

理论力学

吴佰建

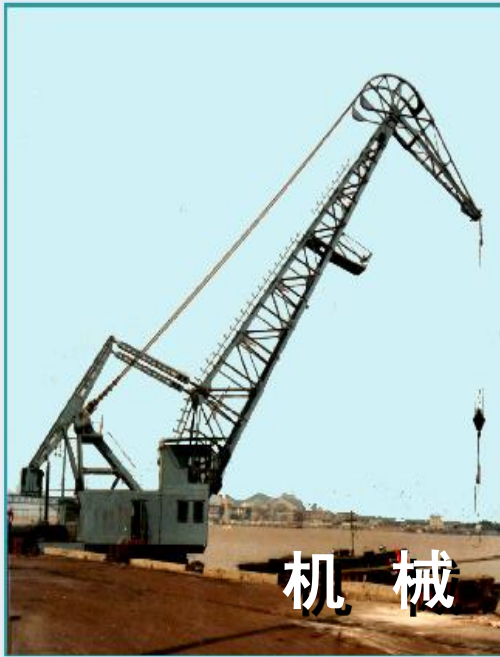
EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

OFFICE: 12:30-14:00, MON

平面桁架的内力计算

3.1 桁架结构





机 械



国 防



桥 梁

按材料可分为:

钢筋混凝土桁架



木桁架



钢桁架



按空间形式可分为：

平面桁架



组成桁架的所有杆
件轴线都在同一平面内

空间桁架



组成桁架的杆件轴
线不在同一平面内

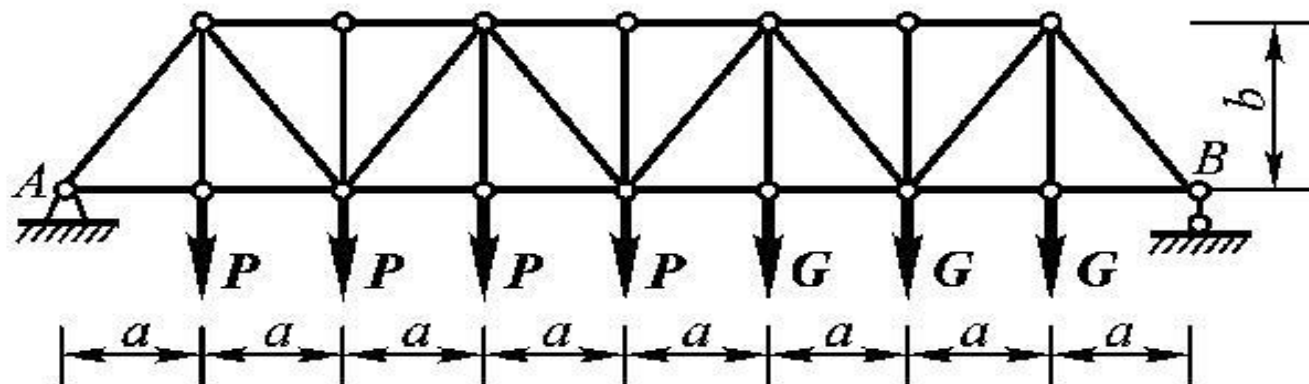


观察连接部位

桁架(truss):
工程中由杆件通过
铰链连接而成的几
何形状不变结构。

节点: 杆件轴线的交点





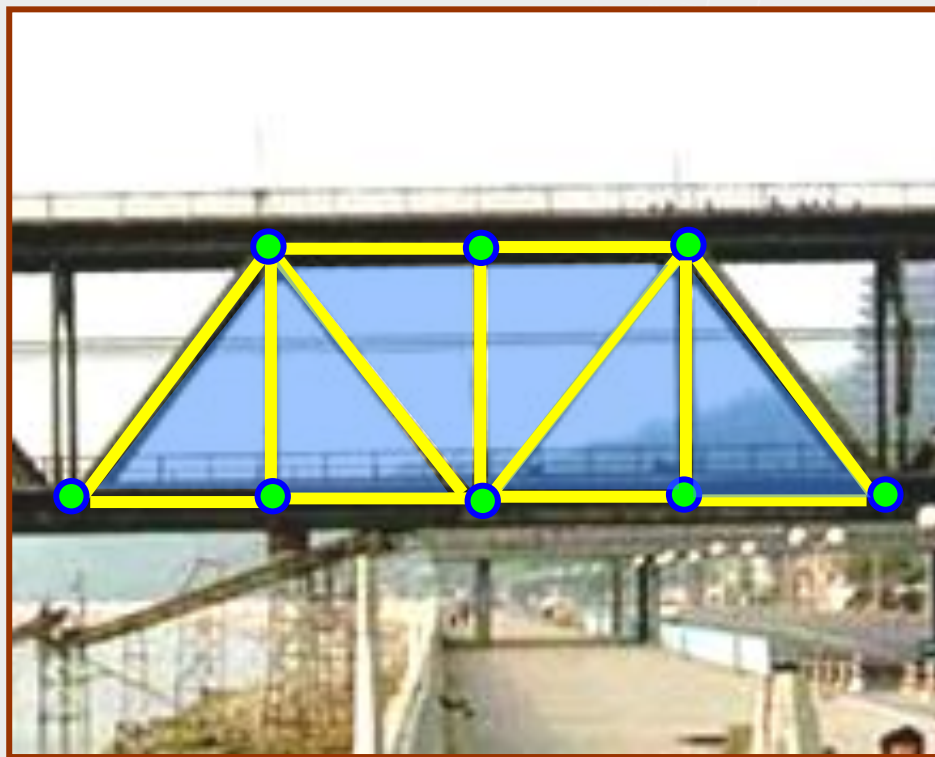
理想桁架:

1. 节点抽象为光滑铰链连接
2. 杆件自重不计,或平均分配在两端的节点上
3. 外力(载荷或约束力)都作用于节点上

理想桁架的特点: 每个杆件均为二力构件或二力杆

理想桁架：略去了结点刚性、荷载偏心产生的次应力。

工程中，某些
焊接结构，铆接结
构，可简化为桁架，
结果偏于安全。



简单桁架：以三角形为基础，每增加一个节点则添加两根杆件。

平面简单桁架必是静定的。

Why?

如何计算（平面简单）桁架各杆的内力？

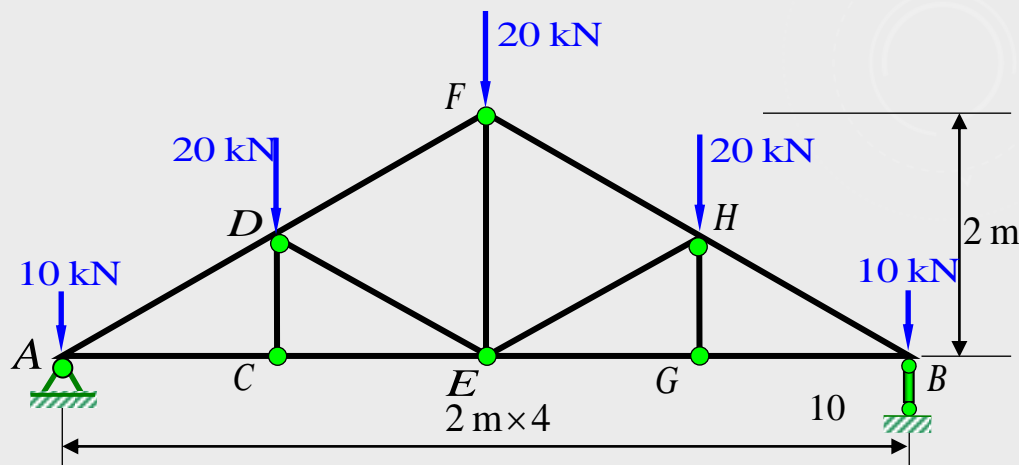
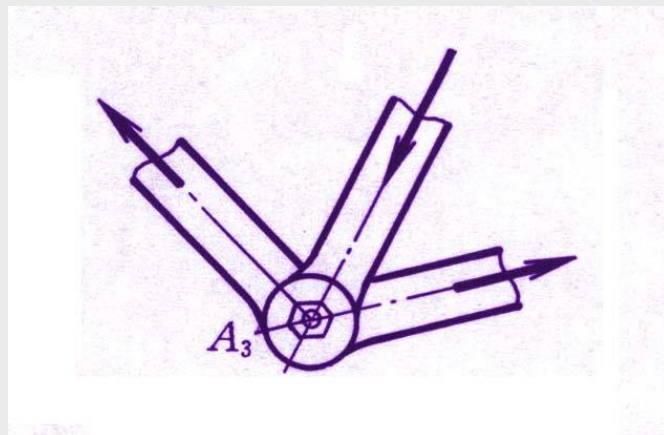
3.2 平面桁架内力的计算方法

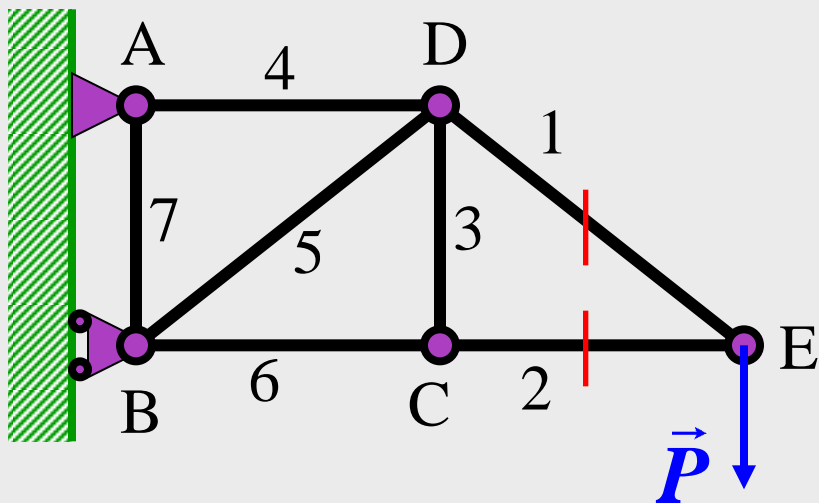
1、**节点法**：以**节点**为研究对象，将每个节点视为平面汇交力系，逐个节点求解内力。

□ 节点力的作用线已知，指向可以假设（一般假设成受拉）

□ **求解顺序**：与几何组成次序相反

□ 不仅可以确定各杆受力，还可以确定连接件的受力。





例: 在图示桁架中,已知水平杆和铅垂杆等长, 节点E上作用有铅垂力 P , 求各杆内力.

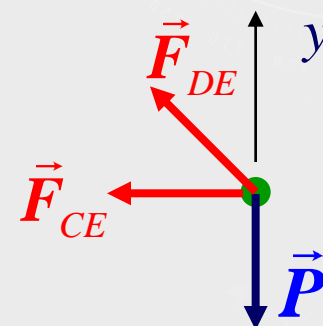
解: [E]

$$\sum F_y = 0$$

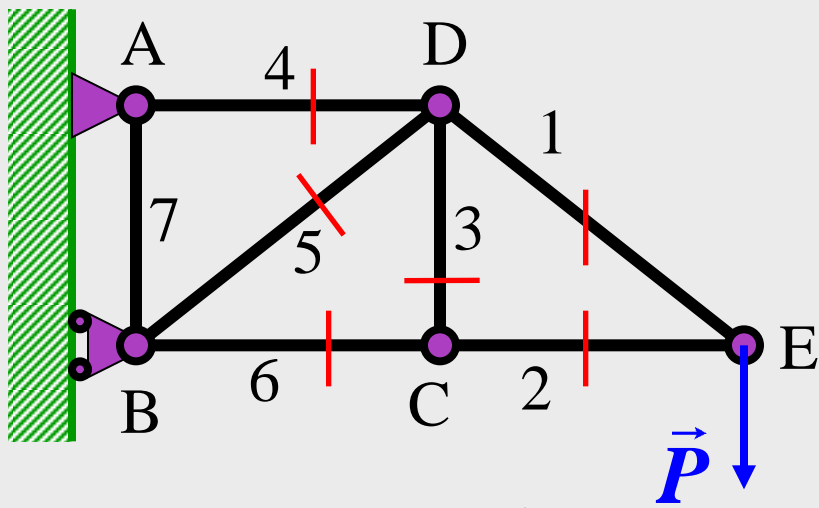
$$F_{DE} \cos 45 - P = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = \sqrt{2}P$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{CE} + F_{DE} \sin 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE} = -P$$



研究节点E—>杆1、2的内力

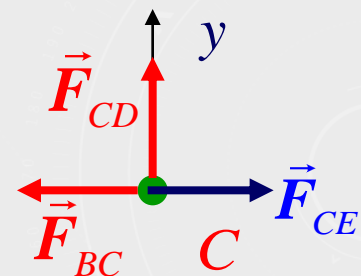


[C]

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{CD} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{BC} = F_{CE} = -P$$



研究节点C—>杆3、6的内力

[D]

$$\sum F_y = 0$$

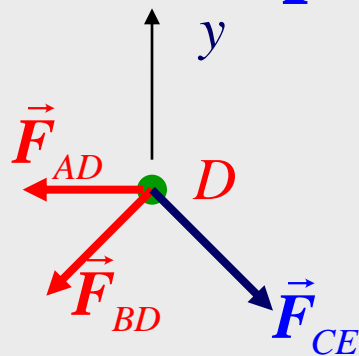
$$-F_{BD} \cos 45 - F_{CE} \cos 45 = 0$$

$$F_{BD} = P$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{AD} - F_{BD} \cos 45 + F_{CE} \cos 45 = 0$$

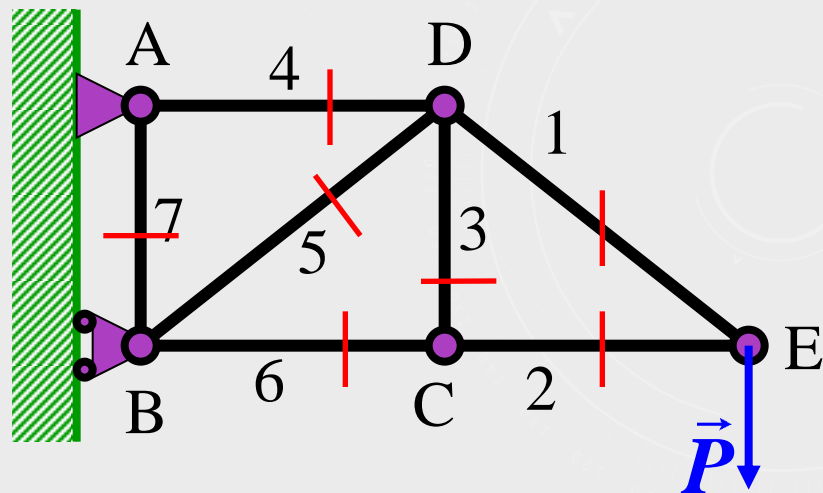
$$F_{AD} = \sqrt{2}P$$



研究节点D—>杆4、5的内力

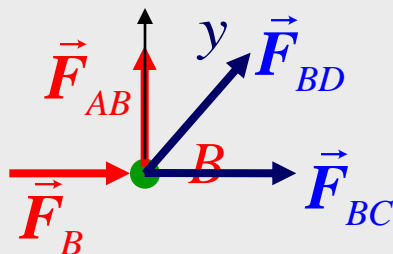
节点法的特点:

- 1、研究对象为节点
- 2、每个节点可以建立两个独立的平衡方程



分析的节点:
未知力小于等于两个

[B]



$$\sum F_y = 0$$

$$F_{AB} + F_{BD} \cos 45 = 0$$

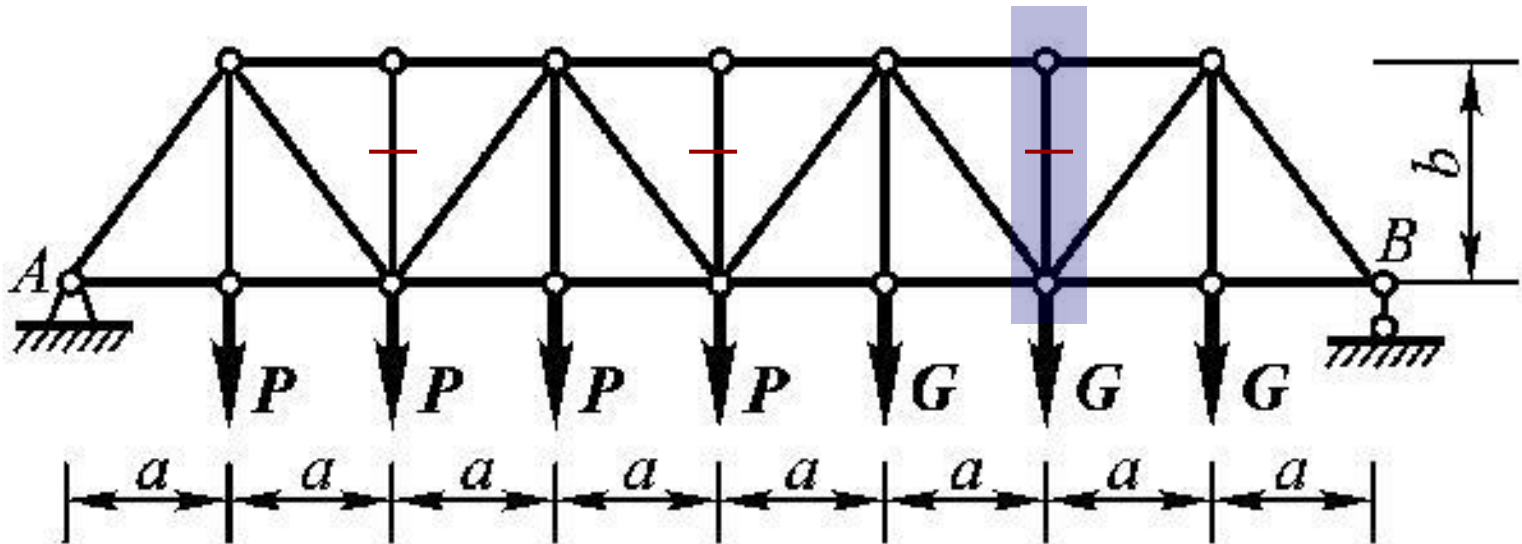
$$F_{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$\sum F_x = 0$$

研究节点B → 杆7内力和B处的约束力

$$F_B + F_{BD} \cos 45 + F_{BC} = 0 \quad \longrightarrow \quad F_B$$

零力杆的概念



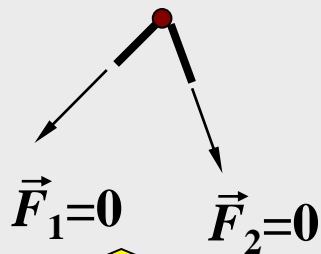
•**观察：** 图示杆件的受力。

•**零力杆(zero-force member):** 在桁架中受力为零的杆件

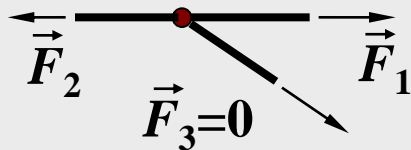
问题1: 在图示桁架中, 哪些杆件为**零力杆**?

问题2: **零力杆**的判别是否有规律可寻?

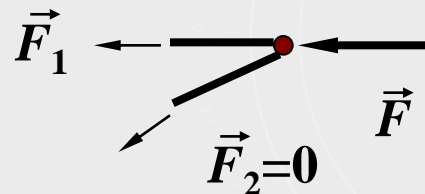
零力杆的判别



(a) 无载二根
非共线杆

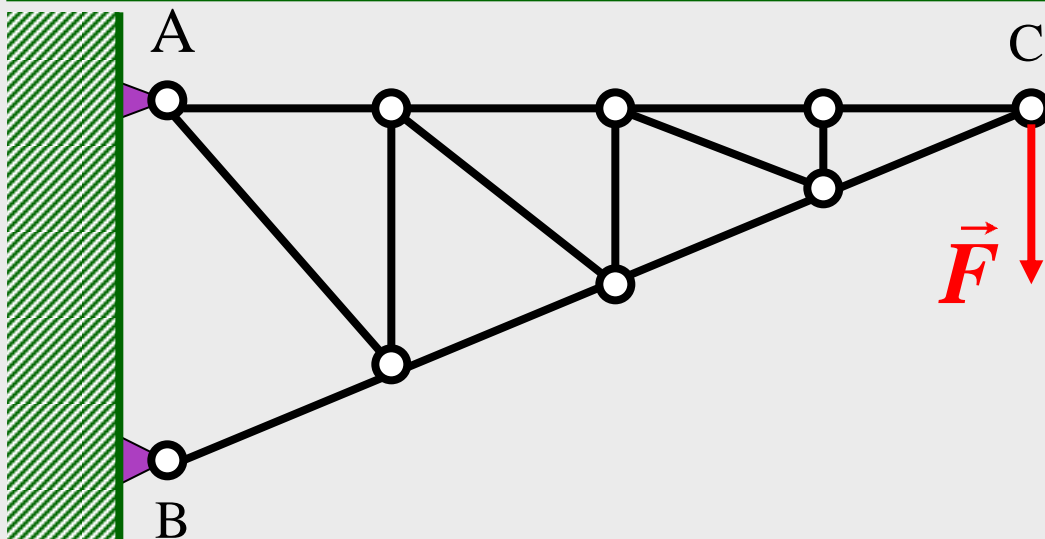


(b) 无载三根杆,
二根共线杆



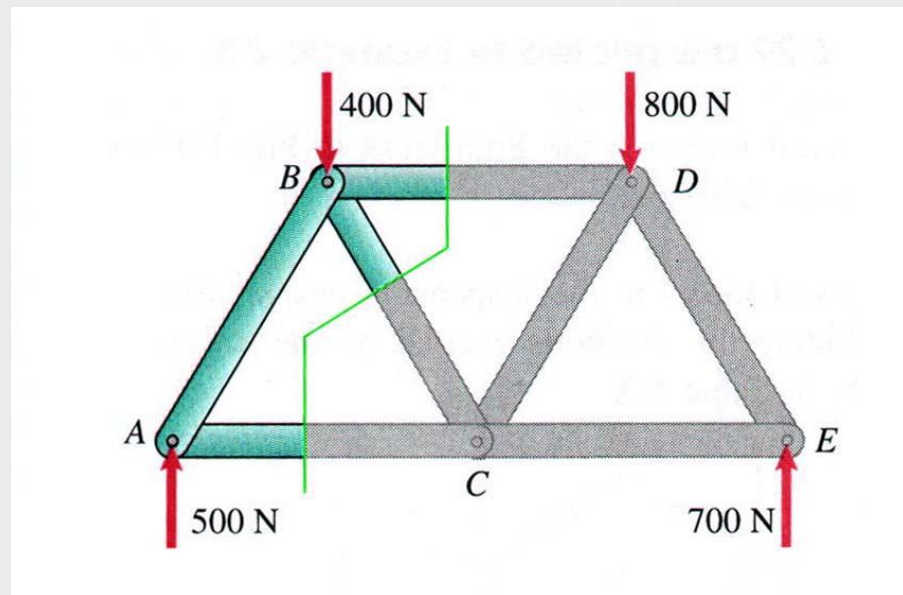
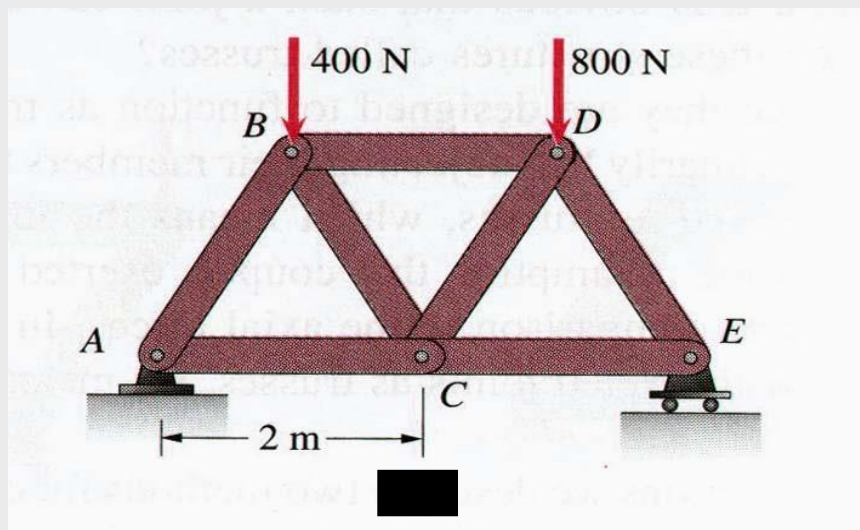
(c) 有载二根非
共线杆

例题：确定图示桁架中的零力杆。



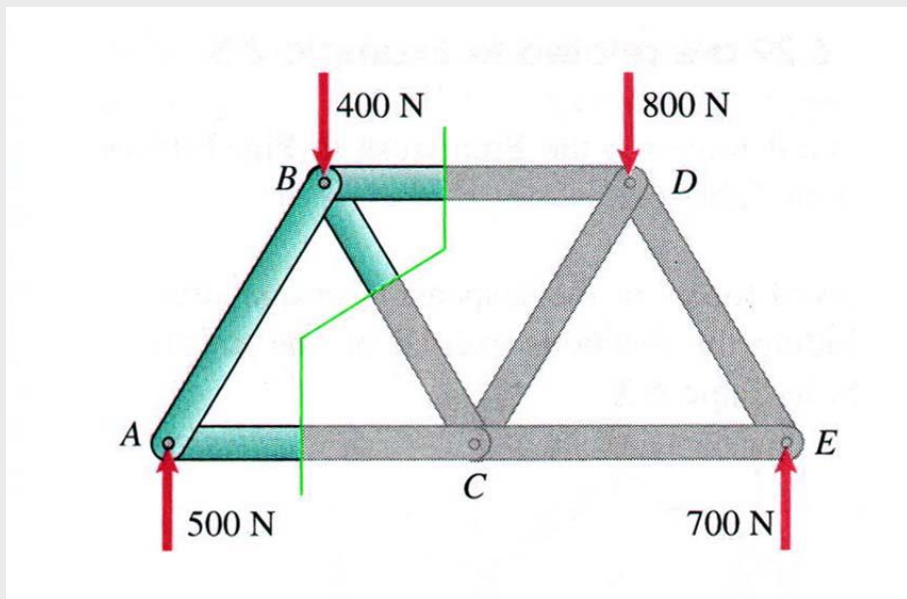
2、截面法：截取桁架一部分，视为受平面任意力系的刚体，应用三个平衡方程求解内力。

例：求 BC 杆内力



用假想截面将桁架截开；

考察局部桁架的平衡，直接求得杆件的内力，进而可求节点受力。



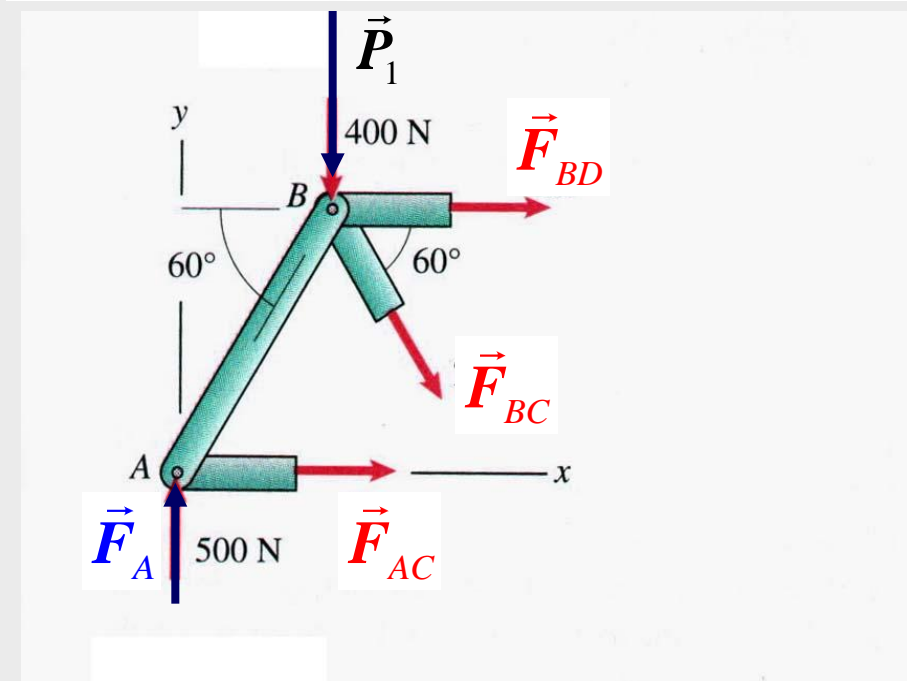
解：研究图示[部分桁架]

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BC} \sin 60 + P_1 - F_A = 0$$

$$\rightarrow F_{BC} \sin 60 + 400 - 500 = 0$$

$$\rightarrow F_{BC} = 115.47$$

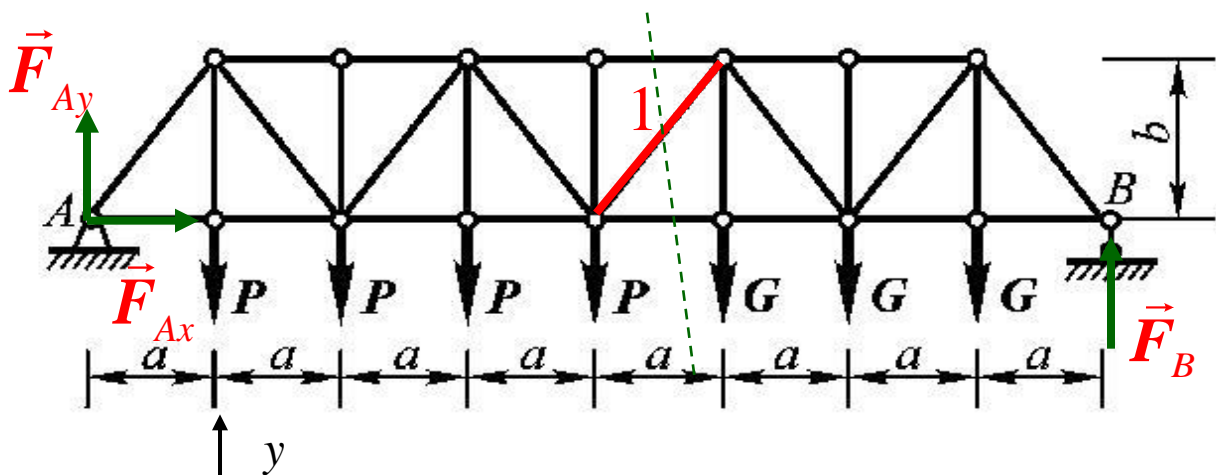


若要求BD与AC的内力？

截面法特点：

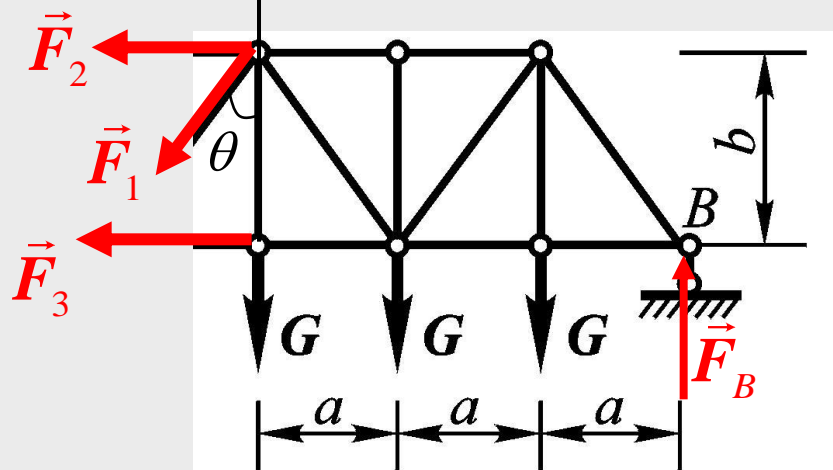
研究对象为部分桁架, 可建立3个独立的平衡方程

例: 求图示桁架中杆1的内力。 已知: a, b, P, G



截面法特点:

研究对象为部分桁架,可建立3个独立的平衡方程



[部分桁架]

解: 1、选取截面

2、画出研究对象受力图

3、建立平衡方程

[整体]: $\sum M_A = 0$

$$F_B \cdot 8a - Pa - P \cdot 2a - P \cdot 3a - P \cdot 4a -$$

$$G \cdot 5a - G \cdot 6a - G \cdot 7a = 0$$

$$F_B = \frac{1}{4}(5P + 9G)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_B - F_1 \cos \theta - 3G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{F_B - 3G}{\cos \theta}$$

例：平面桁架如图示，已知： F ，求：杆1的内力。

解：取整体研究

$$\sum M_C = 0, -2aF_{Ay} - aF \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

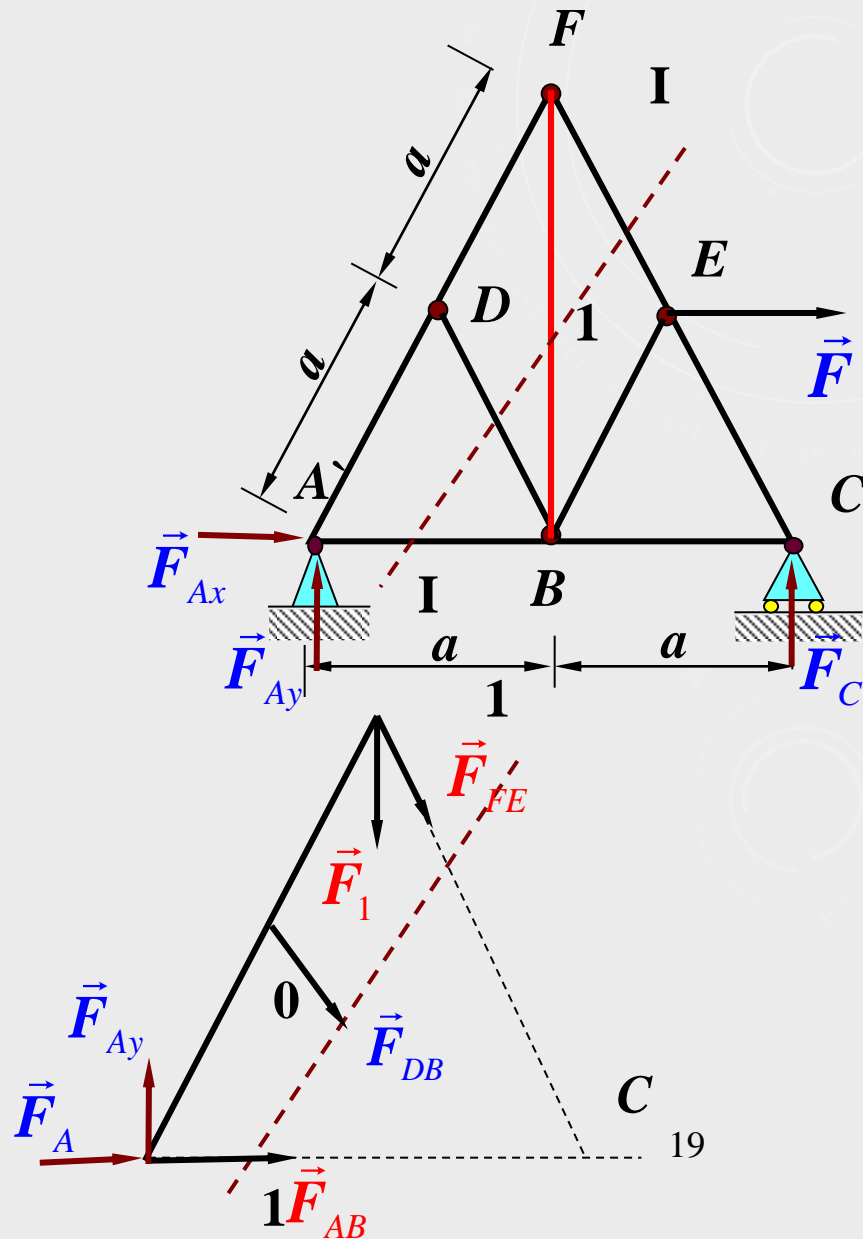
$$F_{Ay} = -\frac{\sqrt{3}}{4}F;$$

取I - I截面左侧；

定 F_{DB} 为零杆；

$$\sum M_C = 0, -2aF_{Ay} + aF_1 = 0;$$

$$F_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}F;$$



例：求图示结构中，CB杆上C端的约束力和杆1的内力
 已知： $M, P, AE=EC=CD=DB=DH=EG=l$

解：1、研究整体

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_B$$

2、研究分离体

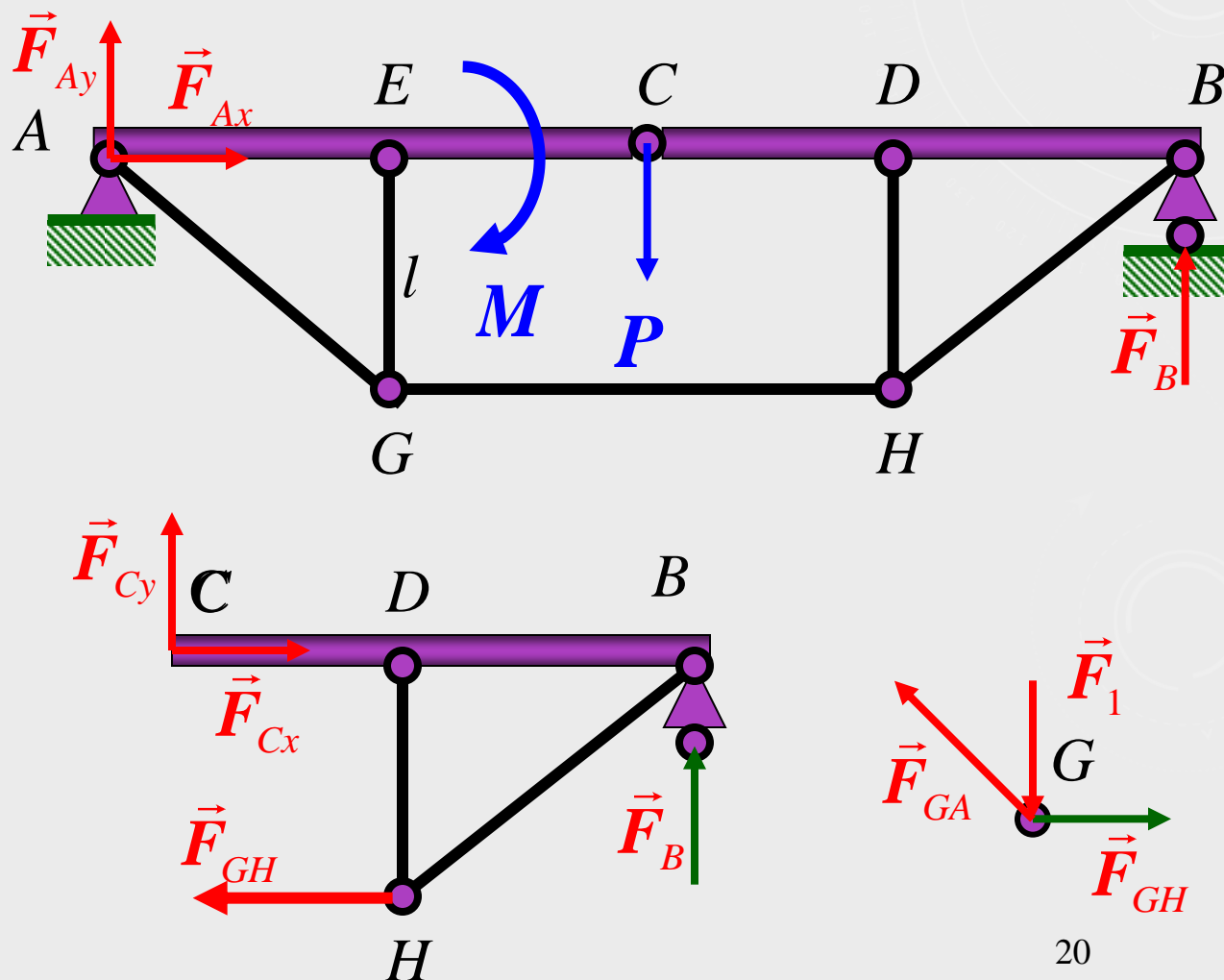
$$\sum M_c = 0 \rightarrow F_{GH}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Cx}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{Cy}$$

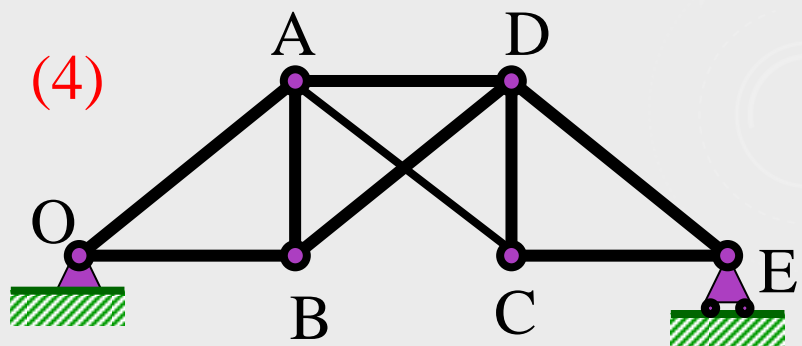
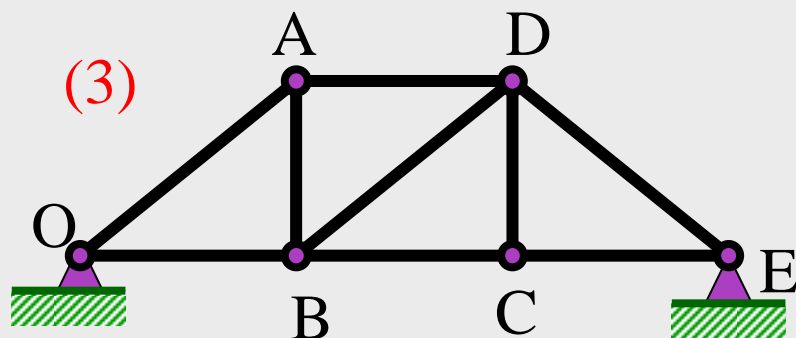
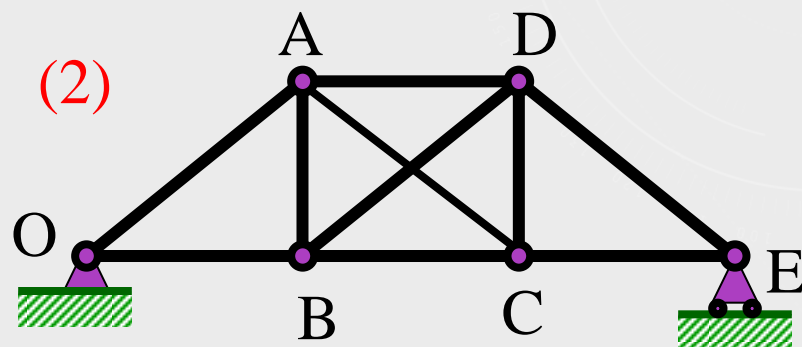
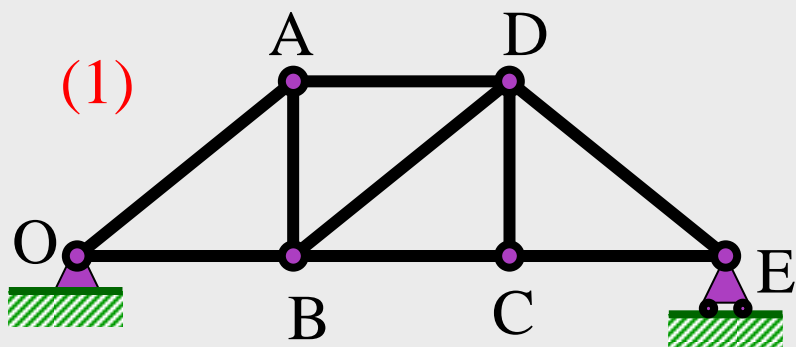
3、研究销钉G

$$F_1 = F_{GH}$$



平面桁架的静定性

思考题：确定图示结构的静定性



1. 未知量个数 = 独立平衡方程的个数？
2. 简单桁架基础上添加/减少杆件

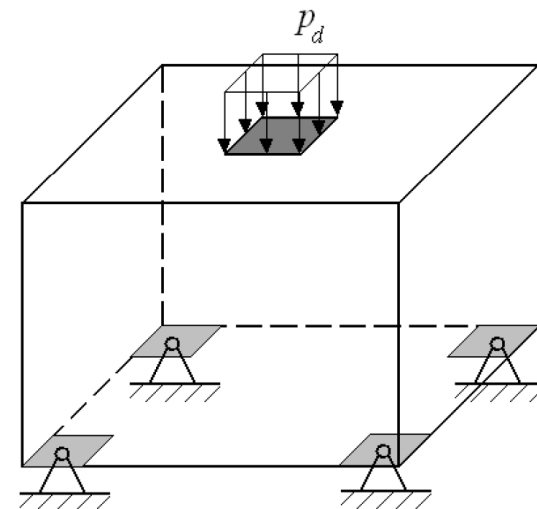
TAKE-HOME MESSAGE

- ✓ 理想桁架、简单桁架
- ✓ 节点法 vs. 截面法

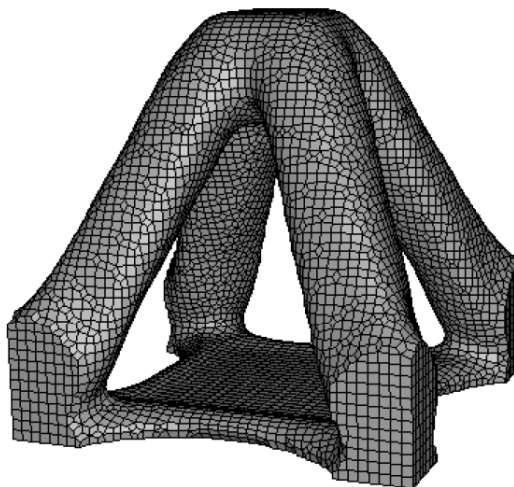
习题作业：3-18(a)(b)

桁架的优点

- 杆件主要受拉或压（功能明确）
- 充分发挥材料作用，减轻重量。

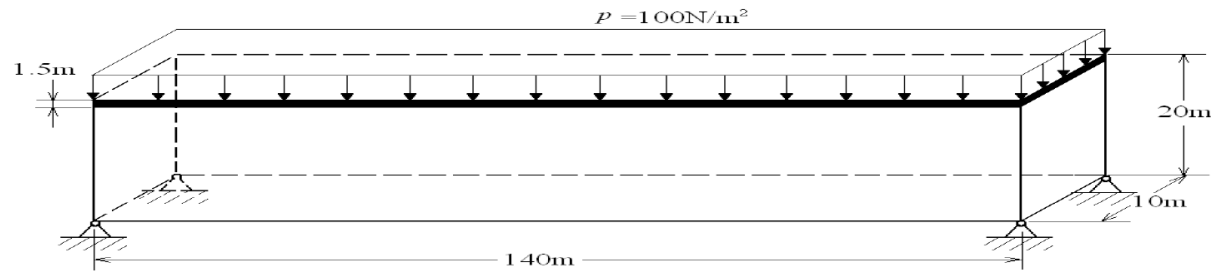


Linear design



Nonlinear design

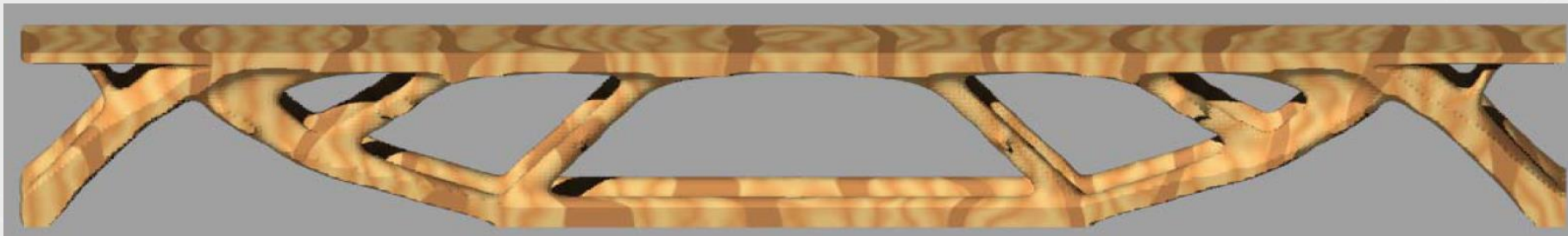
**Evolutionary
Structural
Optimization**

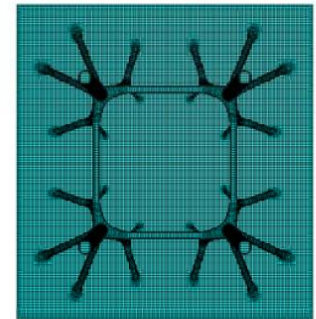
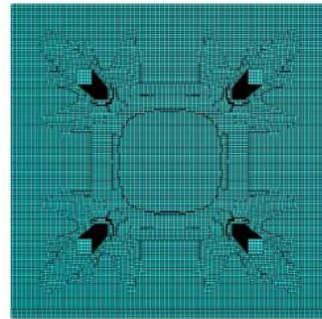
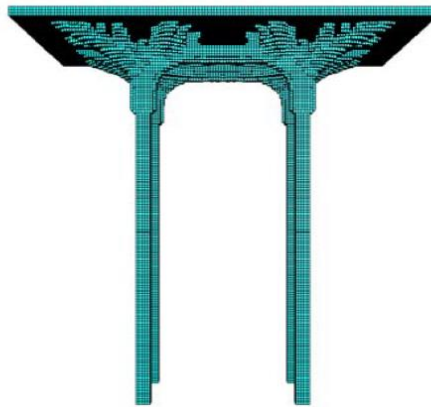
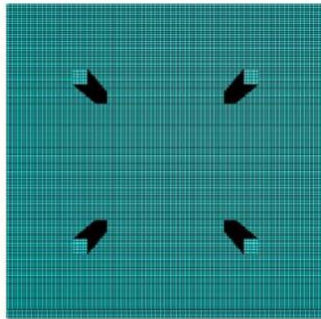
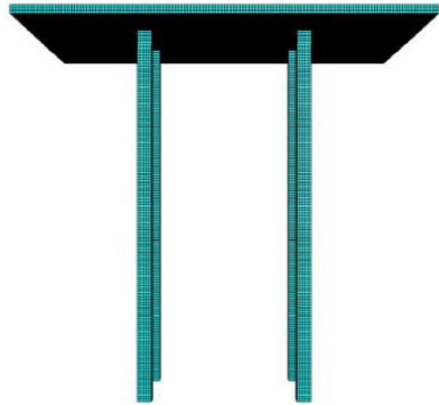


A 3D beam with a solid deck at the top



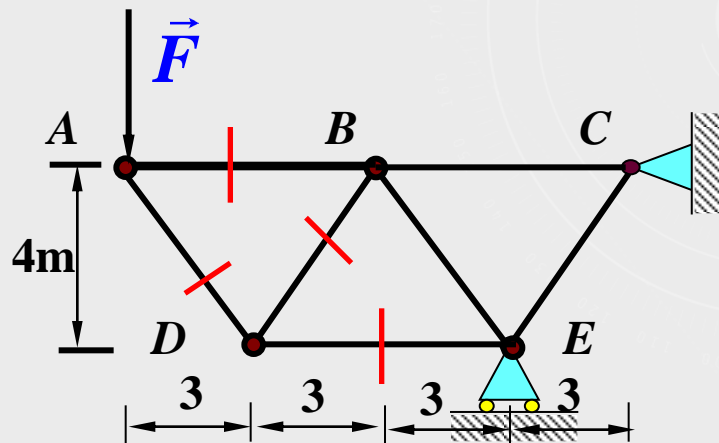
Initial design for the above structure





例：平面桁架如图示，已知： $F=2\text{kN}$ ，求：各杆的内力与
支座约束反力。

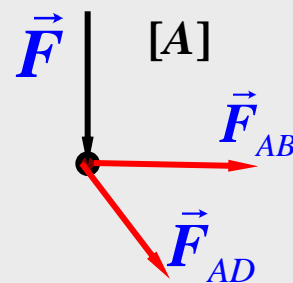
解：用节点法：



$$\sum F_y = 0, -F - F_{AD} \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0;$$

$$F_{AD} = -\frac{2 \cdot 5}{4} = -2.5\text{kN};$$

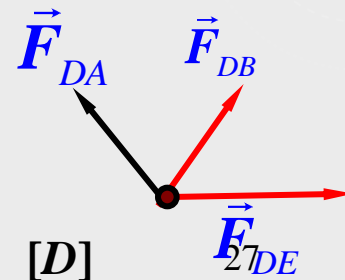
$$\sum F_x = 0, F_{AB} + F_{AD} \frac{3}{5} = 0; F_{AB} = 1.5\text{kN};$$



[D]

$$\sum F_y = 0, F_{DA} \frac{4}{5} + F_{DB} \frac{4}{5} = 0; F_{DB} = 2.5\text{kN};$$

$$\sum F_x = 0, F_{DB} \frac{3}{5} - F_{DA} \frac{3}{5} + F_{DE} = 0; F_{DE} = -3\text{kN};$$



$$[B] \quad \sum F_y = 0, -F_{BD} \frac{4}{5} - F_{BE} \frac{4}{5} = 0; F_{BE} = -2.5 \text{ kN};$$

$$\sum F_x = 0, F_{BC} - F_{BA} + F_{BE} \frac{3}{5} - F_{BD} \frac{3}{5} = 0;$$

$$F_{BC} = 4.5 \text{ kN};$$

$$[E] \quad \sum F_x = 0, F_{EC} \frac{3}{5} - F_{EB} \frac{3}{5} - F_{ED} = 0;$$

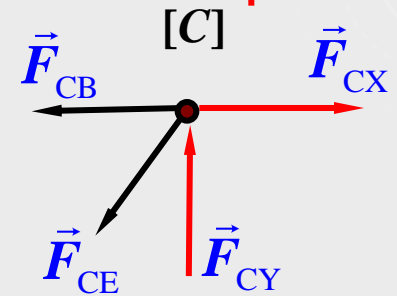
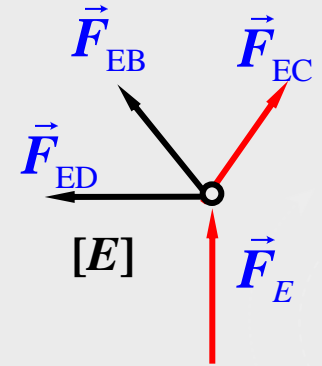
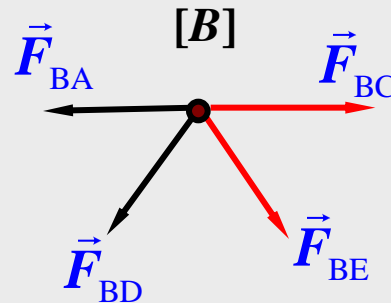
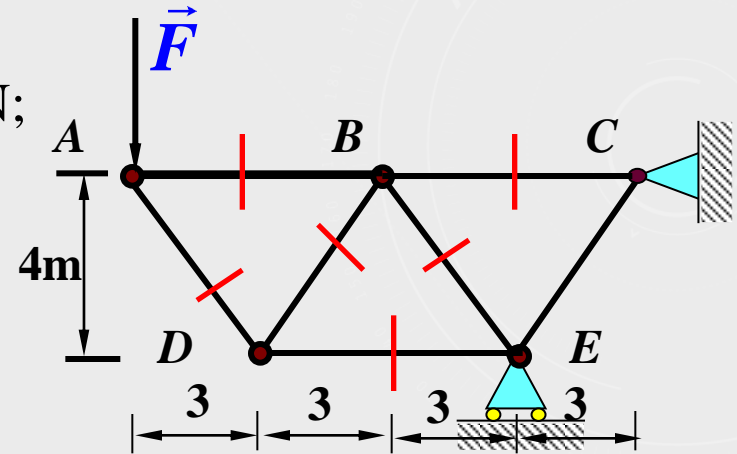
$$F_{EC} = -7.5 \text{ kN};$$

$$\sum F_y = 0, F_{EB} \frac{4}{5} + F_{EC} \frac{4}{5} + F_E = 0;$$

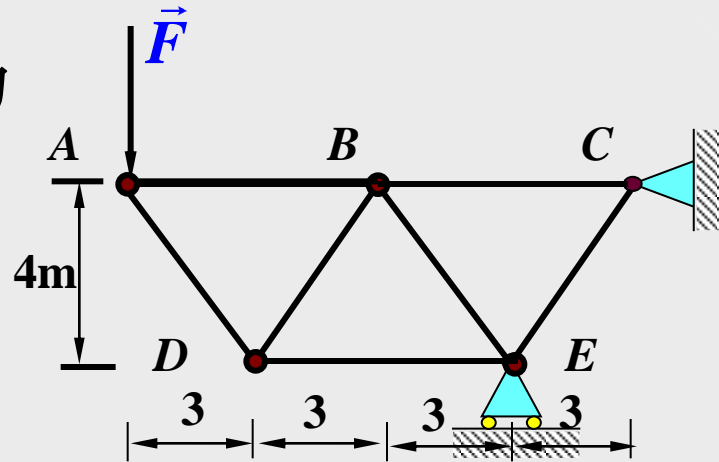
$$[C] \quad F_E = 8 \text{ kN};$$

$$\sum F_x = 0, -F_{CB} - F_{CE} \frac{3}{5} + F_{CX} = 0; F_{CX} = 0;$$

$$\sum F_y = 0, -F_{CE} \frac{4}{5} + F_{CY} = 0; F_{CY} = -6 \text{ kN};$$



例：求：杆DE的内力



解：取1-1截面[左侧桁架]

$$\sum M_B = 0, \quad 6F + F_{DE} \cdot 4 = 0$$

$$F_{DE} = -3\text{kN}.$$

