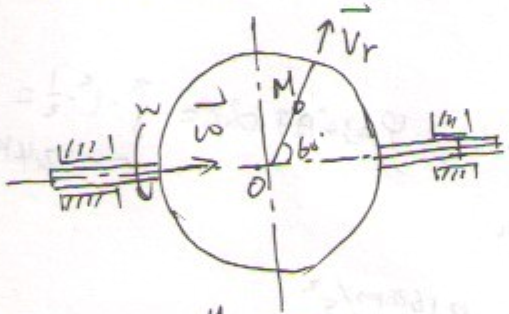
对n方向投影，有

$$a_a^n\cdot\frac{1}{2}=-a_r^n-a_e\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow a_e=\frac{2}{\sqrt3}\left(-a_r^n-\frac{1}{2}a_a^n\right)$$

$$=-27.5m/s^2(\leftarrow)$$

即AB加速度为 $27.5m/s^2$，方向向左。 (#)

15-15. 圆盘绕AB转动，角速度 $\omega=2t\ rad/s$，M沿OM运动 $OM=4t^2$，（长度单位cm，时间s）OM与AB角度60°，当 t=1s 时，M的绝对加速度。

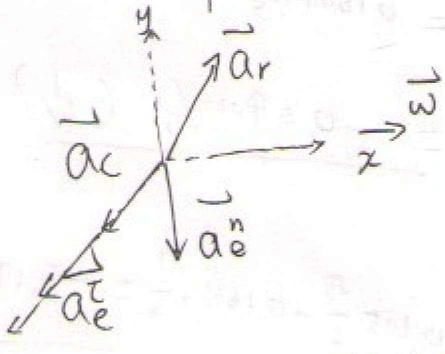


解. 当 t=1s 时，

$\omega=2,\quad \alpha=2$

$OM=4,\quad V_r=8,\quad a_r=8$

对于加速度，以M为动点，BC杆为动系，



$$\vec{a_a}=\vec{a_e}+\vec{a_r}+\vec{a_c}$$

$$\vec{a_e}=\vec{a_e^n}+\vec{a_e^\tau},\quad a_e^n=\omega^2\cdot\frac{\sqrt3}{2}\overline{OM}=4\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot4=13.9$$

$$a_e^\tau=\alpha\cdot\frac{\sqrt3}{2}OM=2\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot4=6.93$$

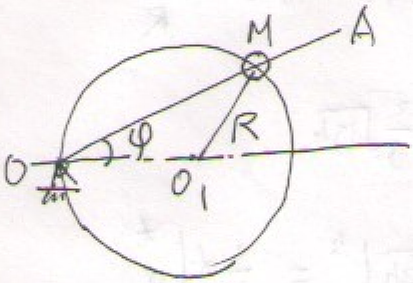
$$a_r=8,\quad a_c=2\cdot\omega\cdot V_r\cdot\sin60°=27.8m/s^2$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{\left(\frac{a_r}{2}\right)^2+\left(a_e^n-\frac{\sqrt3}{2}a_r\right)^2+\left(a_c+a_e^\tau\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(13.9-\frac{\sqrt3}{2}\cdot8\right)^2+\left(27.8+6.93\right)^2}$$

$$=35.5m/s^2$$

(#)

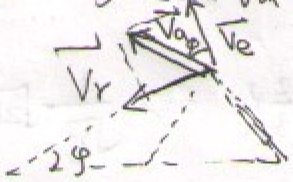
15-16、如图，小环M，同时套在圆环和OA上，OA角速度ω，匀速转动。开始时OA水平，当摇杆为φ角时，求M的速度和相对OA的速度和角加速度



$\boxed{解法1}$，M可法

以M为动点，动系OA杆

1) 速度 $\vec{V_a}=\vec{V_e}+\vec{V_r}$

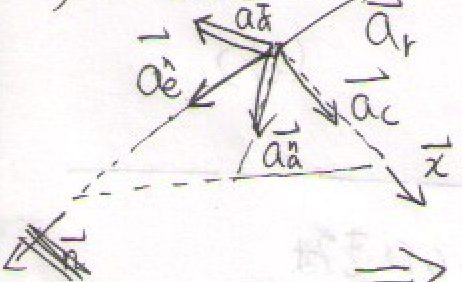


有 $V_e=2\omega\cdot R\cos\varphi$

∴ $V_r=2\omega R\sin\varphi$

$V_a=\frac{V_e}{\cos\varphi}=2\omega R$

2) 加速度 $\vec{a_a}=\vec{a_e}+\vec{a_r}+\vec{a_C}$ 其中



$\vec{a_e}$ $a_e=a_e^n=\omega^2\cdot(2R\cos\varphi)$

$a_a^n=\frac{V_a^2}{R}=4\omega^2R$

$a_C=2\omega\cdot2\omega R\sin\varphi=4\omega^2R\sin\varphi$

⇒ x方向投影有：$a_a^\tau\cos\varphi-a_a^n\sin\varphi=a_C$

⇒ $a_a^\tau=0$，有 $a_a=a_a^n=4\omega^2R$

且：$a_a^n\cos\varphi=a_e^n-a_r$ ⇒ $a_r=-4\omega^2R\cos\varphi+2\omega^2R\cos\varphi$

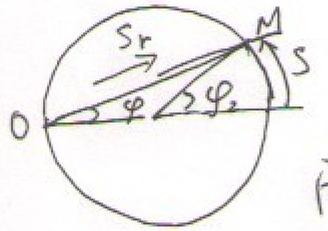
$=-2\omega^2R\cos\varphi$ (↙)

$\boxed{解法2}$：M的运动为圆周运动，运动方程为

$S=R\varphi_2=R\cdot2\varphi=2R\omega t$

且M在OA杆的相对运动为直线运动，可用

与为OM表示 $S_r=OM=2R\cos\varphi=2R\cos\omega t$



故有：~~$a_a=S$~~

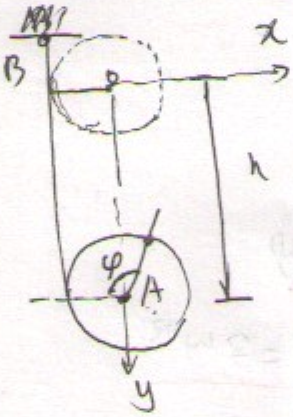
$V_a=\dot{S}=2R\omega$，$V_r=\dot{S}_r=-2\omega R\sin\varphi$ (↙)

$a_a^\tau=\ddot{S}=0$，$a_a^n=\frac{V_a^2}{R}=4\omega^2R$，$a_r=\ddot{S}_r=-2\omega^2R\cos\varphi$ (↙)

(#)

（建议同学们用第一种解法做）

16-1，如图，圆柱半径R，静止下落，柱心A的速度 $V_A=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$，求圆柱平面运动方程



解：圆柱为沿细绳的纯滚动，因此有 $\varphi=\frac{h}{R}$

h(t)的求得：因 $\frac{dh}{dt}=V_A=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$

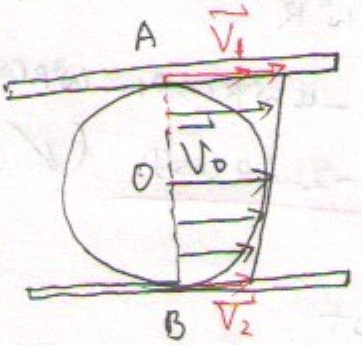
$$\Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{3gh}}=\frac{2}{3}t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3g}}2\sqrt{h}\Big|_0^h=\frac{2}{3}t\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{3g}}=\frac{2}{3}t \Rightarrow h=\frac{1}{3}gt^2$$

于是因以A为基点，圆柱作平面运动方程为

$$x_A=0,\quad y_A=h=\frac{1}{3}gt^2,\quad \varphi=\frac{y_A}{R}=\frac{gt^2}{3R}$$ (#)

16-3. 两齿条速度 v_1 和 v_2，同向，齿轮半径r，求中心O的速度



解：O为AB中点，由平面运动的性质，

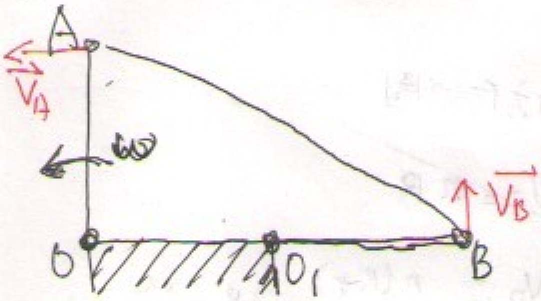
AB线上各点速度呈线性分布，

有 $v_0=\frac{v_1+v_2}{2}$ （因 v_1,v_2 速度方向相同）

(#)

（本题亦可用基点法或用瞬心法求解）

16-5 如图四连杆，$OA = O_1B = AB/2$，曲杆角速度 $\omega = 3\,rad/s$ 绕O轴转动。求图示位置AB和 O_1B 的角速度。



解：$\vec{V_A}$，$\vec{V_B}$ 方向如图。

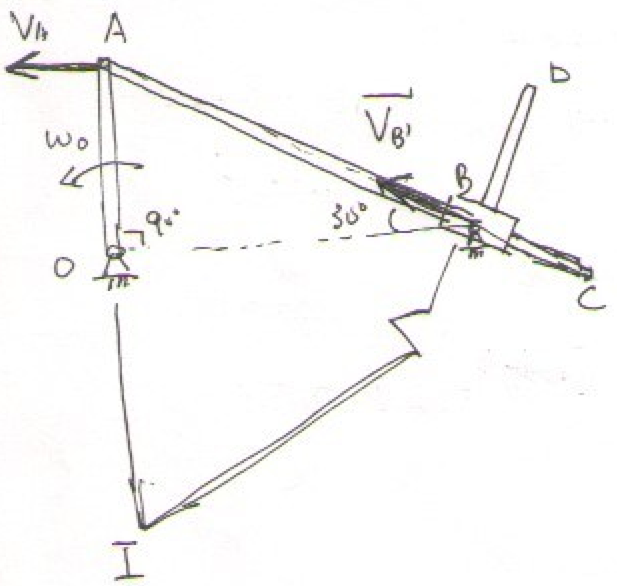
对于AB杆，瞬心为O，有 $\dfrac{V_A}{OA} = \dfrac{V_B}{OB}$

$$V_B = \sqrt{3}\,V_A = \sqrt{3}\cdot 3\cdot \overline{OA}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = 3\,rad/s$$

$$\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{O_1B} = 5.2\,rad/s \qquad (\#)$$

16-7. 图示摆块机构，曲柄OA角速度 ω_0 绕轴转动，带动AC在B内滑动，$BD = l$，求图示位置摆块的角速度及D的速度



解：考察刚体AC，

V_B 速度如图，AC上与B点重合点 B' 速度方向如图。

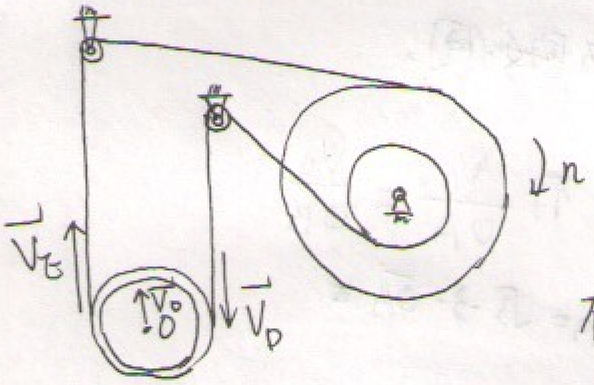
AC杆瞬心为 I，有

$$V_A = \omega_0 \overline{OA}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AI} = \frac{\omega_0 \cdot OA}{OA \cdot 4} = \frac{\omega_0}{4}$$

$$V_D = \frac{\omega_0}{4} l \qquad (\#)$$

16-11 如图，A转时，E上升，已知鼓轮转速为$n=10r/min$，$R=150mm$，$r=50mm$，设管子与绳索间没有滑动，求管子中心的速度。



解：如图，画

~~如~~D、E速度方向如图

$V_D=nr$，$V_E=nR$

有 $V_O=\dfrac{V_E-V_D}{2}=\dfrac{n(R-r)}{2}=\dfrac{10}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{60}\cdot 0.1$

$=0.523\ m/s\ (\uparrow)$

(#)