理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

运 动 学

运动学综合与习题课

运动学

运动学基础
- 点的运动
- 刚体简单运动

⇒点的复合运动
- 动点相对两个
- 参考系运动量关系

⇒刚体平面运动
- 用复合运动研究
- 刚体上两点运动关系

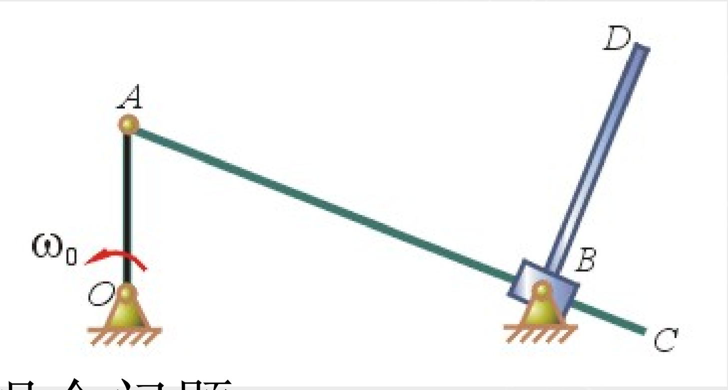
重点 点的复合运动与刚体平面运动。

例1

已知：$OA=BD=30\text{cm}$

$OB=40\text{cm}$　$\omega_0=2\ \text{rad/s}$

求：D点的速度



解：这是平面运动与合成运动的组合问题

法一：　ω_{DB}：根据B点约束，AC与BD只有相对滑动没有相对转动，故 $\omega_{AC}=\omega_{DB}$

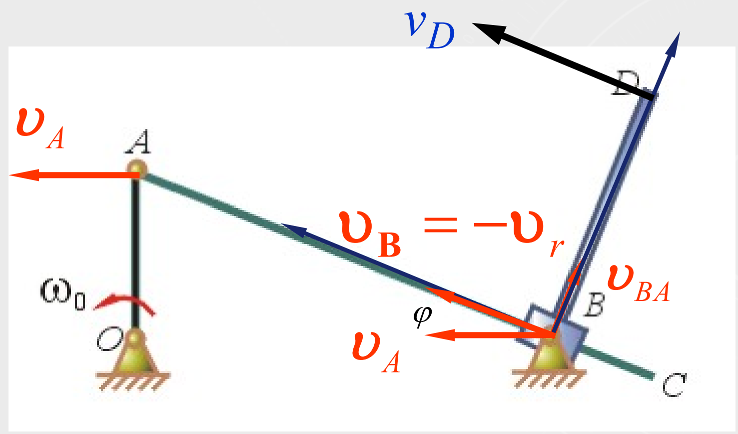
现求ω_{AC}（找AC的瞬心或求B（AC）相对A的速度）

以A为基点：　$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{BA}$

	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_{BA}$
大小	?	√	?
方向	?	√	√

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{BA}$$

	$\vec{\upsilon}_B$	$\vec{\upsilon}_A$	$\vec{\upsilon}_{BA}$
大小	？	√	？
方向	？	√	√



求B的方向：动点：B'（套筒）　动系：AC

$$0 = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r$$

$$\vec{\upsilon}_e = \vec{\upsilon}_B\ ,\quad \vec{\upsilon}_B = -\vec{\upsilon}_r$$

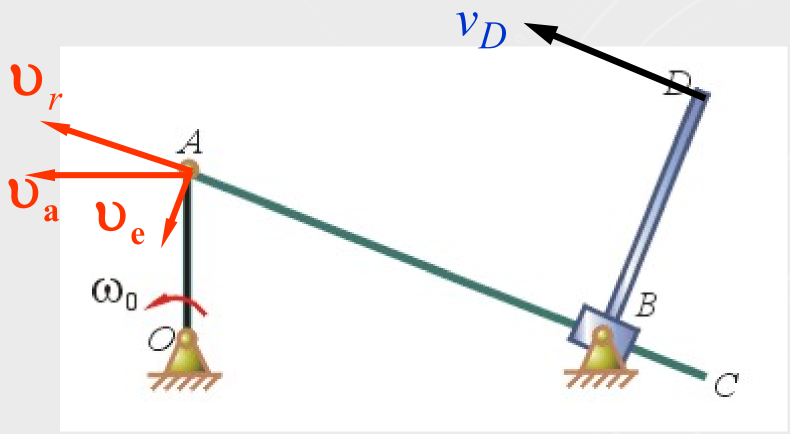
投影BD：　$x':$　$O = -\upsilon_A \sin\varphi + \upsilon_{AB}$

$$\omega_{AC} \cdot AB = \upsilon_A \sin\alpha$$

$$\omega_{AC} = \upsilon_A \sin\alpha / AB$$

$$\upsilon_D = \omega_{AC} \cdot DB = \frac{\upsilon_A \sin\alpha}{AB} \cdot DB$$

法二：



动点：*A*　　动系：套筒B

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

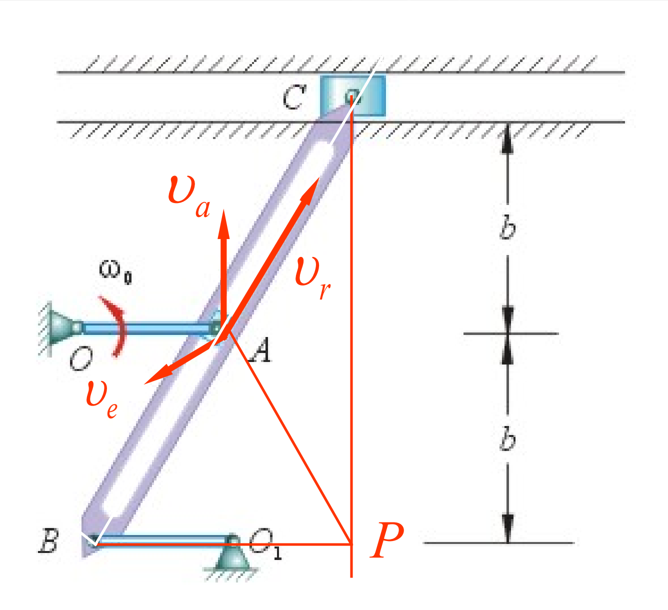
大小：	√	?	?
方向：	√	√	√

由 $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}$ 求出ω_{AC} ，再求出 $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{D}}$

例2 已知：$OA=R$，$O_1B=r$，

$BC=4\sqrt{3}b/3$， ω_0

求： υ_C ， ω_{O_1B}



解：①用点的合成运动, 求出BC杆上A点的速度。

选动系固连于BC杆，画速度矢量图，如图所示。

$$\vec{\upsilon}_a=\vec{\upsilon}_e+\vec{\upsilon}_r$$

大小	√	？	？
方向	√	√	√

$$x:\quad O=-\upsilon_e\cos 30^\circ+\upsilon_r\sin 30^\circ$$

$$y:\quad \upsilon_a=-\upsilon_e\sin 30^\circ+\upsilon_r\cos 30^\circ$$

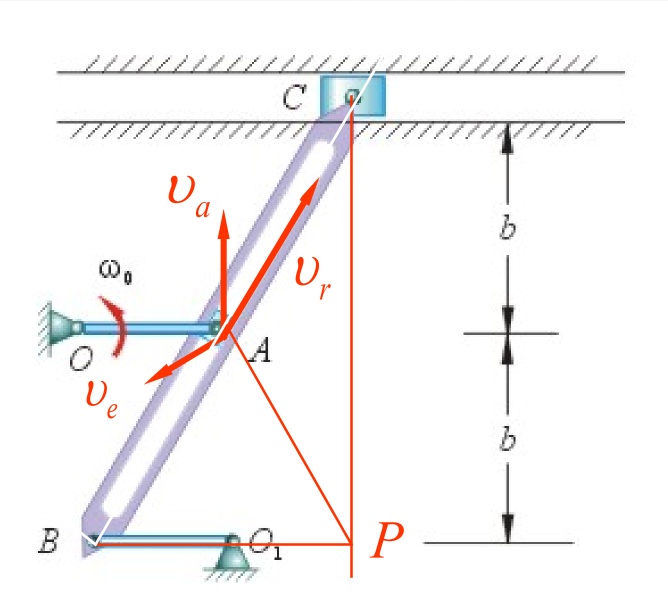
$$x: \quad O = -\upsilon_e \cos 30^\circ + \upsilon_r \sin 30^\circ$$

$$y: \quad \upsilon_a = -\upsilon_e \sin 30^\circ + \upsilon_r \cos 30^\circ$$

$$\upsilon_e = \upsilon_a \sin\varphi / \cos 2\varphi = \upsilon_a \qquad \varphi = 30^\circ$$

$$\upsilon_e / AP = \omega_{BC}, \quad \omega_{BC} = \frac{\upsilon_a}{\frac{BC}{2}} = \frac{3\upsilon_a}{2\sqrt{3}b},$$

$$AP = \frac{BC}{2} \qquad \upsilon_a = \omega_O \cdot R$$



② 由平面运动求 υ_C ， ω_{o_1B}

$$\upsilon_C = \omega_{BC} 2b = \frac{3\upsilon_a}{2\sqrt{3}b} 2b = \sqrt{3}\upsilon_a$$

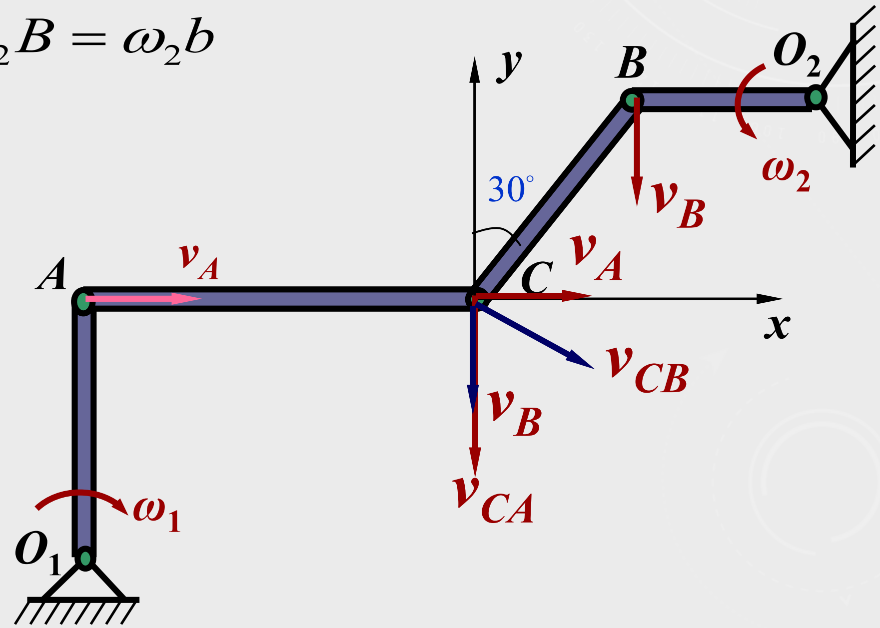
$$\upsilon_B = \omega_{BC} \cdot \overline{BP} = \frac{3\upsilon_a}{2\sqrt{3}b} \cdot \frac{\overline{BC}}{2} = \upsilon_a$$

$$\omega_{BO_1} = \upsilon_B / r = \upsilon_a / r$$

例3

如图平面铰链机构。已知杆O_1A的角速度是ω_1，杆O_2B的角速度是ω_2，转向如图，且在图示瞬时，杆O_1A铅直，杆AC和O_2B水平，而杆BC对铅直线的偏角30°；又$O_2B=b$，$O_1A=\sqrt{3}\,b$。试求在这瞬时C点的速度。

解： $\boxed{v_A=\omega_1 O_1 A=\sqrt{3}\omega_1 b}$ $\quad v_B=\omega_2 O_2 B=\omega_2 b$



以A点为基点 $\vec{v}_C=\vec{v}_A+\vec{v}_{CA}$

	$\vec{v}_C$	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_{CA}$
大小	?	√	?
方向	?	√	√

以B为基点

$$\vec{v}_C=\vec{v}_B+\vec{v}_{CB}$$

	$\vec{v}_C$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{CB}$
大小	?	√	?
方向	?	√	√

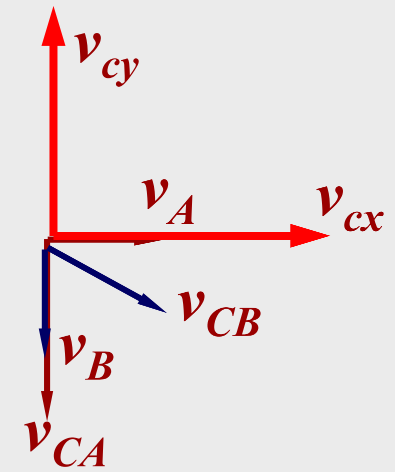
$$\vec{v}_A+\vec{v}_{CA}=\vec{v}_B+\vec{v}_{CB}$$

	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_{CA}$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{CB}$
大小	√	?	√	?
方向	√	√	√	√

x： $v_A=v_{CB}\cos 30^\circ$ $\quad v_{CB}=\dfrac{v_A}{\cos 30^\circ}=2\omega_1 b$

$$v_{Cx}=v_{Bx}+v_{CBx}=0+v_{CB}\cos 30^\circ=(2\omega_1 b)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_{Cy}=v_{By}+v_{CBy}=-v_B-v_{CB}\sin 30^\circ=-\omega_2 b-2\omega_1 b\cdot\frac{1}{2}$$
$$=-(\omega_1+\omega_2)b$$



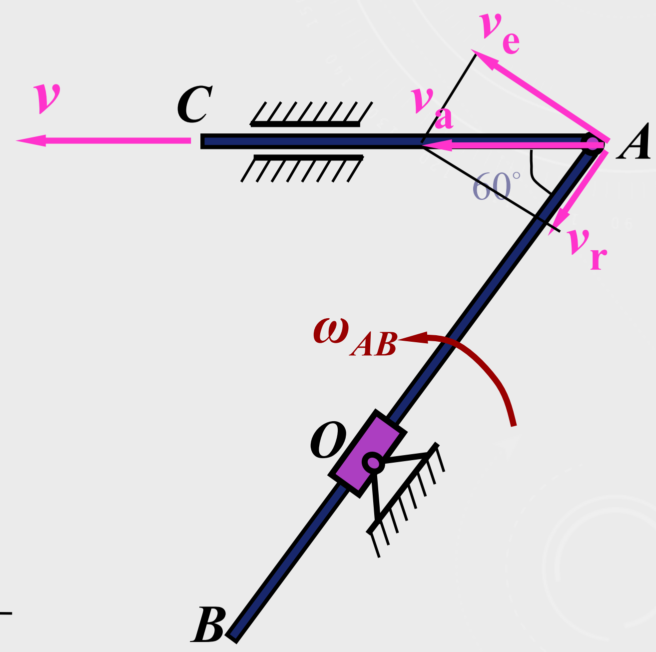
$$v_C=\sqrt{v_{Cx}^2+v_{Cy}^2}=b\sqrt{3\omega_1^2+(\omega_1+\omega_2)^2}$$
$$=b\sqrt{4\omega_1^2+2\omega_1\omega_2+\omega_2^2}$$

$$\tan(v_C,x)=\frac{v_{Cy}}{v_{Cx}}=\frac{-(\omega_1+\omega_2)}{\sqrt{3}\omega_1}$$

例 4

在示平面机构中，AC杆在导轨中以匀速V平动，通过铰链A带动AB杆沿导套O运动，导套O与杆AC的距离为L。图示瞬时AB杆与AC杆的夹角为 $\varphi = 60^\circ$，求此瞬时AB杆的角速度及角加速度。

解： 1. 求AB杆的角速度



动点：A 动系：套筒O

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小：	√	?	?
方向：	√	√	√

$$v_a = v$$

$$v_e = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v \qquad v_r = v_a \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

$$\omega_{套筒} = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l}$$ （逆时针转向）

$$\omega_{AB} = \frac{3v}{4l}$$

动点：A　　动系：套筒O

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e^{\tau}+\vec{a}_e^{n}+\vec{a}_r+\vec{a}_C;$$

	$\vec{a}_a$	$\vec{a}_e^{\tau}$	$\vec{a}_e^{n}$	$\vec{a}_r$	$\vec{a}_C$
大小：	0	?	√	?	√
方向：	0	√	√	√	√

$$x':\quad 0=a_e^{\tau}-a_c$$

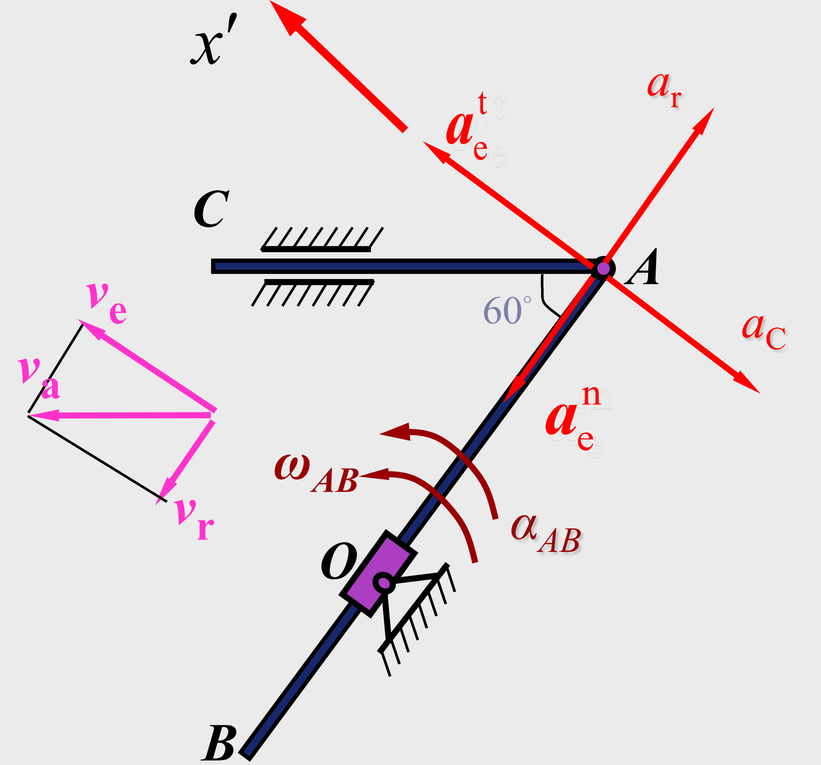
$$a_a=0\qquad a_C=2\omega_e v_r=\frac{3v^2}{4l}$$

$$a_e^t=a_C=\frac{3v^2}{4l}$$

$$\alpha_{AB}=\frac{a_e^t}{AO}=\frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

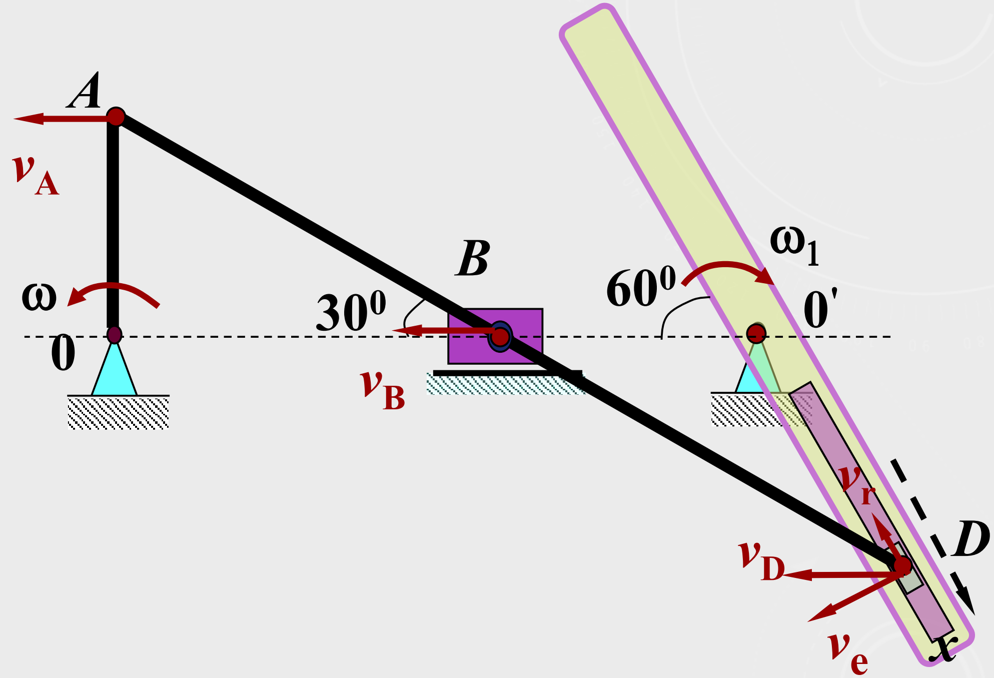
（逆时针转向）

O’点的速度、加速度如何求？



例5

曲柄绕0匀速转动，已知:Ω, $AB=BD=L$, $0A=R$, 求: O'D转动的角速度Ω_1和角加速度A_1 。



解: $v_A = v_B = v_D = r\omega$

动点：滑块D　动系：$O'D$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_D$$

大小：	?	?	√
方向：	√	√	√

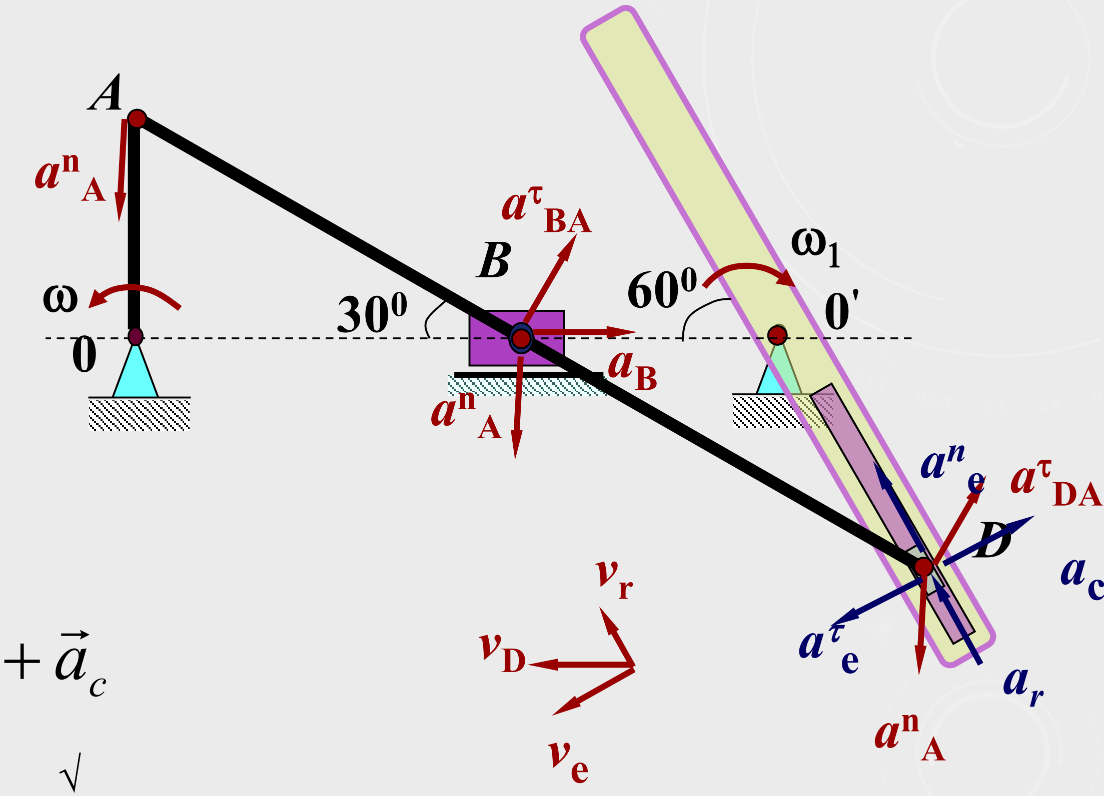
$v_e = v_D \sin 60^0 = r\omega \sin 60^0$,

$v_r = v_D \sin 30^0 = r\omega \sin 30^0$,

$$0'D = \frac{L}{\sin 60^0}\sin 30^0 = \frac{r}{\sin 60^0} \qquad \omega_1 = \frac{v_e}{\overline{O'D}} = \frac{3}{4}\omega$$

分析：$\vec{a}_D = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

大小：	?	√	?	?	√
方向：	?	√	√	√	√



以A为基点

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{DA}^\tau$$

大小	?	√	?
方向	?	√	√

$$\vec{a}_A^n + \vec{a}_{DA}^\tau = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

大小：	√	?	√	?	?	√
方向：	√	√	√	√	√	√

以A为基点，求α_{AB} $\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$

大小：	?	√	?	0
方向：	√	√	√	√

求解： 以A为基点，求α_{AB}

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$$

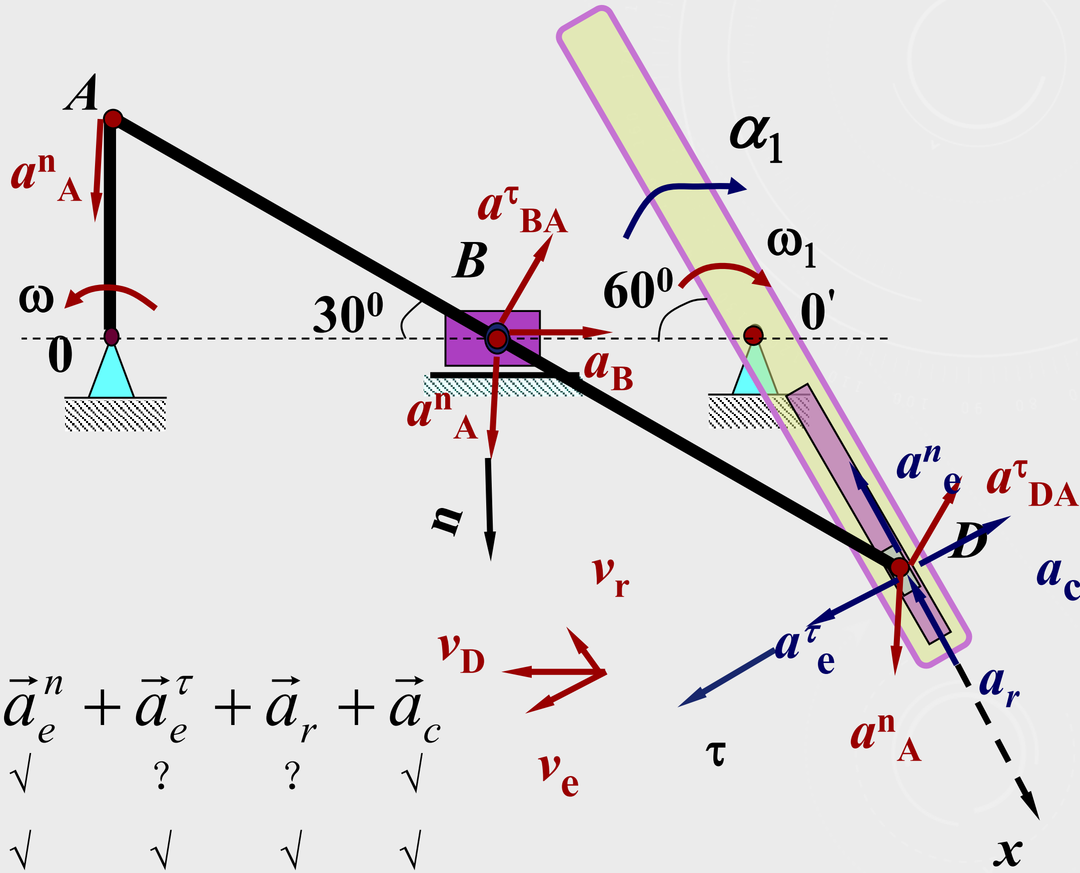
大小： ? √ ? 0

方向： √ √ √ √

$$n:\quad 0 = a_A^n - a_{BA}^\tau \cos 30^0$$

$$a_A^n = \omega^2 r \qquad a_{AB}^n = 0$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{L} = \frac{r\omega^2}{L\cos 30^0}$$



$$\vec{a}_D = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{DA}^\tau \qquad \vec{a}_D = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

大小 ? √ √ 大小： ? √ ? ? √

方向 ? √ √ 方向： ? √ √ √ √

$$\vec{a}_A^n + \vec{a}_{DA}^\tau = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

大小： √ √ √ ? ? √

方向： √ √ √ √ √ √

$$a_c = 2v_r\omega_1$$

$$a_{DA}^\tau = 2L\alpha_{AB}$$

$$\tau:\quad a_A^n \sin 30^0 - a_{DA}^\tau \cos 30^0 = a_e^\tau - a_c \qquad a_e^\tau = -\omega^2 r/2 \qquad \alpha_1 = -\omega^2 r/(2L)$$

例6 如图所示平面机构，*AC*杆铅直运动，*BD*杆水平运动，*A*为铰链，滑块*B*可沿槽杆*AE*中的直槽滑动。图示瞬时, *AB*=60 MM，

$\theta=30^\circ$，$v_A=10\sqrt{3}\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}$，$v_B=50\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$，$a_A=10\sqrt{3}\ \mathrm{mm\cdot s^{-2}}$，$a_B=10\ \mathrm{mm\cdot s^{-2}}$，求:该瞬时槽*AE*杆的角速度及角加速度。

解： **1. 求槽杆*AE*的角速度。**

动点：滑块B　动系：AE

$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$$

大小：	√	?	?
方向：	√	?	√

$$\vec{v}_a=\vec{v}_B \qquad \vec{v}_e=\vec{v}_{B'}$$

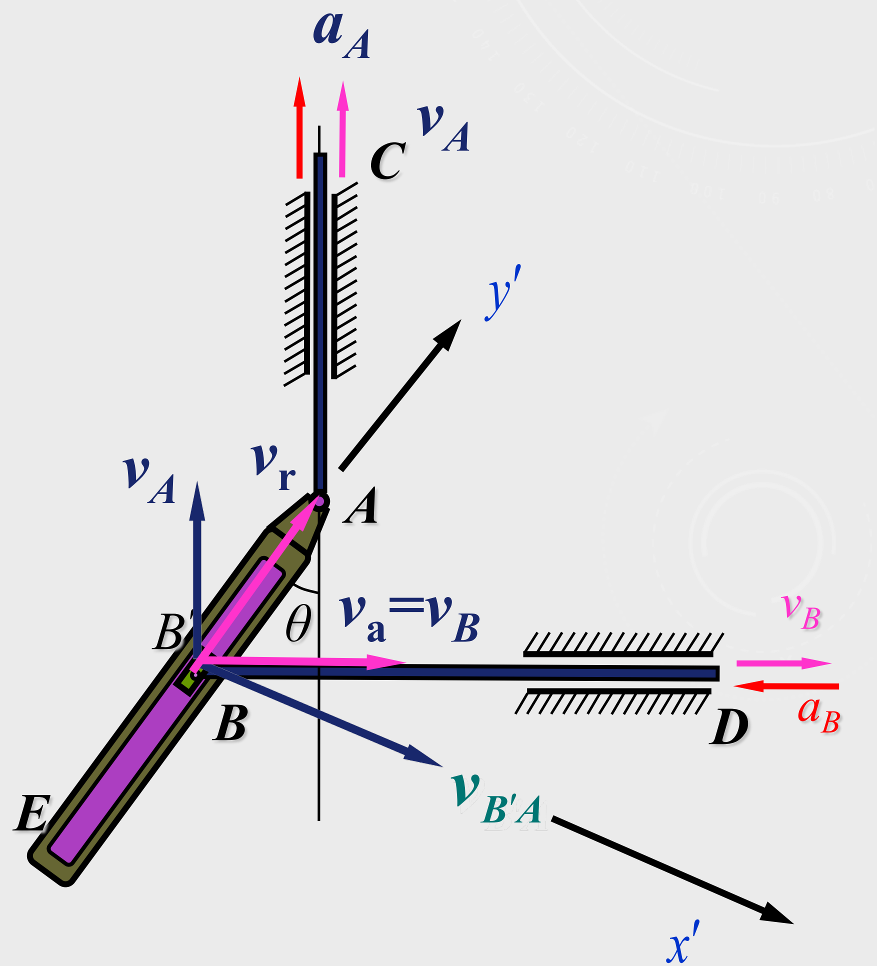
以A为基点 $\vec{v}_{B'}=\vec{v}_A+\vec{v}_{B'A}$

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{B'A}+\vec{v}_r$$

大小：	√	√	?	?
方向：	√	√	√	√

$$y':\quad v_B\sin 30^\circ=v_A\sin 60^\circ+v_r$$

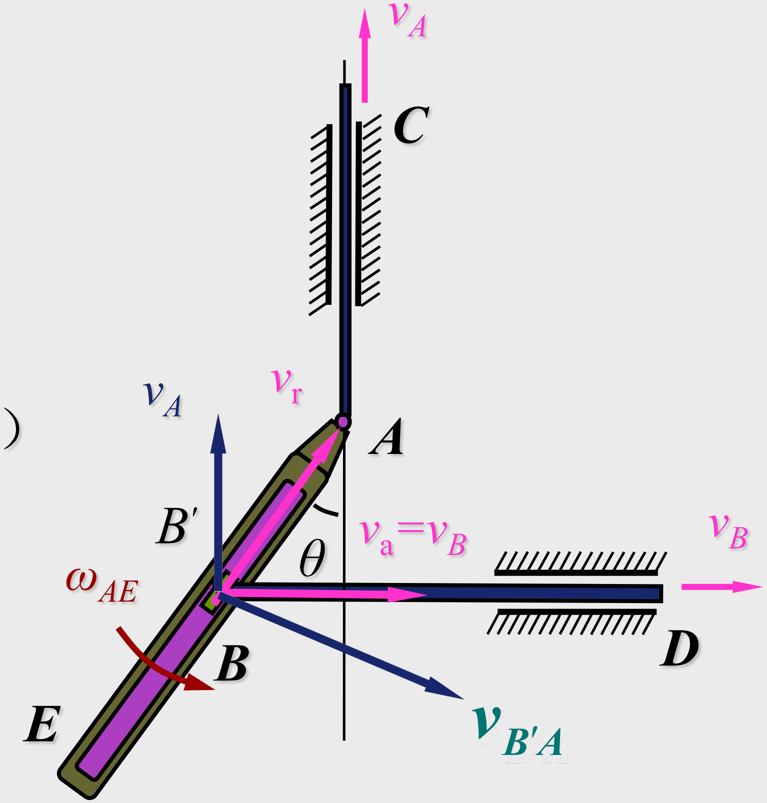
$$x':\quad v_B\cos 30^\circ=-v_A\cos 60^\circ+v_{B'A}$$

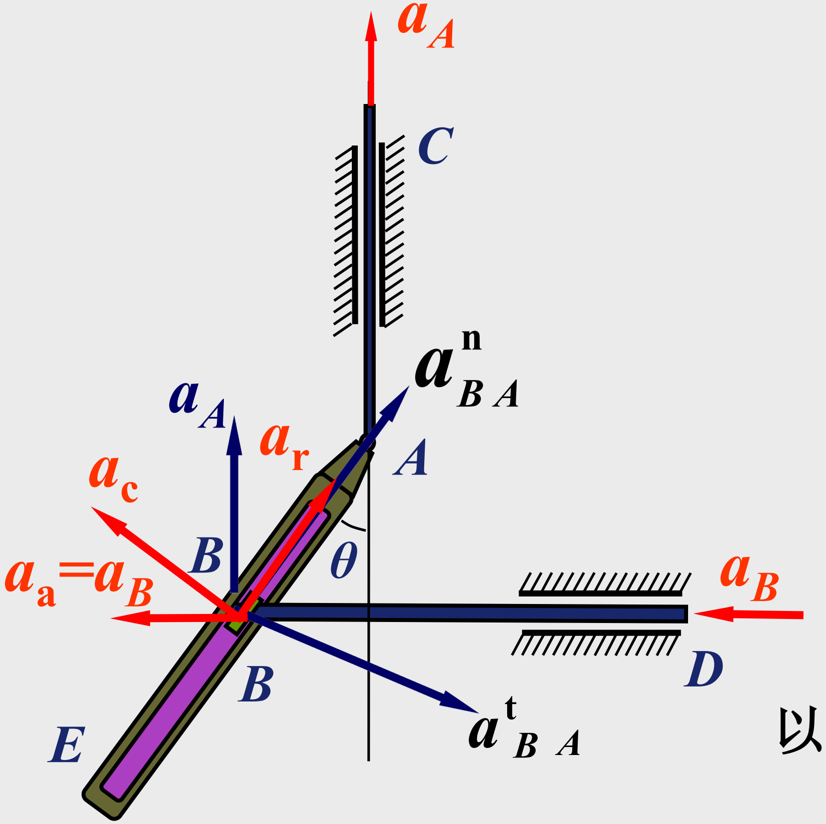


$$v_{B'A} = 30\sqrt{3}\ \ \text{mm}\ \ \text{s}^{-1}$$

$$v_{\text{r}} = 10\ \ \text{mm}\ \ \text{s}^{-1}$$

$$\omega_{AE} = \frac{v_{B'A}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\ \ \text{rad}\ \ \text{s}^{-1}$$ （逆时针）





$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

	$\vec{a}_a$	$\vec{a}_e$	$\vec{a}_r$	$\vec{a}_c$
大小：	√	?	?	√
方向：	√	?	√	√

$$\vec{a}_a = \vec{a}_B \qquad \vec{a}_e = \vec{a}_{B'}$$

以A为基点 $\vec{a}_{B'} = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{B'A} + \vec{a}^{n}_{B'A}$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{B'A} + \vec{a}^{n}_{B'A} + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

大小：√　√　？　√　？　√

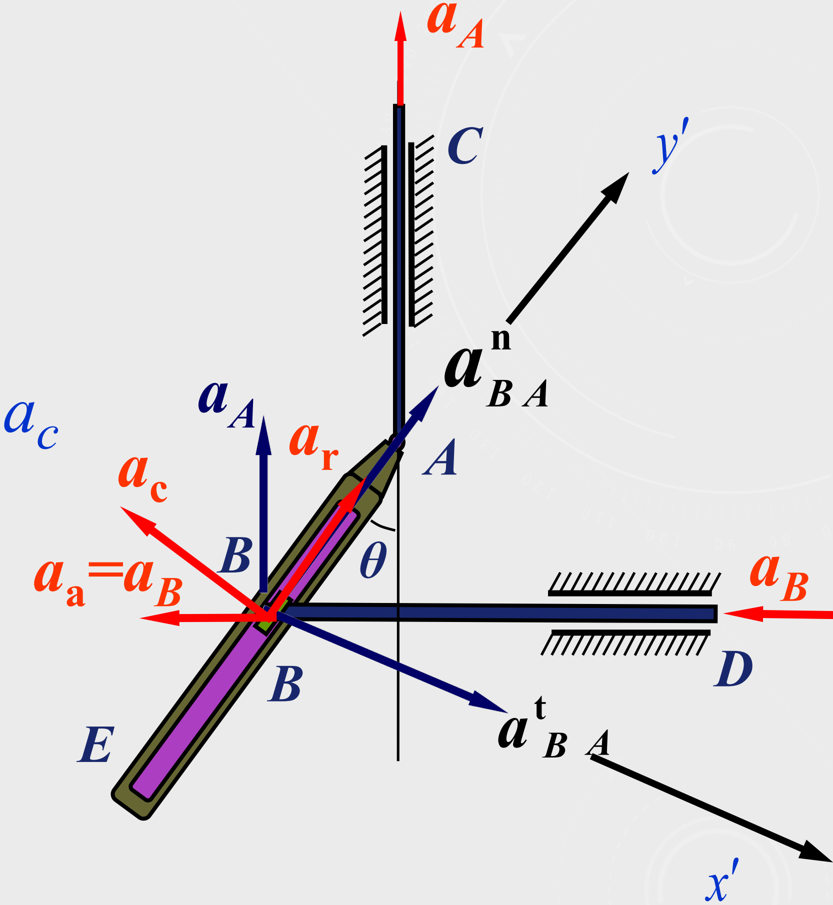
方向：√　√　√　√　√　√

$$x': \quad a_B \cos 30^\circ = -a_A \sin 30^\circ + a^{\tau}_{B'A} - a_c$$

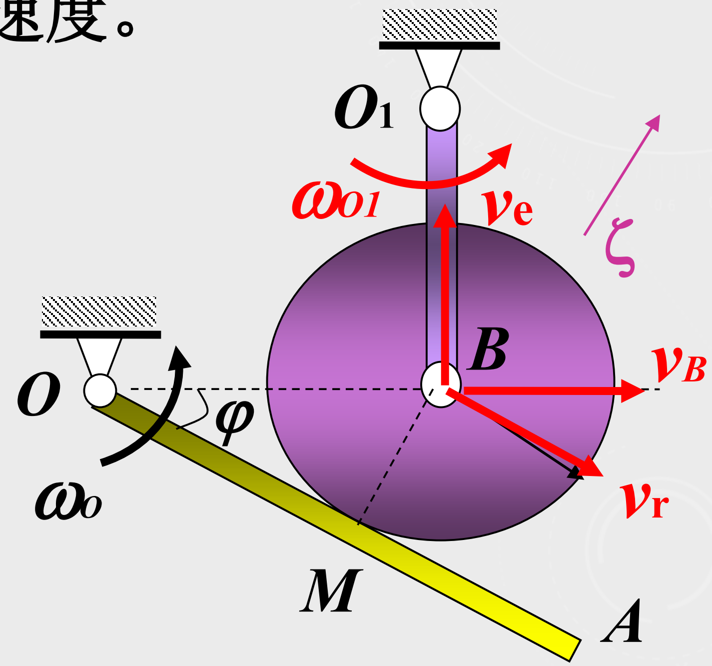
$$a_c = 2\omega_{AE} v_r = 17.32 \quad \text{mm/s}^2$$

$$a^{\tau}_{B'A} = 17.32 \quad \text{mm/s}^2$$

$$\alpha_{AE} = \frac{a^{\tau}_{B'A}}{\overline{AB}} = 0.289 \quad \text{rad/s}^2$$



例7： 平面机构如图示。已知：杆OA以匀角速度ω_0转动，半径为r的滚轮可在OA上作纯滚动，O_1B长为$\sqrt{3}\,r$。当φ=30°时，O、B处在同一水平线，且O_1B竖直。试求该瞬时：（1）杆O_1B的角速度和角加速度；（2）滚轮的角速度和角加速度；（3）滚轮上与杆OA接触点M的速度与加速度。



解： 轮B作平面运动。

取动点B，动系OA。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_B = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

	$\vec{v}_a = \vec{v}_B$	$\vec{v}_e$	$\vec{v}_r$
大小：	？	√	？
方向：	√	√	√

"ζ" $\quad v_B \sin\varphi = v_e \cos\varphi$

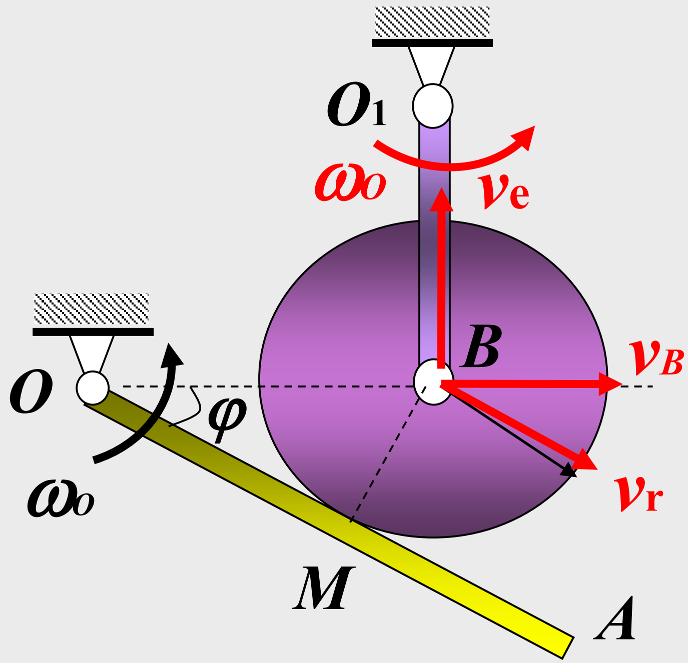
式中：$v_e = \omega_O r/\sin\varphi$ 得：$v_B = 2\sqrt{3}\omega_O r$

$$\boxed{\omega_{O_1} = \frac{v_B}{O_1B} = 2\omega_O}$$

"y" $\quad 0 = v_e - v_r \sin\varphi$

得：$v_r = 4\omega_O r$

相对运动为纯滚动，故 $\vec{v}_{M'} = \vec{v}_M$

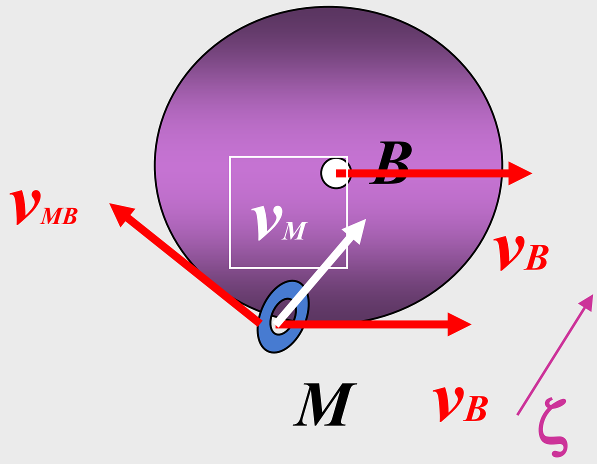


以点B为基点，研究滚轮上的点M。

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{v}_{MB}$$

大小：	√	√	?
方向：	√	√	√

→ $\boxed{v_{MB}}$ → $\boxed{\omega_B}$



求加速度：

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

大小：	√	?	√	?	√
方向：	√	√	√	√	√

"ζ"　$a_B^n \cos\varphi + a_B^t \sin\varphi = -a_e \sin\varphi + a_c$

式中：

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{O_1B} = \frac{12\omega_O^2 r^2}{\sqrt{3}r} = 4\sqrt{3}\omega_O^2 r$$

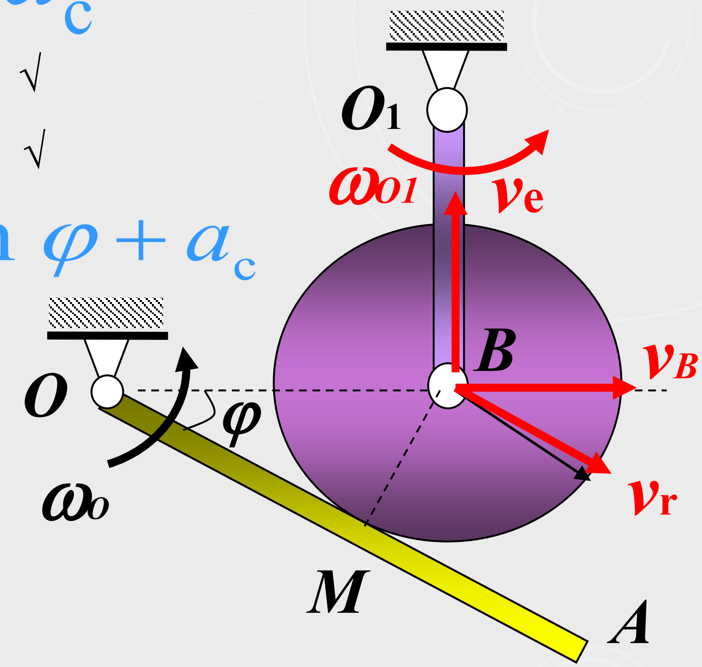
$$a_e = \omega_O^2 \frac{r}{\sin\varphi} = 2\omega_O^2 r$$

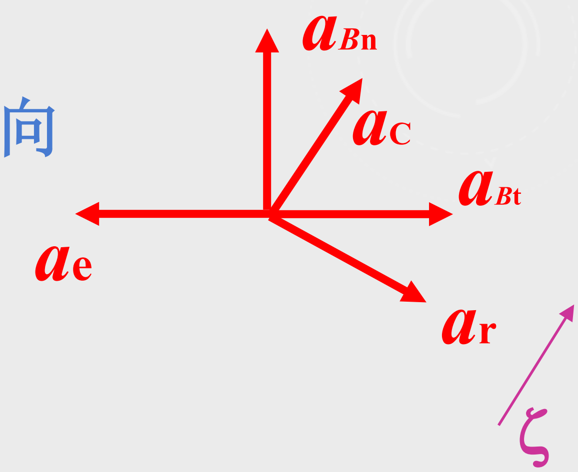
$$a_c = 2\omega_O v_r = 2\omega_O \cdot 4\omega_O r = 8\omega_O^2 r$$

代入得：$a_B^t = 2\omega_O^2 r$　$\boxed{\alpha_{O1} = \dfrac{a_B^t}{O_1B} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\omega_O^2}$ 逆钟向

"y" $a_B^n = -a_r \sin\varphi + a_c \cos\varphi$

得：　$a_r = 2(a_c \cos\varphi - a_B^n) = 0$

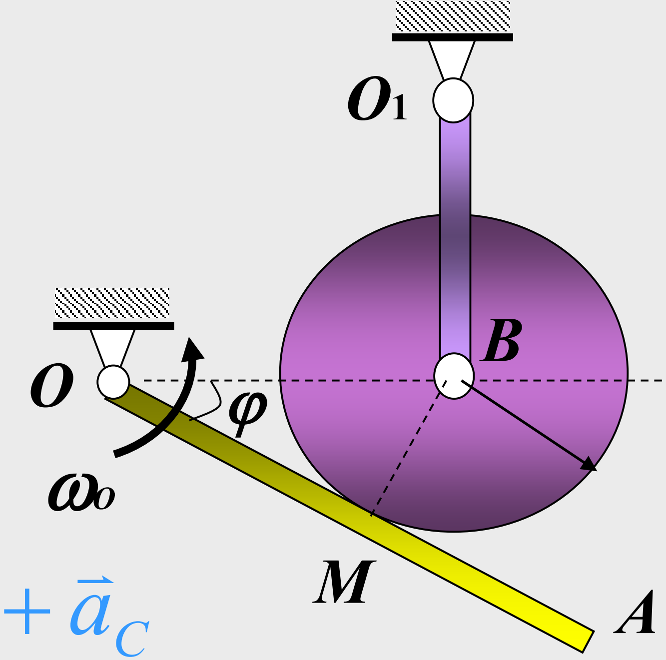




以点B为基点，研究滚轮上的点M。

$$\vec{a}_M = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} + \vec{a}_{MB}^{\,n} + \vec{a}_{MB}^{\,t}$$

大小：	?	√	√	√	?
方向：	?	√	√	√	√



取动点M，动系OA。

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{M'} + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

大小：	?	√	?	√
方向：	?	√	√	√

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{M'} + \vec{a}_r + \vec{a}_C = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} + \vec{a}_{MB}^{\,n} + \vec{a}_{MB}^{\,t}$$

大小：	√	?	0	√	√	√	?
方向：	√	√	0	√	√	√	√

$\longrightarrow$ $a_{MB}^{t} = 0$ $\boxed{a_r = 16\omega_O^2 r}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\alpha_B}$ $\boxed{a_M}$