# 理论力学

吴 佰 建
EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

# 动力学

**静力学：**研究物体的平衡问题，没有考虑物体在不平衡力系作用下将如何运动。

**运动学：**只研究物体运动的几何性质而不考虑力的作用。

**动力学：**？

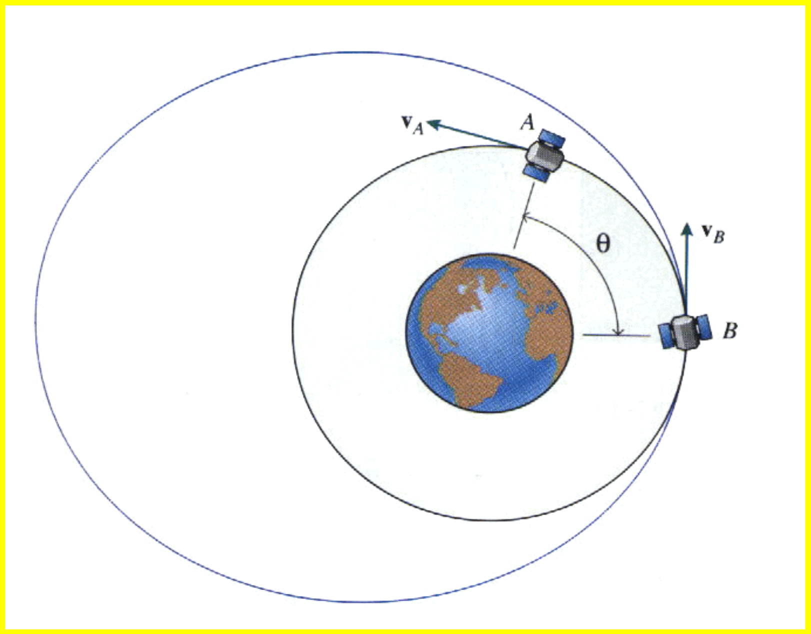
研究作用于物体的力与物体运动变化之间的关系，即建立力和运动之间的关系。

# 动力学的基本模型

**(1) 质点：**具有一定质量的几何点，形状和大小尺寸忽略不计。

**(2) 质点系：**有限或无限质点组成的相互间有一定联系的系统。

- **(3) 刚体：**质点间距离保持不变的质点系。
- **(4) 刚体系：**有限刚体组成的相互间有一定联系的系统。

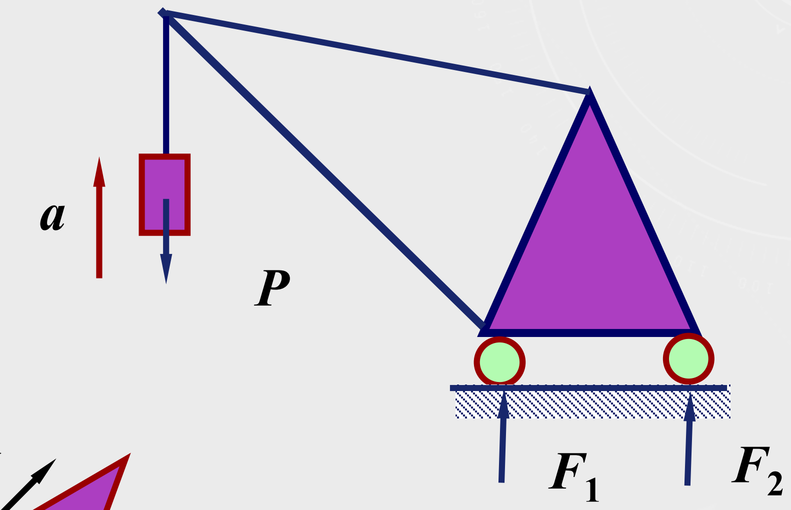



当研究飞行器轨道动力学问题时，可将飞行器视为质点。

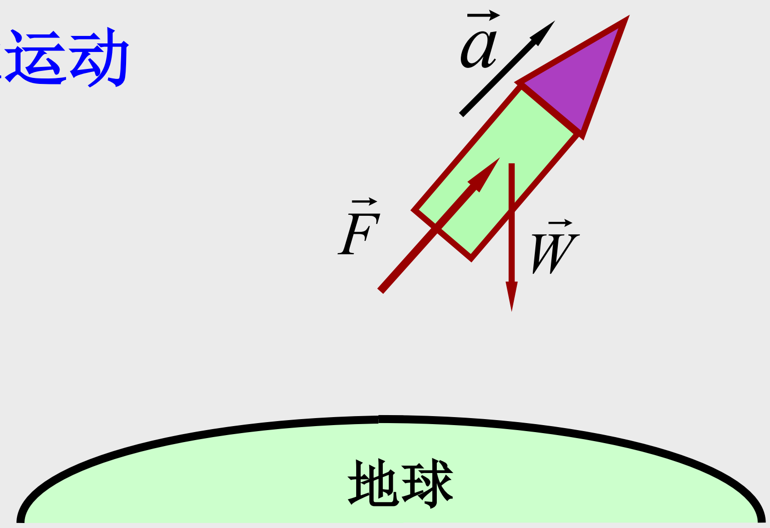
当研究飞行器姿态动力学时，可将其视为刚体系或质点系。

# 动力学的两类基本问题

**a) 已知运动求力**




**b) 已知力求运动**



# 牛顿三大定律

《自然哲学的数学原理》。

## (1) 惯性定律

质点不受力将保持静止或匀速直线运动状态(相对惯性系)。

- 任何物体具有**惯性(inertia)**；力是**改变**运动的原因。

## (2) $m\boldsymbol{a}=\Sigma\boldsymbol{F}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\Sigma\boldsymbol{F}$$ 合力与加速度同时、同向。

## (3) 作用与反作用定律

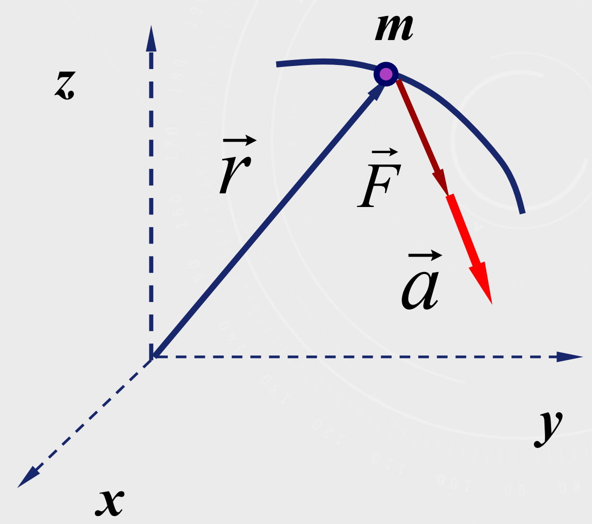
既适应用平衡体，也适应非平衡体。


三大定律适应**惯性系**(地球、地心、日心)

第3定律可用于非惯性系。

# 质点动力学

# 1. 质点运动的微分方程




一、矢量式 $$m\vec{a}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}$$

二、直角坐标式

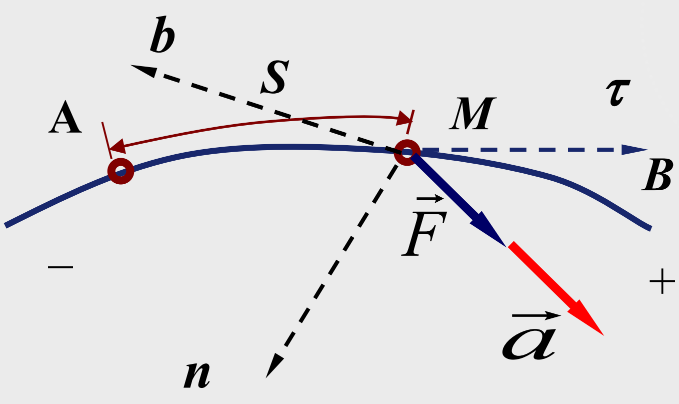
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z$$

三、自然轴系式

$$ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_\tau;$$

$$ma_\mathrm{n}=m\frac{v^2}{\rho}=\Sigma F_\mathrm{n};$$

$$ma_\mathrm{b}=0=\Sigma F_\mathrm{b};$$



# 四、两类问题

**1、已知运动，求力（微分问题）**

已知 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ $\vec{v}=\vec{v}(t)$ $\vec{a}=\vec{a}(t)$ 求 $\vec{F}$ 是一个微分过程

**2、已知力，求运动（积分问题），** 需附加初始条件

（1）力是常力 $\vec{F}=$常矢量 例如：重力

$''x''$ $m\ddot{x}=F_x$ $\ddot{x}=\dfrac{F_x}{m}$ $\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{F_x}{m}$

$$\int_{\dot{x}_0}^{x_0}\mathrm{d}\dot{x}=\frac{F_x}{m}\int_0^t\mathrm{d}t \qquad \dot{x}=\dot{x}_0+\frac{F_x}{m}t$$

（2）力是位置的函数 $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$ 例如：弹簧力

$''x''$ $m\ddot{x}=F(x)$ $\ddot{x}=\dfrac{F(x)}{m}$

$$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}$$ （分离变量法）

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}=\frac{1}{m}\int_{x_0}^{x}F(x)\mathrm{d}x \qquad \dot{x}^2=\dot{x}_0^2+\frac{2}{m}\varphi(x)$$

（3）力是速度的函数 $\vec{F}=\vec{F}(\vec{v})$ 例如：空气阻力

$''x''$ $m\ddot{x}=F(\dot{x})$ $\ddot{x}=\dfrac{F(\dot{x})}{m}$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{F(\dot{x})}=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t$$

（4）力是时间的函数 $\vec{F}=\vec{F}(t)$ 例如：周期力

$''x''$ $m\ddot{x}=F_x(t)$ $\ddot{x}=\dfrac{F_x(t)}{m}$

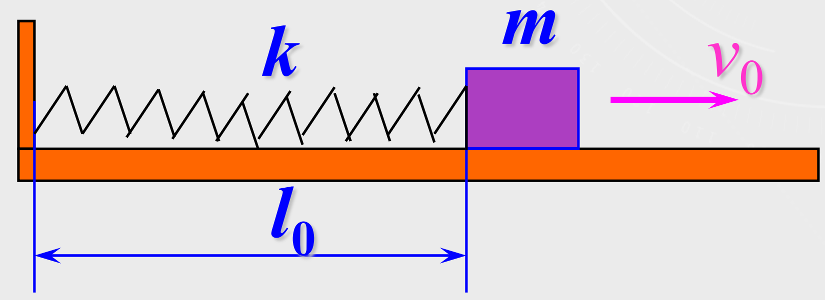
$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}\mathrm{d}\dot{x}=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F_x(t)\mathrm{d}t \qquad \dot{x}=\dot{x}_0+\varphi(t)$$

以上积分形式并不是唯一的

**求解动力学问题的步骤：**

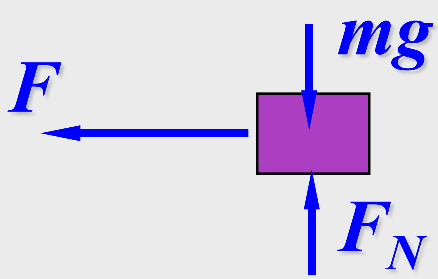
1、取研究对象画受力图
2、确定坐标系
3、建立微分方程
4、求解

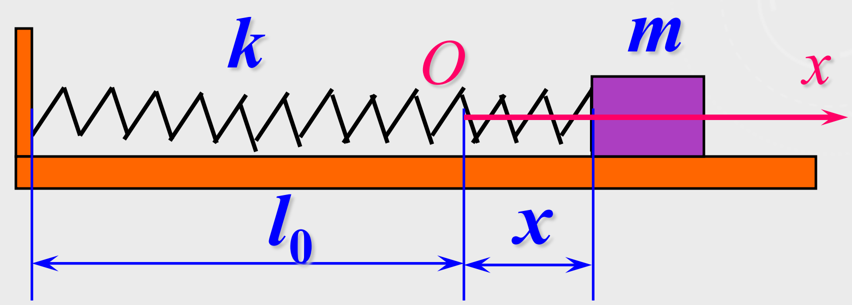
**例** 弹簧—质量系统，物块的质量为$m$，弹簧的刚度系数为$k$，物块自平衡位置的初始速度为$v_0$。




求：物块的运动方程

**解：** 分析物块



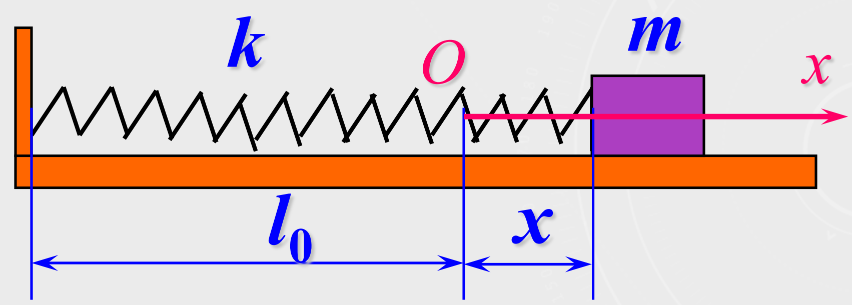

建立坐标系如图示

$$m\ddot{x} = \sum_i F_{ix} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

令 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

则 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$




$\omega_0$——圆频率

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \quad t = 0, x = 0; t = 0, \dot{x} = v_0$$

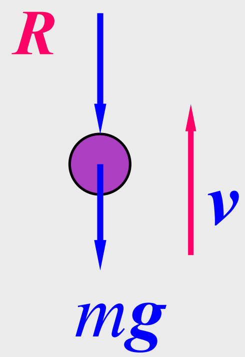
$$A = \frac{v_0}{\omega_0}, \varphi = 0; \qquad x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

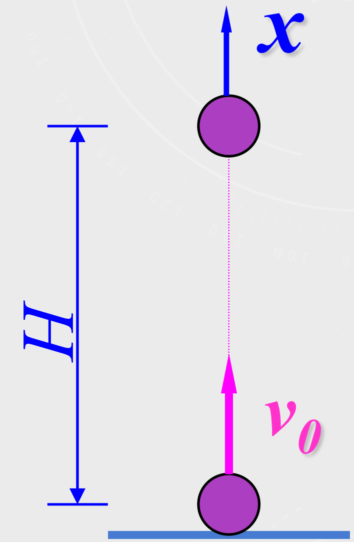
课后思考：吊挂物体时如何计算？

**例** 已知：质量为$m$的小球从地面以初速度$v_0$铅直上抛，假设空气阻力的大小$R=kmv^2$。

求：小球能上升的最大高度$H$。

**解：** 分析小球




小球运动微分方程

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{-vdv}{g+kv^2} = dx$$

$$\frac{-vdv}{g+kv^2}=dx$$

初始条件：$t$=0时，$v=v_0$ , $x$=0

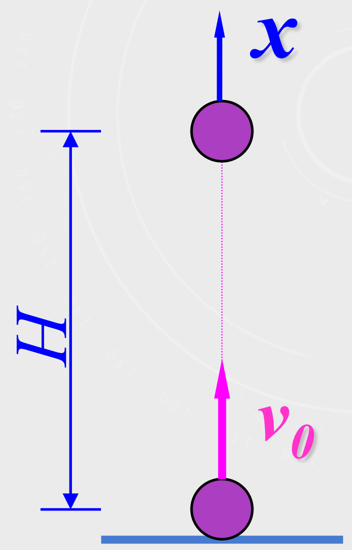
最高点：$v=0$， $x=H$。

定积分，有

$$\int_{v_0}^{0}\frac{vdv}{g+kv^2}=-\int_{0}^{H}dx$$

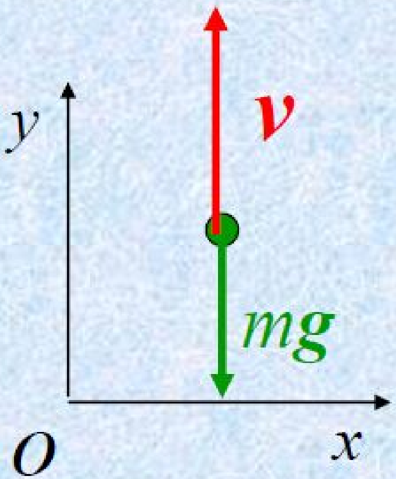
得

$$H=\frac{1}{2k}ln\frac{g+kv_0^2}{g}$$



**思考题:** 给出垂直上抛物体上升时的运动微分方程。

设空气阻力的大小与速度的平方成正比

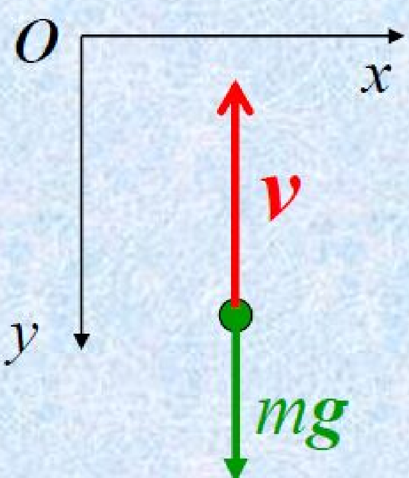



$$A: m\ddot{y} = -mg - c\dot{y}^2$$

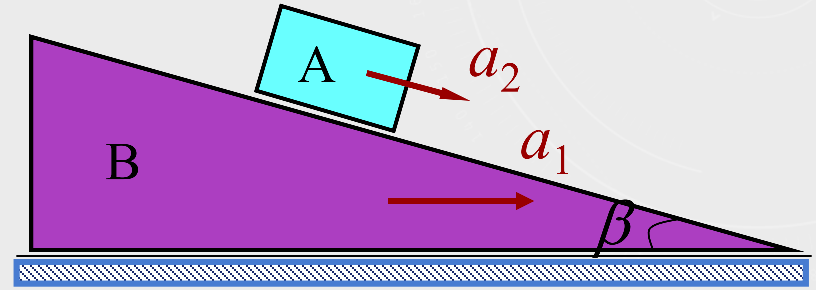
$$B: m\ddot{y} = -mg + c\dot{y}^2$$

$$C: m\ddot{y} = +mg - c\dot{y}^2$$

$$D: m\ddot{y} = +mg + c\dot{y}^2$$



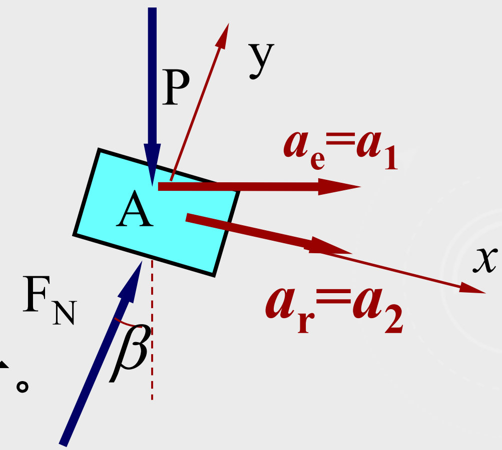
**例** 三角楔块放在光滑的地面上，现在楔块上放一块光滑物块以加速度$\boldsymbol{a_2}$滑下,求：楔块的加速度$\boldsymbol{a_1}$值。




**解**：**"物块A"**

$x$:  $m_A(a_1\cos\beta + a_2) = m_A g\sin\beta$

$y$:  $m_A a_1 \sin\beta = F_N - m_A g\cos\beta$




$$a_1 = (g\sin\beta - a_2)/\cos\beta$$

$$a_2 = g\sin\beta - a_1\cos\beta$$

**讨论**：

1. $a_1 > g\tan\beta$,  $a_2 < 0$, 物块相对上升。

2. $a_1 < g\tan\beta$,  $a_2 > 0$, 物块相对下降。

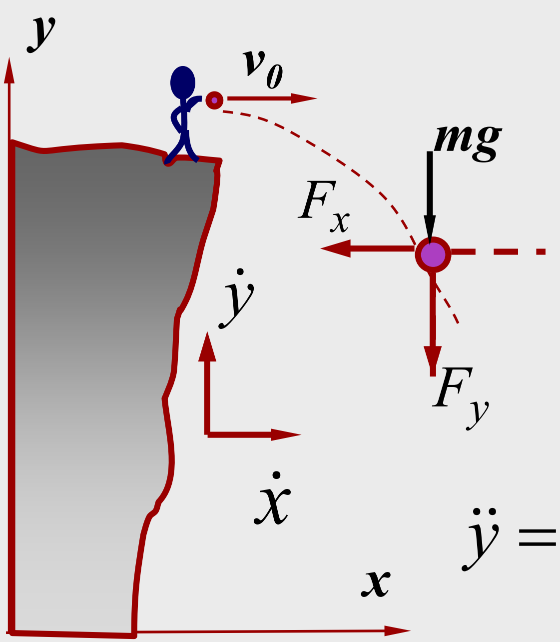
3. $a_1 = g\tan\beta$,  $a_2 = 0$, 物块相对不动。

**例** 一人在高为 $h$ 的悬崖边以$v_0$的速度平抛一块石子，设空气阻力 $F=kmv$，试求：石子的运动方程。

**解：** 建立微分方程：

$$m\ddot{x} = -F_x = -km\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -F_y - mg = -km\dot{y} - mg$$




$$\ddot{x} = -k\dot{x} \qquad \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\dot{x}} = -k\mathrm{d}t \qquad \ln \dot{x}\,\Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} = -kt$$

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt} \qquad \mathrm{d}x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt}\mathrm{d}(-kt)$$

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\ddot{y} = -k\dot{y} - g \qquad \frac{k\mathrm{d}\dot{y}}{k\dot{y} + g} = -kt \qquad \ln(k\dot{y} + g)\,\Big|_0^{\dot{y}} = -kt$$

$$k\dot{y} + g = ge^{-kt} \qquad \mathrm{d}y = g\frac{(e^{-kt} - 1)}{k}\mathrm{d}t$$

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$