主要内容

2-1 导热基本定律

2-2 导热问题的数学描写

2-3 典型一维稳态导热问题的分析解

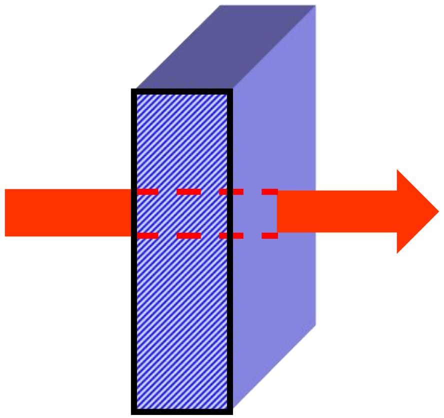
2-4 通过肋片的导热

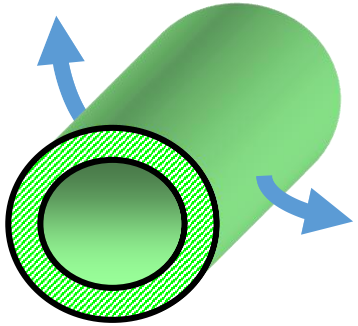
2-5多维稳态导热的求解

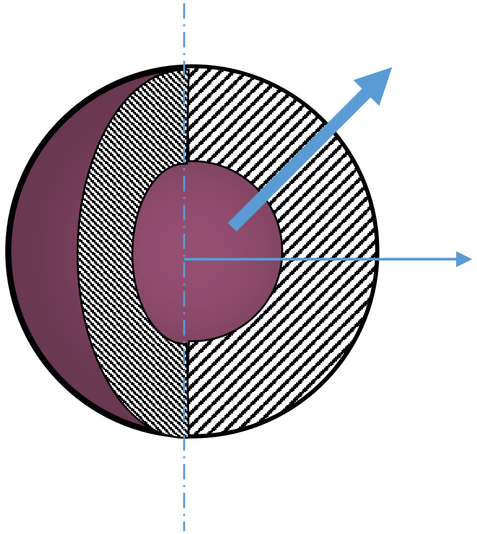
2-3 典型一维稳态导热的分析解

$$\partial t / \partial \tau = 0$$

- 平壁　　直角坐标系中的一维问题。☆
- 圆筒壁　圆柱坐标系中的一维问题。☆
- 球壳　　球坐标系中的一维问题。
- 其他变截面的一维导热问题。





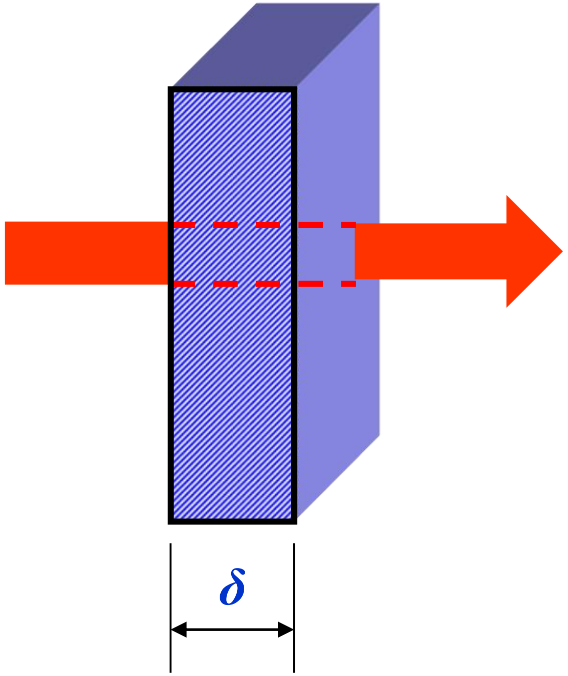


主要问题

- 求解温度分布
- 求解热流密度

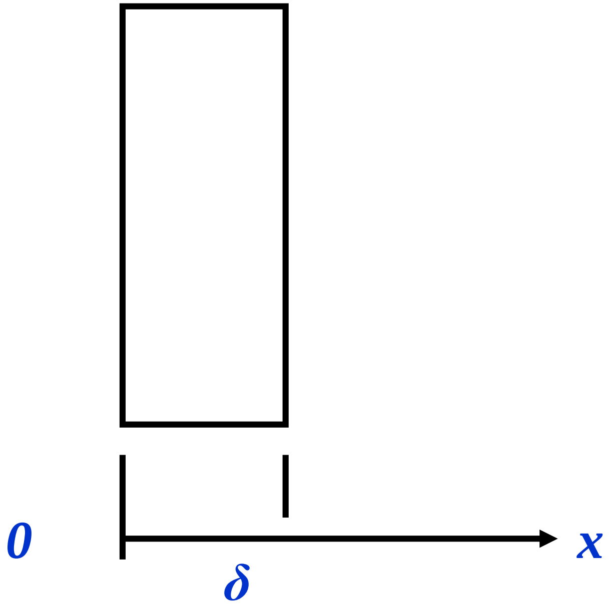
一、通过平壁的导热

一维导热
- 平壁的长度和宽度都远大于其厚度
- 平板两侧保持均匀边界条件



稳态问题

边界条件：给定温度；给定热流；对流边界



一、单层一维平壁稳态导热

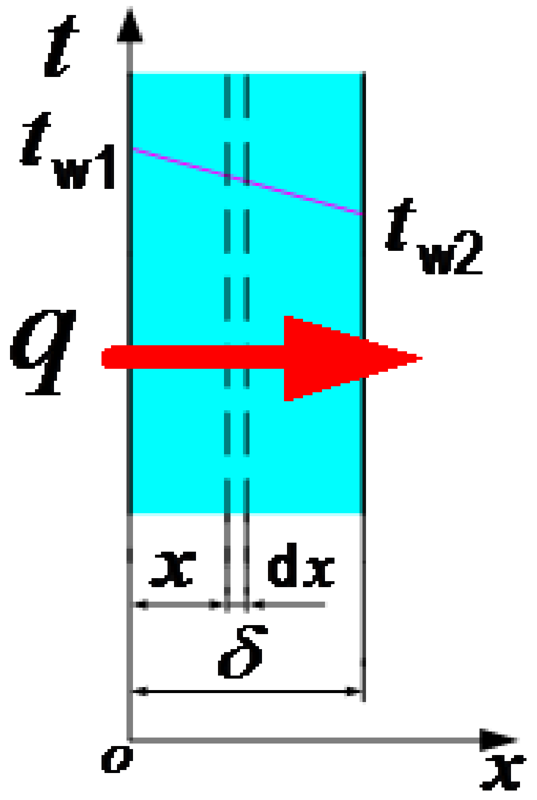
（1）$y\,,z >> \delta$

（2）t_{w1},t_{w2}均匀而恒定

（3）无内热源

（4）物性为常数

（5）表面积为A



求解:

稳态时热流密度和平壁内温度分布

由傅立叶定律求解一维平壁热流密度

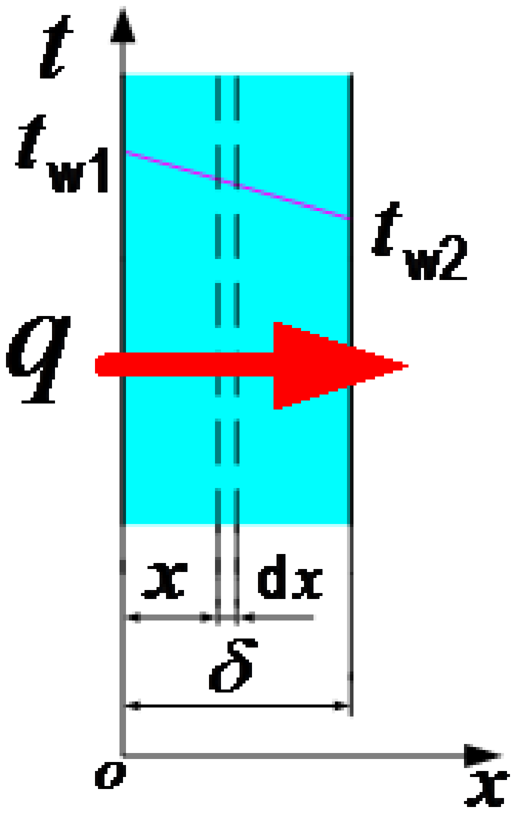
$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}$$

分离变量并积分：

$$q\int_0^{\delta} dx = -\lambda \int_{t_{w1}}^{t_{w2}} dt$$

$$q\delta = -\lambda(t_{w2} - t_{w1})$$

热流密度：
$$\boxed{q = \frac{\lambda(t_{w1} - t_{w2})}{\delta}}$$



热流密度：$$\boxed{q=\frac{\lambda(t_{w1}-t_{w2})}{\delta}}$$

- 一维平壁温度分布

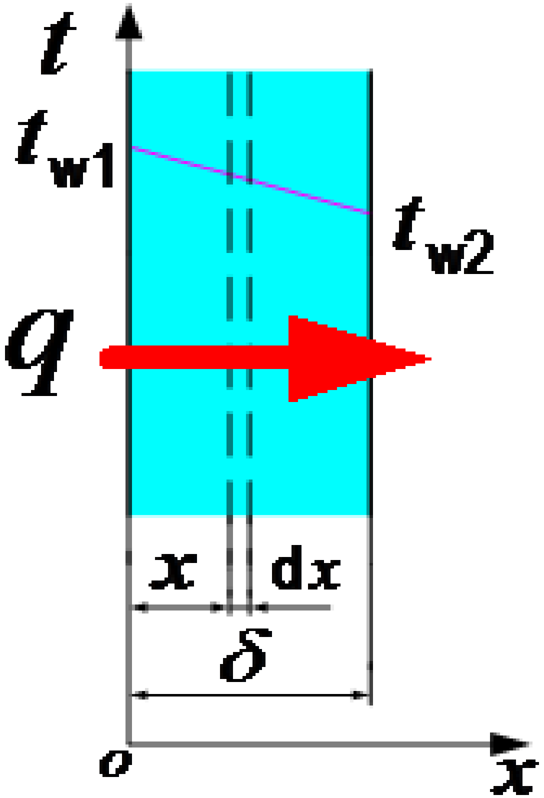
$$q=-\lambda\frac{dt}{dx}$$

分离变量并积分：

$$q\int_0^x dx=-\lambda\int_{t_{w1}}^{t(x)}dt$$

$$qx=-\lambda(t(x)-t_{w1})$$

热流密度q 带入：$$t(x)=t_{w1}-\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}x$$



导热微分方程

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right]+\frac{\Phi_V}{\rho c}$$

（1）$y, z >> \delta$，一维导热

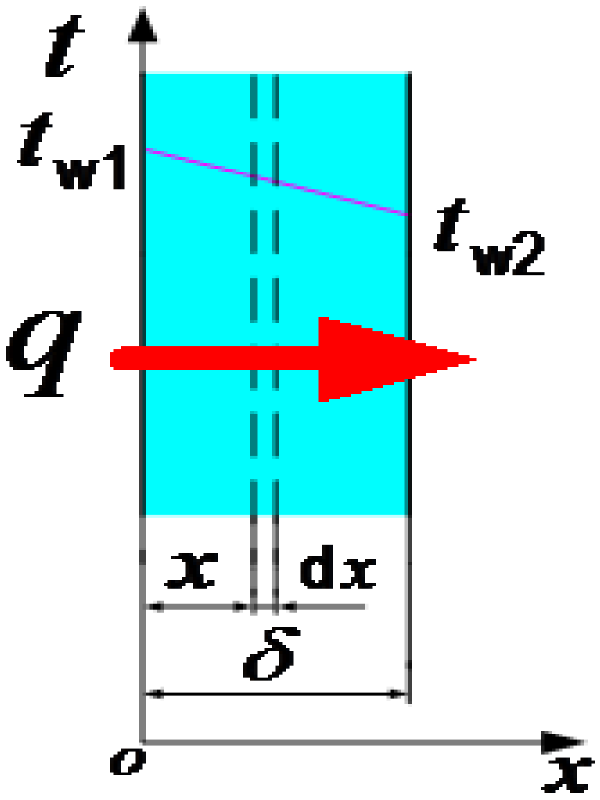
$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0$$

（2）无内热源 $\Phi_v=0$

（3）稳态导热 $\frac{\partial t}{\partial \tau}=0$

则微分方程简化为：

$$\frac{d^2 t}{dx^2}=0$$



简化后的微分方程为： $\frac{d^2t}{dx^2}=0$

（4）积分可得：$dt/dx=C_1 \Rightarrow t=C_1x+C_2$

（5）第一类边界条件

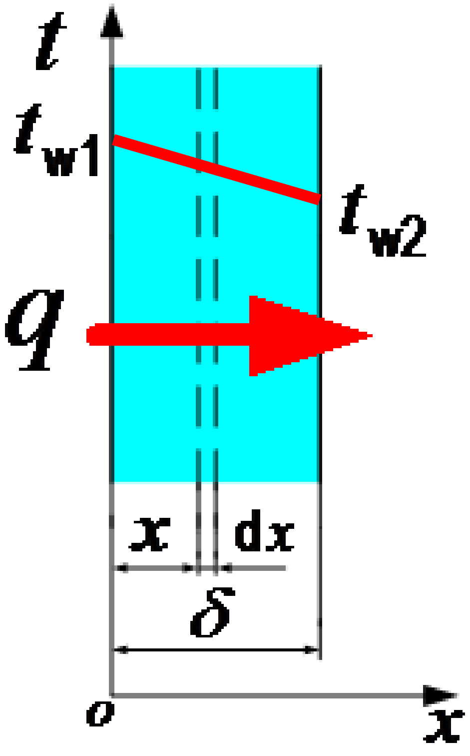
$x=0$ 时，$t=t_{w1}$ $x=\delta$ 时，$t=t_{w2}$

（6）代入边界条件

$$t(x)=t_{w1}-\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}x$$

温度分布曲线斜率：$\frac{dt}{dx}=\frac{t_{w2}-t_{w1}}{\delta}$

线性分布



（7）将温度分布代入傅立叶定律式，可得平板的热流密度：

$$q=-\lambda\frac{dt}{dx}=\frac{\lambda}{\delta}(t_{w1}-t_{w2})=\frac{\Delta t}{\delta/\lambda}$$

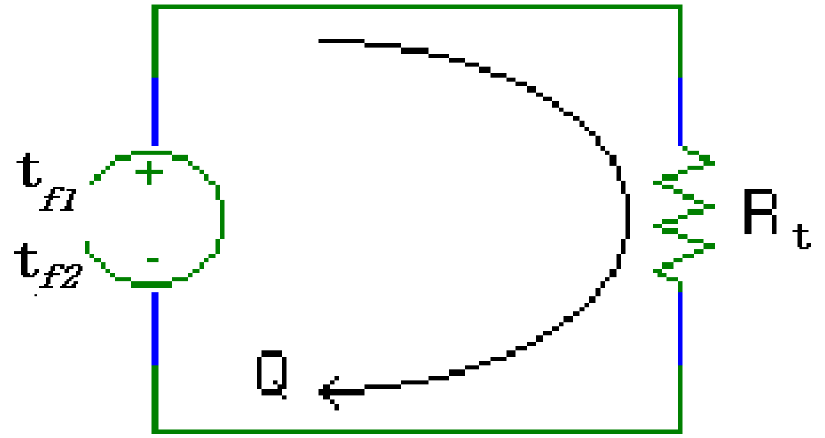
（8）平板面积为A，则通过平板的热流量：

$$\Phi=qA=A\frac{\lambda}{\delta}(t_{w1}-t_{w2})=\frac{\Delta t}{\delta/(\lambda A)}$$

电学中欧姆定律

$$I=\frac{U}{R}=\frac{\Delta V}{R}$$

电阻



热流密度： $$q=\frac{\lambda(t_{w1}-t_{w2})}{\delta}=\frac{\Delta t}{\delta/\lambda}=\frac{\Delta t}{r_d}=\frac{\text{过程的动力}}{\text{过程的阻力}}$$

热流量： $$\Phi=qA=\frac{\lambda(t_{w1}-t_{w2})A}{\delta}=\frac{\Delta t}{\delta/(\lambda A)}=\frac{\Delta t}{R_d}$$

R_d ——热阻， r_d ——面积热阻

单层一维平壁稳态导热

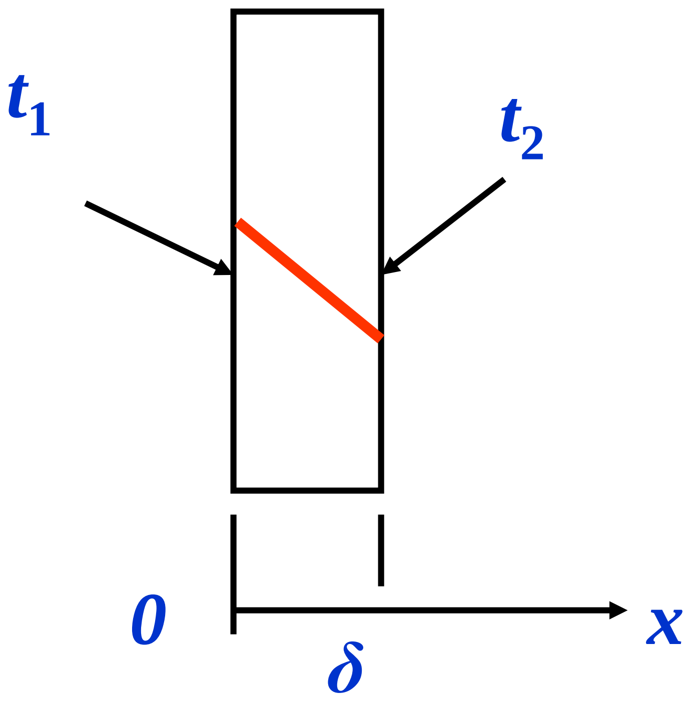
不同边界条件的情况

求解温度分布，热流

1. 无内热源，λ为常数，两侧均为第一类边界

数学描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} = 0 \\ x = 0, \ t = t_1 \\ x = \delta, \ t = t_2 \end{cases}$$



$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x$$

线性分布

利用傅立叶导热定律可得通过平壁的热流量

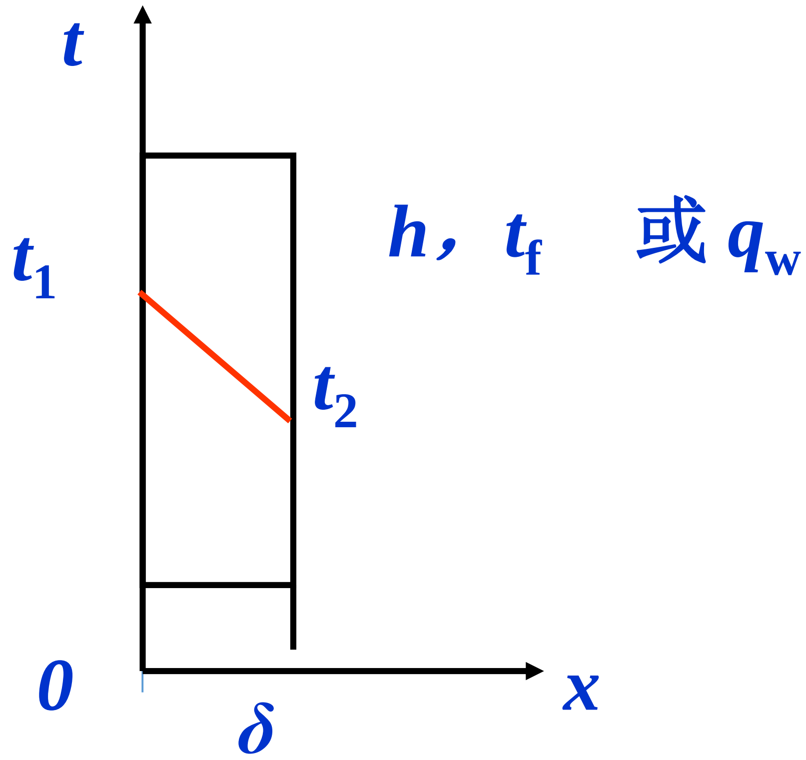
$$q = -\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{t_1 - t_2}{\delta} \qquad \mathrm{W/m^2}$$

$$\Phi = -\lambda A \frac{\mathrm{d}t}{dx} = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{\delta} = \frac{t_1 - t_2}{\delta/(\lambda A)} \quad \mathrm{W}$$

2. 无内热源，λ为常数

一侧为第一类边界

另一侧为第二类或第三类边界



此时导热微分方程式不变，平壁内部的温度分布仍是线性的，只是t_2未知。

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x$$

壁面上的温度t_2可由边界条件确定

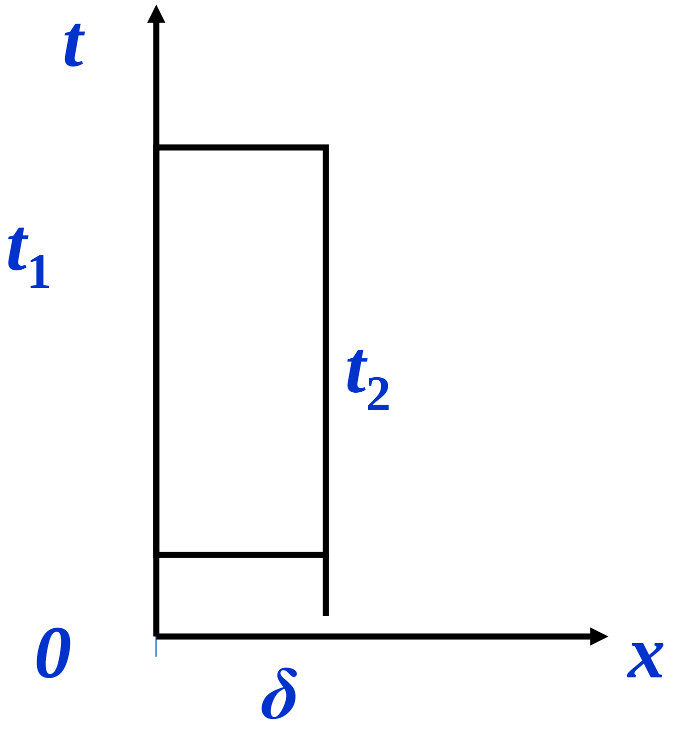
（1）另一侧为第二类边界 $q_w = \dfrac{t_1 - t_2}{\delta / \lambda}$

（2）另一侧为第三类边界 $h(t_2 - t_f) = \dfrac{t_1 - t_2}{\delta / \lambda}$

3. 无内热源，变导热系数，两侧均为第一类边界

数学描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \\ x = 0, \ t = t_1 \\ x = \delta, \ t = t_2 \end{cases}$$



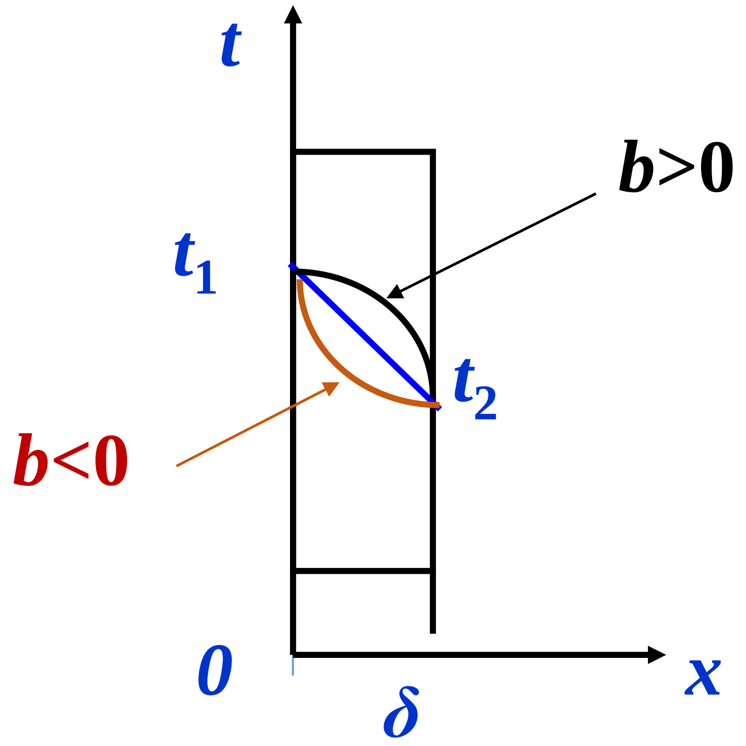
若导热系数随温度线性变化

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bt)$$

λ_0、b为常数

则导热微分方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda_0(1+bt)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=0$$



对x积分一次得

$$\lambda_0(1+bt)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=c_1$$

对x再次积分得微分方程的通解

$$\lambda_0(t+\frac{b}{2}t^2)=c_1x+c_2$$

利用边界条件最后得温度分布为

抛物线形式

$$\boxed{t+\frac{b}{2}t^2=(t_1+\frac{b}{2}t_1^2)-\frac{t_1-t_2}{\delta}\left[1+\frac{b}{2}(t_1+t_2)\right]x}$$

热流密度计算式为:

$$q=\lambda_0\left[1+\frac{b}{2}(t_2+t_1)\right]\frac{t_1-t_2}{\delta}$$

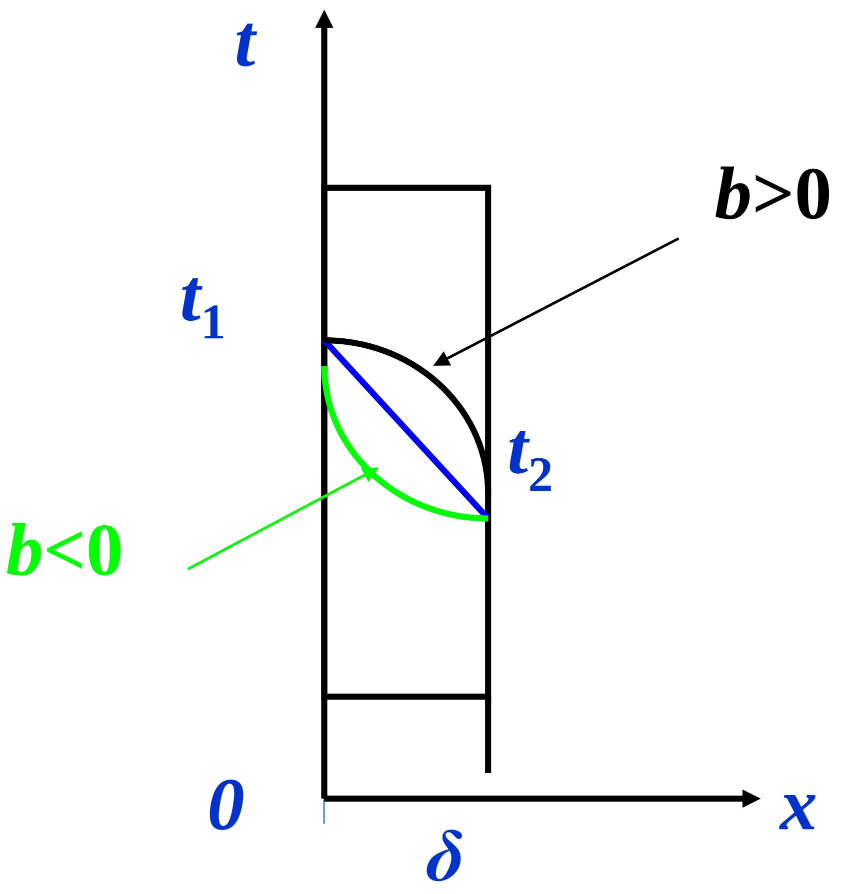
或

$$q=\frac{\lambda_m}{\delta}(t_1-t_2)$$

$$\lambda_m=(\lambda_1+\lambda_2)/2$$

$$=\lambda_0\left[1+b(t_1+t_2)/2\right]$$

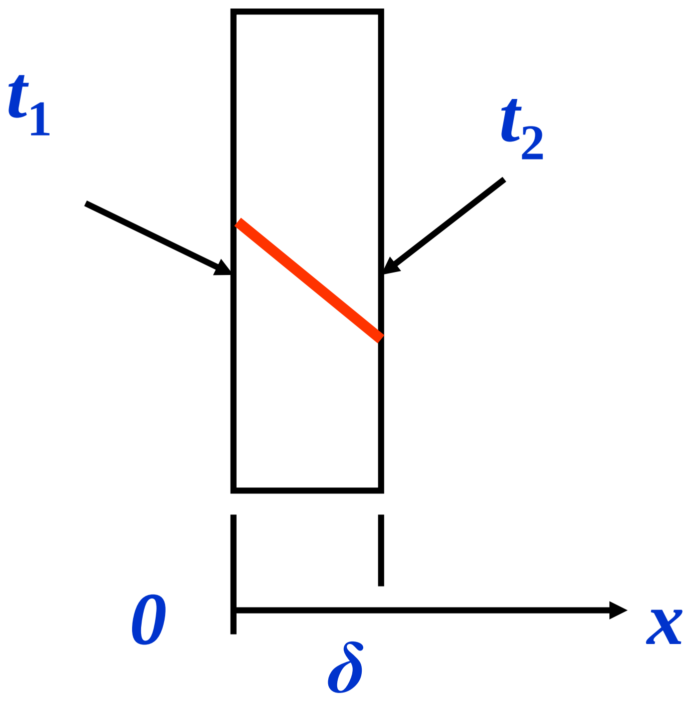
$$=\lambda_0(1+bt_m)$$



1. 无内热源，λ为常数，两侧均为第一类边界

数学描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} = 0 \\ x = 0, \ t = t_1 \\ x = \delta, \ t = t_2 \end{cases}$$



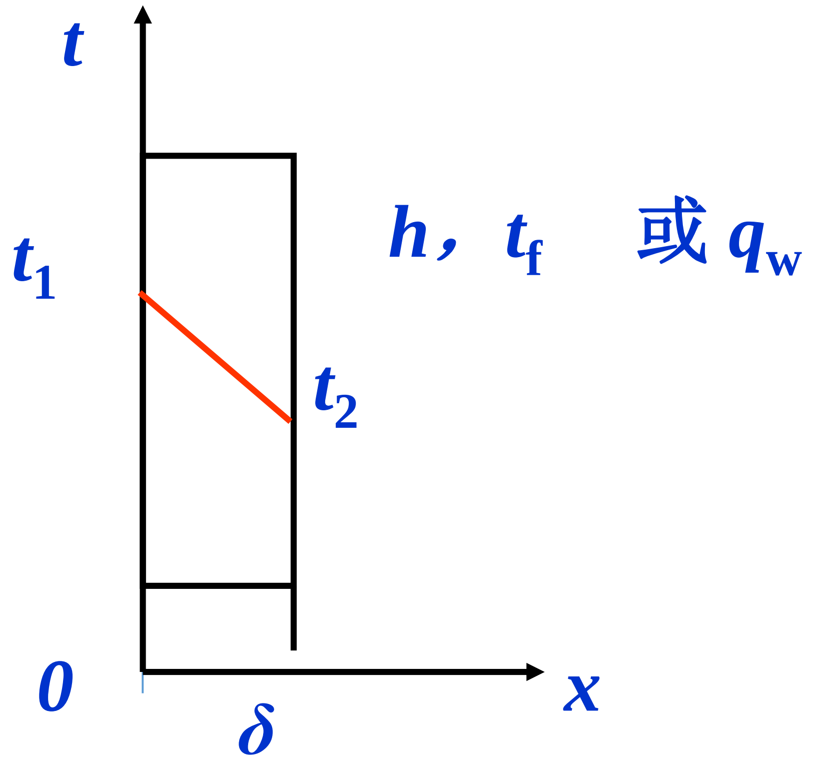
$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x$$

线性分布

2. 无内热源，λ为常数

一侧为第一类边界

另一侧为第二类或第三类边界



此时导热微分方程式不变，平壁内部的温度分布仍是线性的，只是t_2未知。

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x$$

壁面上的温度t_2可由边界条件确定

（1）另一侧为第二类边界 $q_w = \dfrac{t_1 - t_2}{\delta / \lambda}$

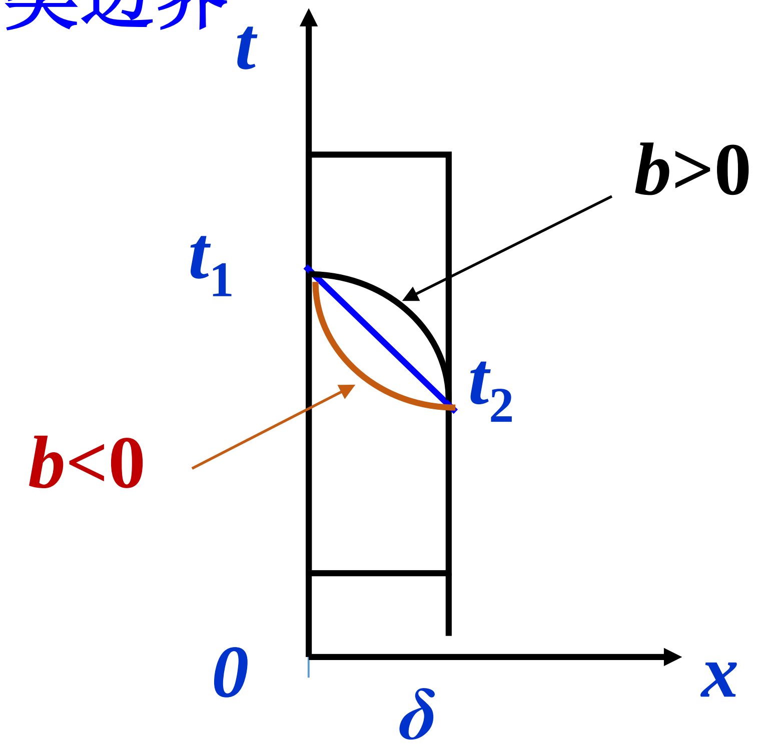
（2）另一侧为第三类边界 $h(t_2 - t_f) = \dfrac{t_1 - t_2}{\delta / \lambda}$

3. 无内热源，变导热系数，两侧均为第一类边界

数学描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=0 \\ x=0,\ t=t_1 \\ x=\delta,\ t=t_2 \end{cases}$$

$$\lambda=\lambda_0(1+bt)$$



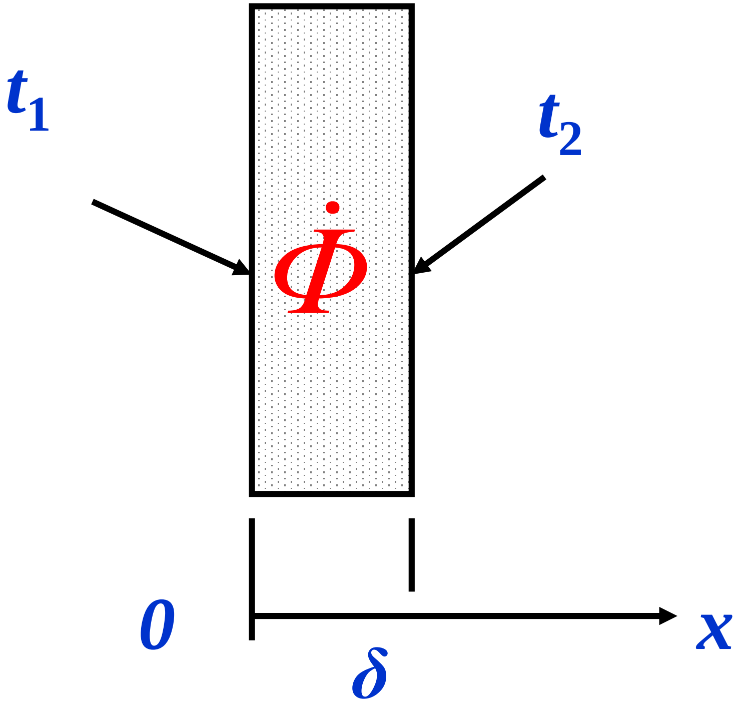
抛物线形式

$$t+\frac{b}{2}t^2=\left(t_1+\frac{b}{2}t_1^2\right)-\frac{t_1-t_2}{\delta}\left[1+\frac{b}{2}(t_1+t_2)\right]x$$

4. 有均匀内热源，λ 为常数，两侧均为第一类边界

数学描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} + \dot{\Phi}/\lambda = 0 \\ x = 0,\ t = t_1 \\ x = \delta,\ t = t_2 \end{cases}$$



对微分方程直接积分两次，得微分方程的通解

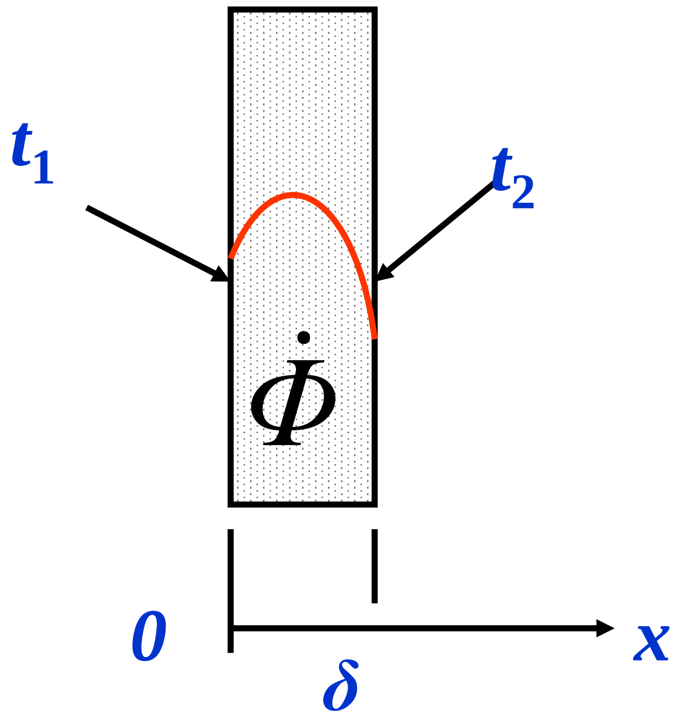
$$t = -\frac{\dot{\Phi}}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2$$

利用两个边界条件

$$x = 0,\ t = t_1 \Rightarrow c_2 = t_1$$

$$x = \delta,\ t = t_2$$

$$\Rightarrow c_1 = (t_2 - t_1)/\delta + \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda}\delta$$



平壁内的温度分布如下

$$\boxed{t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta}x + \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda}x(\delta - x)}$$

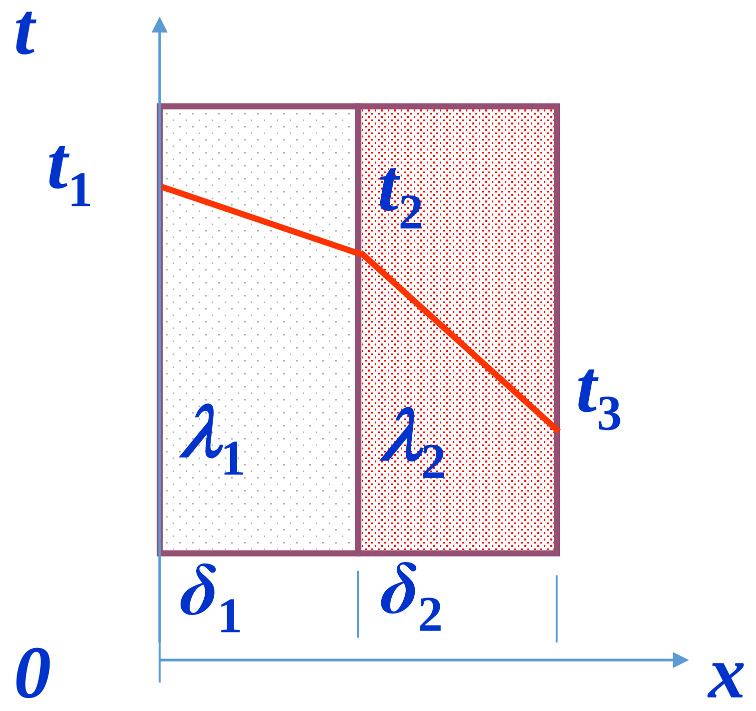
5. 通过多层平壁的导热，两侧均为第一类边界

稳态、无内热源

多层平壁：由几层导热系数不同材料组成的复合平壁。

热阻概念

$$q=\frac{t_1-t_2}{\delta_1/\lambda_1}=\frac{t_2-t_3}{\delta_2/\lambda_2}=\frac{t_1-t_3}{\delta_1/\lambda_1+\delta_2/\lambda_2}$$



二、多层平板一维导热

已知条件：

（1）δ_1, δ_2, δ_3

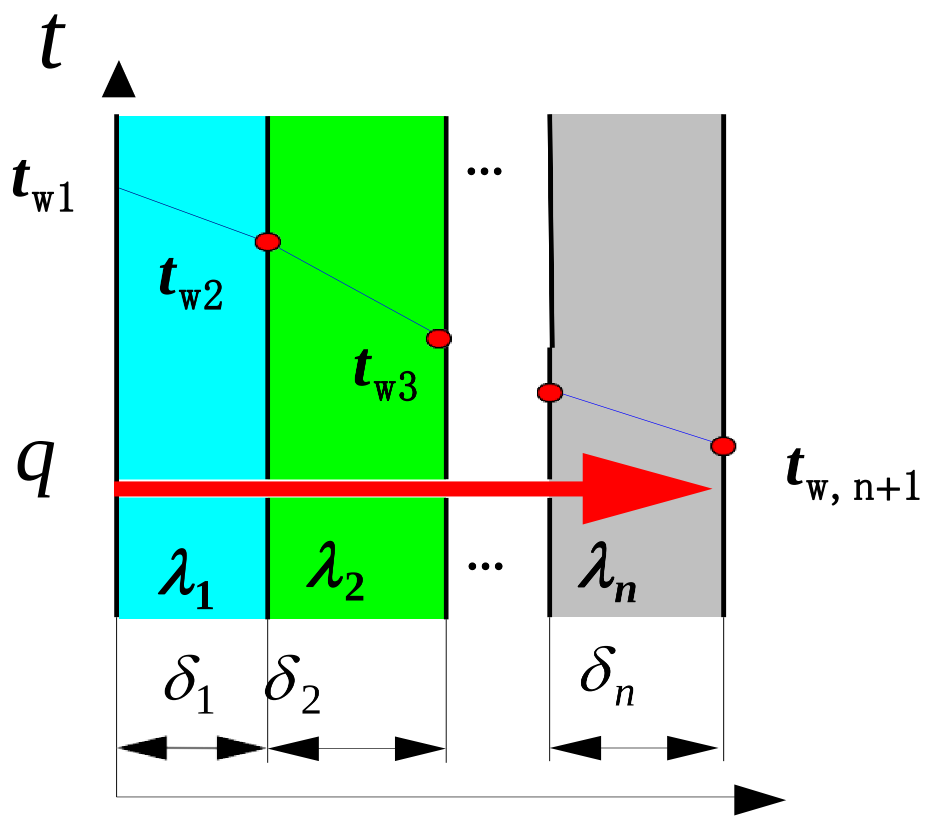
（2）λ_1, λ_2, λ_3 为常数

（3）t_{w1}, t_{w4}, $t_{w1}>t_{w4}$

（4）无内热源

（5）侧面面积为A

（6）层与层之间接触紧密



求解： 稳态时

多层平板热流密度

各层板内温度分布

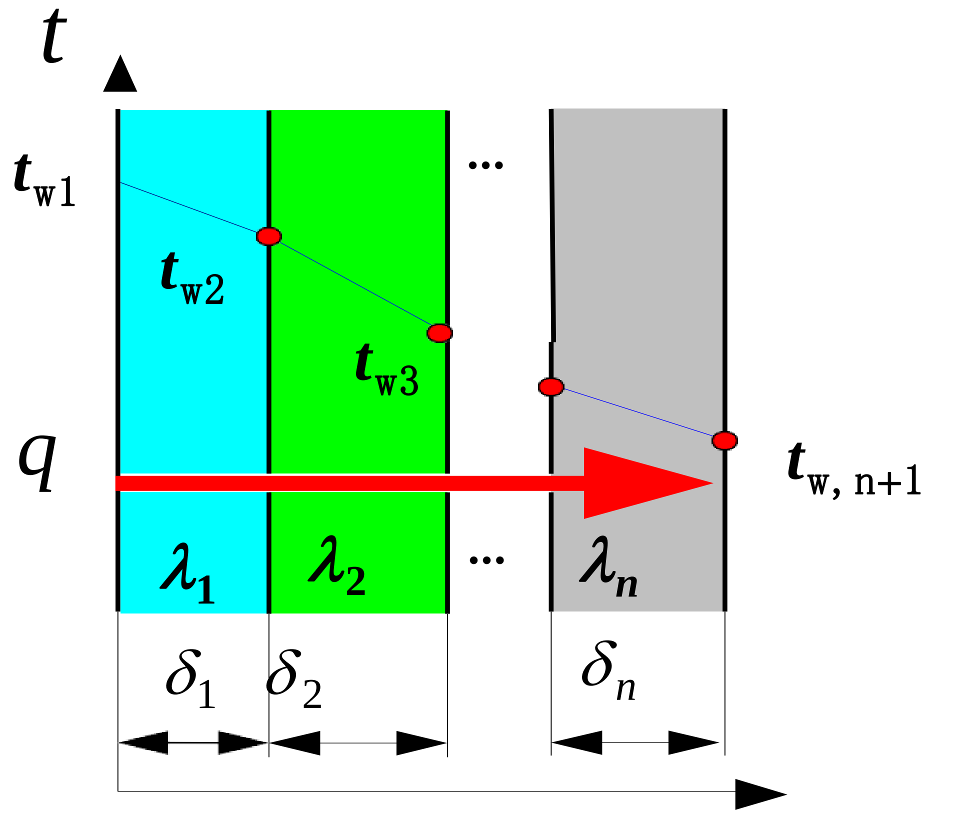
- 根据热阻定义，各层热阻表达式：

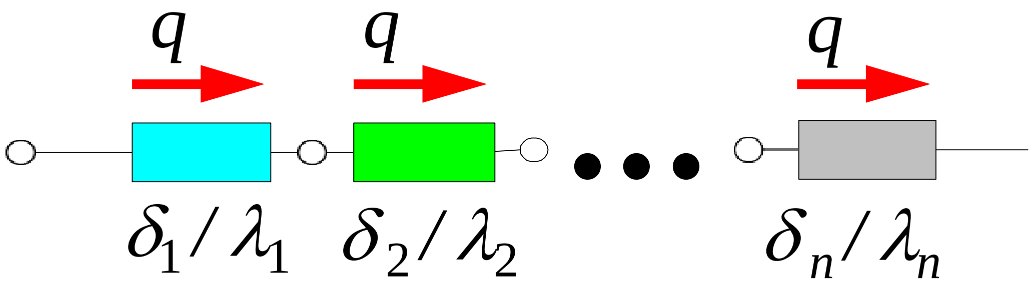
$$r_{t1}=\frac{\delta_1}{\lambda_1}\qquad r_{t2}=\frac{\delta_2}{\lambda_2}\qquad r_{t3}=\frac{\delta_3}{\lambda_3}$$

串联过程的总热阻等于分热阻之和，

总热阻：$$r_{\sum t}=\frac{\delta_1}{\lambda_1}+\frac{\delta_2}{\lambda_2}+\frac{\delta_3}{\lambda_3}$$

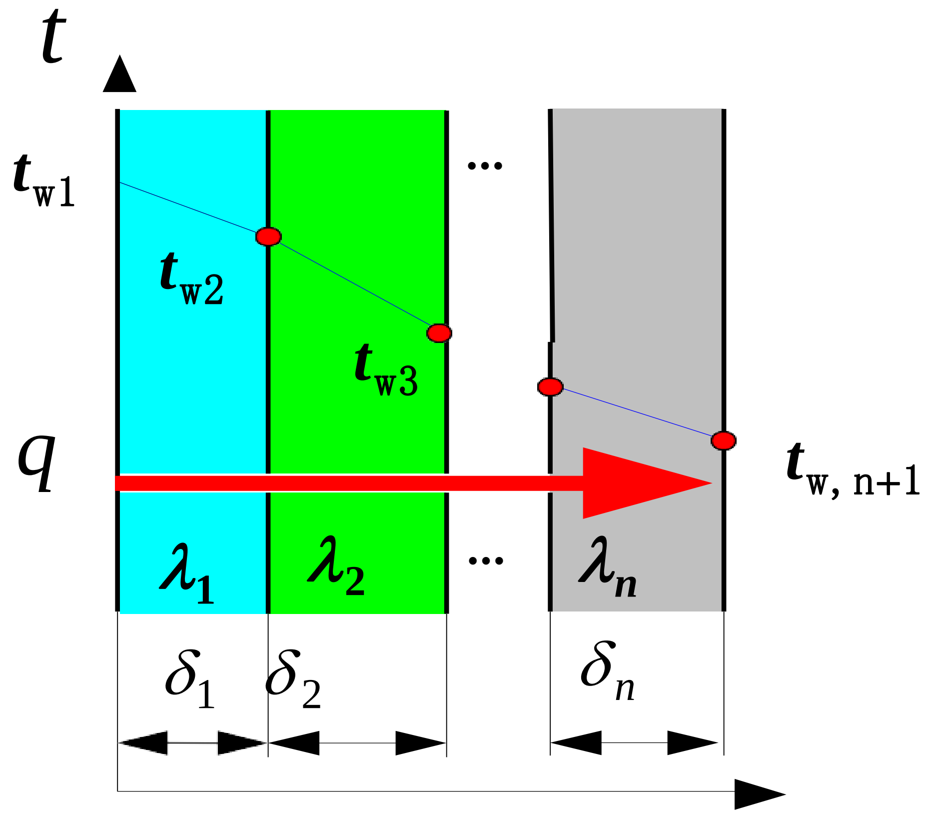
热流密度：$$q=\frac{(t_{w1}-t_{w4})}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}+\frac{\delta_2}{\lambda_2}+\frac{\delta_3}{\lambda_3}}\quad \mathrm{W/m^2}$$





❁ 那么对n层平板的热流密度计算公式：

$$q=\frac{t_{w1}-t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta}{\lambda_i}}$$



热流量

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta}{\lambda_i A}}$$

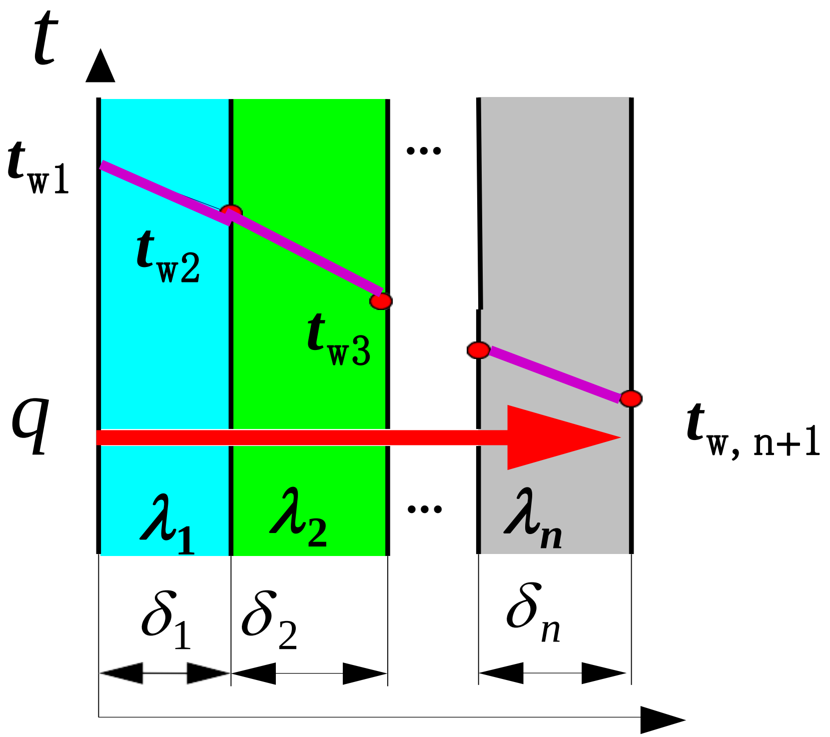
已知多层平板的热流密度
计算多层平板内的温度分布

$$q = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\lambda_i}}$$

$$r_{t1} = \frac{\delta_1}{\lambda_1} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{q} \qquad t_{w2} = t_{w1} - q\frac{\delta_1}{\lambda_1}$$

$$r_{t2} = \frac{\delta_2}{\lambda_2} = \frac{t_{w2} - t_{w3}}{q} \qquad t_{w3} = t_{w2} - q\frac{\delta_2}{\lambda_2}$$

第 i 层: $$\boxed{q = \frac{\lambda_i}{\delta_i}(t_i - t_{i+1}) \Rightarrow t_{i+1} = t_i - q\frac{\lambda_i}{\delta_i}}$$

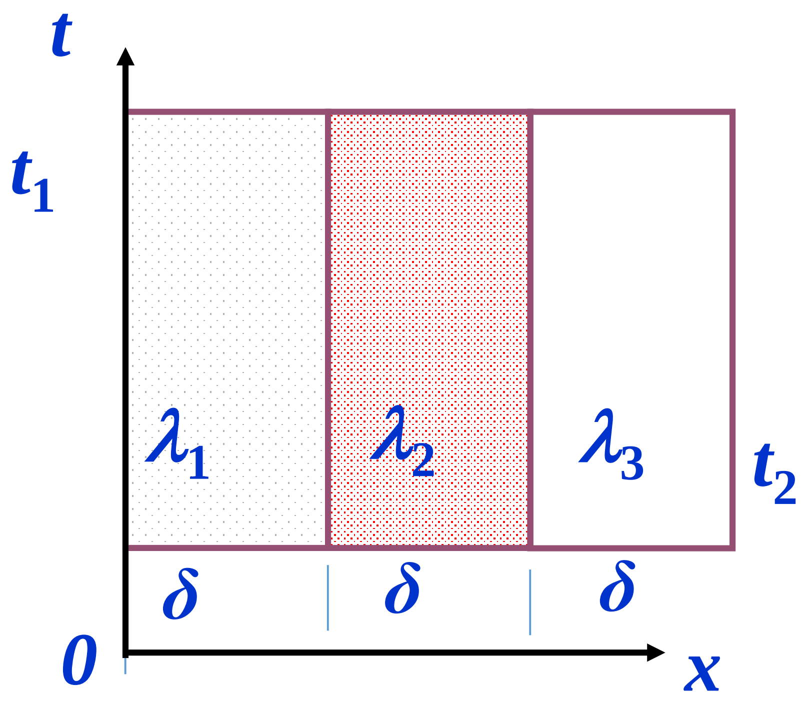


问题：图中哪一层的热导率最小？

练习

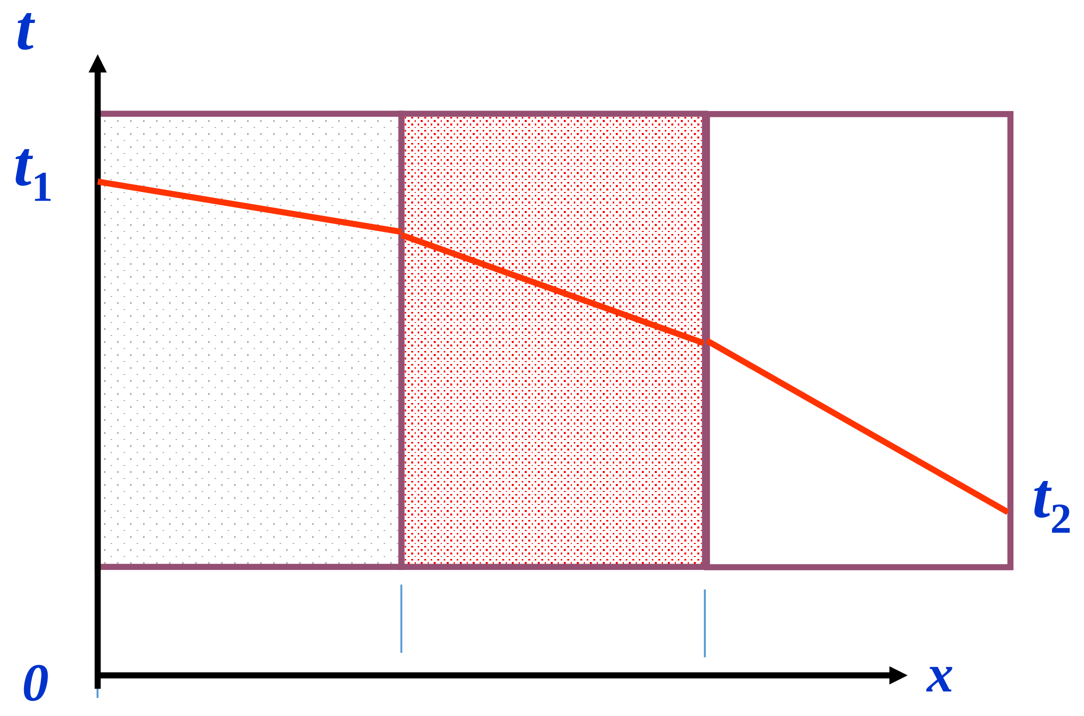
画出一维稳态导热过程中，三层平壁的温度分布曲线。

已知，各层厚度相等，导热系数$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$,$t_1 > t_2$



练习

1、画出一维稳态导热过程中，三层平壁的温度分布曲线。已知，各层厚度相等，导热系数$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$,$t_1>t_2$



思考

串联热阻叠加原则及其使用条件？

在一个串联的热量传递过程中，
如果通过每个环节的热流量都相同，
则各串联环节的总热阻等于各环节热阻的和

- 单层玻璃和双层玻璃的保温效果哪个好？

- 如何强化传热（换热器，水垢）？

例1　已知钢板、水垢及灰垢的导热系数各为

46.4W/(m·K)、1.16W/(m·K)、0.116W/(m·K)

试比较厚1mm钢板、水垢及灰垢的面积热阻。

解：（1）假设：一维、稳态导热

（2）计算：平板的面积导热热阻 $R_A = \dfrac{\delta}{\lambda}$，则：

钢板：$$R_A = \frac{1\times10^{-3}m}{46.4W/(m\bullet K)} = 2.16\times10^{-5} \quad m^2\bullet K/W$$

水垢：$$R_A = \frac{1\times10^{-3}m}{1.16W/(m\bullet K)} = 8.62\times10^{-4} \quad m^2\bullet K/W$$

灰垢：$$R_A = \frac{1\times10^{-3}m}{0.116W/(m\bullet K)} = 8.62\times10^{-3} \quad m^2\bullet K/W$$

例2：一厚20cm的水泥蛭石平板，可近似看成无限大平板，若高温侧有稳定的热流，热流密度$q=40W/m^2$,另一侧表面温度t_2保持60℃，问此时高温侧的表面温度t_1多少？

水泥蛭石的导热系数：$\lambda=0.103+1.98\times10^{-4}\,t$

解:(1)水泥蛭石的导热系数：$\lambda=0.103+1.98\times10^{-4}t$

平均导热系数:

$$\bar{\lambda}=0.103+\frac{1}{2}\times1.98\times10^{-4}(t_1+t_2)$$

(2) **一维稳态导热方程：** $q=\dfrac{\bar{\lambda}(t_1-t_2)}{\delta}$

(3)将 $\bar{\lambda}$ 代入上面稳态导热方程：

$$q=\frac{\left[0.103+\frac{1}{2}\times1.98\times10^{-4}(t_1+t_2)\right](t_1-t_2)}{\delta}$$

其中q,δ,t_2为已知量，上式为t_1的二次方程

有几种方法可以解这二次方程：

（a）直接求解二次方程

（b）假定高温侧表面温度，推算 ，试凑迭代计算：

- 设t_1=120℃，$\bar{\lambda}$ ＝0.121(W/(m ·℃))

由方程 $$q=\frac{\bar{\lambda}(t_1-t_2)}{\delta}$$

写成： $$t_1=q\frac{\delta}{\bar{\lambda}}+t_2$$ 可计算出新的t_1

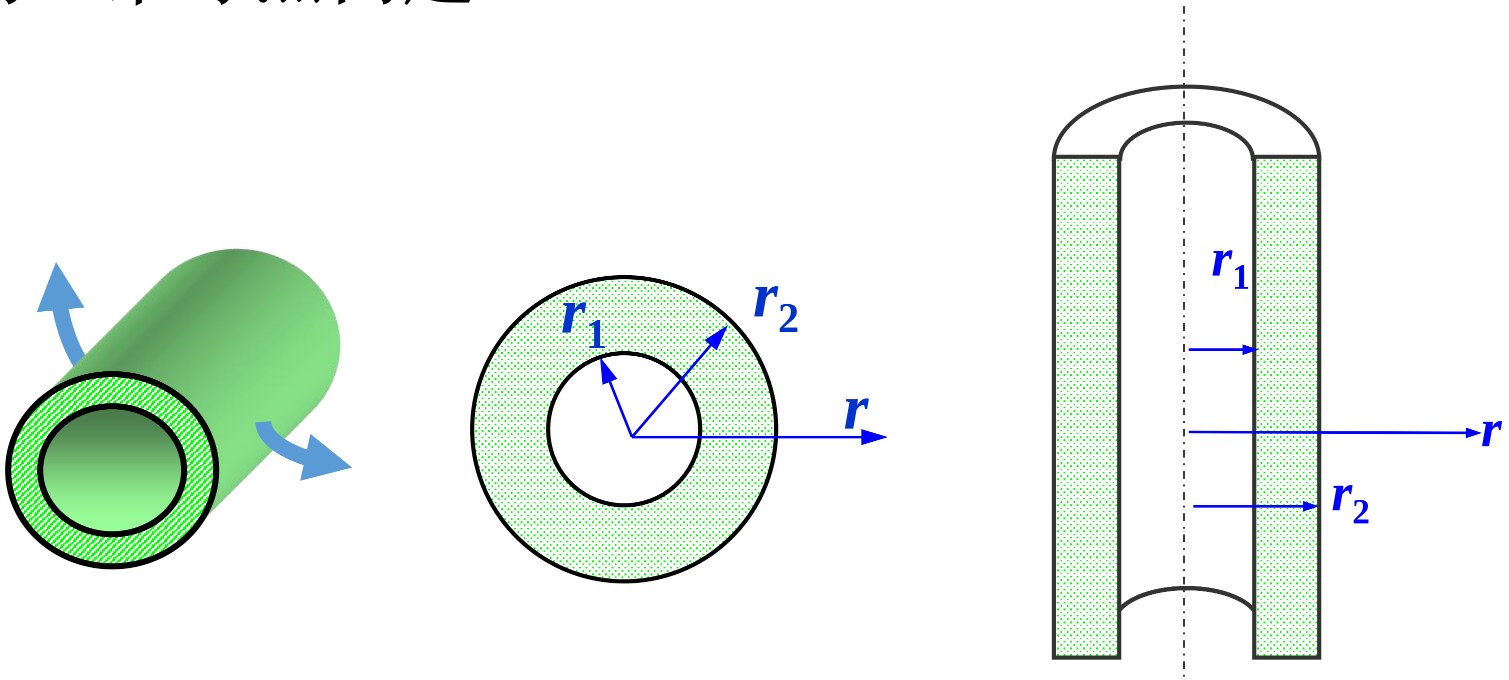
t_1＝126.12 ℃，计算出的t_1与假设的不符则用新的t_1 ＝126.12 ℃计算：

再次计算t_1, 得t_1＝126.12 ℃ $\bar{\lambda}$ =0.121$(W/\ m℃)$

与假设值相符，因此 t_1＝126.12 ℃

二、通过圆筒壁的导热

圆筒壁就是圆管的壁面。当管子的壁面相对于管长而言非常小，且管子的内外壁面又保持均匀的温度时，通过管壁的导热就是圆柱坐标系上的一维导热问题。



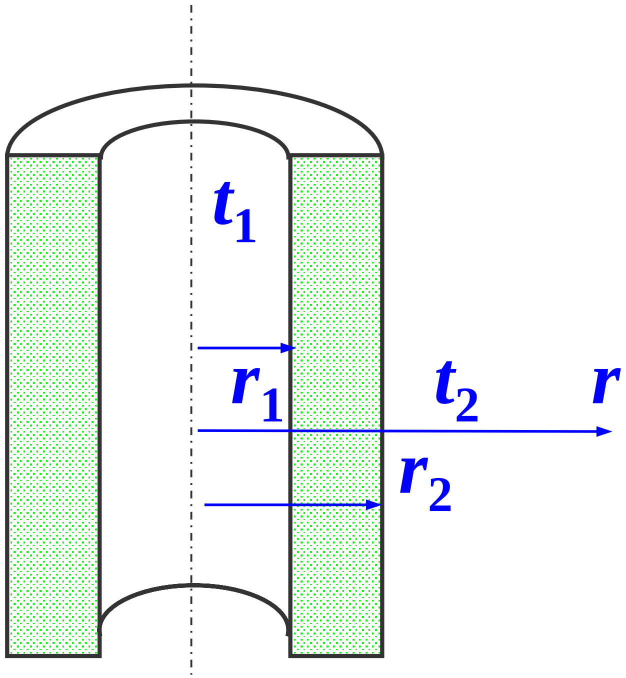
1、通过单层圆筒壁的导热

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r\frac{\partial t}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})+\dot{\Phi}$$

无内热源，λ为常数，两侧均为第一类边界

数学描述：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dt}{dr}\right)=0\\ r=r_1, t=t_1\\ r=r_2, t=t_2\end{cases}$$



积分上面的微分方程两次得到其通解为 ：

$$\boxed{t=c_1 lnr+c_2}$$

$$t = c_1 \ln r + c_2$$

利用两个边界条件

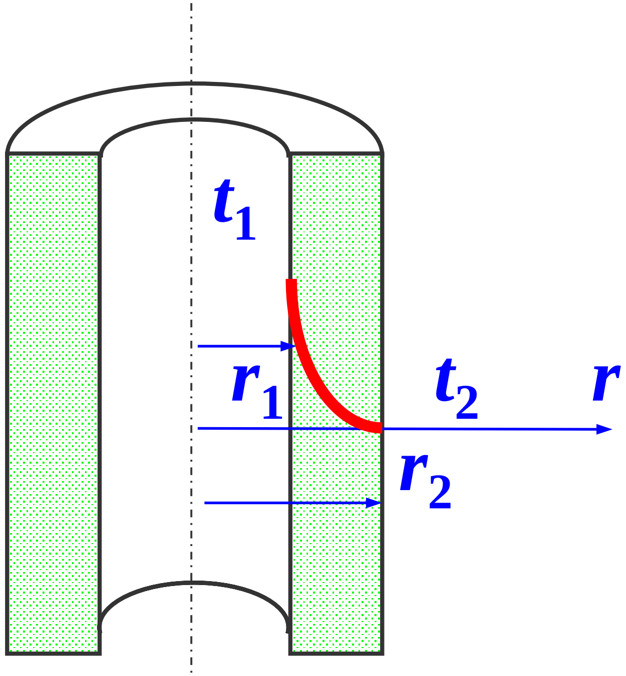
$$r = r_1, t = t_1$$
$$r = r_2, t = t_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{t_2 - t_1}{\ln(r_2 / r_1)} \\ c_2 = t_1 - \ln r_1 \dfrac{t_2 - t_1}{\ln(r_2 / r_1)} \end{cases}$$

将两个积分常数代入原通解，可得圆筒壁内的温度分布如下

$$\boxed{t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r / r_1)}$$

温度分布是一条对数曲线



$$t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r / r_1)$$

通过圆筒壁的热流量

$$\Phi = -\lambda A \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -\lambda 2\pi r l \left(-\frac{t_1 - t_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{t_1 - t_2}{R_\lambda} \qquad \textbf{[W]}$$

圆筒壁导热热阻

$$\boxed{R_\lambda = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln(r_2 / r_1)}$$