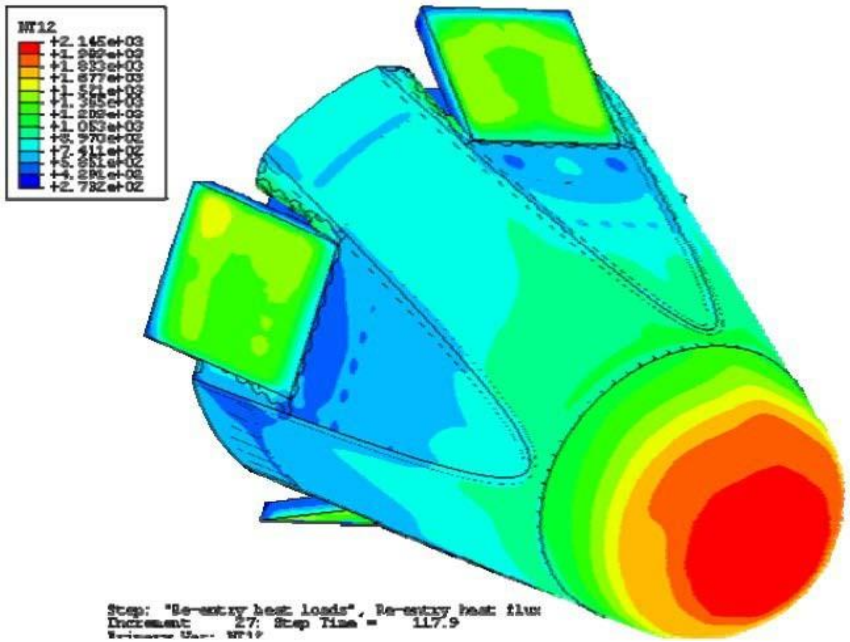
第二章 导热基本定律和稳态导热

能源与环境学院

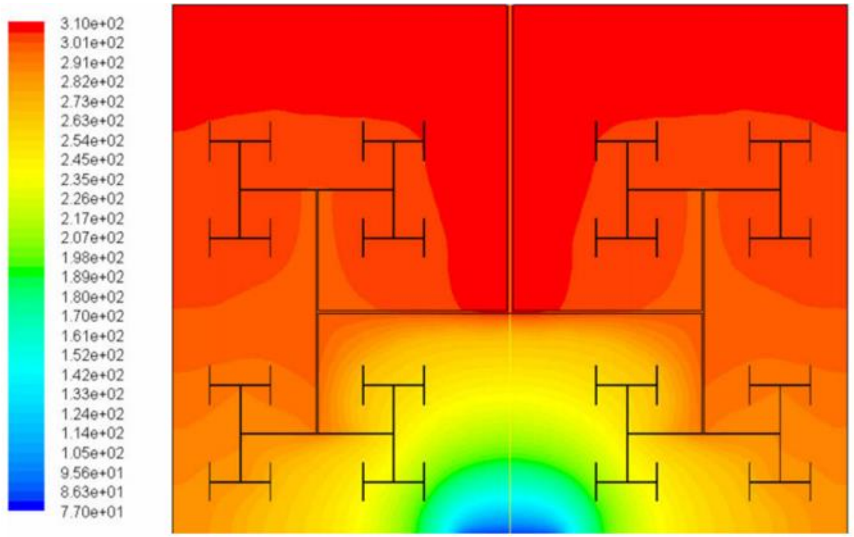
要解决的问题：

- 温度分布如何描述和表示？
- 温度分布和导热的热流存在什么关系？
- 如何得到导热体内部的温度分布？



工程应用的两个基本目的:

- 能准确地预测所研究系统中的温度分布；
- 能准确地计算所研究问题中传递的热流。



主要内容

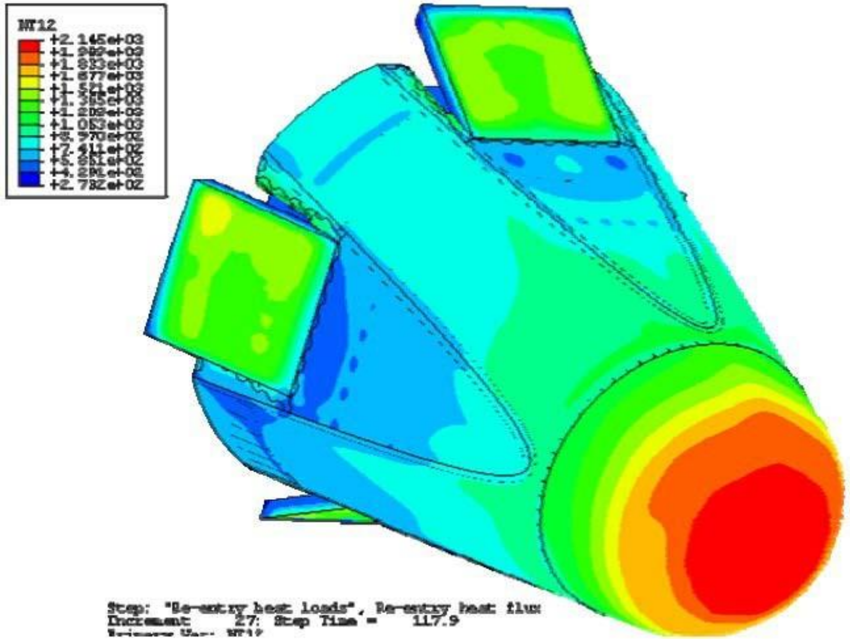
2-1 导热基本定律——傅里叶定律

一、基本概念

1、温度场（**temperature field**）：

- 某一时刻, 空间
- 所有各点的温度分布

$$\underbrace{t}_{\text{温度}} = f(\overbrace{x, y, z}^{\text{空间}}, \underbrace{\tau}_{\text{时间}})$$



温度分布的描述和表示

按照时间分

$$\begin{cases} \text{稳态温度场} \quad t = f(x, y, z) \\ \text{非稳态温度场} \quad t = f(x, y, z, \tau) \end{cases}$$

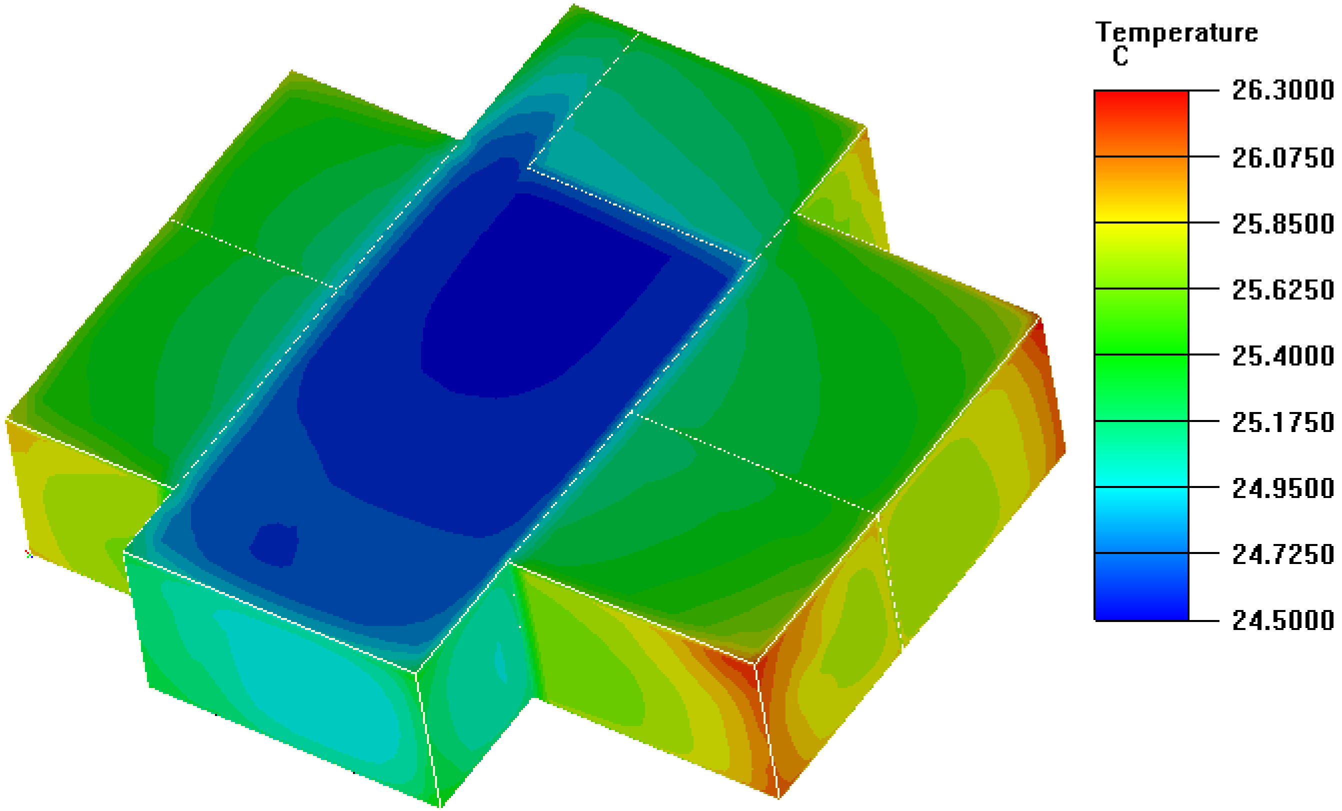
按照空间分

$$\begin{cases} \text{一维温度场} & \begin{cases} t = f(x) \\ t = f(x, \tau) \end{cases} \\ \text{二维温度场} & \begin{cases} t = f(x, y) \\ t = f(x, y, \tau) \end{cases} \\ \text{三维温度场} & \begin{cases} t = f(x, y, z) \\ t = f(x, y, z, \tau) \end{cases} \end{cases}$$

2、等温面与等温线

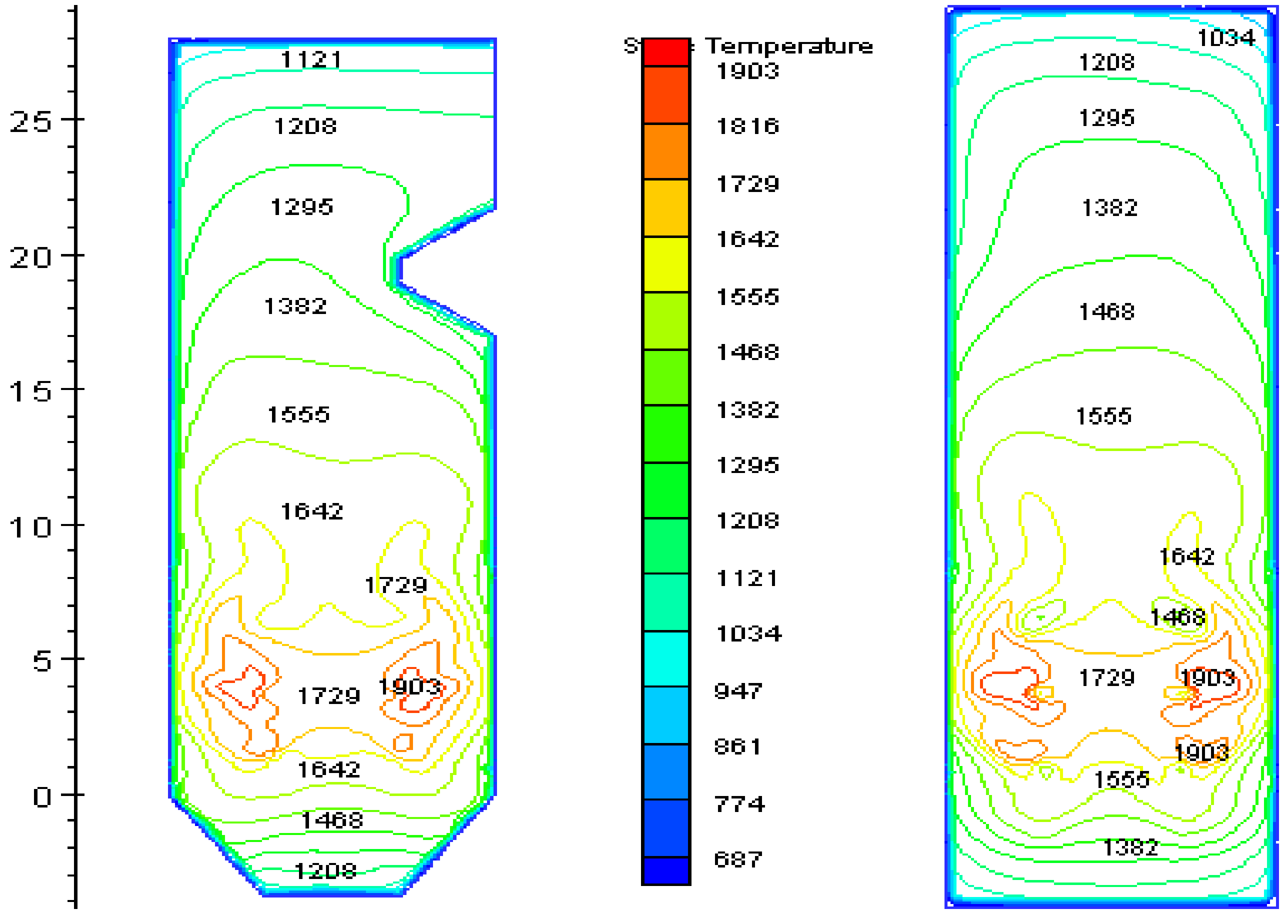
1）等温面：

某一时刻温度场中所有温度相同的点连接构成的面。



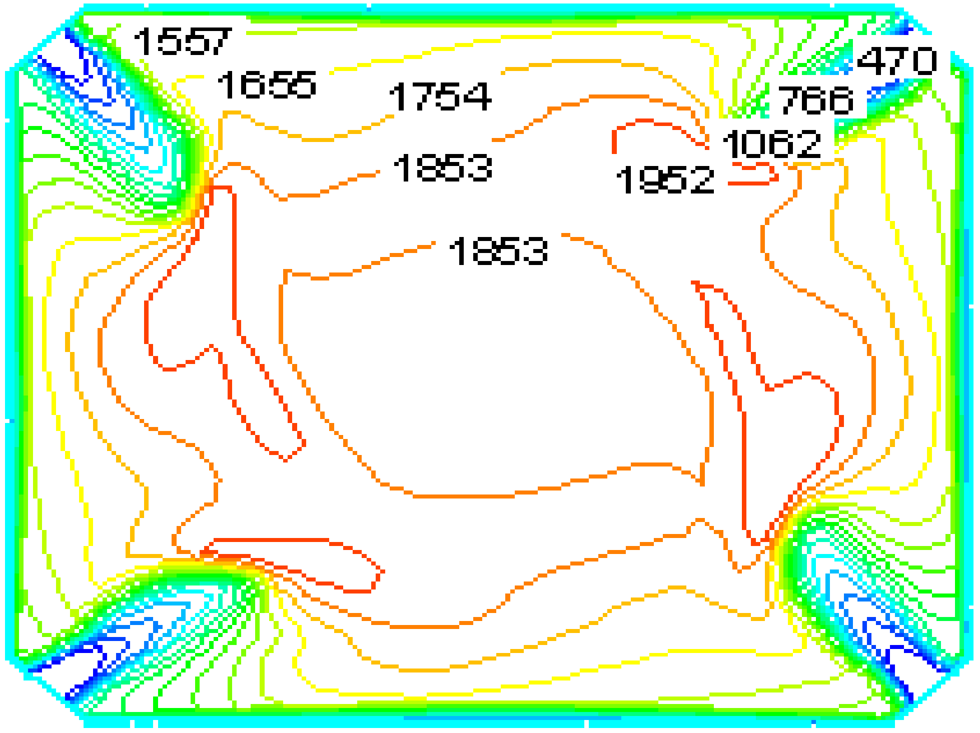
2）等温线：

用一个平面与不同的等温面相交时，在这个平面上得到一簇交线



3）等温面与等温线性质：

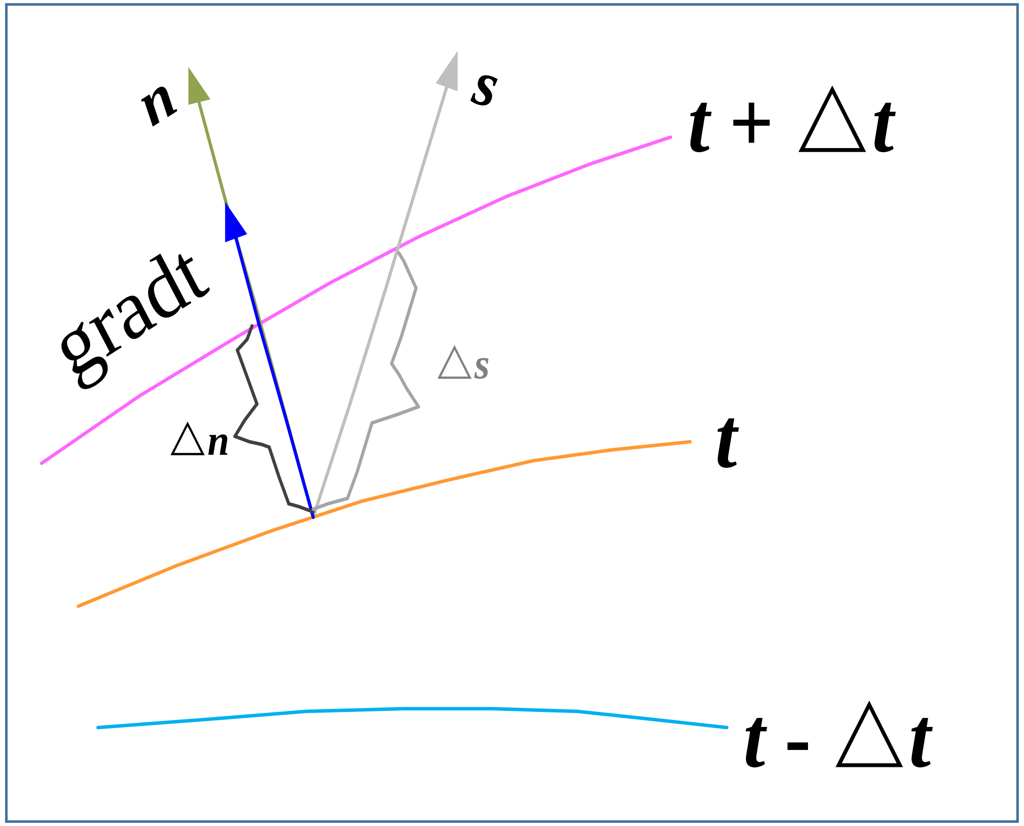
- 同一时刻，不同温度的等温面或等温线不能相交
- 等温面和等温线上没有热量传递
- 连续的温度场中等温线是连续的，它只能中断在物体的边界上



3、温度梯度：　温度在等温面法线方向的变化率

单位矢量

$$\underbrace{grad(t)}_{\text{温度梯度}} = \vec{n}\lim_{\Delta n \to 0}\underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta n}}_{\text{温度变化率}} = \vec{n}\frac{\partial t}{\partial n}$$



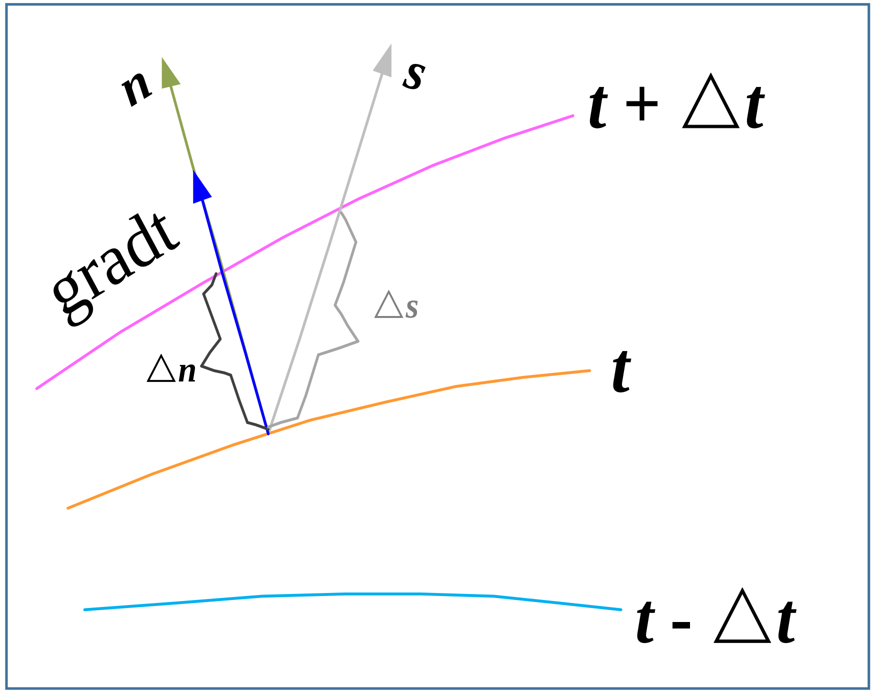
注：温度梯度是矢量

3、温度梯度：

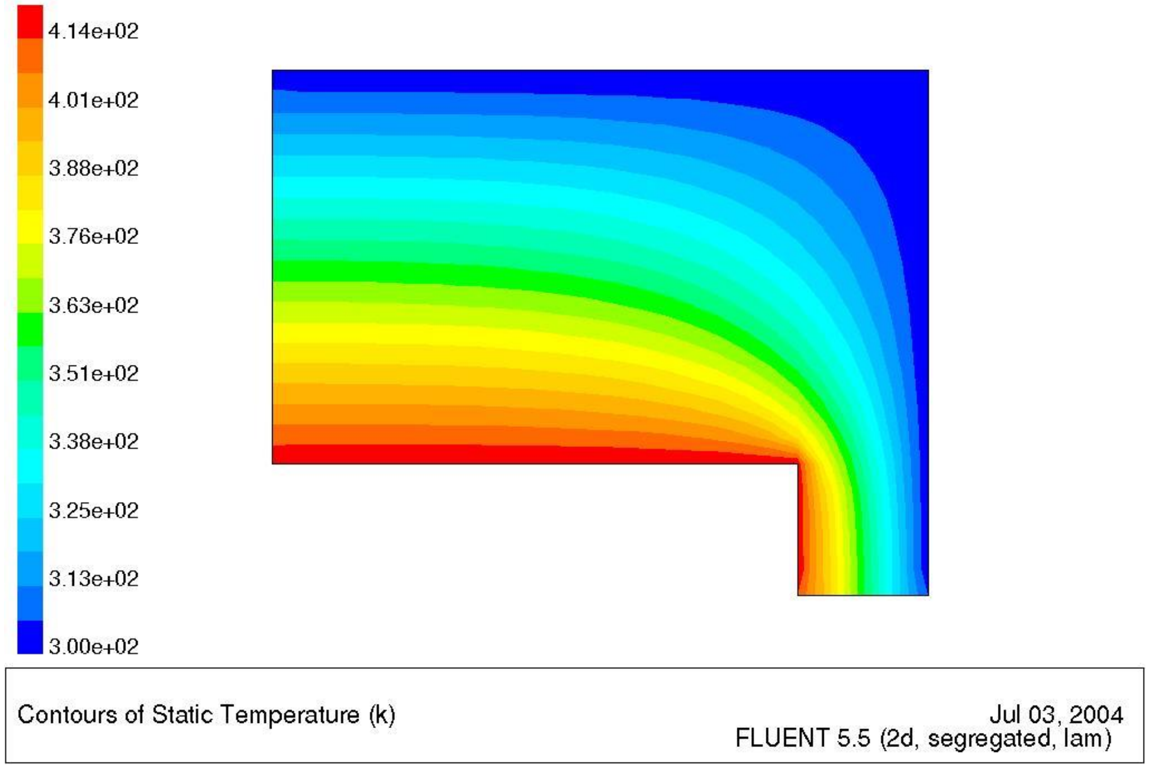
$$grad(t) = \vec{n} \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \vec{n} \frac{\partial t}{\partial n}$$

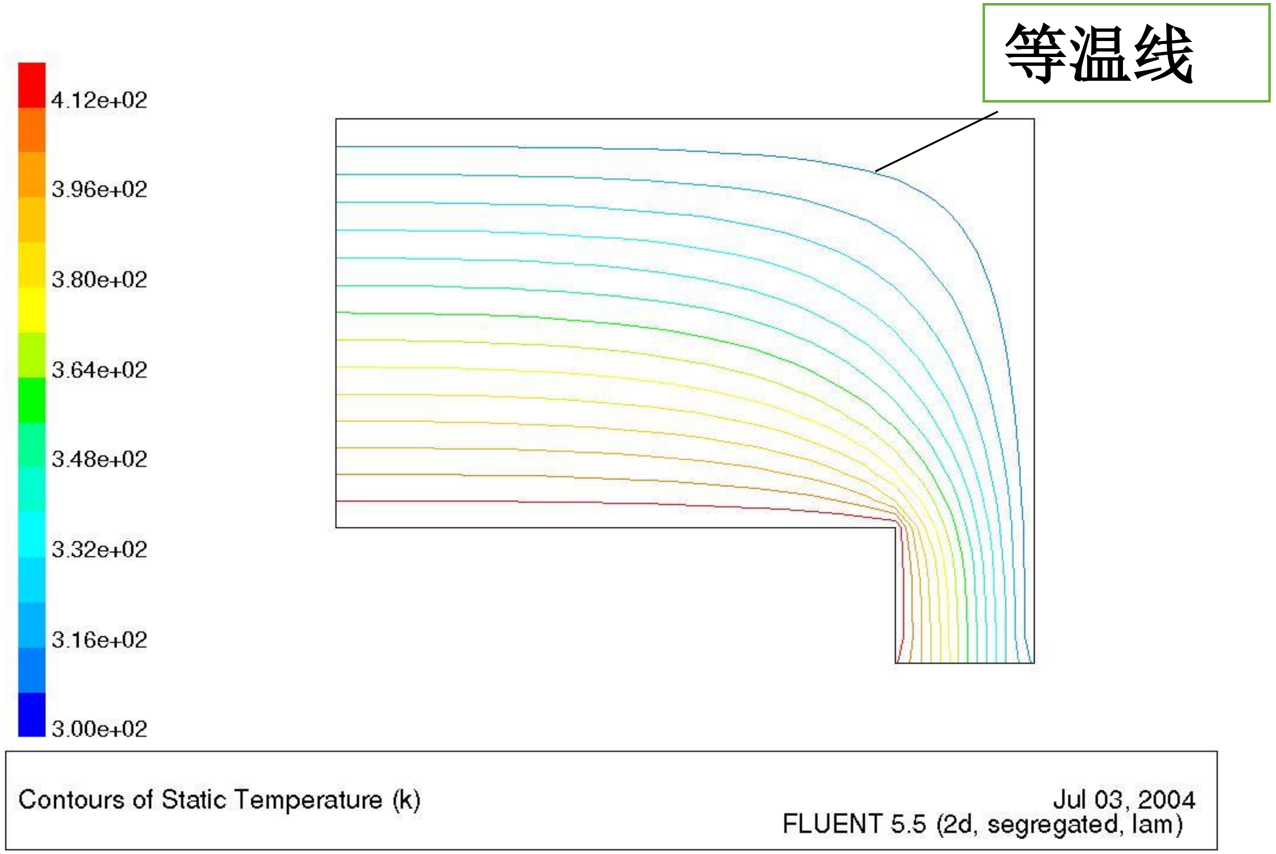
$$grad(t) = \frac{\partial t}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial t}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial t}{\partial z}\vec{k}$$

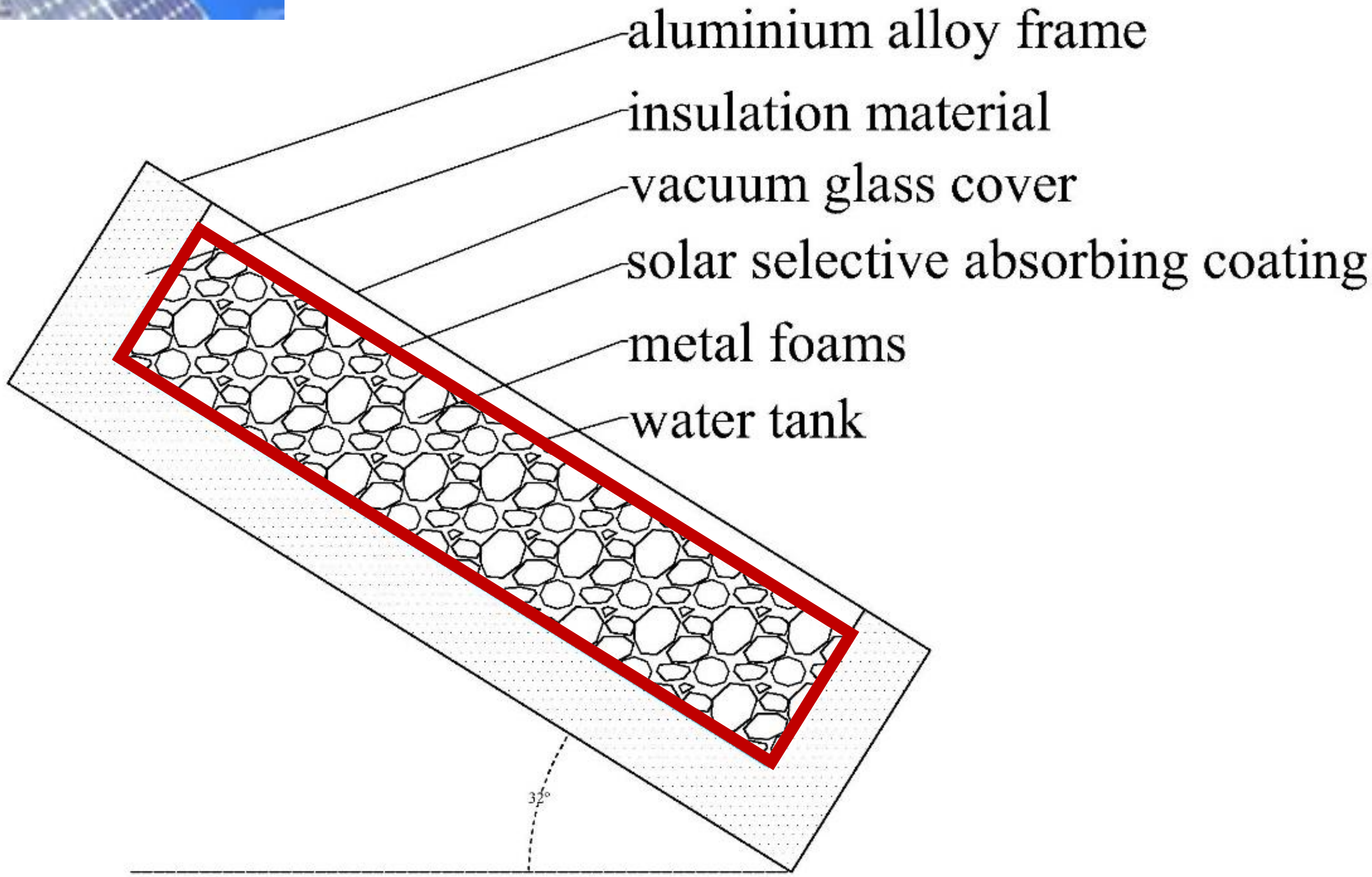
- 反映温度场在空间的变化特征的物理量
- 沿等温面法线方向指向温度升高的方向

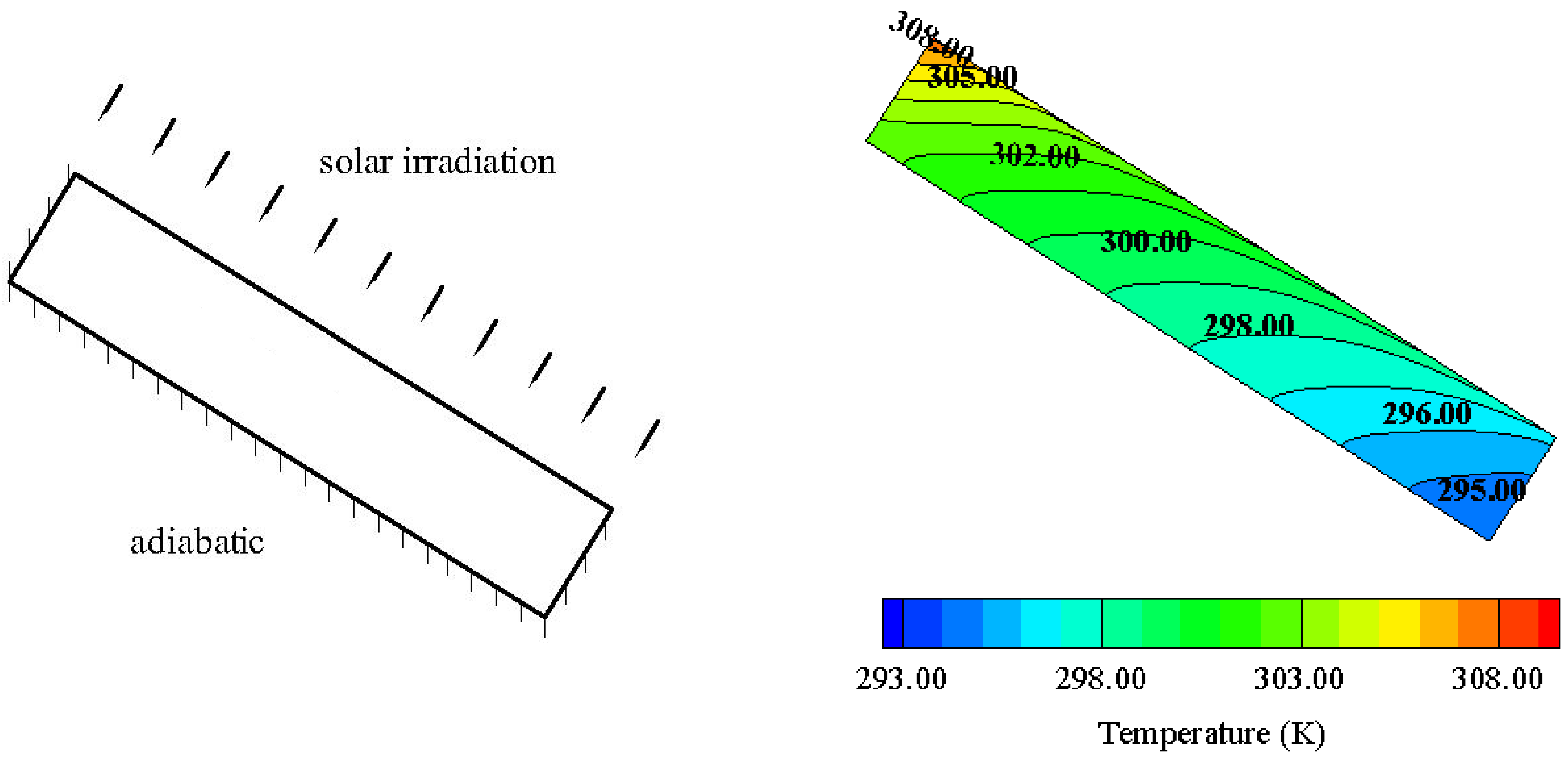


温度分布的图示法


4.14e+02
4.01e+02
3.88e+02
3.76e+02
3.63e+02
3.51e+02
3.38e+02
3.25e+02
3.13e+02
3.00e+02
Contours of Static Temperature (k)
Jul 03, 2004
FLUENT 5.5 (2d, segregated, lam)


等温线
4.12e+02
3.96e+02
3.80e+02
3.64e+02
3.48e+02
3.32e+02
3.16e+02
3.00e+02
Contours of Static Temperature (k)
Jul 03, 2004
FLUENT 5.5 (2d, segregated, lam)


aluminium alloy frame
insulation material
vacuum glass cover
solar selective absorbing coating
metal foams
water tank


solar irradiation
adiabatic
308.00
305.00
302.00
300.00
298.00
296.00
295.00
293.00
298.00
303.00
308.00
Temperature (K)

二、导热基本定律

1822年，法国数学家傅里叶（Fourier）在实验研究基础上，发现导热基本规律 —— 傅里叶定律.

法国数学家Fourier: 法国拿破仑时代的高级官员。曾于1798-1801追随拿破仑去埃及。后期致力于传热理论，1807年提交了234页的论文，但直到1822年才出版。

导热基本定律：

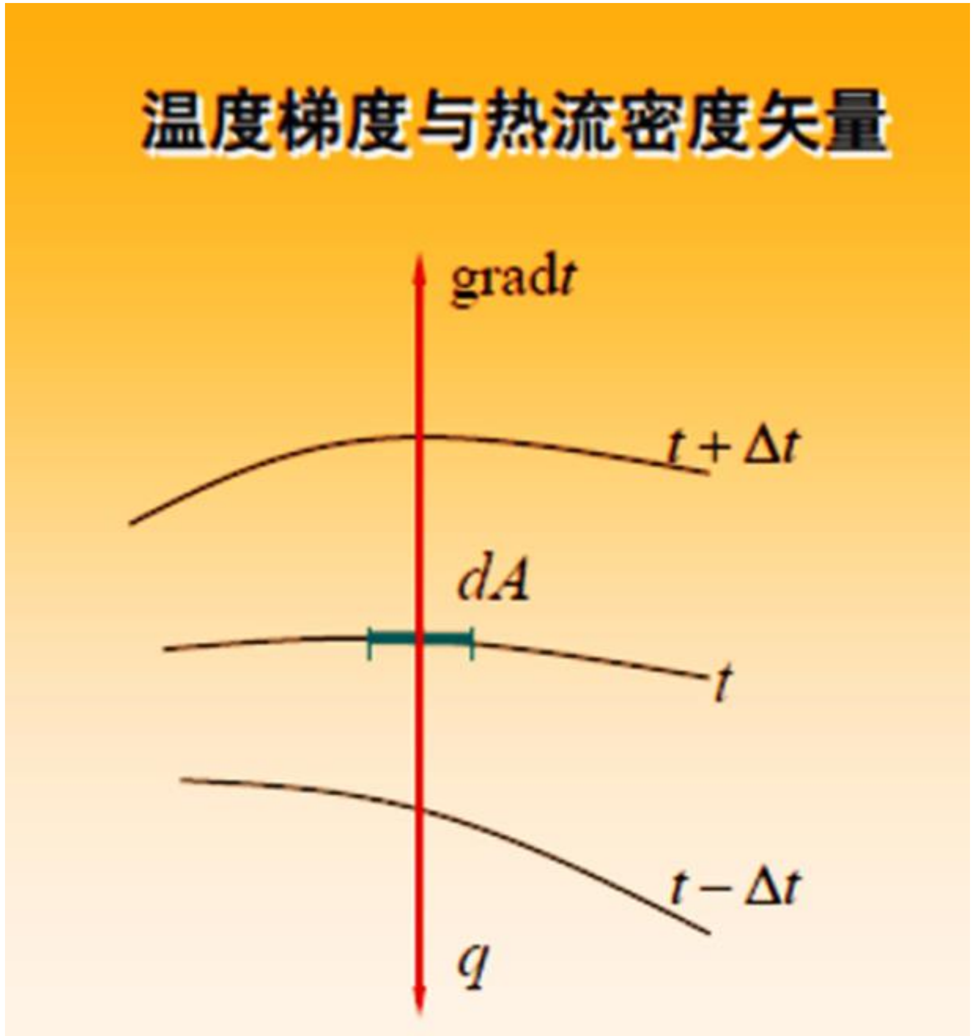
- 单位时间
- 通过单位面积的导热量
- 正比于垂直于该截面方向上的温度梯度
- 方向与温度梯度相反。

温度梯度

$$\underline{\vec{q}} = -\underline{\lambda}\, grad(t) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\vec{n}$$

热流密度

导热系数



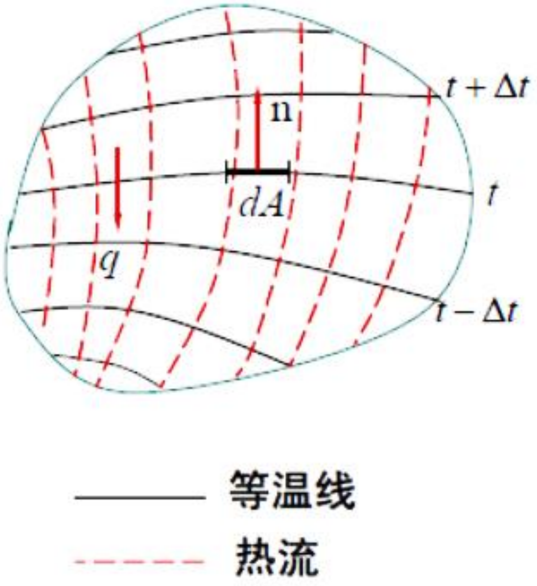
热流密度

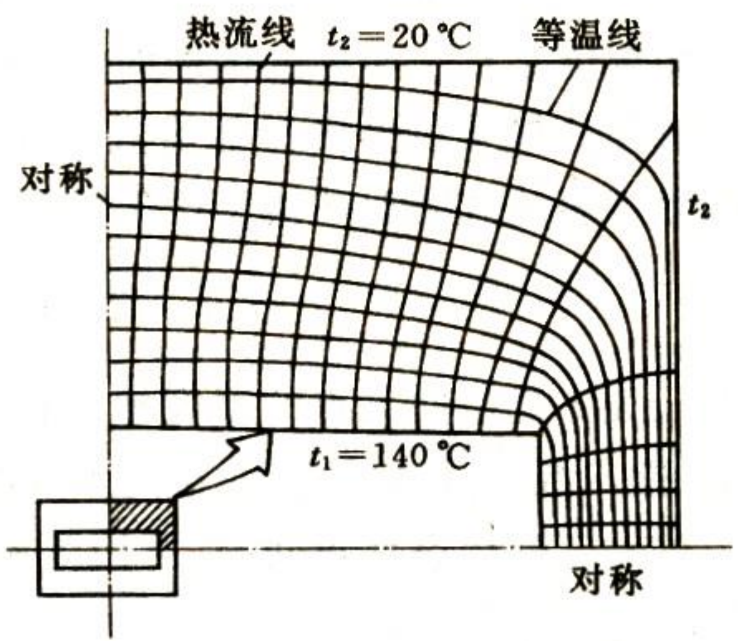
$$\vec{q} = -\lambda grad(t) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\vec{n}$$

直角坐标系下：

$$\vec{q} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k} = -\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\vec{i} - \lambda\frac{\partial t}{\partial y}\vec{j} - \lambda\frac{\partial t}{\partial z}\vec{k}$$

二维稳态导热可用等温线和热流线描述导热过程

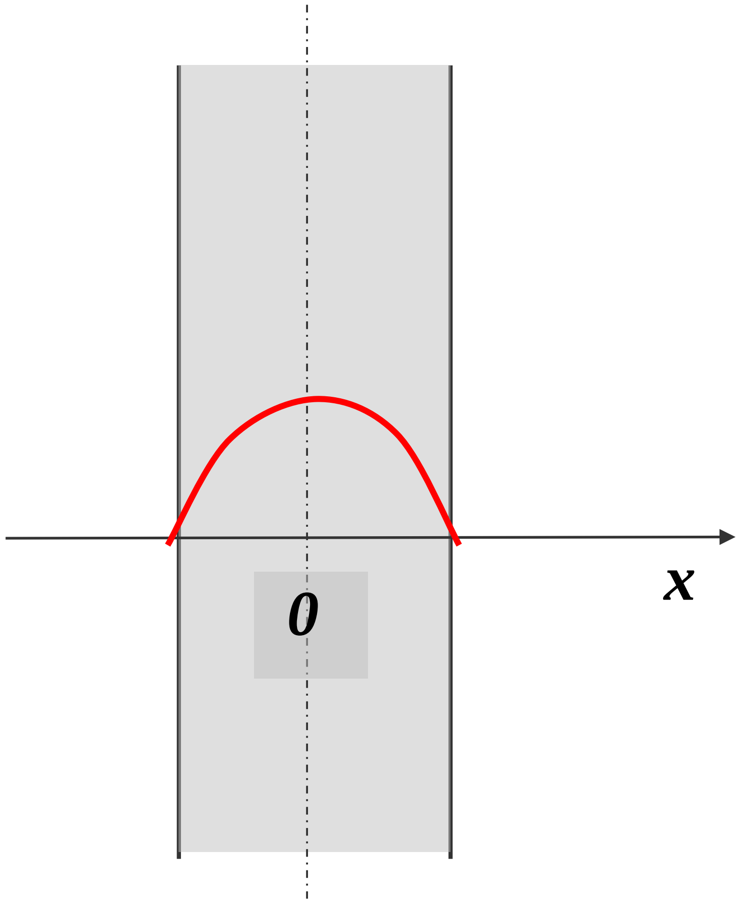




例1： c_1、c_2 和平板的导热系数为常数

温度分布表达式如下：

$$t = c_1 x^2 + c_2$$



计算在通过X=0截面处的热流密度为多少？

例2：

试画出无内热源、常物性的无限大平壁和长圆筒壁内稳态导热时的温度分布和等温线

例题

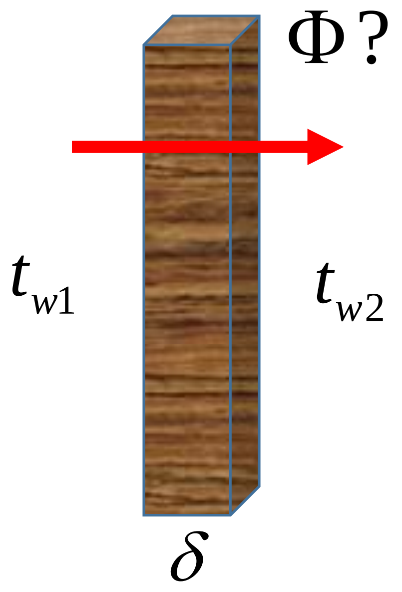
例1 δ=50mm， $t_{w1}=300℃$，$t_{w2}=100℃$ 。求 Φ?

（1）铜，λ=375 W/(m·K)；

（2）钢，λ=36.4 W/(m·K)；

（3）铬砖，λ=2.32 W/(m·K)；

（4）硅藻土砖，λ=0.242 W/(m·K)。



解：

$$q=\lambda\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}\qquad (W/m^2)$$

铜：$q=\lambda\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}=375\times\frac{300-100}{0.05}=1.5\times10^{6}W/m^{2}$

钢：$q=\lambda\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}=36.4\times\frac{300-100}{0.05}=1.46\times10^{5}W/m^{2}$

铬砖：$q=\lambda\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}=2.32\times\frac{300-100}{0.05}=9.28\times10^{3}W/m^{2}$

硅藻土砖：$q=\lambda\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta}=0.242\times\frac{300-100}{0.05}=9.68\times10^{2}W/m^{2}$

讨论：

- 导热系数对导热量影响很大
- 铜是热的**良导体**
- 硅藻土砖具有**隔热作用**

三、导热系数

1、定义

$$\boxed{\lambda = -\frac{q}{\mathrm{grad}\, t}} \qquad \mathrm{W/(m{\cdot}K)}$$

在数值上等于单位温度梯度下物体内所产生的热流密度

- 物性参数，物质微观粒子传递热量的特性。

注：工程中采用的导热系数，一般都由实验方法测定。

➢导热微观机理

① 自由电子的运动

② 通过晶格结构的振动传递（弹性声波），即原子、分子在其平衡位置附近振动

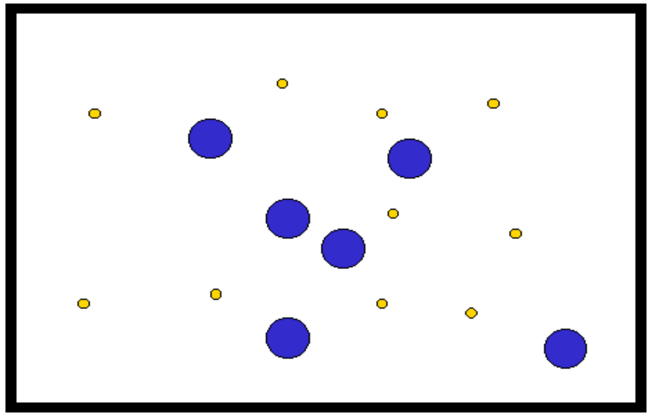
③ 气体分子不规则热运动时相互碰撞的结果

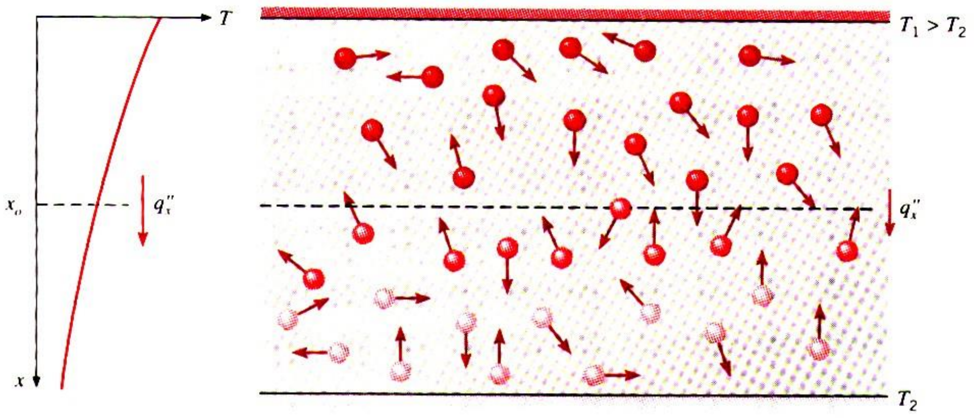
◆ 气体、液体、导电固体和非导电固体的导热机理有所不同。

（1）气体的导热机理和导热系数

- 由于分子的不规则热运动和相互碰撞发生的能量传递
- 当温度↑，分子运动速度↑

0° K





- 气体导热系数： $\lambda_{空气} \approx 0.006 \sim 0.6W/(m \bullet K)$

$0℃: \lambda_{空气} = 0.0244W/(m \bullet K)$ $20℃: \lambda_{空气} = 0.026W/(m \bullet K)$

常温常压下气体热导率可表示为：

$$\lambda = \frac{1}{3}\bar{u}\rho l c_v$$

$\bar{u}$： 气体分子运动的均方根速度

l： 气体分子在两次碰撞间平均自由行程

ρ： 气体的密度 c_v： 气体的定容比热

- 气体的压力升高时：气体的密度增大、平均自由行程减小、而两者的乘积保持不变。

  除压力很低或很高，在2.67×10^{-3}MPa ~ 2.0×10^{3}MPa范围内，气体的热导率基本不随压力变化

- 气体的温度升高时：气体分子运动速度和定容比热随T升高而增大。 气体的热导率随温度升高而增大

混合气体热导率不能用部分求和的方法求；只能靠实验测定

分子质量小的气体（H_2、He）导热系数较大— 分子运动速度高

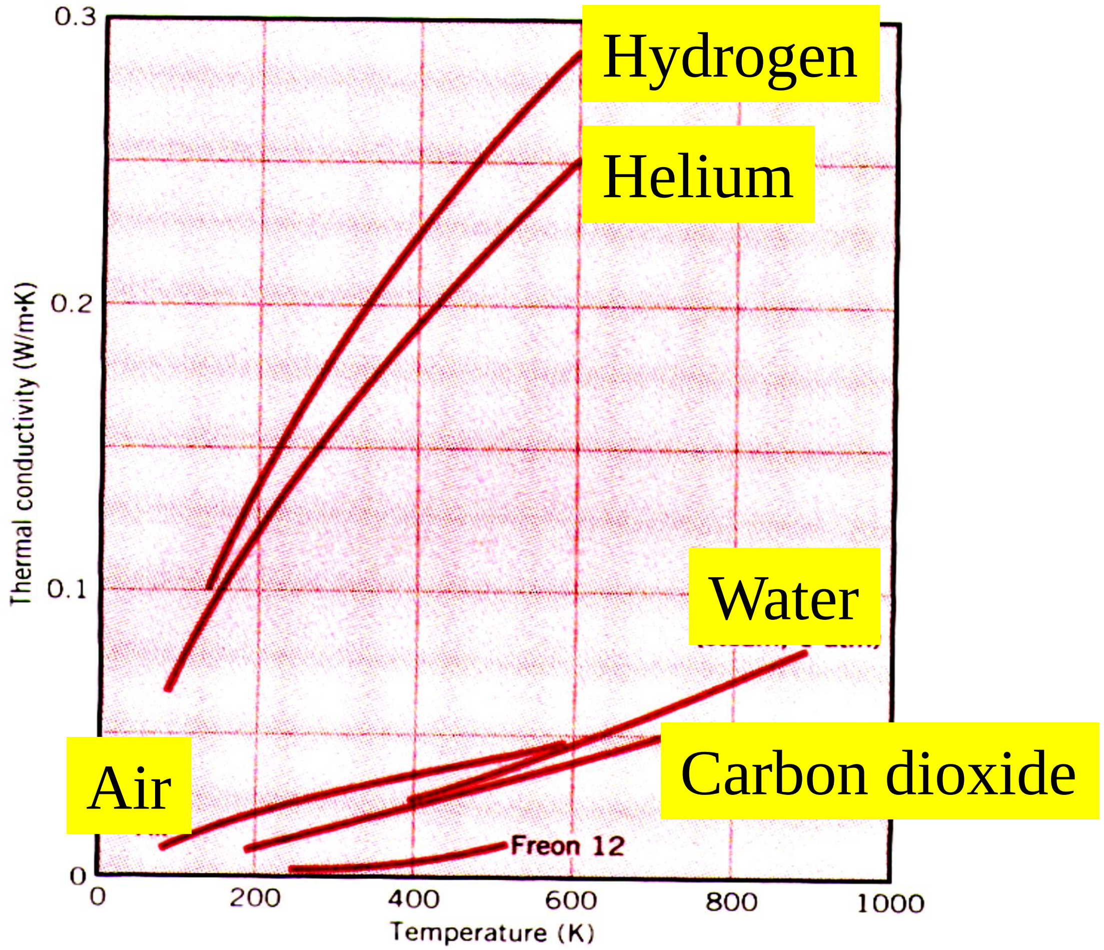


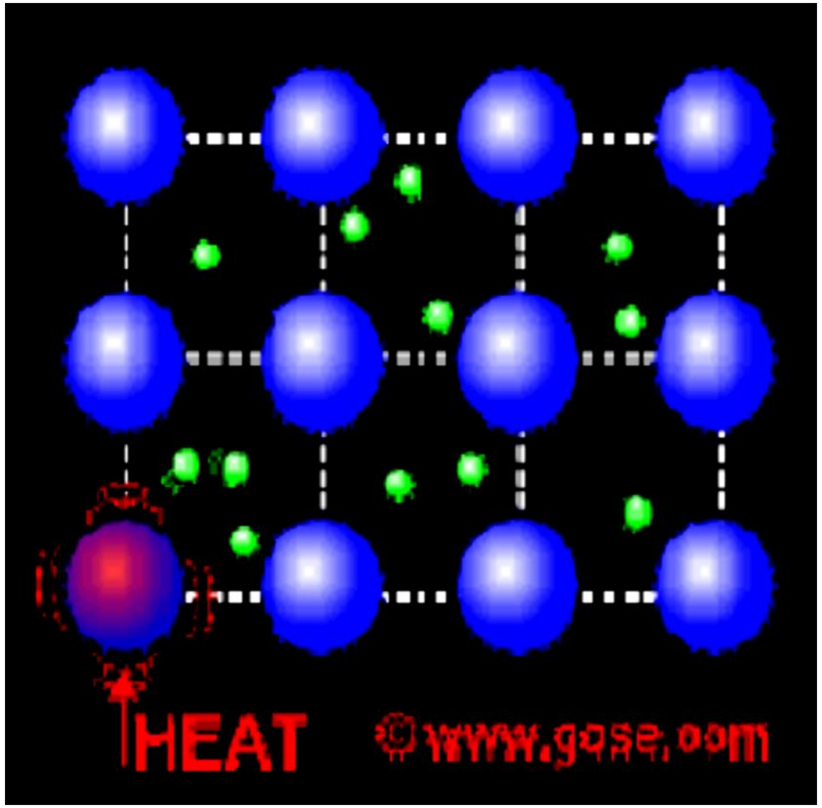
FIGURE 2.6 The temperature dependence of the thermal conductivity of selected gases at normal pressures.

$$\lambda = \frac{1}{3}\bar{u}\rho l c_v$$

（2）固体的导热机理和导热系数

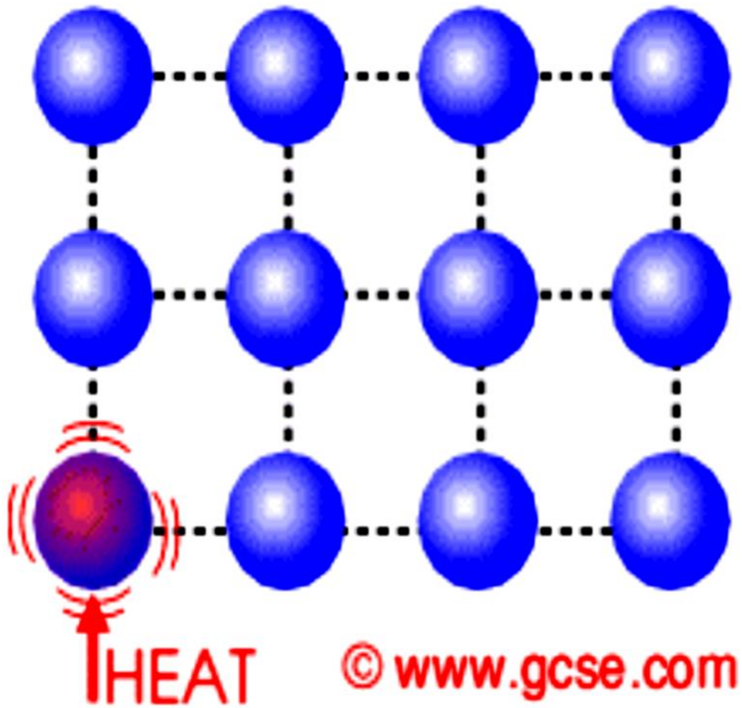
导电固体导热：

主要依靠自由电子的运动



非导电固体导热：

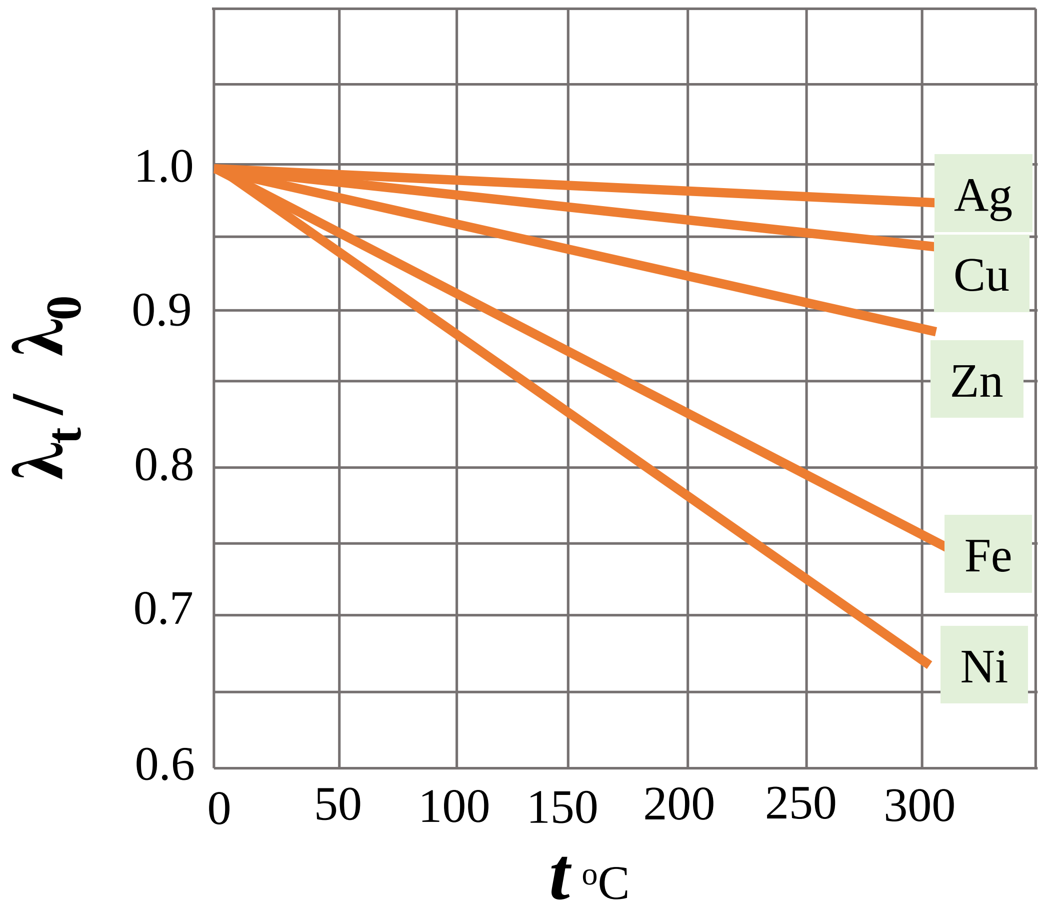
通过晶格结构的振动传递



金属的热导率：　　　　一般在12~420W/(m·K)

纯金属的导热：依靠自由电子的迁移和晶格的振动，主要依靠前者

金属导热与导电机理一致；良导电体为良导热体



合金：

$$\lambda_{合金} < \lambda_{金属}$$

如常温下：

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{纯铜} &= 398\mathrm{w/m.}^{0}c \\ \lambda_{黄铜} &= 109\mathrm{w/m.}^{0}c\end{aligned}}$$

黄铜：**70%Cu，30%Zn**

金属的加工过程也会造成晶格的缺陷 $\Rightarrow \lambda\downarrow$

温度变化对合金导热系数的影响，取决于发生导热的主要机理是哪一个

（3）液体的导热机理和导热系数

➢ 液体导热：两种解释

(a)类似于气体，但分子间作用力对碰撞过程的影响远比气体大

(b)类似于非导电固体，主要依靠晶格结构的振动

➢ 液体导热系数

$$\lambda_{液体} \approx 0.07 \sim 0.7 W/(m \bullet K)$$

$$20℃: \lambda_{水} = 0.6 W/(m \bullet K)$$

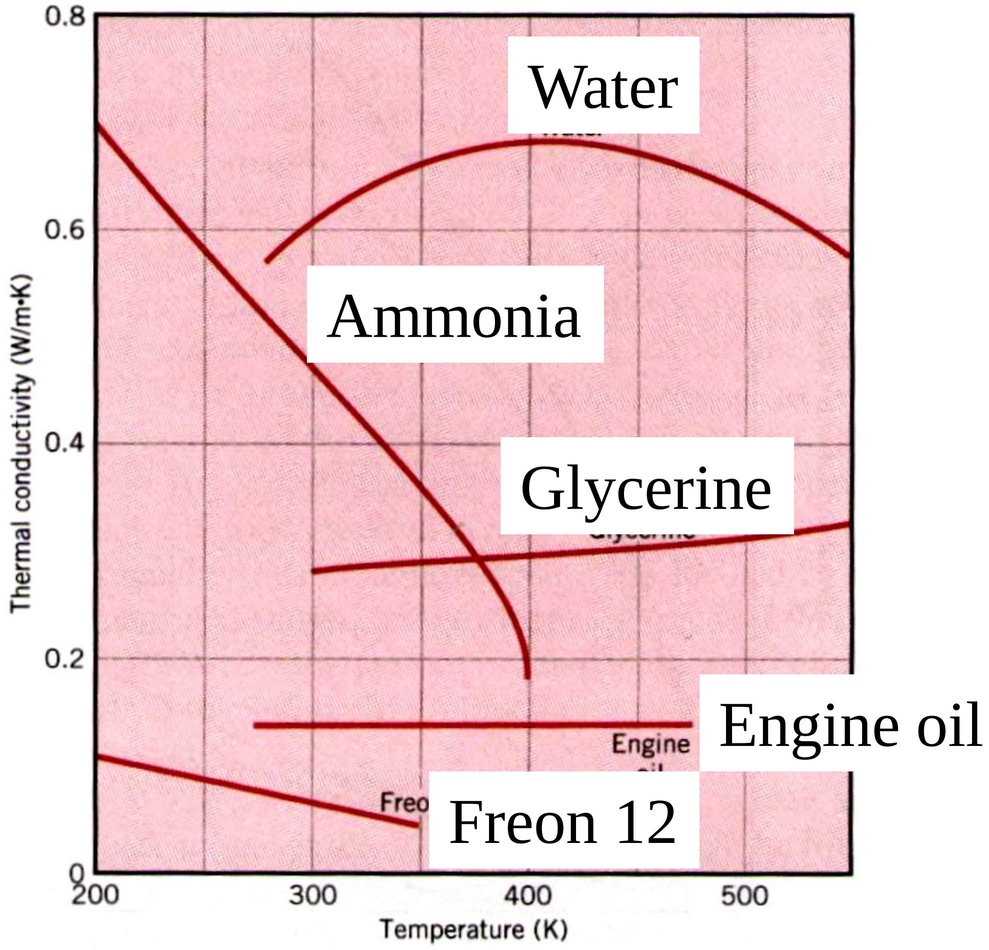
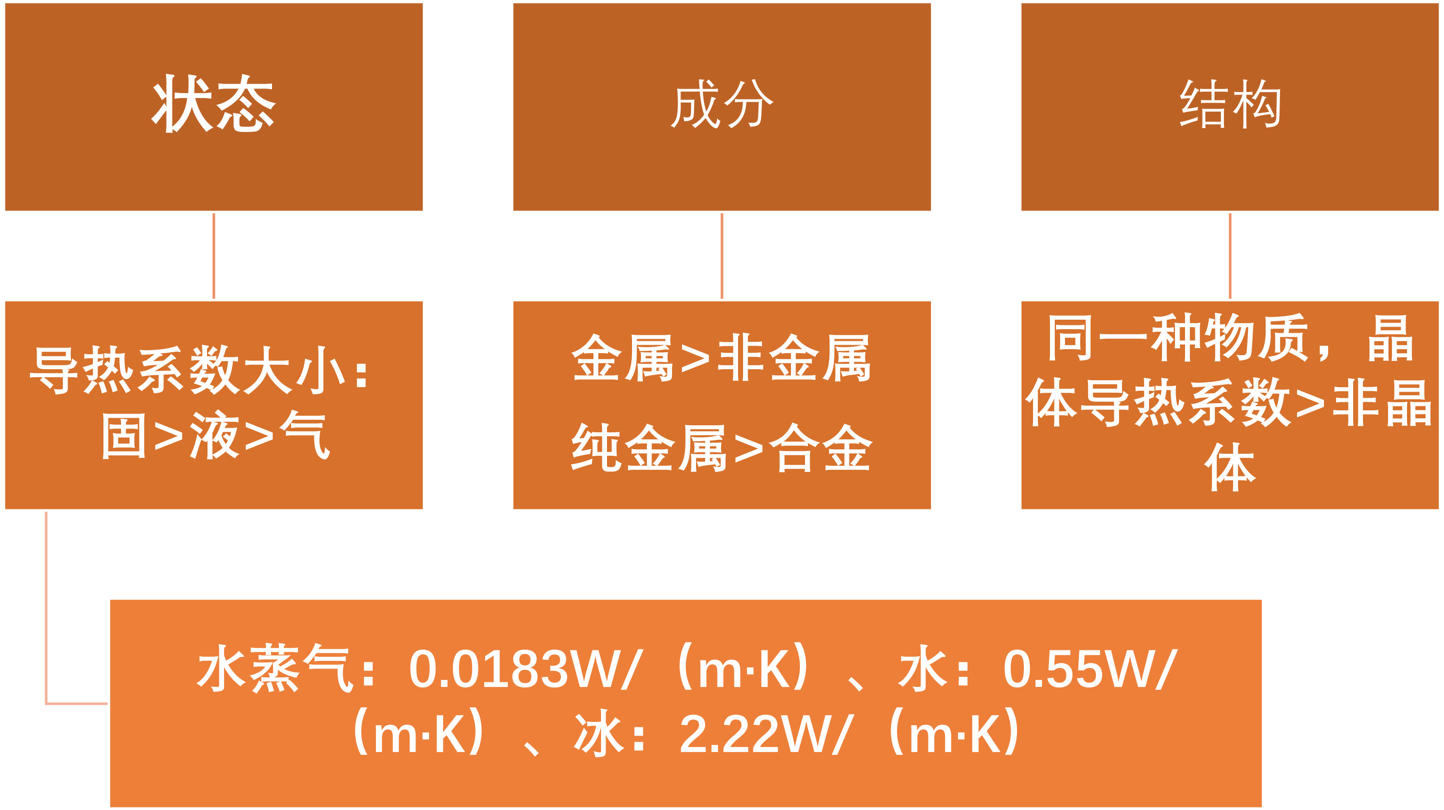


FIGURE 2.7 The temperature dependence of the thermal conductivity of selected nonmetallic liquids under saturated conditions.

特点：

液体缔合性质不同，随温度变化规律不同，例如水的导热系数随温度变化出现极大值。

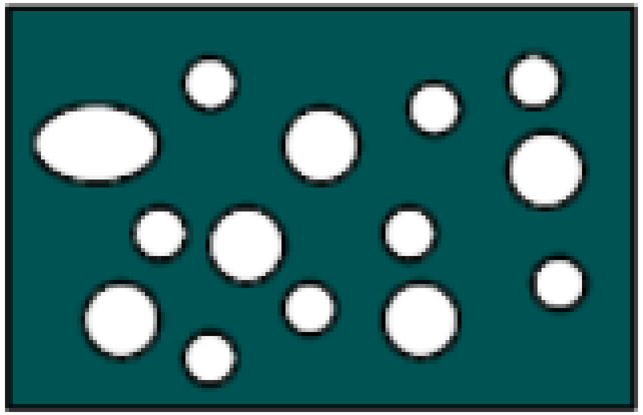
a) 影响导热系数的因素


状态
成分
结构
导热系数大小：固>液>气
金属>非金属
纯金属>合金
同一种物质，晶体导热系数>非晶体
水蒸气：0.0183W/（m·K）、水：0.55W/（m·K）、冰：2.22W/（m·K）

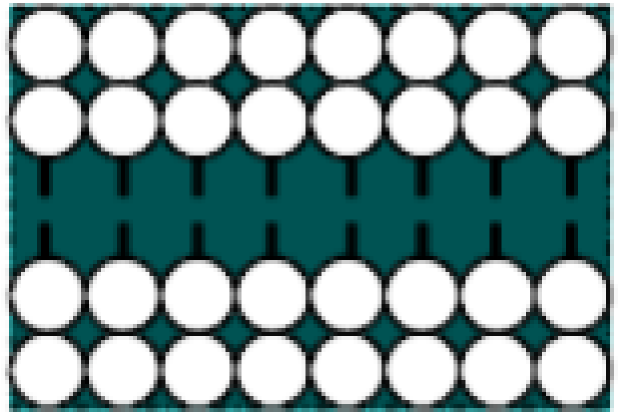
b) 多孔材料的密度

热传递机理：骨架和骨架空隙内的介质的导热、对流和辐射共同作用，其导热系数称为表现导热系数，习惯上也称为导热系数。

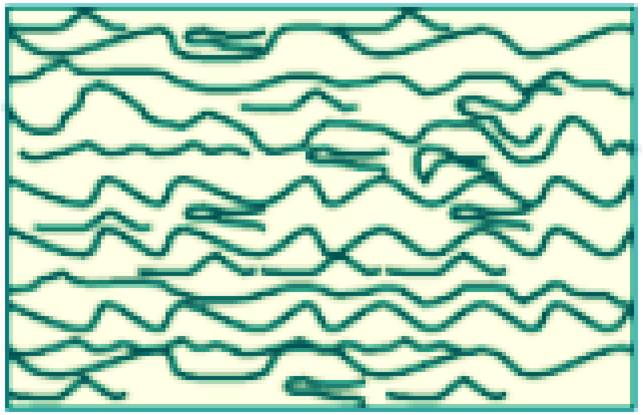
多孔材料表现密度的不同关系到孔隙内部流体的传热机理和骨架间的传热机理，从而影响表现导热系数。



a



b



c

2、保温材料

- 导热系数不大于0.12 W/（m·K）。
- 保温材料导热系数小的原因：
- 骨架间的空隙和孔腔内含有导热系数较小的介质；这些介质在保温材料中流动或不流动

常用的保温材料：

岩棉

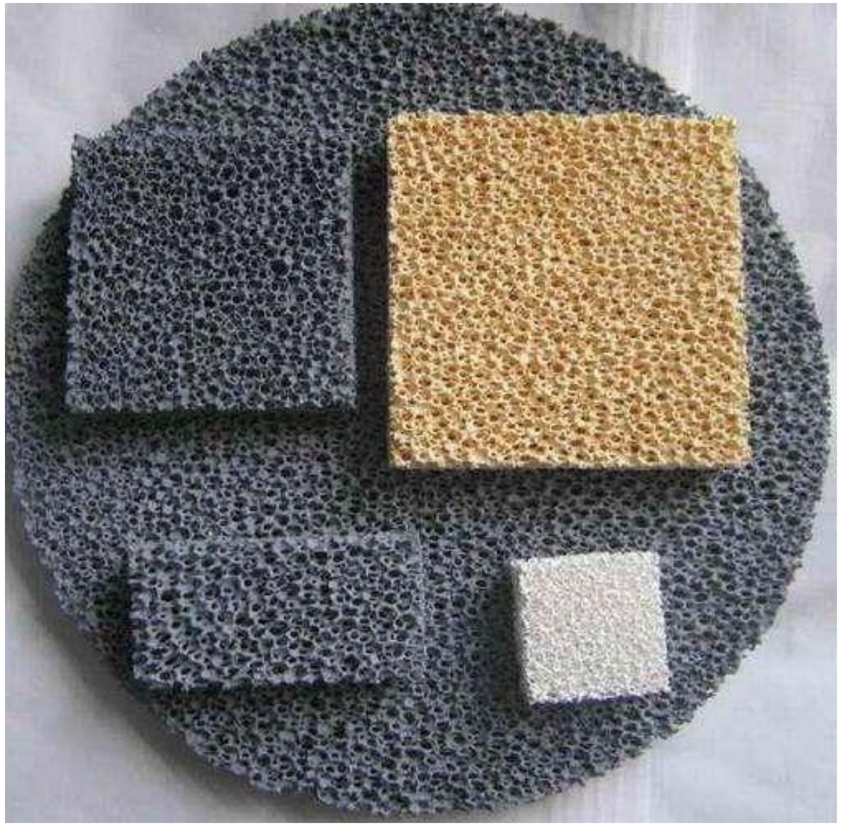
泡沫石棉

耐火材料

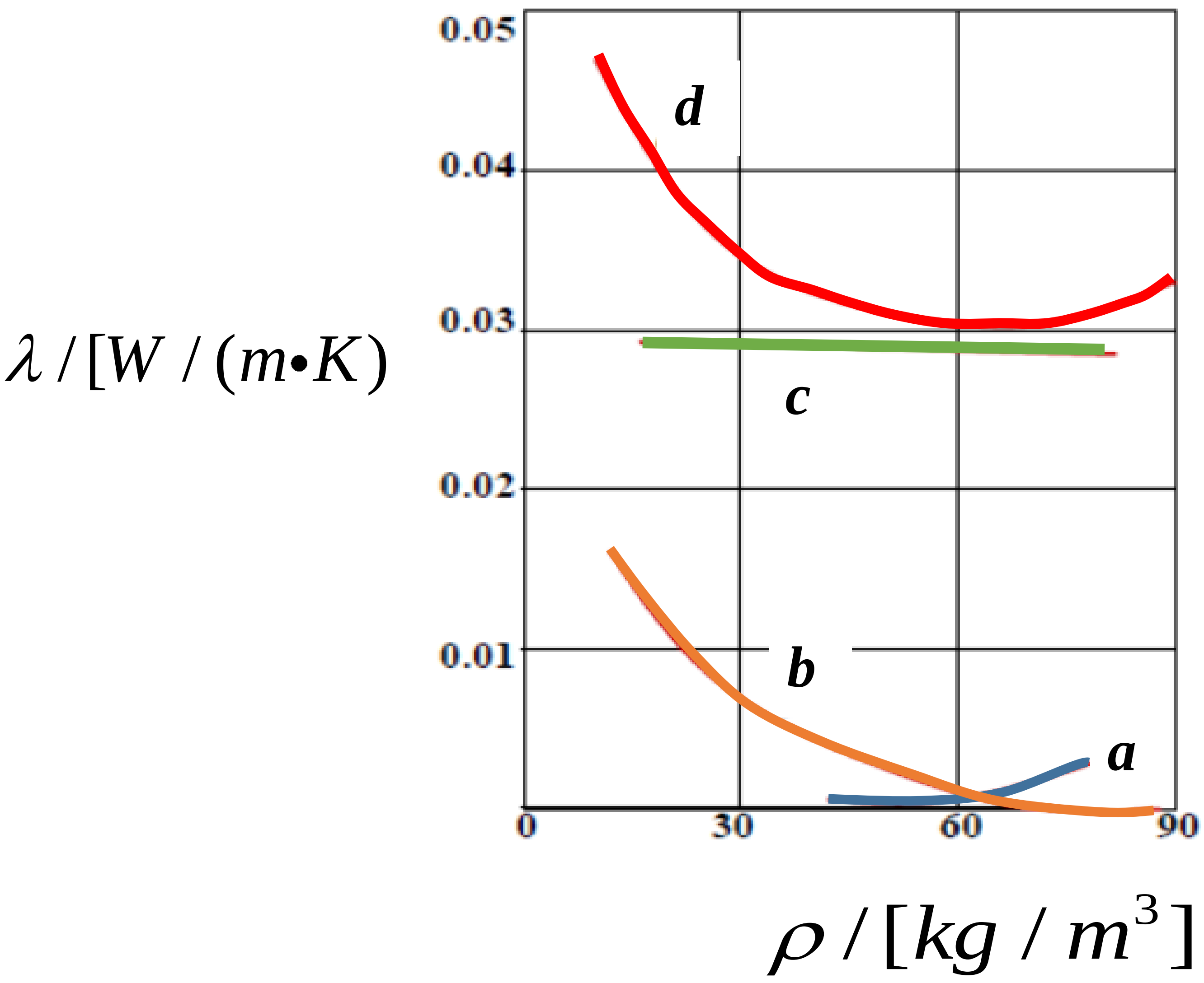
思考

1. 为什么棉被晒了后保暖?

2. 泡沫金属是一种金属，为什么可以做保温材料? 做保温材料时，孔隙大还是孔隙小的好?



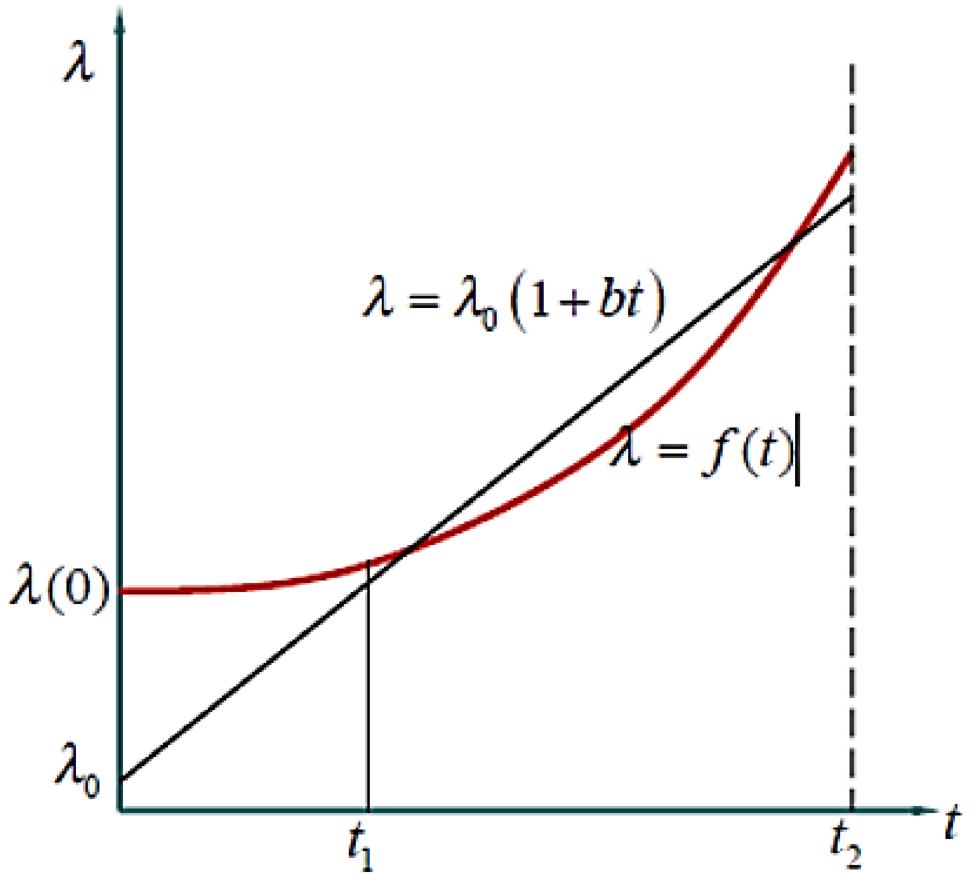
纤维直径为5μm的玻璃棉在20°C时的表现导热系数

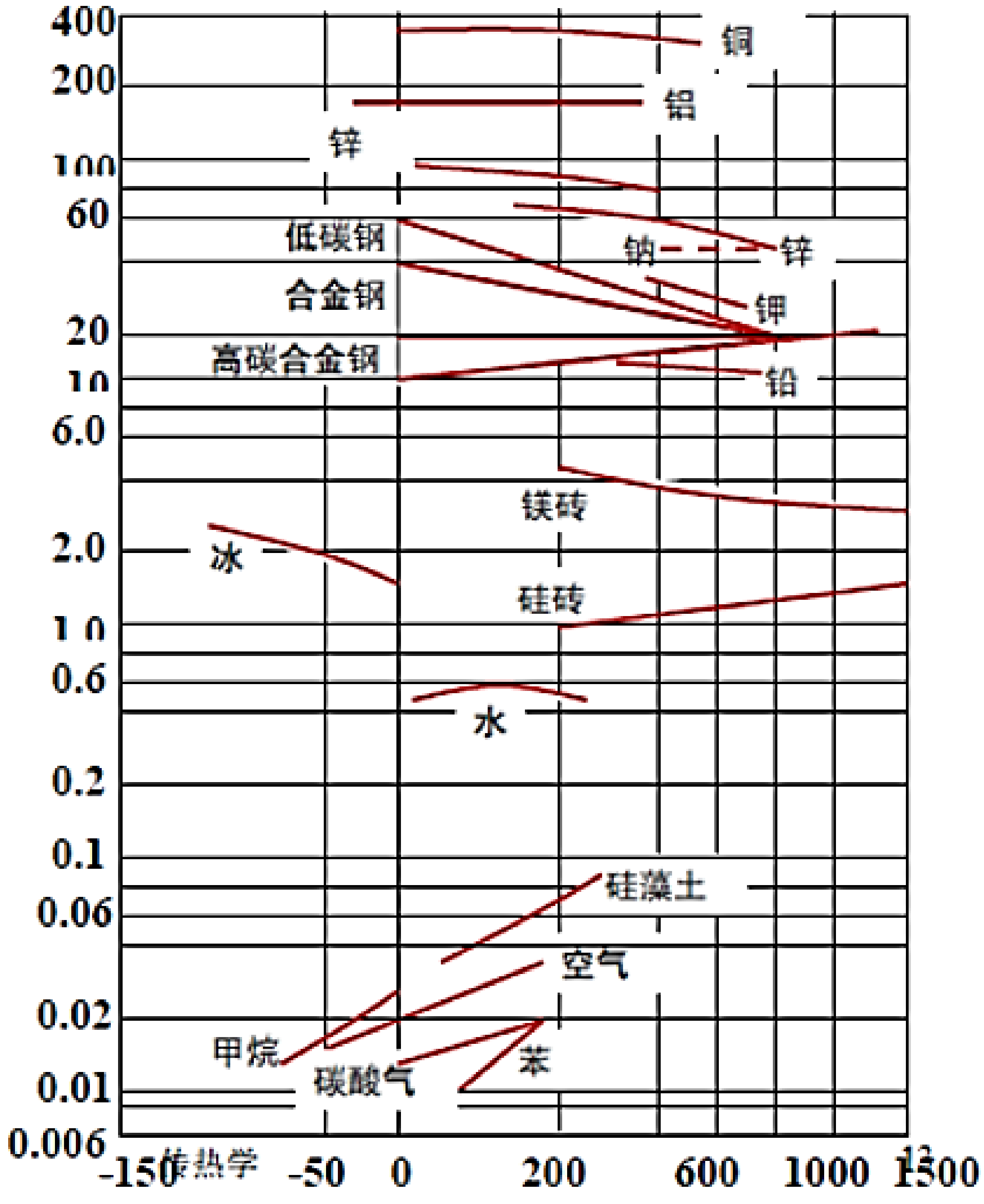


a ——固体中的导热
b ——辐射传热
c ——气相传热
d ——表现导热系数

工程上为方便使用，习惯将一定温度范围内的导热系数与温度的关系近似回归成直线表示。

$$\lambda = \lambda_0(1+bt)$$





平均导热系数

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda_0 (1+bt)dt}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\lambda_0}{t_2 - t_1}[(t_2 - t_1) + b\frac{(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{2}]$$

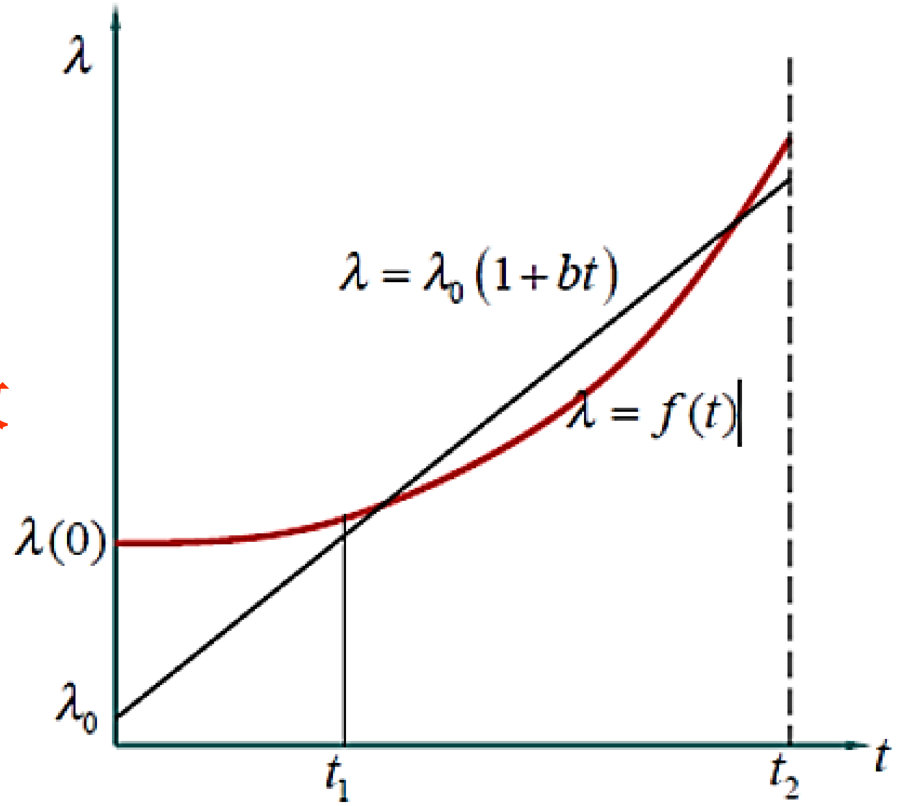
则

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 (1 + b\frac{t_2 + t_1}{2})$$

比较后可知，平均导热系数等于平均温度下的导热系数

导热系数

$$\lambda = \lambda_0 (1+bt)$$



3、含水率

含水率↑ 导热系数↑

如，矿渣棉含水10.7%时热导率增加25%，含水23.5%时导热系数增加50% 。

主要内容

2-1 导热基本定律

2-2 导热问题的数学描写

2-3 典型一维稳态导热问题的分析解

2-4 通过肋片的导热

2-5多维稳态导热的求解

2-2 导热问题的数学描写

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

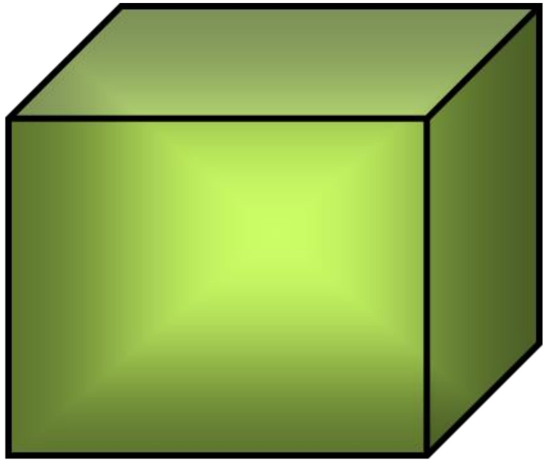
作用： 理论求解导热体温度分布的基础。

理论基础： 热力学第一定律+傅里叶定律

方法：

- 导热体内任意的一个微小单元
- 能量守恒关系
- 温度与其它变量之间的关系式。

一、导热微分方程的推导



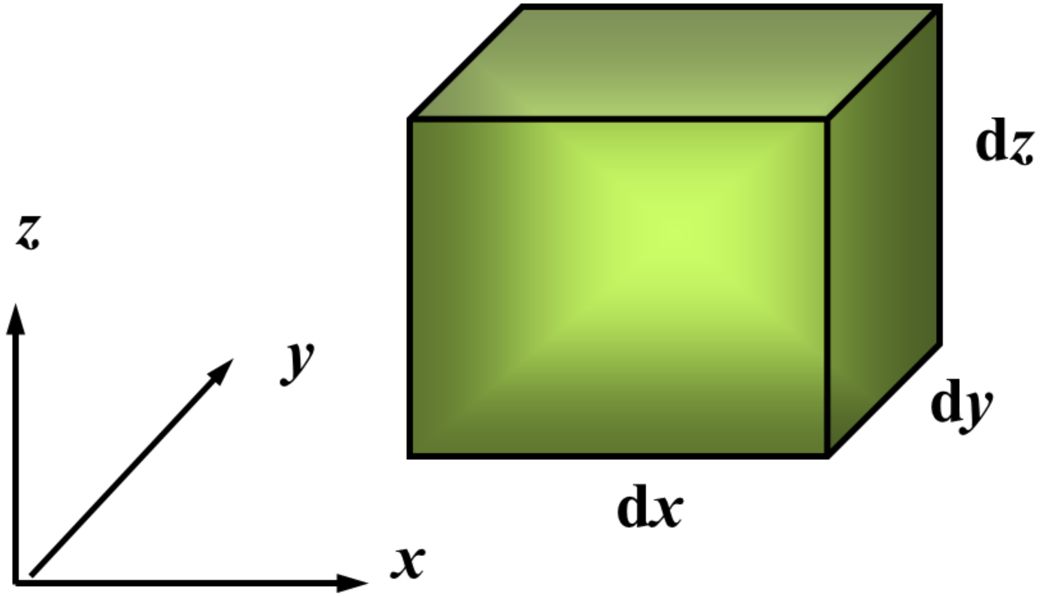
1. 物理问题描述

- 三维的非稳态导热体
- 物体内有内热源

2. 假设条件

- 各向同性的连续介质；
- 热导率、比热容和密度均为已知；
- 内热源均匀分布；
- 导热体与外界没有功的交换。

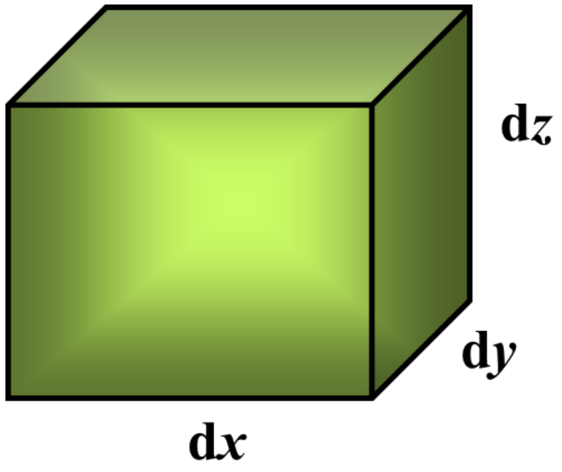
3. 建立坐标系，取分析对象（微元体）

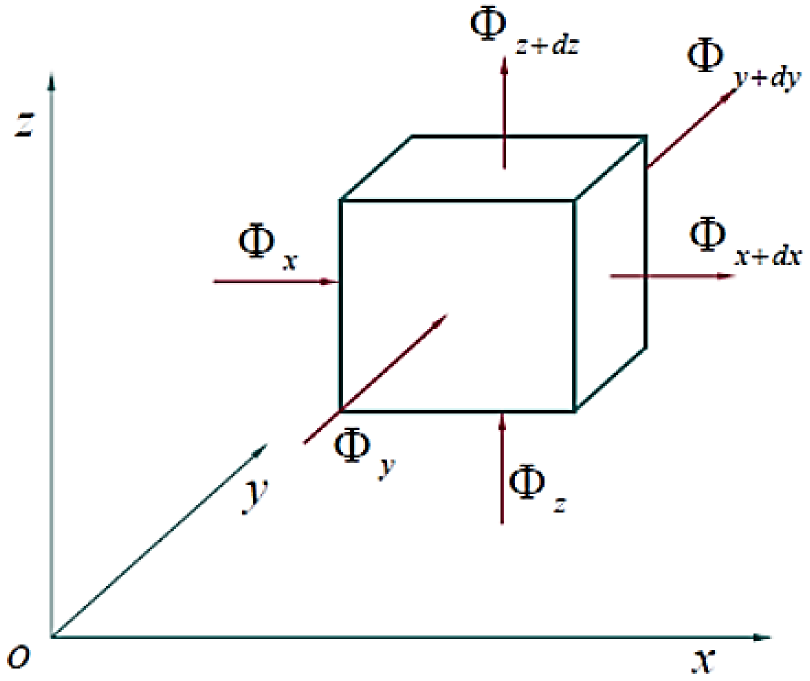


4. 能量变化的分析

导入与导出净热量+ 内热源发热量

= 热力学能的增加





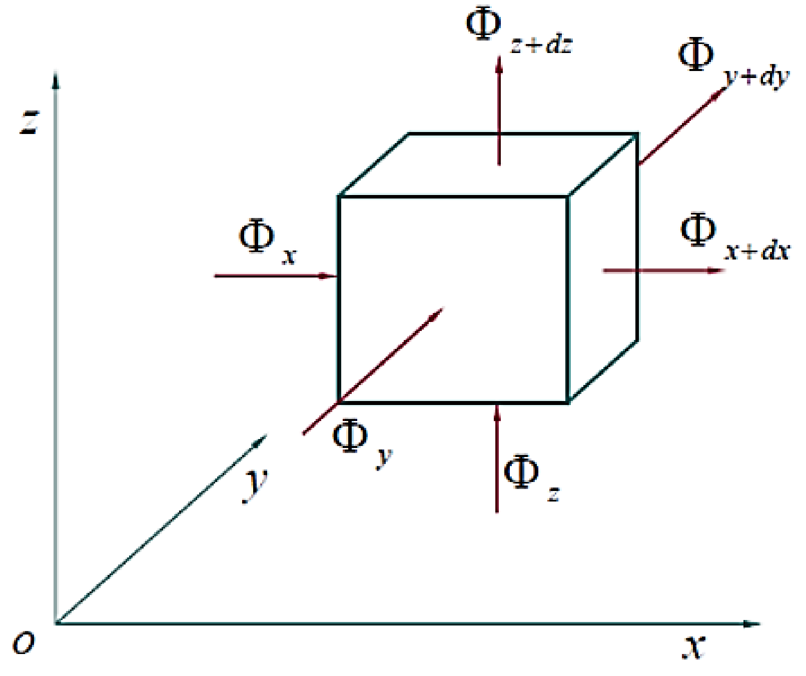
导入与导出净热量+ 内热源发热量
= 热力学能的增加

（1）导入与导出微元体的热量

利用导热基本定律

沿 x 轴方向，经 x 表面导入的热量：

$$\Phi_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydz$$



沿 x 轴方向、经 $x + dx$ 表面导出的热量：

$$\Phi_{x+dx} = \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx = \Phi_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) dxdydz$$

导入与导出净热量+ 内热源发热量 = 热力学能的增加

- 沿 x 轴方向导入与导出微元体净热量

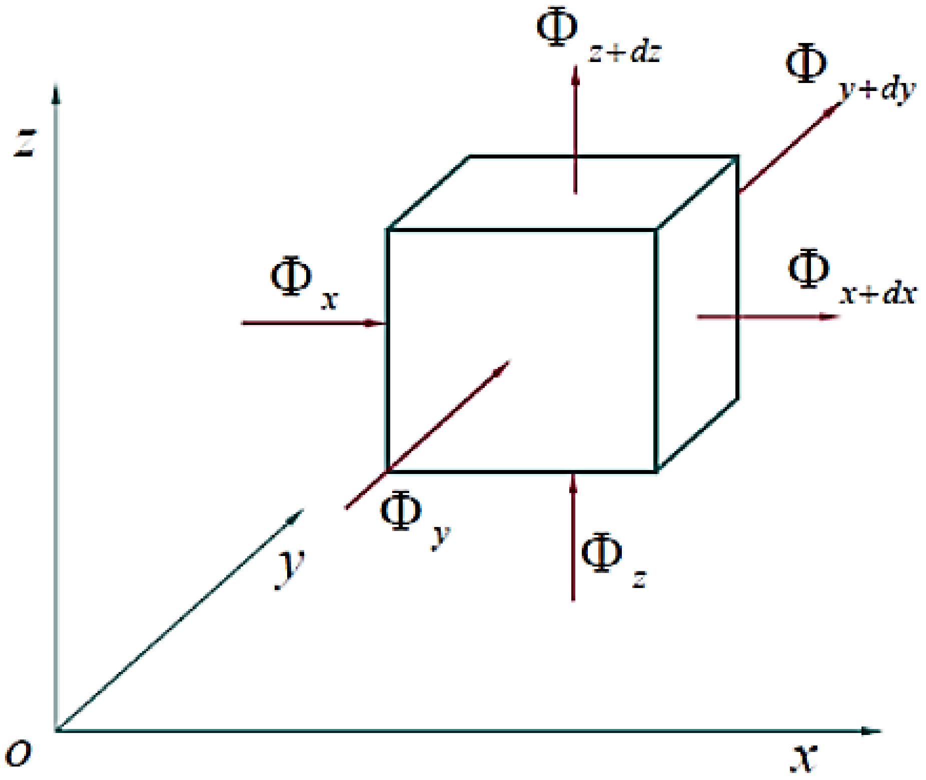
$$\Delta\Phi_x = \Phi_x - \Phi_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- 沿 y 轴方向

$$\Delta\Phi_y = \Phi_y - \Phi_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- 沿 z 轴方向

$$\Delta\Phi_z = \Phi_z - \Phi_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



（1）导入与导出净热量：

λ是否可以提取出来？

导入与导出净热量+ 内热源发热量
= 热力学能的增加

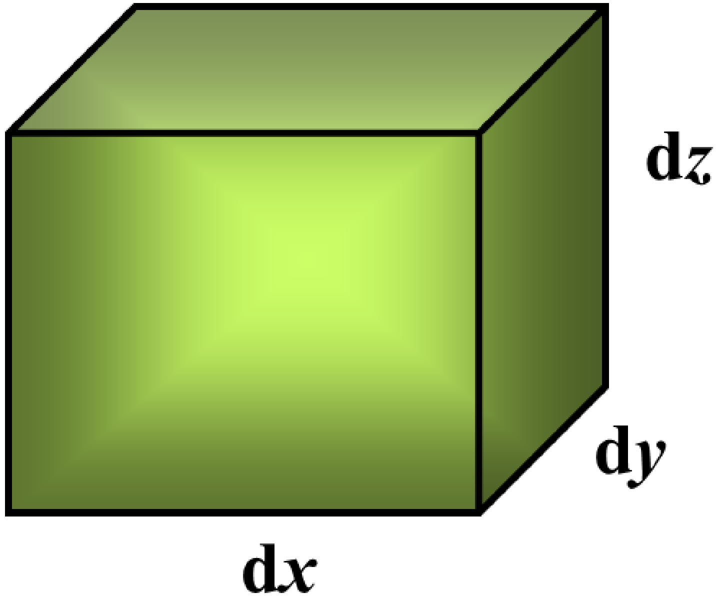
$$\Phi_c = [\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})]dxdydz$$

（2）内热源发热量

$$\Phi_V = \dot{\Phi}dxdydz$$

（3）热力学能/内能的增量

$$\Delta E = \rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}\cdot dxdydz$$



5. 导热微分方程的基本形式

导入与导出净热量+ 内热源发热量
= 热力学能的增加

$$\Phi_c = [\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})]\cancel{dxdydz}$$

$$\Phi_V = \dot{\Phi}\cancel{dxdydz} \qquad \Delta E = \rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}\cdot\cancel{dxdydz}$$

$$\Delta E = \Phi_c + \Phi_V$$

$$\underbrace{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}}_{\text{非稳态项}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})}_{\text{三个坐标方向净导入的热量}} + \underbrace{\dot{\Phi}}_{\text{内热源项}}$$

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})+\dot{\Phi}$$

二、一些具体情况下的简化

1. 若导热系数为常数

$$\underline{\rho c}\frac{\partial t}{\partial \tau}=\underline{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial t}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial t}{\partial z})\right]+\underline{\dot{\Phi}}$$

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}}$$

$$a=\frac{\lambda}{\rho c}$$

热扩散系数，m²/s

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})+\dot{\Phi}$$

2. 若物性参数为常数且无内热源

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2})$$

3. 若物性参数为常数、有内热源稳态导热

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0$$

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})+\dot{\Phi}$$

4. 若物性参数为常数、无内热源稳态导热

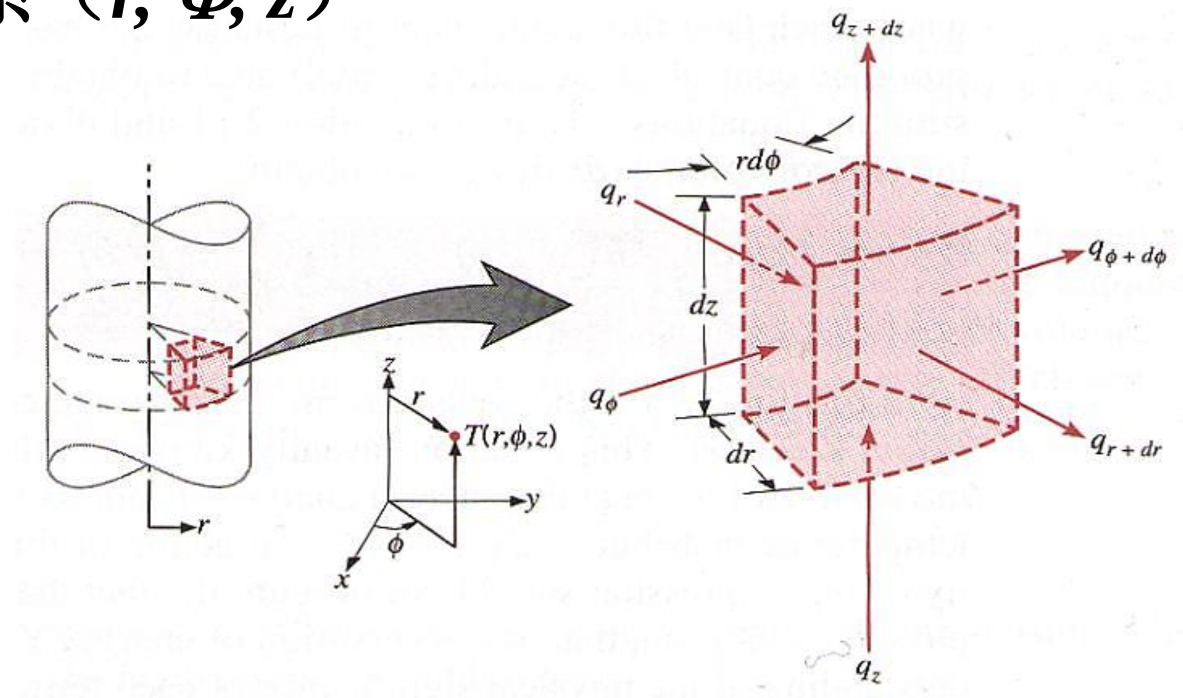
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0$$

5. 一维稳态含内热源导热

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\dot{\Phi}=0$$

三、其它坐标系中的导热微分方程式

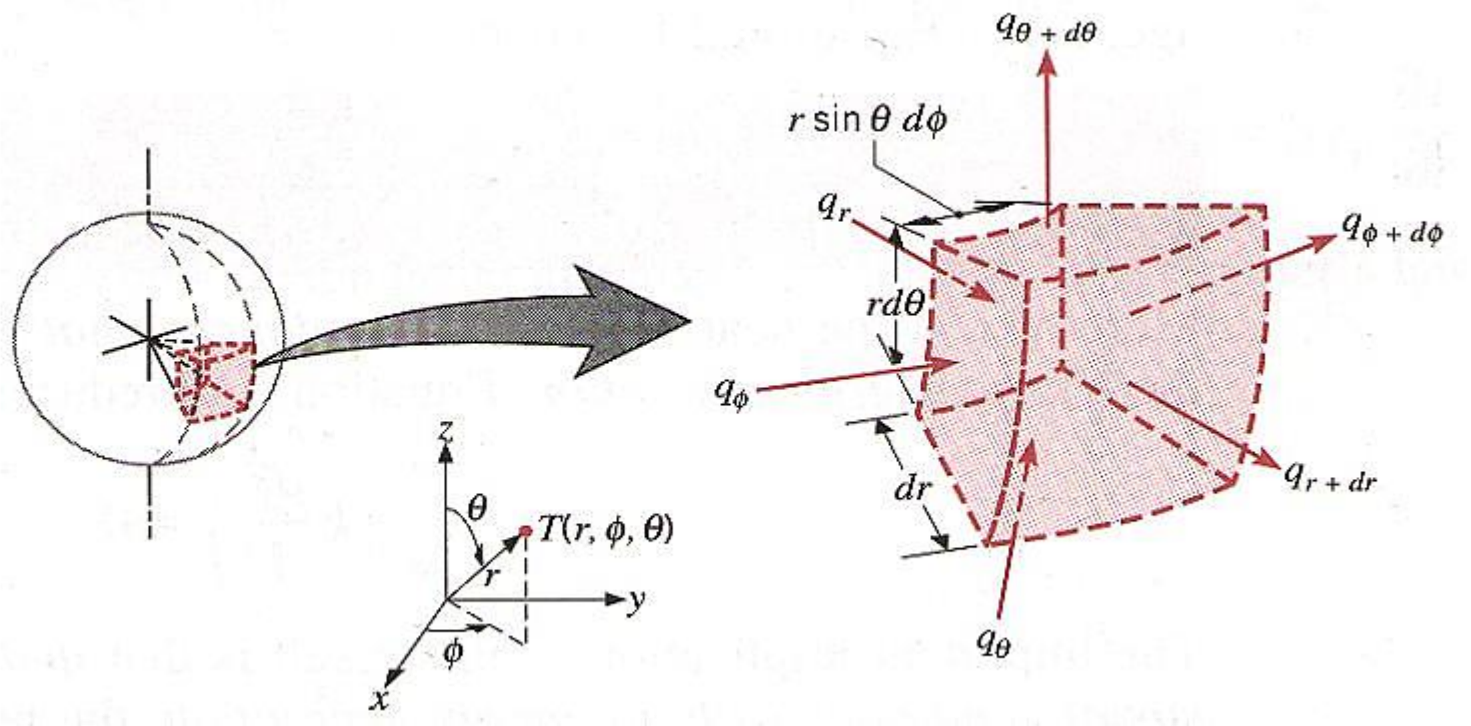
1. 圆柱坐标系（*r*, *Φ*, *z*）



$$x = r\cos\phi;\ \ y = r\sin\phi;\ \ z = z$$

$$\boxed{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r\frac{\partial t}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}) + \dot{\Phi}}$$

2. 球坐标系（r, θ，Φ）



$$x = r\sin\theta\cdot\cos\phi;\ \ y = r\sin\theta\cdot\sin\phi;\ \ z = r\cos\theta$$

$$\boxed{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\lambda\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}) + \dot{\Phi}}$$

热扩散率（导温系数）*a*

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}}$$

$$a=\frac{\lambda}{\rho c}\Rightarrow\frac{\text{物体热导率}}{\text{单位体积的物体温升1℃所需热量}}$$

- **物性参数，m^2/s**
- **导热能力（λ）与沿途物质储热能力（ρ、*c*）之间的关系**
- ***a*↑，物体热量扩散的能力↑**
- ***a*↑，表示物体内部温度扯平的能力↑；温度变化传播的速度↑**

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \Rightarrow \frac{\text{物体热导率}}{\text{单位体积的物体温升1℃所需热量}}$$

Q：热导率小的物体是否热扩散率也一定小？

干空气	$\lambda = 0.0259W/(m \cdot K), a = 21.4 \times 10^{-6} m^2/s$
青铜	$\lambda = 24.8W/(m \cdot K), \quad a = 8.22 \times 10^{-6} m^2/s$

- ***a*** 和 λ 是不同的物理量，λ 小的物体 ***a*** 不一定小。
- ***a***只对非稳态导热过程才有意义

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \dot{\Phi}_v = 0$$

表 2-1 常温下各类材料的热导率和热扩散率[7]

材料	λ/[W/(m·K)]	$a\times10^6$/(m^2/s)
金属	4~420	3~165
非金属(少数例外)	0.17~70	0.1~1.6
液体(非金属)	0.05~0.68	0.08~0.16
气体	0.01~0.20	15~165
普通隔热材料	0.04~0.12	0.16~1.60

问题：

1. 为什么水壶的提把上要包上橡胶？

问题：

2. 为什么燃烧的木棒一端已经很高的温度，另一端仍然保持不烫手？

木材热扩散率： $11.76—17.54\times10^{-8}m^2/s$

纯铜热扩散率： $11.5\times10^{-5}m^2/s$

$$\frac{a_{木材}}{a_{纯铜}}=\frac{17.5\times10^{-8}}{11.5\times10^{-5}}\approx\frac{1}{650}$$

导热微分方程与傅里叶导热定律的区别：

（1）导热微分方程： （t, τ, x, y, z）

$$\boxed{\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + \dot{\Phi}_v}$$

（2）傅里叶导热定律：

$$\boxed{\vec{q} = -\lambda grad t}$$

注意：傅里叶定律与导热微分方程的使用范围

1. 一般工程技术中发生的非稳态导热问题

2. 时间效应 如激光加工过程，10^{-8}~10^{-10} s

3. 温度效应 对于极低温度（接近0 K）

4. 空间尺度效应 如纳米尺度

四、导热过程的定解条件

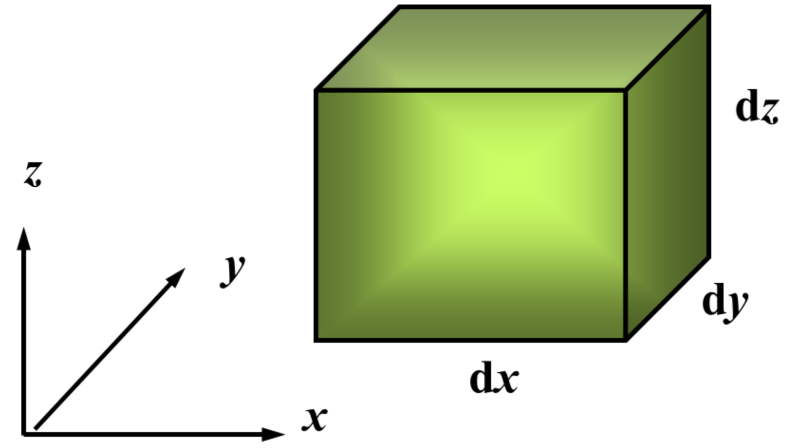
完整数学描述

导热微分方程式

定解条件

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})+\dot{\Phi}_v$$

四、导热过程的定解条件



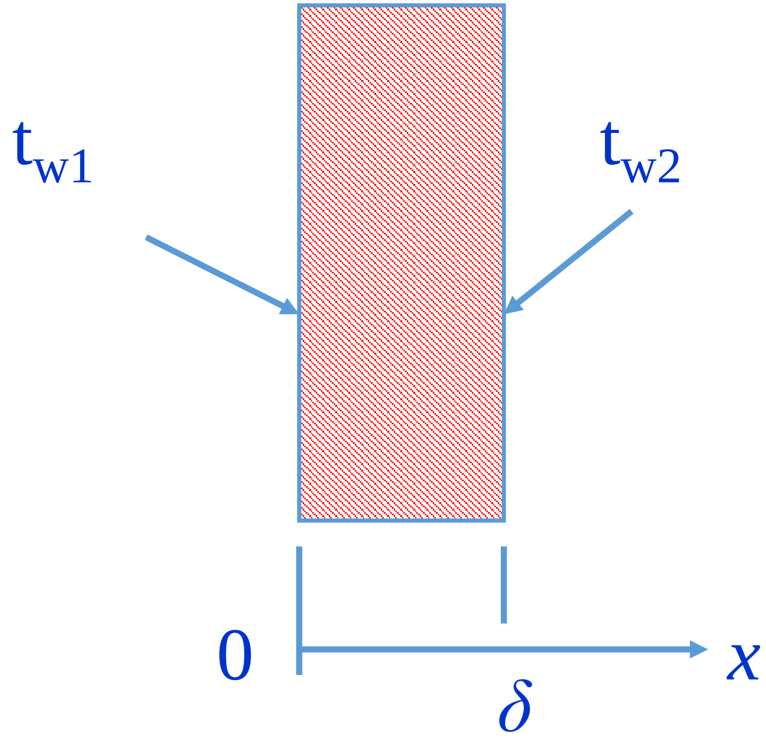
（1） 边界条件： 给出物体边界上温度或换热情况

（2） 初始条件： $t(x,y,z,\tau)=t_0=$常数 非稳态导热问题

1. 第一类边界条件:指定边界上的温度分布。

稳态情况，t_w=常数

例：右图中 $$x = 0,\ t = t_{w1}$$ $$x = \delta,\ t = t_{w2}$$



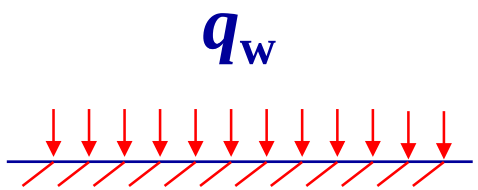
非稳态情况

$$\tau > 0,\quad t_w = f_w(x,y,z,\tau)$$

边界温度均匀一致： $t_w = f_w(\tau)$

(2) 第二类边界条件：指定边界上的热流密度

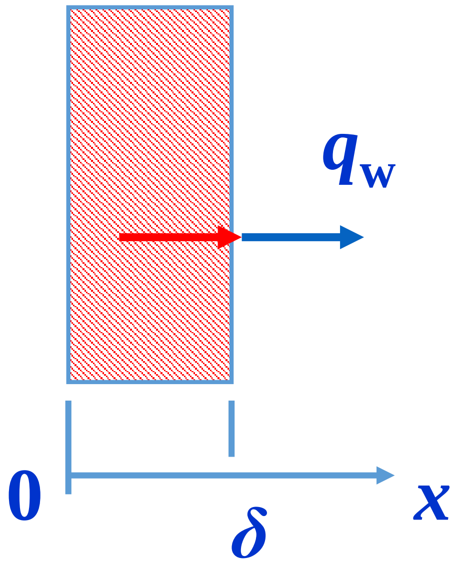
稳态情况 q_w=常数 或 $-\lambda\left(\dfrac{\partial t}{\partial n}\right)_w$ = 常数



非稳态情况

$\tau > 0$ 时， $-\lambda\left(\dfrac{\partial t}{\partial n}\right)_w = f_w(x, y, z, \tau)$

热流密度均匀， $-\lambda\left(\dfrac{\partial t}{\partial n}\right)_w = f_w(\tau)$



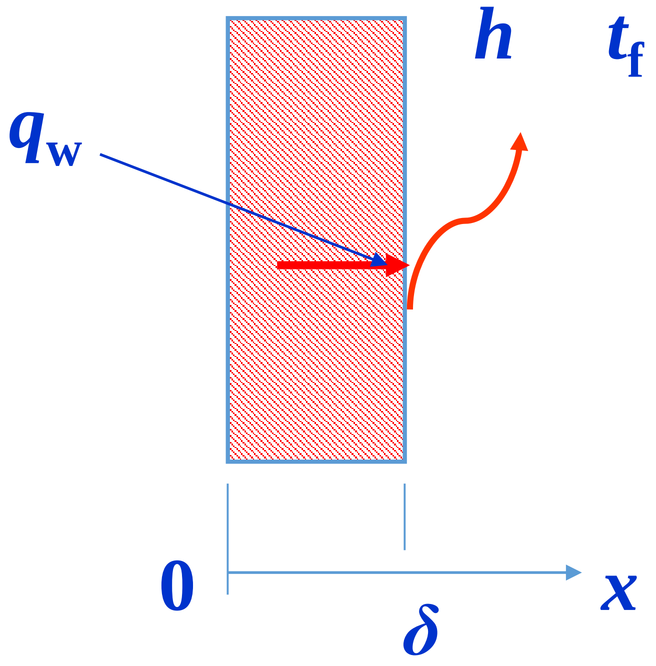
$$x = \delta,\ -\lambda\frac{\partial t}{\partial x} = q_w$$

3. 第三类边界条件:对流换热边界

牛顿冷却定律： $q_w = h(t_w - t_f)$

傅里叶定律： $q_w = -\lambda(\partial t / \partial n)$

右图中 $x = \delta,\ -\lambda \left.\dfrac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=\delta} = h(t_w - t_f)$



练习：列出下列问题的的数学描述：

1. 一块厚度为δ的平板，两侧的温度分别为t_{w1}和t_{w2}。

（1）导热系数为常数；（2）导热系数是温度的函数。

（1） $\lambda = C$

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$x = 0, t = t_{W1}$$

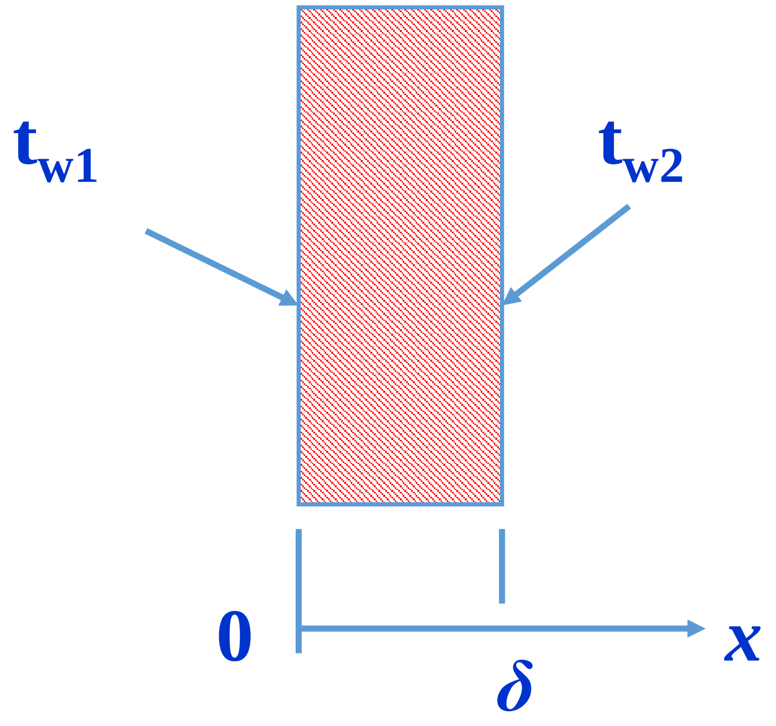
$$x = \delta, t = t_{W2}$$

（2） $\lambda = f(t)$

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x})$$

$$x = 0, t = t_{W1}$$

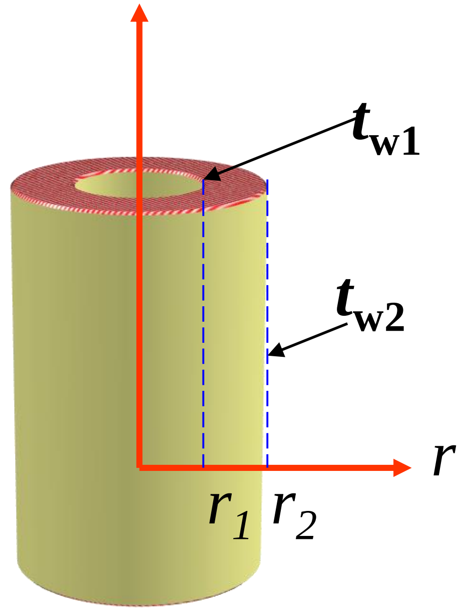
$$x = \delta, t = t_{W2}$$



2. 一块厚度为δ的平板，平板内有均匀的内热源，热源强度为 $\dot{\Phi}$，平板一侧温度为t_{w1}，平板另一侧绝热。

3. 一块厚度为δ的平板，平板内有均匀的内热源，热源强度为 $\dot{\Phi}$ ，平板一侧绝热，平板另一侧与温度为t_f 的流体对流换热，且表面传热系数为h。

4. 已知一单层圆筒壁的内、外半径分别为 r_1、r_2，导热系数λ为常量，无内热源，内、外壁面维持均匀恒定的温度 t_{w1}， t_{w2} 。

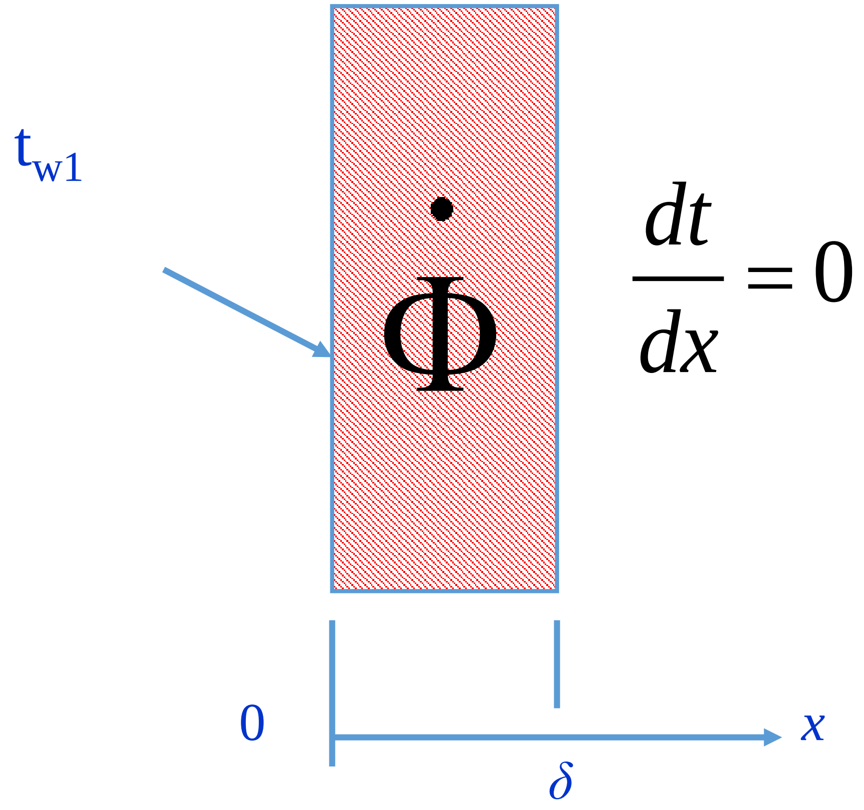


2. 一块厚度为δ的平板，平板内有均匀的内热源，热源强度为 $\dot{\Phi}$，平板一侧温度为t_{w1}，平板另一侧绝热。

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\dot{\Phi}$$

$$x=0, t=t_{w1}$$

$$x=\delta,\frac{dt}{dx}=0$$

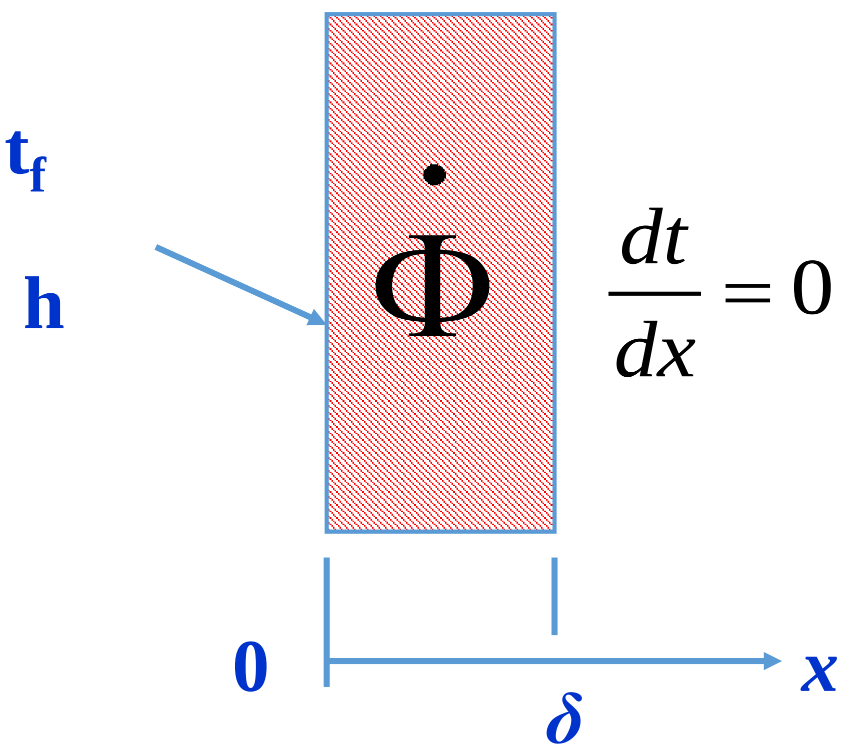


3. 一块厚度为δ的平板，平板内有均匀的内热源，热源强度为 $\dot{\Phi}$ 。平板一侧绝热，平板另一侧与温度为t_f 的流体对流换热，且表面传热系数为h。

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\dot{\Phi}$$

$$x=0,-\lambda\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=0}=h(t_f-t_0)$$

$$x=\delta,\frac{dt}{dx}=0$$

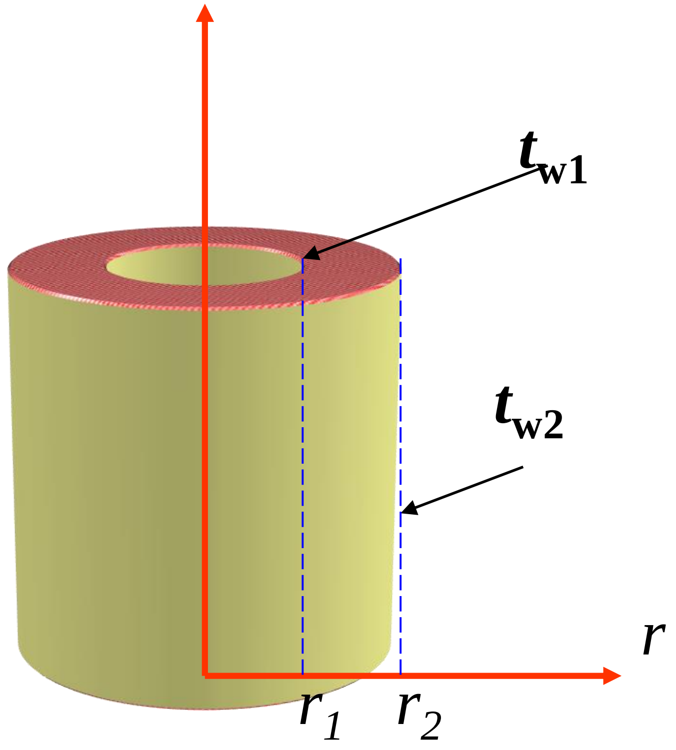


4. 已知一单层圆筒壁的内、外半径分别为 r_1、r_2，导热系数λ为常量，无内热源，内、外壁面维持均匀恒定的温度 t_{w1}，t_{w2}。

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t}{\partial r}\right)$$

$$r = r_1, t = t_{W1}$$

$$r = r_2, t = t_{W2}$$



思考

无内热源稳态导热的导热微分方程式变成

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0$$

式中没有热导率，所以有人认为无内源稳态导热物体的温度分布与热导率无关。

你同意这种看法吗？