第三章 非稳态导热

——温度场随时间变化的导热问题

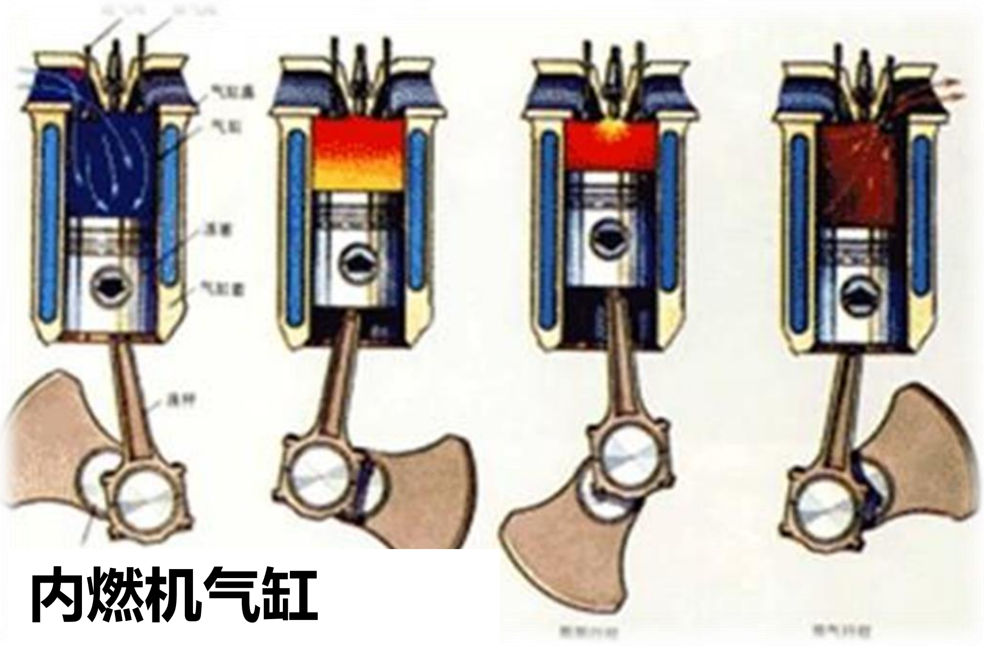
东南大学能源与环境学院

应用背景

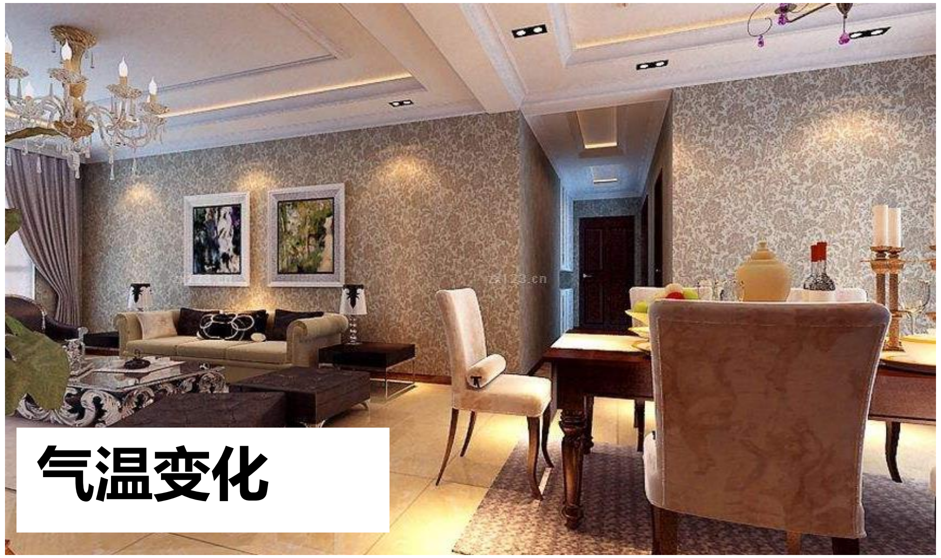
- 加热冷却过程
- 动力机械中的启停
- 地球的气候变化
- 医疗中的激光技术

应用背景


等离子喷涂


内燃机气缸


金属热处理


气温变化

3.1 概述

3.2 无限大平板的非稳态导热

3.3 集总参数法

3.4 半无限大物体的非稳态导热

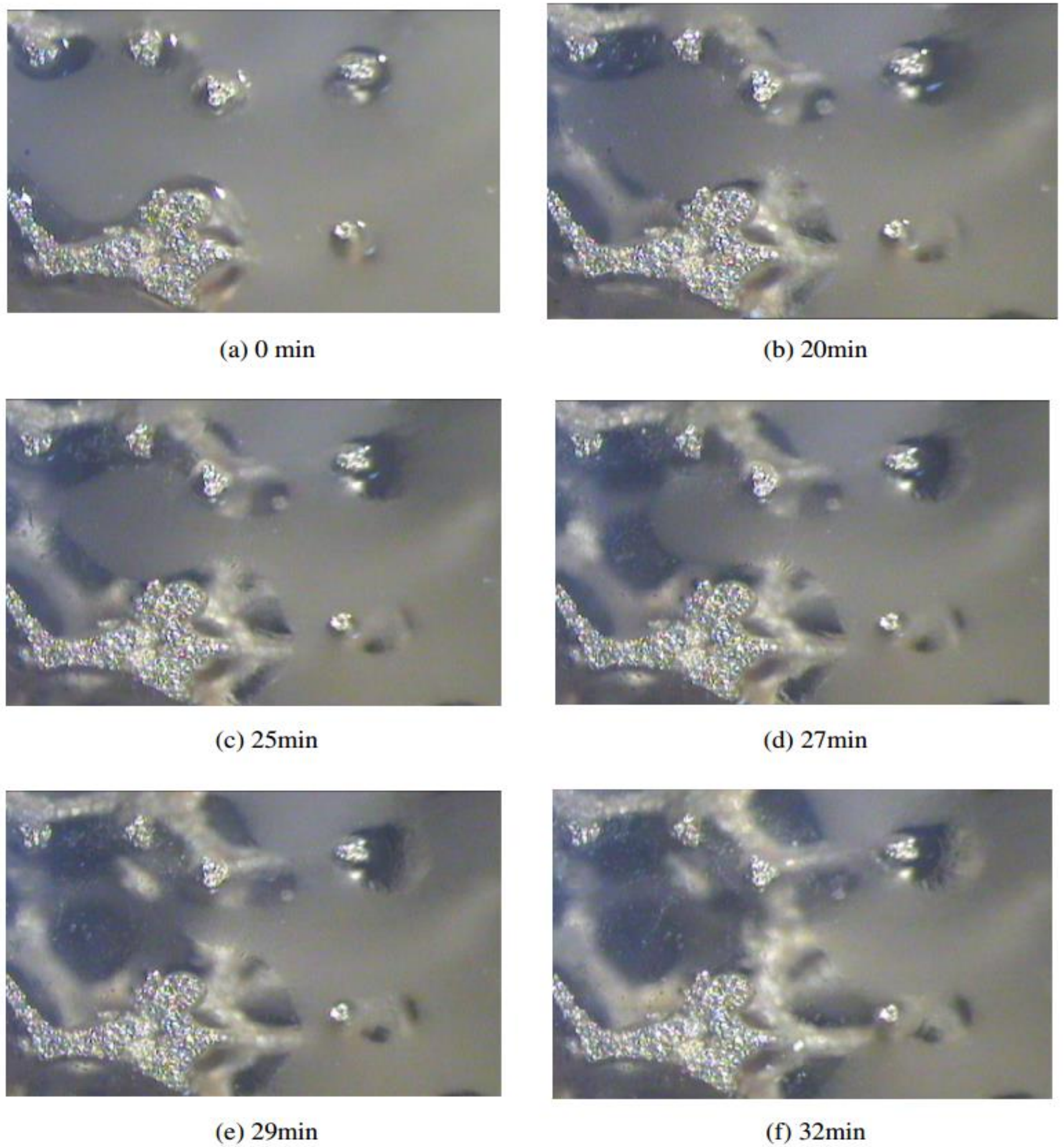
3.5 第三类边界条件下的二维和三维非稳态导热

3.1 概述

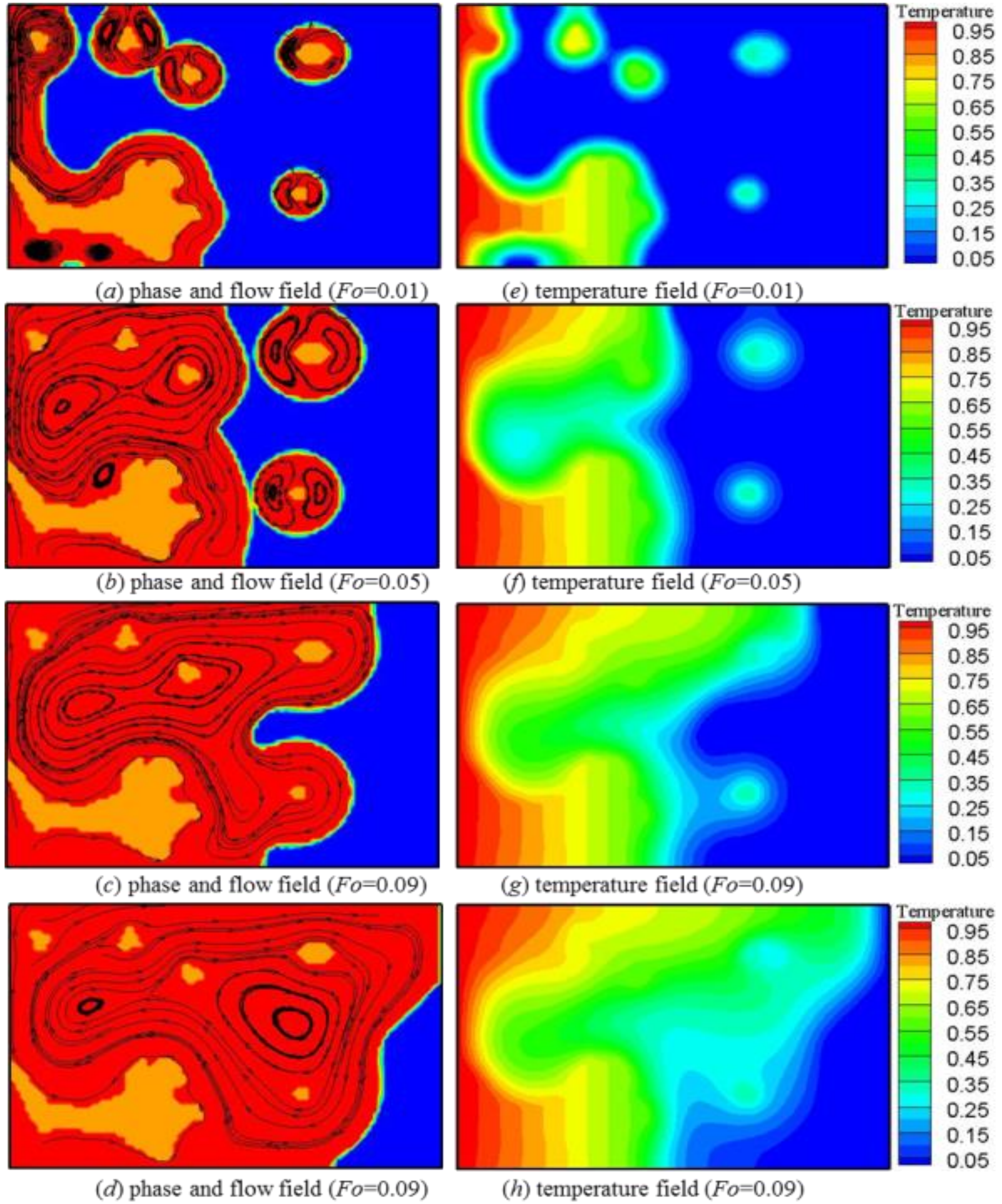
研究目的

- 确定物体瞬时温度场 —— 温度分布
- 物体达到某一确定温度需要的时间 —— 时间 t
- 温升速率 —— $dt/d\tau$
- 一段时间内物体传导的热量 —— 热流量

举例



(a) 0 min
(b) 20min
(c) 25min
(d) 27min
(e) 29min
(f) 32min

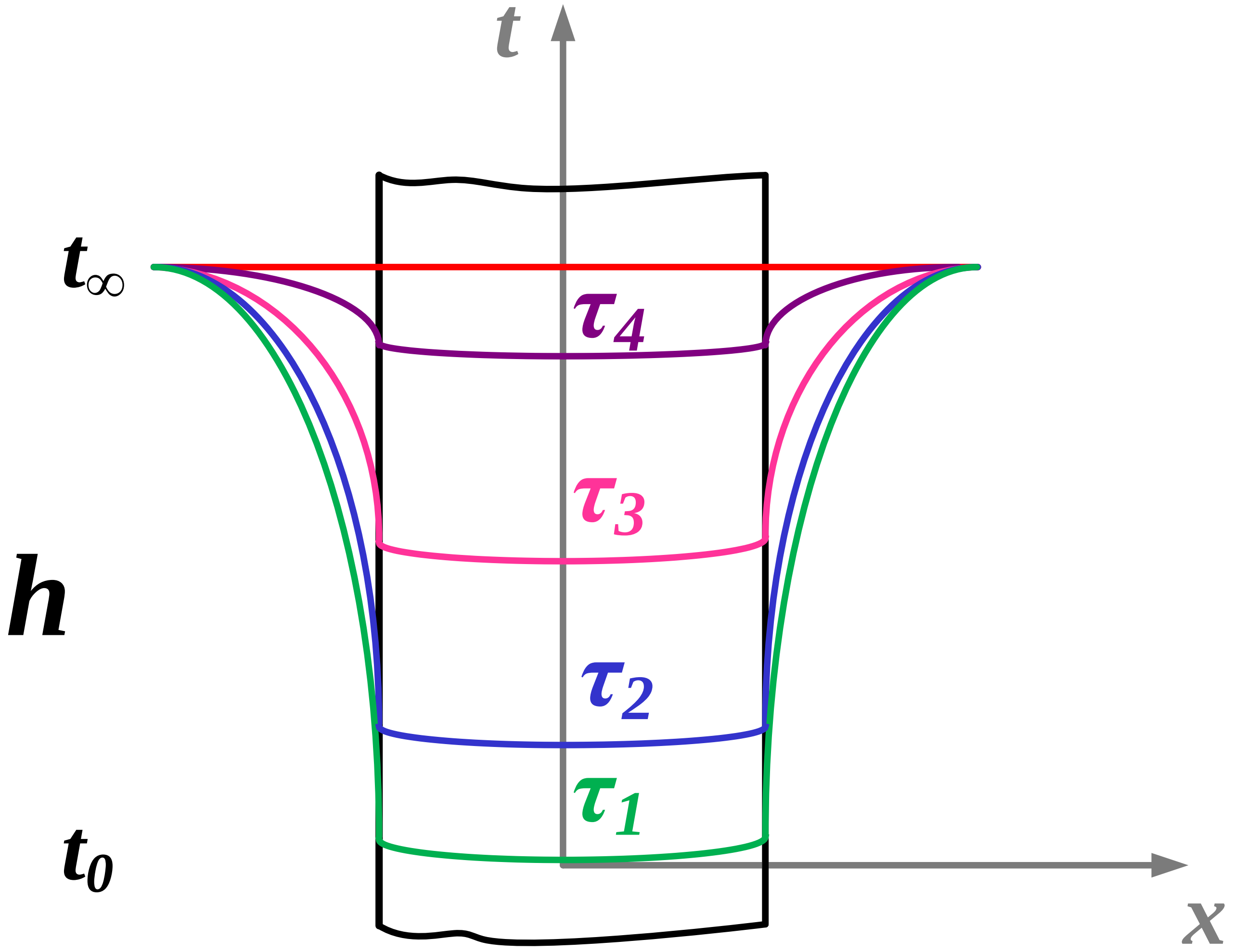


Temperature
0.95
0.85
0.75
0.65
0.55
0.45
0.35
0.25
0.15
0.05
(a) phase and flow field (Fo=0.01)
(e) temperature field (Fo=0.01)
(b) phase and flow field (Fo=0.05)
(f) temperature field (Fo=0.05)
(c) phase and flow field (Fo=0.09)
(g) temperature field (Fo=0.09)
(d) phase and flow field (Fo=0.09)
(h) temperature field (Fo=0.09)

非稳态导热过程的分析

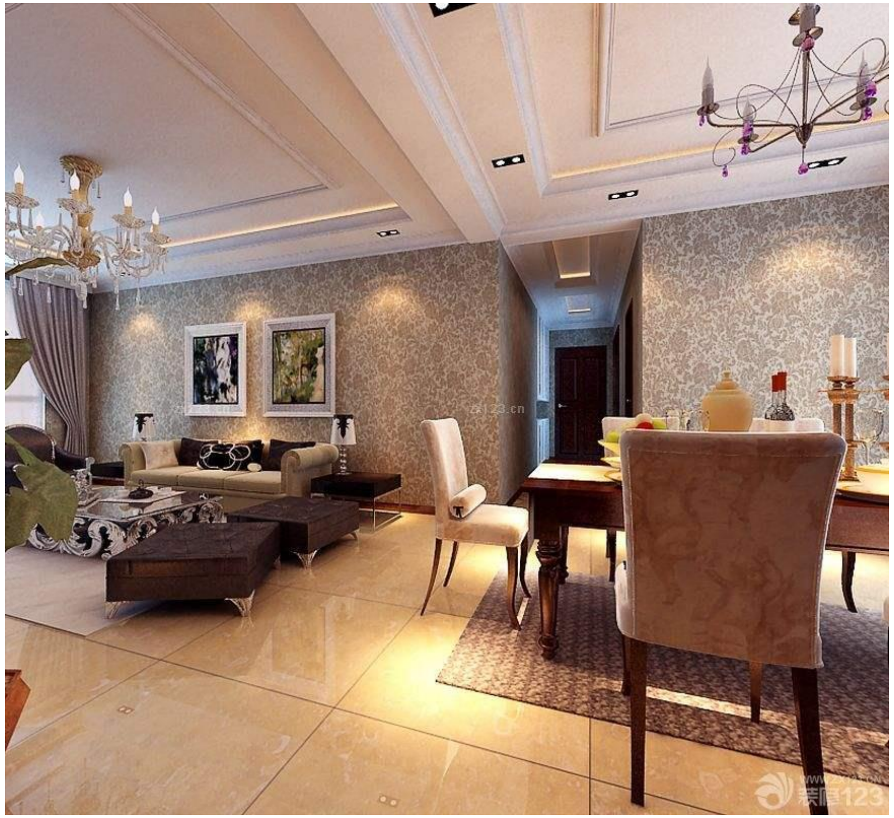
$$t = f\left(x, y, z, \tau\right);$$

$$\Phi = f\left(\tau\right)$$



非稳态导热过程的分类

- 周期性
- 非周期性（瞬态）



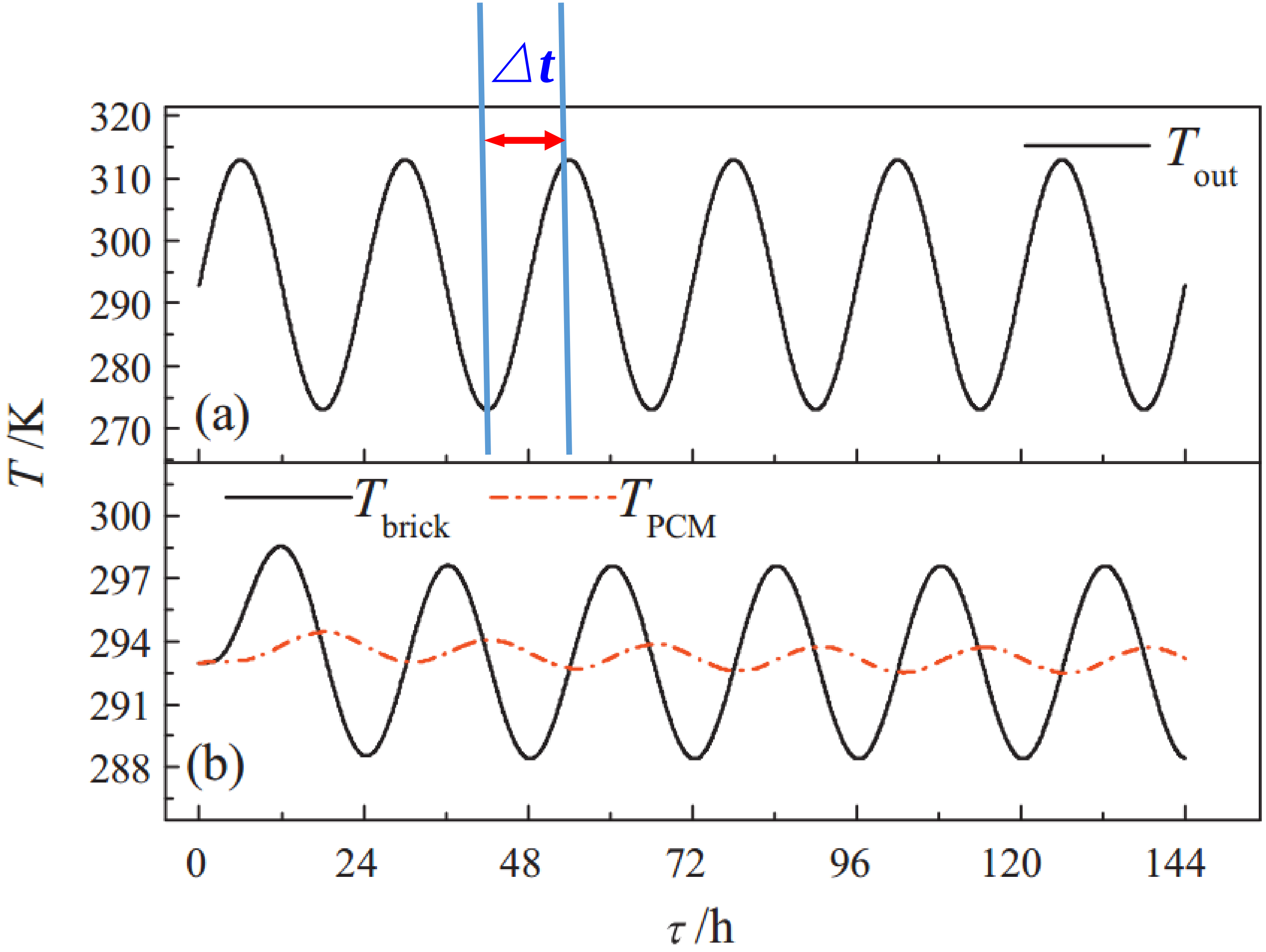
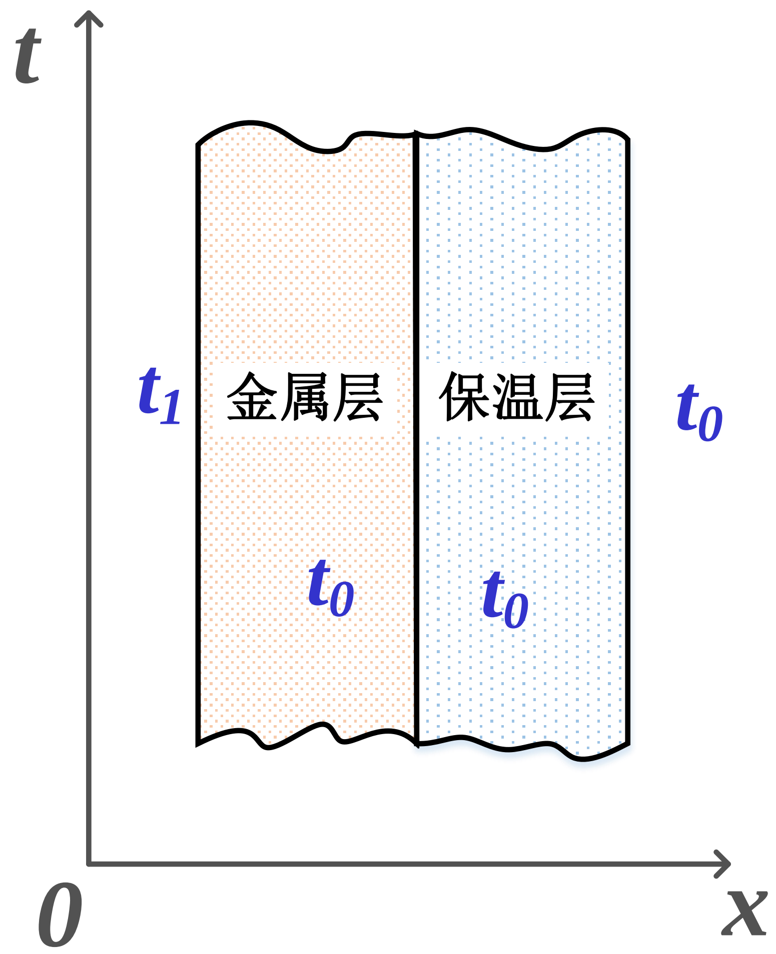


Fig. 7. Effect of PCM filling on indoor wall temperature response: (a) fluctuation of outdoor temperature, (b) indoor temperature response for both solid and PCM brick wall.

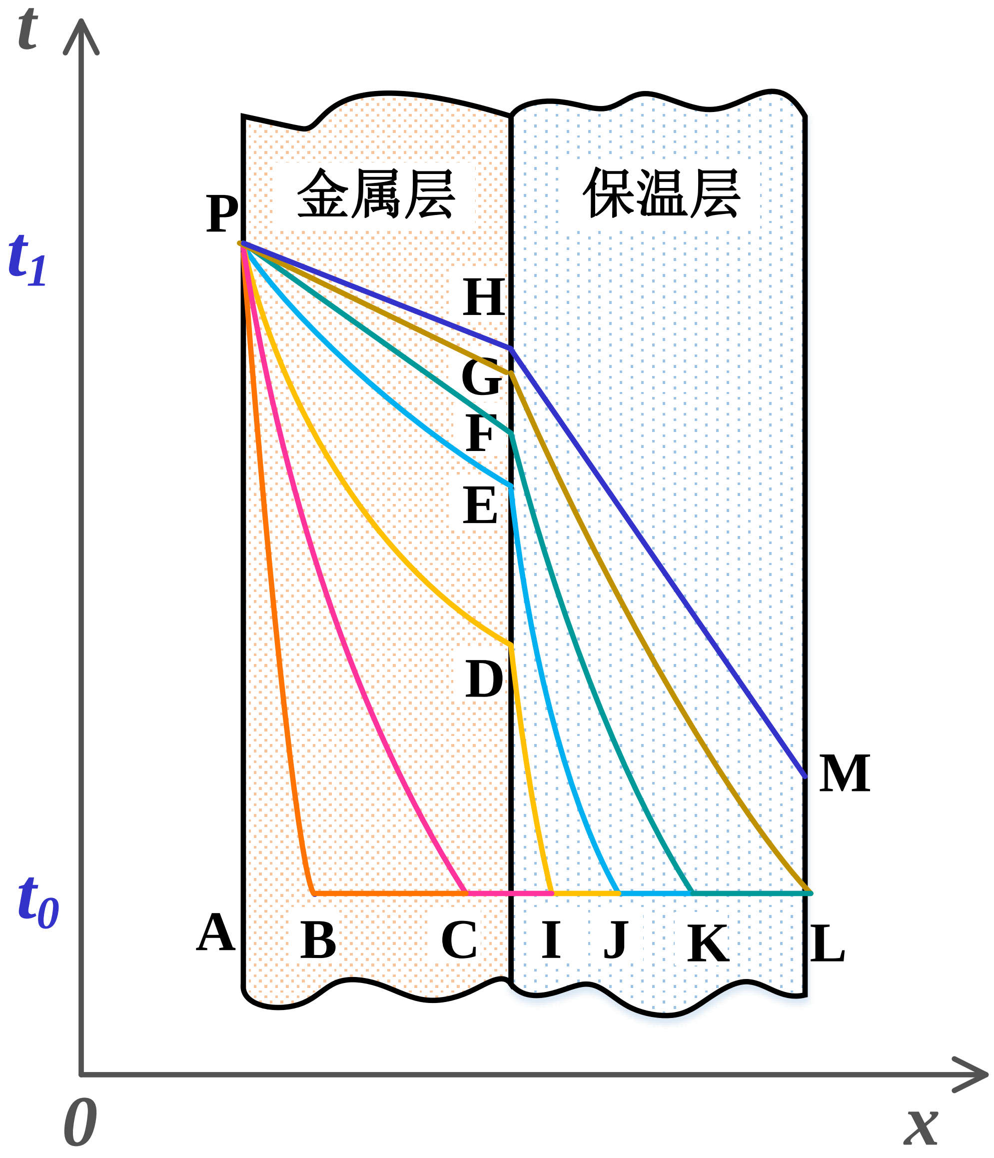


举例说明：

左侧表面温度突然升高至t_1

右侧仍与温度为t_0的空气接触

试分析这种条件下金属壁及保温层中温度变化过程。



分析：

初始：**PBL**

发展：**PDI，PEJ、PFK，PGL**

最终达到稳态时：**PHM**

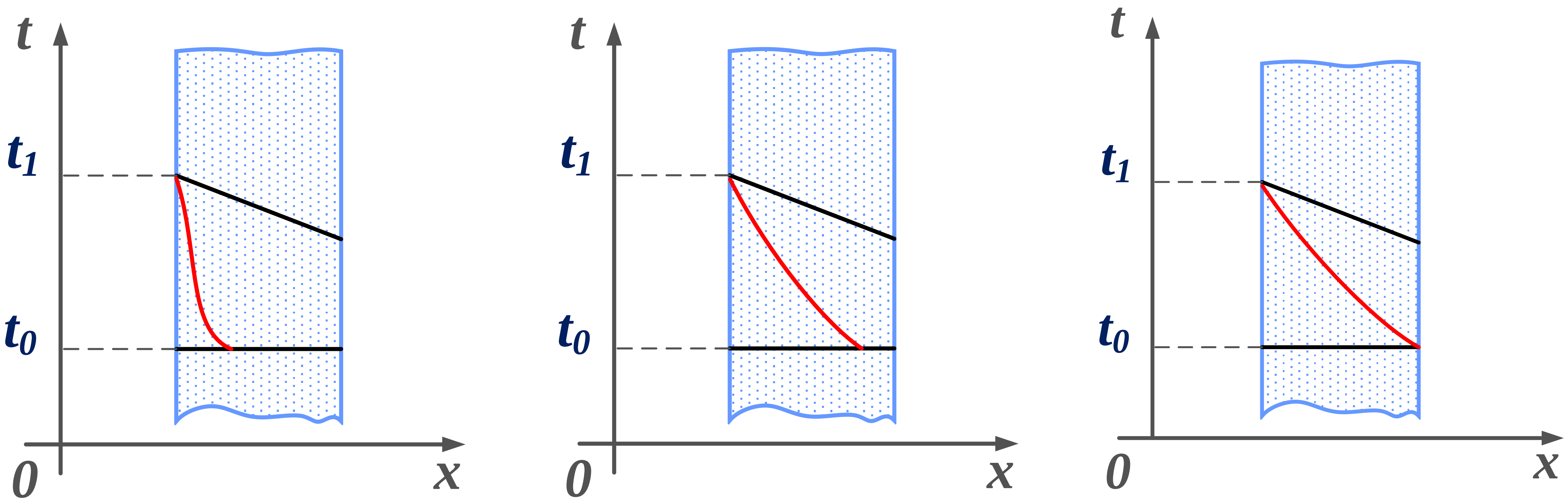
说明：

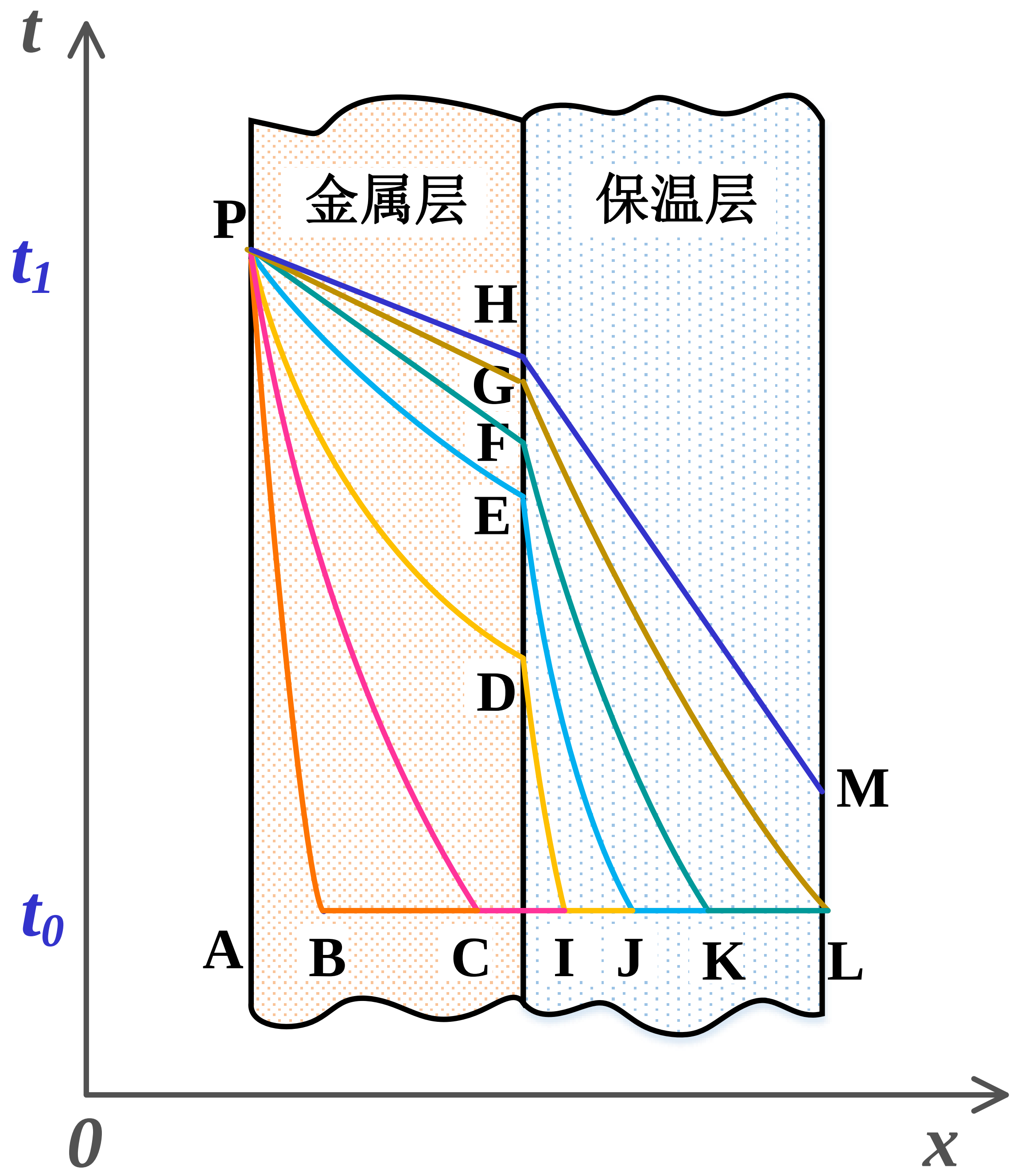
- 热扰动传递需要一定时间
- 截面间温度变化存在延迟现象

非稳态过程两个阶段

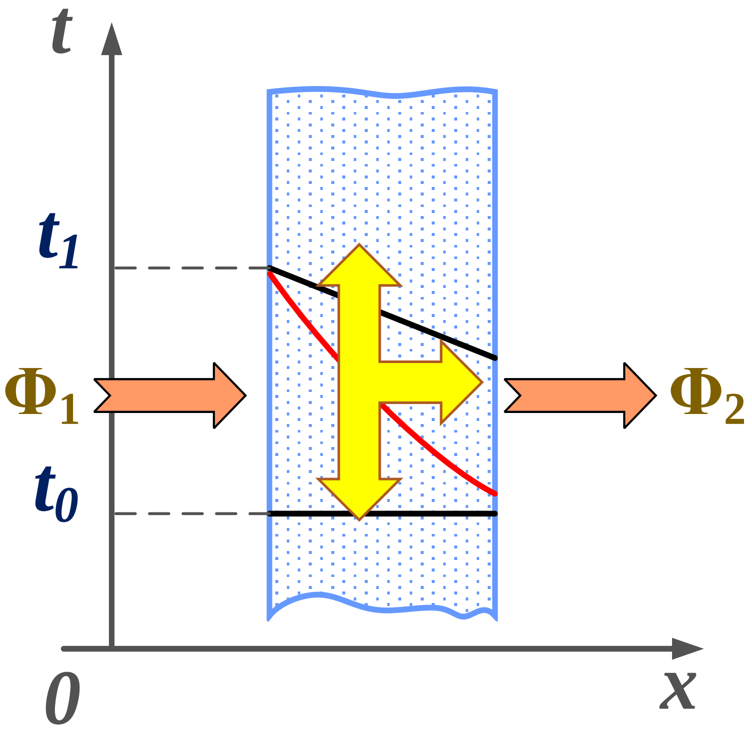
◆非正规状况阶段：物体温度分布主要受初始温度分布的控制。

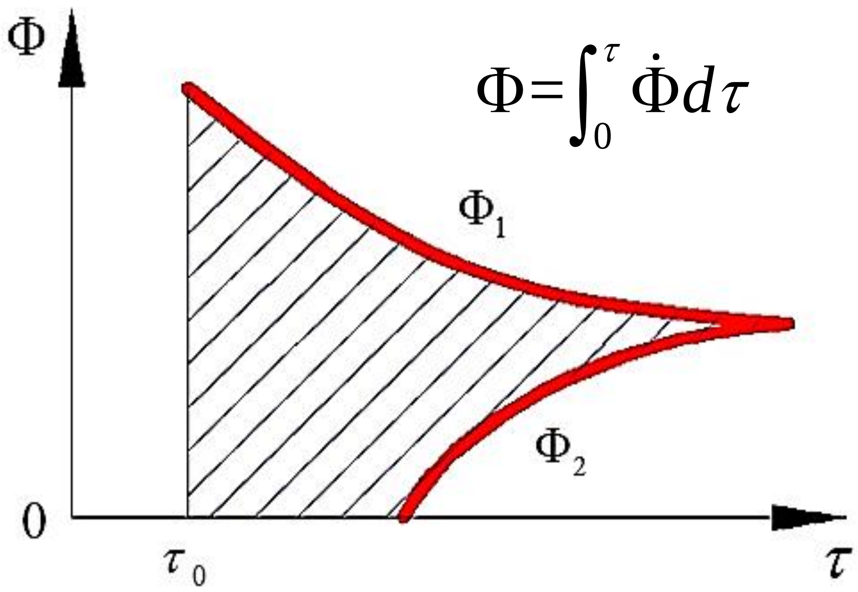
◆正规状况阶段：温度分布主要取决于热边界条件及物性。




t
x
0
t_1
t_0
金属层
保温层
P
H
G
F
E
D
M
A
B
C
I
J
K
L

热流密度　　$\Phi_1 \overset{?}{=} \Phi_2$





Φ_1 －－板左侧导入的热流量

Φ_2 －－板右侧导出的热流量

Φ_1表面热流量随时间 τ 增加而逐渐减小

Φ_2表面热流量随时间 τ 增加而逐渐增加

同一时刻流过不同截面的热流量是不同的。

非稳态导热微分方程

$$\underbrace{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}}_{①} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})}_{②} + \underbrace{\dot{\Phi}}_{③}$$

①非稳态项内能增量　　②三个坐标方向净导入的热量　　③内热源项

导热系数为常数时可将方程简化为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}) + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

导热微分方程 ➕ 初始条件和边界条件

➡ 对于给定条件具有唯一解

非稳态导热的特点

- $t = f(\tau)$
- $t = f(x, \tau)$
- 热扩散系数a
- 垂直于热量传递方向上，每一截面热流量Q不相等
- 温度分布有两个不同阶段

3.1 概述

3.2 无限大平板的非稳态导热

3.3 集总参数法

3.4 半无限大物体的非稳态导热

3.5 第三类边界条件下的二维和三维非稳态导热

3.2 无限大平板的非稳态导热

内部热阻不能忽略，第三类边界条件，非稳态导热，无限大平板

（1）均质材料；

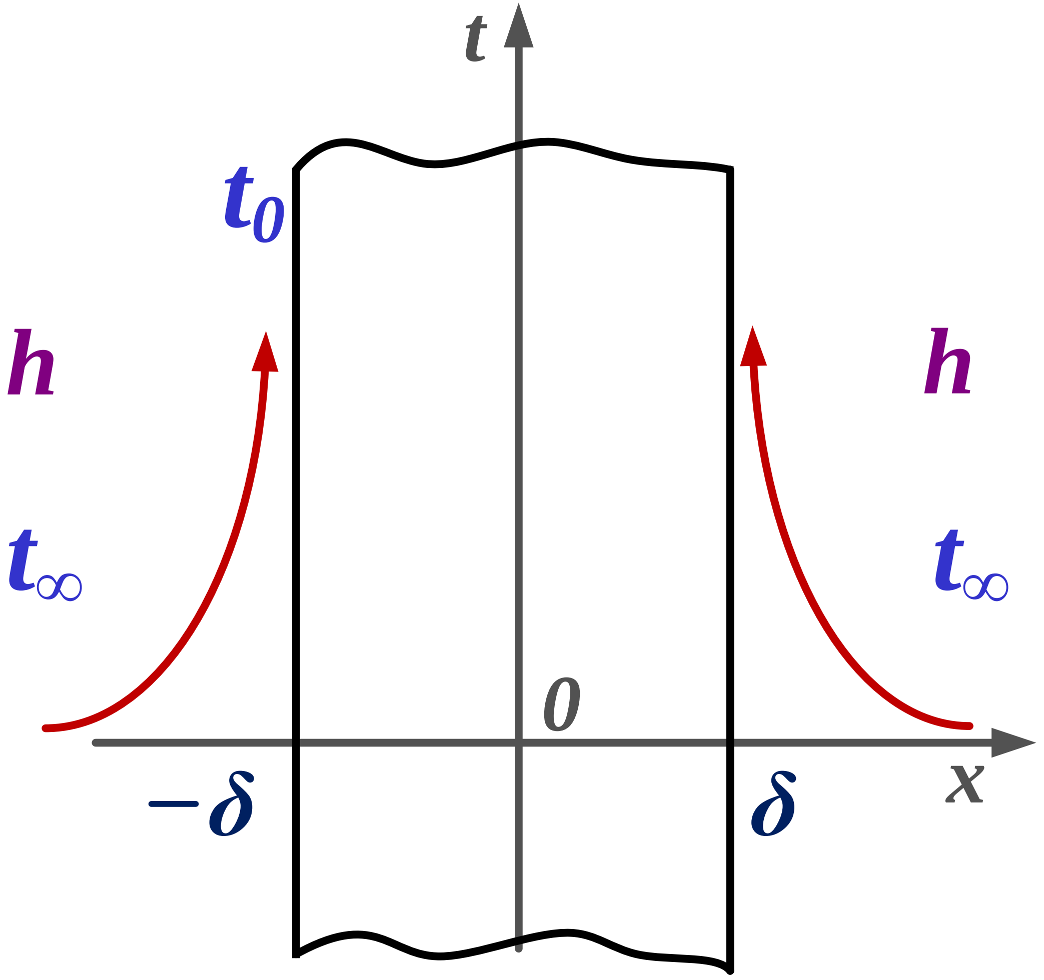
（2）λ，ρ，c为常数；

（3）板厚度为2δ;

（4）初始温度为t_0;

（5）初始瞬间将它放置于温度 t_∞=常数的流体中($t_\infty < t_0$)；

（6）流体与平板表面传热系数h为常数。



求：确定非稳态过程中板内的温度分布

导热微分方程及定解条件：

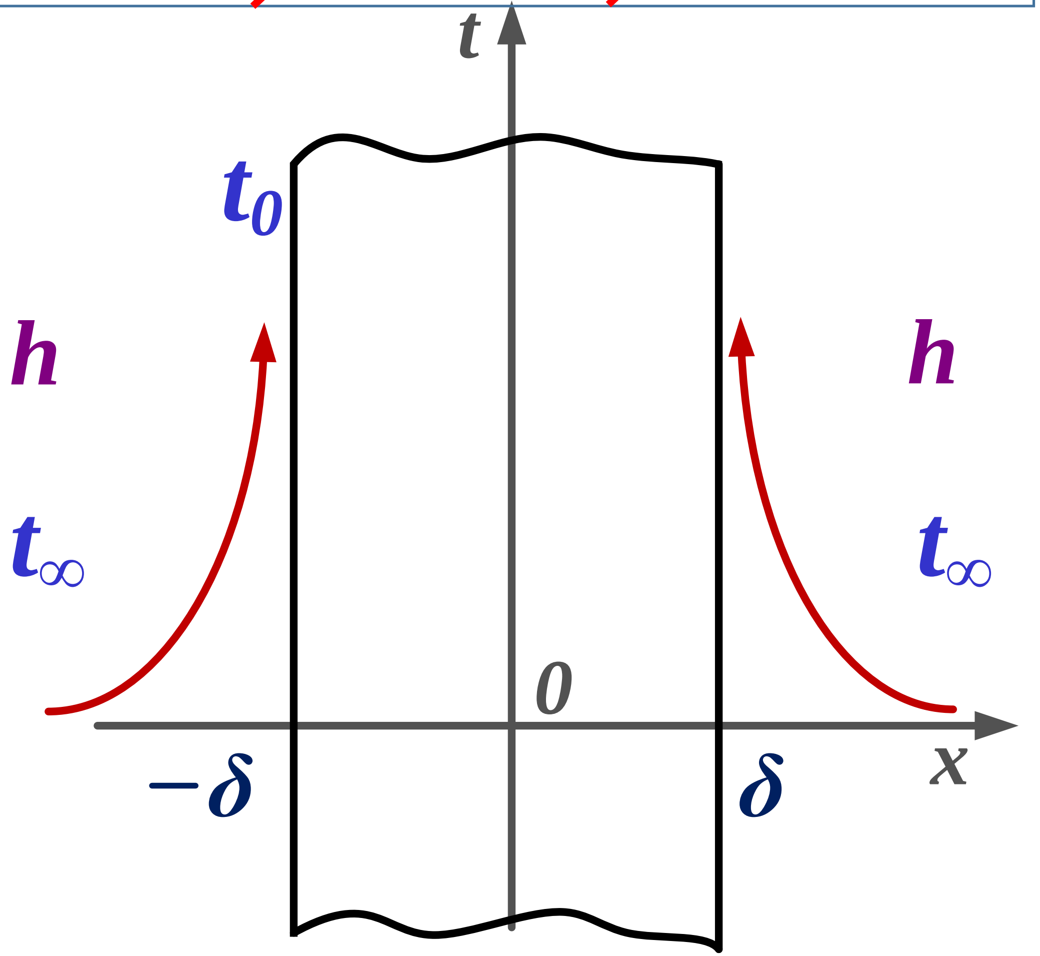
$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)}+\cancel{\dot{\Phi}}$$

导热微分方程 $$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\quad (0<x<\delta,\tau>0)$$

初 始 条 件 $$t(x,0)=t_0\quad (0\le x\le\delta)$$

边 界 条 件 $$\left.\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

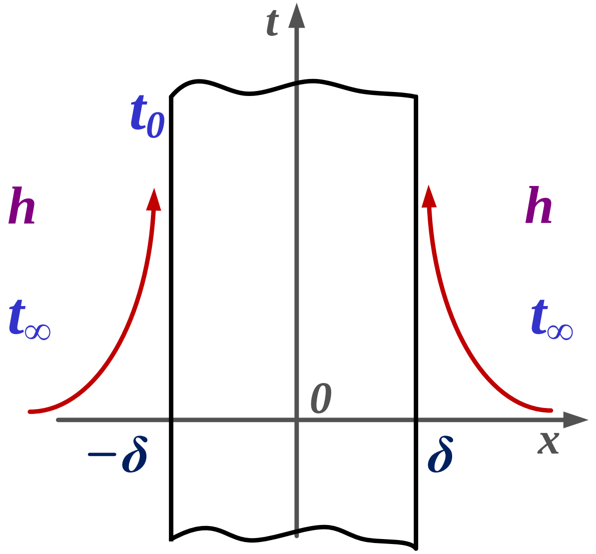
$$h\left[t(\delta,\tau)-t_\infty\right]=-\lambda\left.\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=\delta}$$



变量替换和无因次化

分别引入过余温度、无因次过余温度和无因次坐标

$$\theta = t(x,\tau) - t_\infty, \quad \bar{\theta} = \frac{t(x,\tau) - t_\infty}{t_0 - t_\infty}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\delta}$$



定义 $Bi = \dfrac{h\delta}{\lambda}, \quad Fo = \dfrac{a\tau}{\delta^2}$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (0 < x < \delta, \tau > 0)$$

$$\begin{cases} t(x,0) = t_0 & (0 \le x \le \delta) \\ \left.\dfrac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ h[t(\delta,\tau) - t_\infty] = -\lambda \left.\dfrac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=\delta} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} \quad 0 < x < \delta, \tau > 0$$

$$\begin{cases} Fo = 0 & \bar{\theta}(\bar{x},0) = 1 \\ \bar{x} = 0, & \dfrac{\partial \bar{\theta}(\bar{x},Fo)}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \bar{x} = 1, & \dfrac{\partial \bar{\theta}(\bar{x},Fo)}{\partial \bar{x}} = Bi\bar{\theta}(\bar{x},Fo) \end{cases}$$

问题的解析解

$$\bar{\theta} = f_1(\bar{x}, Fo, Bi)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} \qquad 0 < x < \delta, \tau > 0$$

$$\begin{cases} Fo = 0 & \bar{\theta}(\bar{x}, 0) = 1 \\ \bar{x} = 0, & \dfrac{\partial \bar{\theta}(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \bar{x} = 1, & \dfrac{\partial \bar{\theta}(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}} = Bi\bar{\theta}(\bar{x}, Fo) \end{cases}$$

通过分离变量的方法获得级数形式的解

$$\boxed{\bar{\theta} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n)}{\sin(\mu_n)\cos(\mu_n) + \mu_n} \cos(\mu_n \bar{x}) e^{-\mu_n^2 Fo}}$$

特征值 μ_n

$$\tan \mu_n = \frac{h\delta}{\lambda \mu_n} = \frac{Bi}{\mu_n}$$

Bi, Fo 物理意义

毕渥数 $$Bi=\frac{h\delta}{\lambda}=\frac{\delta}{\lambda}/\frac{1}{h}=\frac{R_\lambda}{R_h}=\frac{\text{内部导热热阻}}{\text{外部传热热阻}}$$

傅里叶数 $$Fo=\frac{a\tau}{l^2}=\frac{\tau}{l^2/a}$$

热扰动经 l 距离后传播到 l^2 面积上所需要的时间

对于一个特征数，要求掌握：

定义式＋物理意义，能够理解定义式中各个参数的意义。

毕渥简介

毕渥毕业于巴黎综合理工学院。他先于Fourier研究了固体的导热问题，并认识到应当将表面的对流传热考虑到导热问题的分析中，但未能获得分析解。他还在光的偏振研究方面有所贡献，并因此获得皇家学会奖。

- 在1800年代初期，他研究了通过溶液的光的偏振，以及电流和磁场之间的关系。毕渥-萨伐尔定律就是以他和菲利克斯·萨伐尔命名的。
- 毕渥是第一个发现云母独特的光学性质，因此以云母为基础的矿物黑云母就是以他命名的。
- 1804年，毕渥和约瑟夫·路易·盖·吕萨克制造了一个热气球，上升到了五千米的高度，目的是为了研究地球的大气层。
- 月球上有一个陨石坑是以毕渥命名的。

J.W.Biot (1774-1862)
法国物理学家

无量纲数（特征数/准则数）

基本思想：

当所研究的问题非常复杂，涉及的参数很多，为了减少问题所涉及的参数，将这样一些参数组合起来，使之能表征一类物理现象或物理过程的主要特征，并且没有量纲。

这样的无量纲数又被称为特征数，或准则数

特征数涉及到的几何尺度称为特征长度，一般用符号 l 表示。

对于一个特征数，要求掌握：定义式＋物理意义，能够理解定义式中各个参数的意义。

无量纲温度分布

$$\bar{\theta} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n)}{\sin(\mu_n)\cos(\mu_n) + \mu_n} \cos(\mu_n \bar{x}) e^{-\mu_n^2 Fo}$$

当 $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \geq 0.2$ 时，级数除第一项外可以忽略，此时

$$\bar{\theta} = 2\exp(-\mu_1^2 Fo) \frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1) + \mu_1} \cos(\mu_1 \bar{x})$$

$$\bar{\theta} = f_1(\bar{x}, Fo, Bi)$$

在平壁内任意一点上， $ln\bar{\theta} \propto -\mu_1^2 Fo$

此时称为导热的正规状况阶段

这一特点可用来测量热扩散率 a

正规状况阶段

$$\boxed{\bar{\theta} = 2\exp(-\mu_1^2 Fo)\frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1)+\mu_1}\cos(\mu_1 \bar{x})}$$

在对称面上，$\bar{x} = 0$ $\cos(\mu_1 \bar{x})=1$

$$\bar{\theta}_m = 2\exp(-\mu_1^2 Fo)\frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1)+\mu_1} = f_2(Fo, Bi)$$

对于任何位置，与对称面过余温度的比值

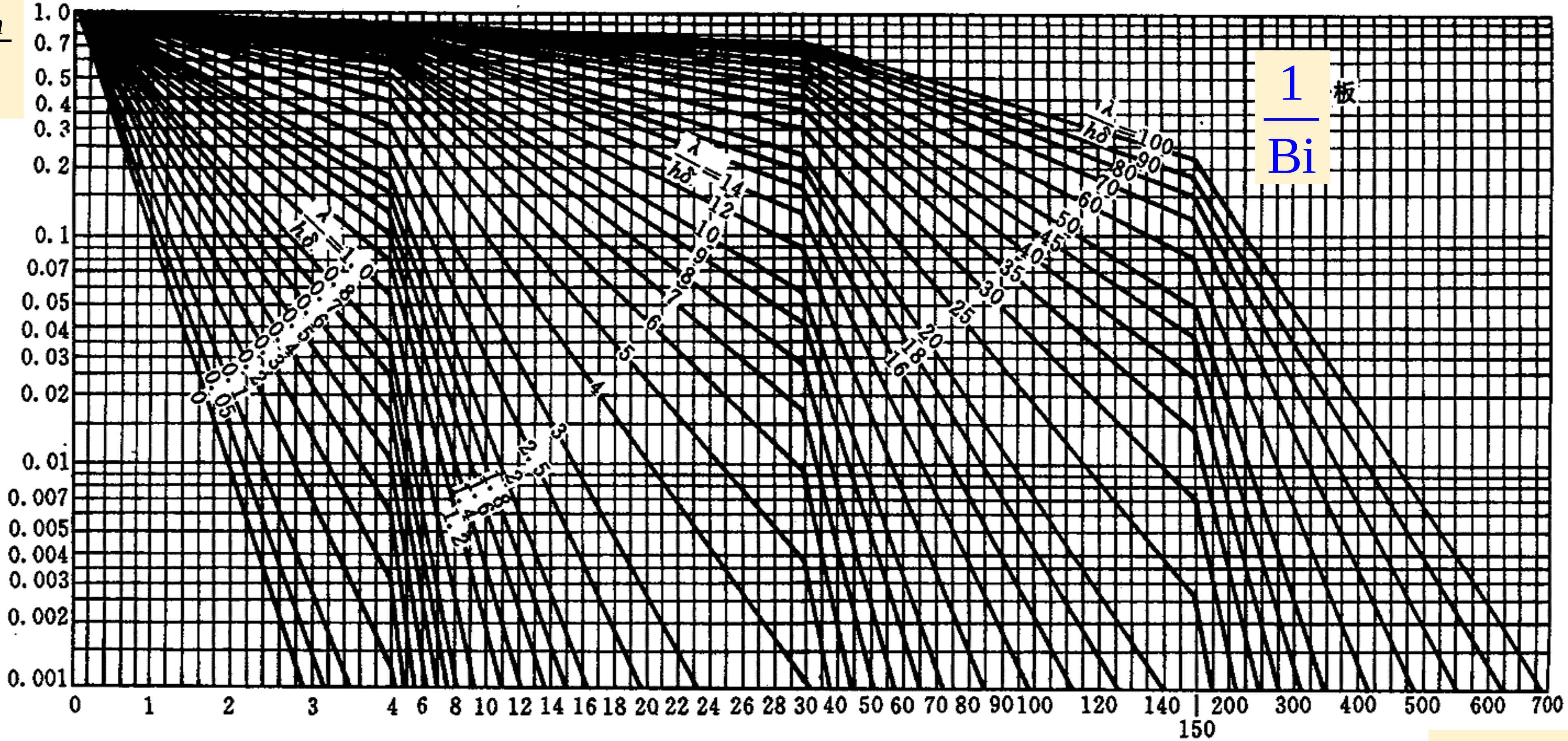
$$\frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_m} = \cos(\mu_1 \bar{x}) = f_3(Bi, \bar{x})$$

在任意位置，$\bar{\theta} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_m}\cdot\bar{\theta}_m = f_2(Fo, Bi)\cdot f_3(Bi, \bar{x})$

图解法 对称面

$$\overline{\theta}_m = 2\exp(-\mu_1^2 Fo)\frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1)+\mu_1} = f_2(Fo, Bi)$$

$\dfrac{\theta_m}{\theta_0}$



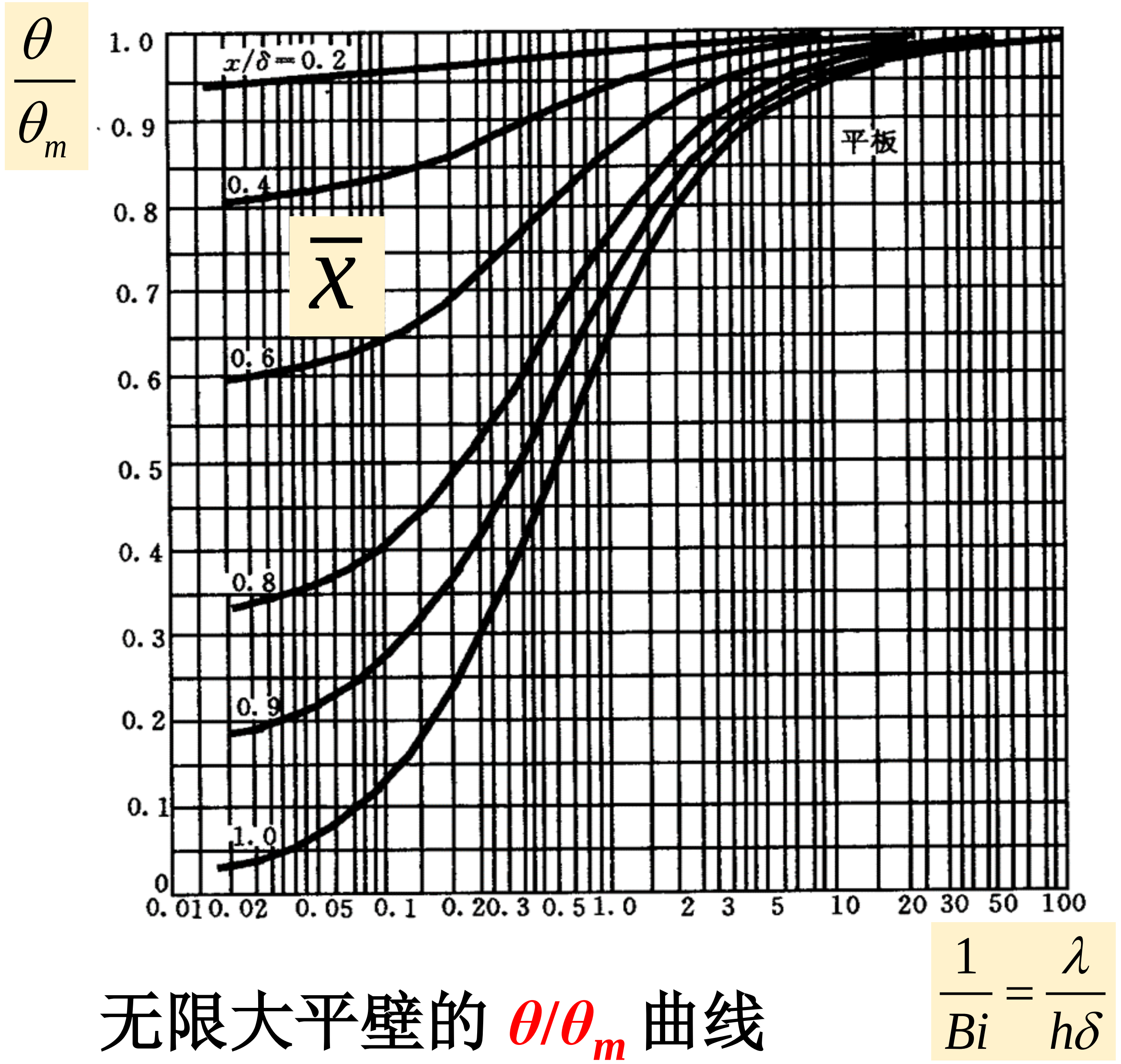
$\dfrac{1}{\text{Bi}}$

无限大平壁中心温度的诺谟图

$Fo = \dfrac{a\tau}{l^2}$

任何位置与对称面过余温度的比值

$$\frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_m}=\cos(\mu_1\bar{x}) \quad = f_3(Bi,\bar{x})$$



无限大平壁的 θ/θ_m 曲线

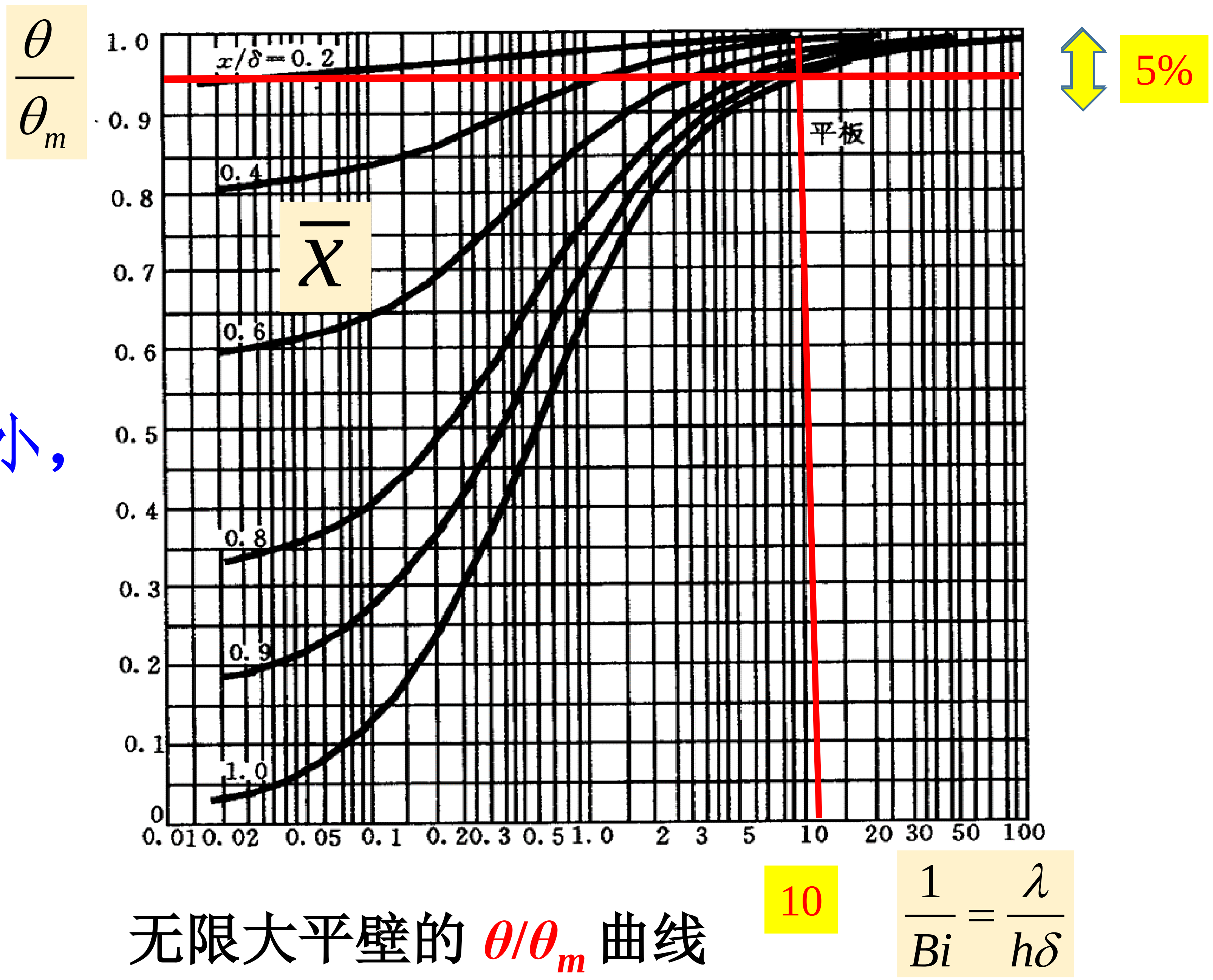
在任意位置，

$$\bar{\theta}=\frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_m}\cdot\bar{\theta}_m$$

$$=f_2(Fo,Bi)\cdot f_3(Bi,\bar{x})$$

诺模图的启示

当Bi <= 0.1时，
平板内部温度变化很小，
趋于一致



无限大平壁的 θ/θ_m 曲线

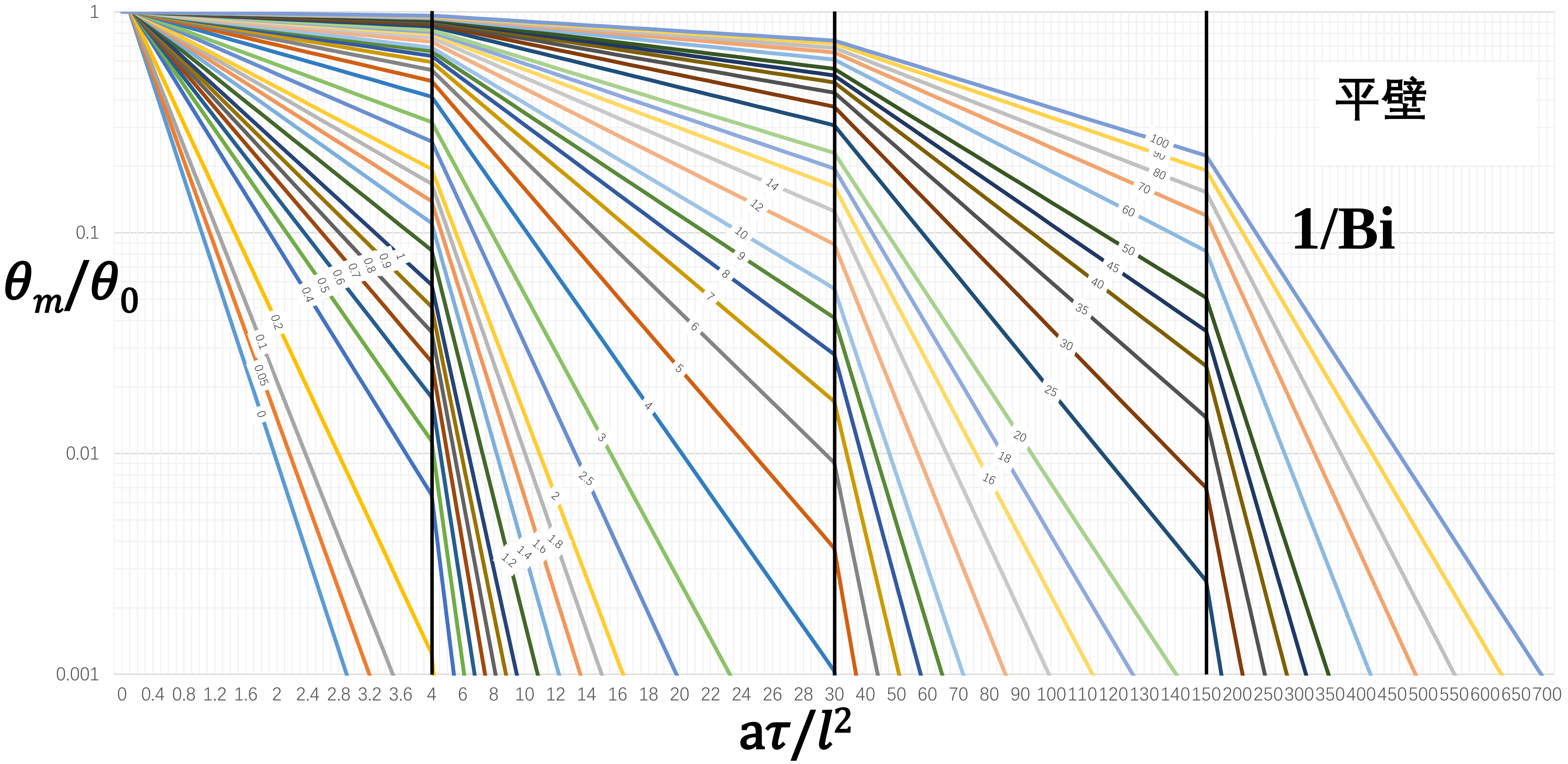
$$\bar{\theta}_m = 2\exp(-\mu_1^2 Fo)\frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1)+\mu_1}$$

$$= f_2(Fo, Bi)$$

$$\tan\mu_n = \frac{h\delta}{\lambda\mu_n} = \frac{Bi}{\mu_n}$$

1/Bi	μ1	sinμ1	cosμ1	Fo	θm
0	1.57	0.999999683	0.000796327	0	1.273239141
	1.57	0.999999683	0.000796327	0.2	0.777698905
	1.57	0.999999683	0.000796327	0.4	0.475021201
	1.57	0.999999683	0.000796327	0.6	0.290144605
	1.57	0.999999683	0.000796327	0.8	0.177221336
	1.57	0.999999683	0.000796327	1	0.10824741
	1.57	0.999999683	0.000796327	1.2	0.066117895
	1.57	0.999999683	0.000796327	1.4	0.040385041
	1.57	0.999999683	0.000796327	1.6	0.024667324
	1.57	0.999999683	0.000796327	1.8	0.015066887
	1.57	0.999999683	0.000796327	2	0.009202907
	1.57	0.999999683	0.000796327	2.2	0.005621168
	1.57	0.999999683	0.000796327	2.4	0.003433429
	1.57	0.999999683	0.000796327	2.6	0.00209715
	1.57	0.999999683	0.000796327	2.8	0.001280947
	1.57	0.999999683	0.000796327	3	0.000782407
0.05	1.496	0.997204059	0.074726605	0	1.269904918
	1.496	0.997204059	0.074726605	0.2	0.811670207
	1.496	0.997204059	0.074726605	0.4	0.51878571
	1.496	0.997204059	0.074726605	0.6	0.331586168
	1.496	0.997204059	0.074726605	0.8	0.211936035
	1.496	0.997204059	0.074726605	1	0.135460666
	1.496	0.997204059	0.074726605	1.2	0.086580802
	1.496	0.997204059	0.074726605	1.4	0.055338834
	1.496	0.997204059	0.074726605	1.6	0.035370273
	1.496	0.997204059	0.074726605	1.8	0.022607202
	1.496	0.997204059	0.074726605	2	0.014449579

诺谟图



例题

一块初温为20 °C，厚度为10 cm的钢板

密度为7800 kg/m³,比热容为460.5 J/(kg.K),导热系数为53.5W/(m.K)，

放入1200 °C的加热炉中加热，表面传热系数为407 W/(m².K)。

问单面加热30min时中心温度为多少？

如两面加热要达到相同的中心温度需要多少时间？

解题思路

正规状况阶段

$$\bar{\theta} = 2\exp(-\mu_1^2 Fo)\frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1)+\mu_1}\cos(\mu_1\bar{x})$$

在对称面上，$\bar{x} = 0$　　$\cos(\mu_1\bar{x})=1$

$$\bar{\theta}_m = 2\exp(-\mu_1^2 Fo)\frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1)+\mu_1} = f_2(Fo, Bi)$$

3.1 概述

3.2 无限大平板的非稳态导热

3.3 集总参数法

3.4 半无限大物体的非稳态导热

3.5 第三类边界条件下的二维和三维非稳态导热

3-3 集总参数法

从前面的Nomograph里可以看出，当毕渥数***Bi***满足

无限大平壁 $$Bi=\frac{h\delta}{\lambda}\le 0.1$$

无限长圆柱体 $$Bi=\frac{hR}{\lambda}\le 0.1$$

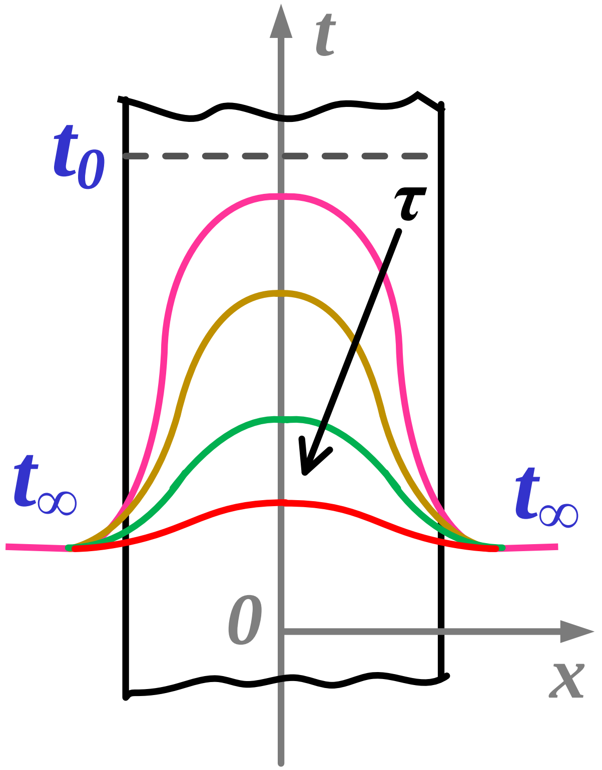
此时，固体内的过余温度的偏差**小于5%**。

Bi数对温度分布的影响

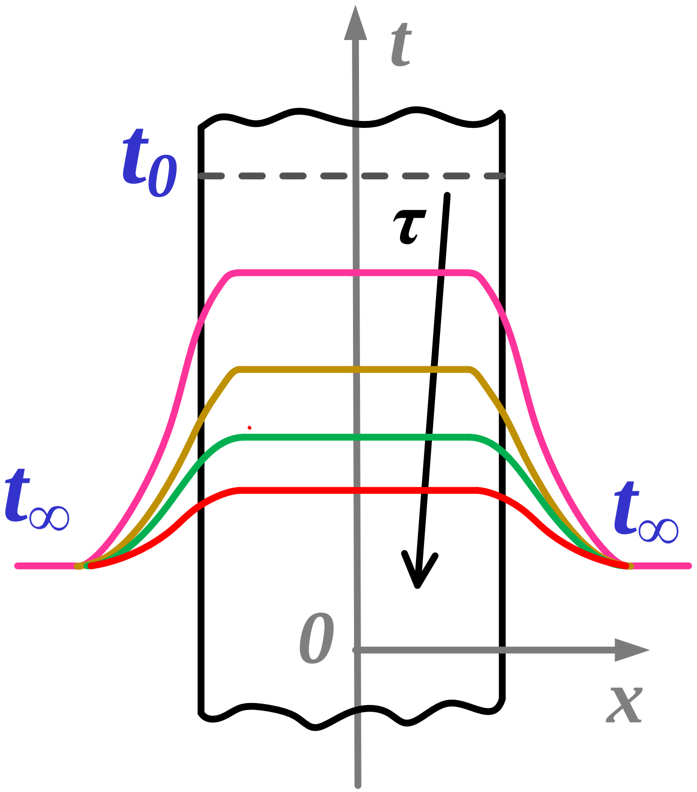
$$\frac{1}{h} \ll \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\frac{1}{h} \gg \frac{\delta}{\lambda}$$

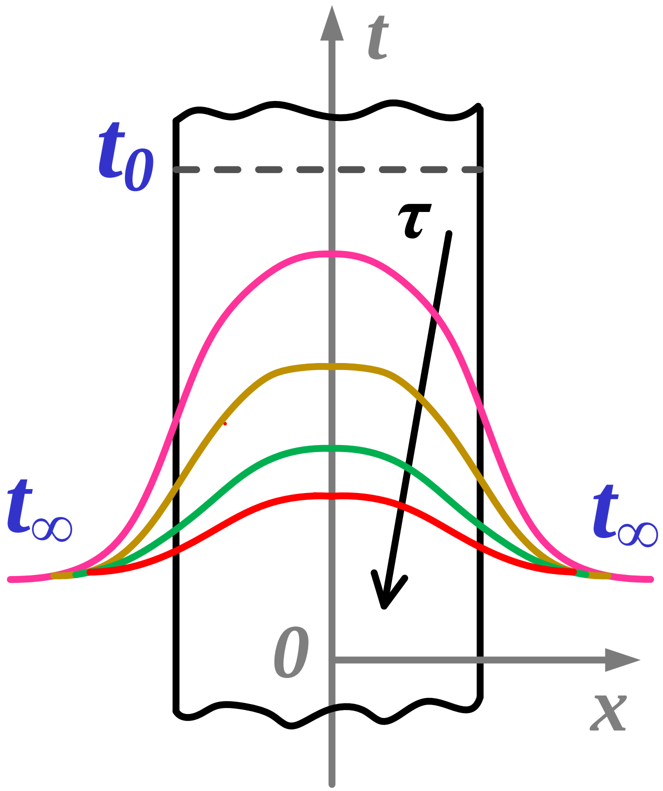
$$\frac{1}{h} = \frac{\delta}{\lambda}$$



$(a)\ Bi \to \infty$



$(b)\ Bi \to 0$



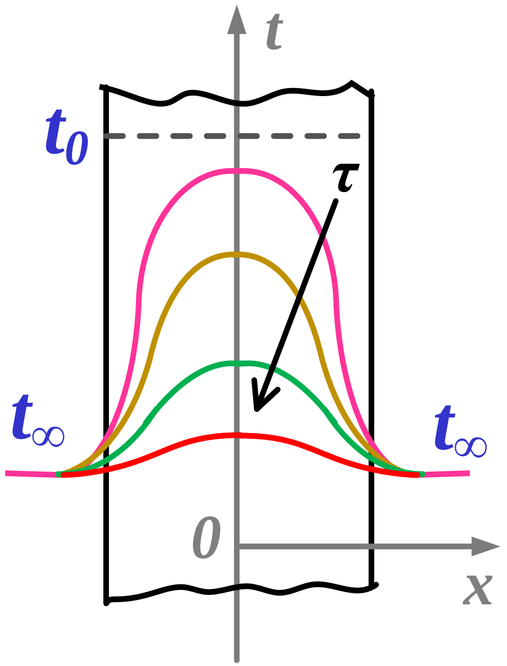
(c) *Bi*为有限大小

$$Bi=\frac{h\delta}{\lambda}=\frac{\delta}{\lambda}/\frac{1}{h}=\frac{R_\lambda}{R_h}=\frac{\text{内部导热热阻}}{\text{外部传热热阻}}$$

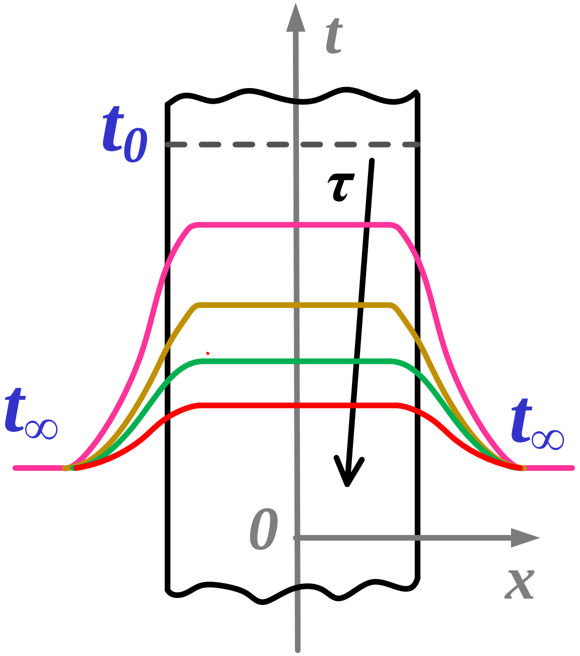
特征数

当$Bi\to\infty$时$\Rightarrow R_\lambda >> R_h$　　可以忽略对流换热热阻

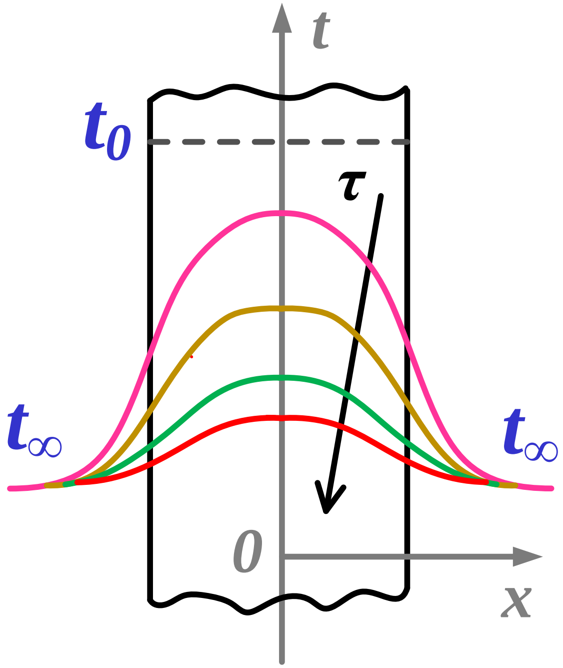
当$Bi\to 0$时$\Rightarrow R_\lambda << R_h$　　可以忽略内部导热热阻



(a) $B_i\to\infty$



(b) $B_i\to 0$



(c) B_i为有限大小

毕渥简介

毕渥毕业于巴黎综合理工学院。他先于Fourier研究了固体的导热问题，并认识到应当将表面的对流传热考虑到导热问题的分析中，但未能获得分析解。他还在光的偏振研究方面有所贡献，并因此获得皇家学会奖。

- 在1800年代初期，他研究了通过溶液的光的偏振，以及电流和磁场之间的关系。毕渥-萨伐尔定律就是以他和菲利克斯·萨伐尔命名的。
- 毕渥是第一个发现云母独特的光学性质，因此以云母为基础的矿物黑云母就是以他命名的。
- 1804年，毕渥和约瑟夫·路易·盖·吕萨克制造了一个热气球，上升到了五千米的高度，目的是为了研究地球的大气层。
- 月球上有一个陨石坑是以毕渥命名的。

J.W.Biot (1774-1862)
法国物理学家

无量纲数（特征数/准则数）

基本思想：

当所研究的问题非常复杂，涉及的参数很多，为了减少问题所涉及的参数，将这样一些参数组合起来，使之能表征一类物理现象或物理过程的主要特征，并且没有量纲。

这样的无量纲数又被称为特征数，或准则数

特征数涉及到的几何尺度称为特征长度，一般用符号 l 表示。

对于一个特征数，要求掌握：定义式＋物理意义，能够理解定义式中各个参数的意义。

集总参数法

集总体（*Bi*→0）

➢ 内部导热热阻<<表面换热热阻

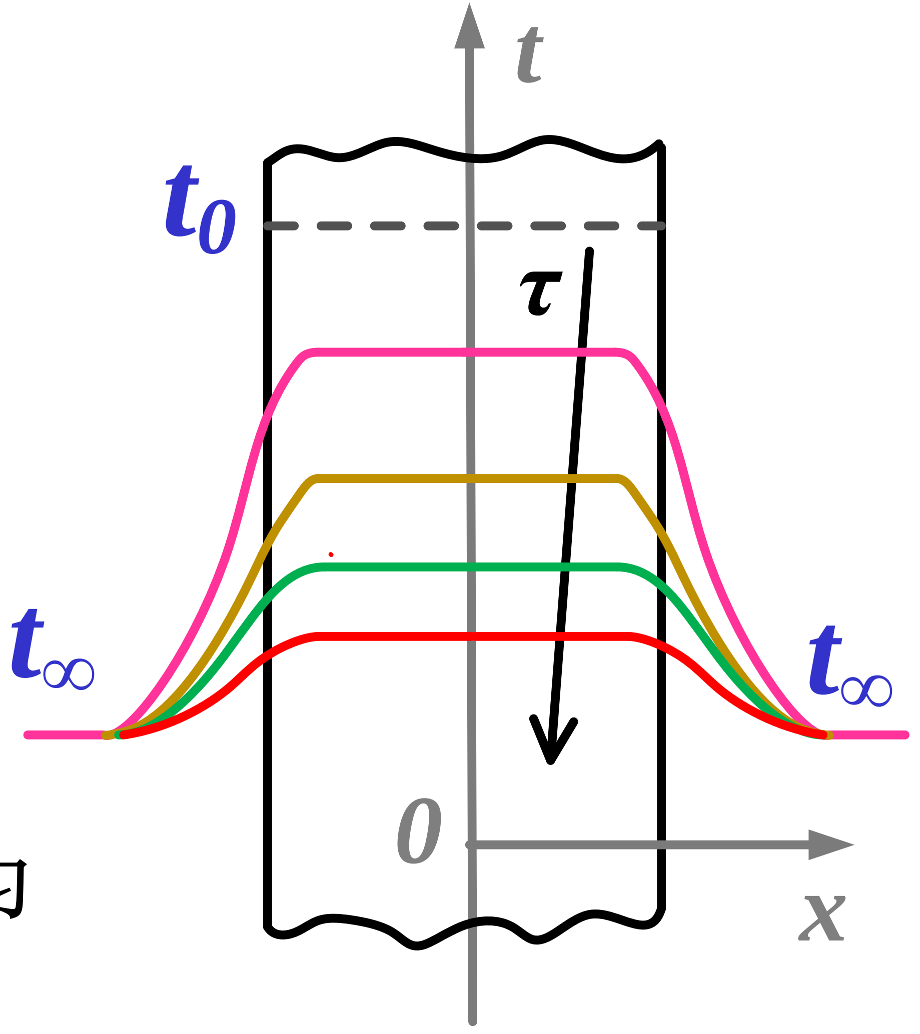
➢ 非稳态导热体

零维问题

➢ 任意时刻导热体内部各点温度接近均匀

➢ 导热体的温度只随时间变化

➢ 不随空间变化。



(b) $B_i \to 0$

温度变化规律的分析

设有一常物性，任意形状的固体

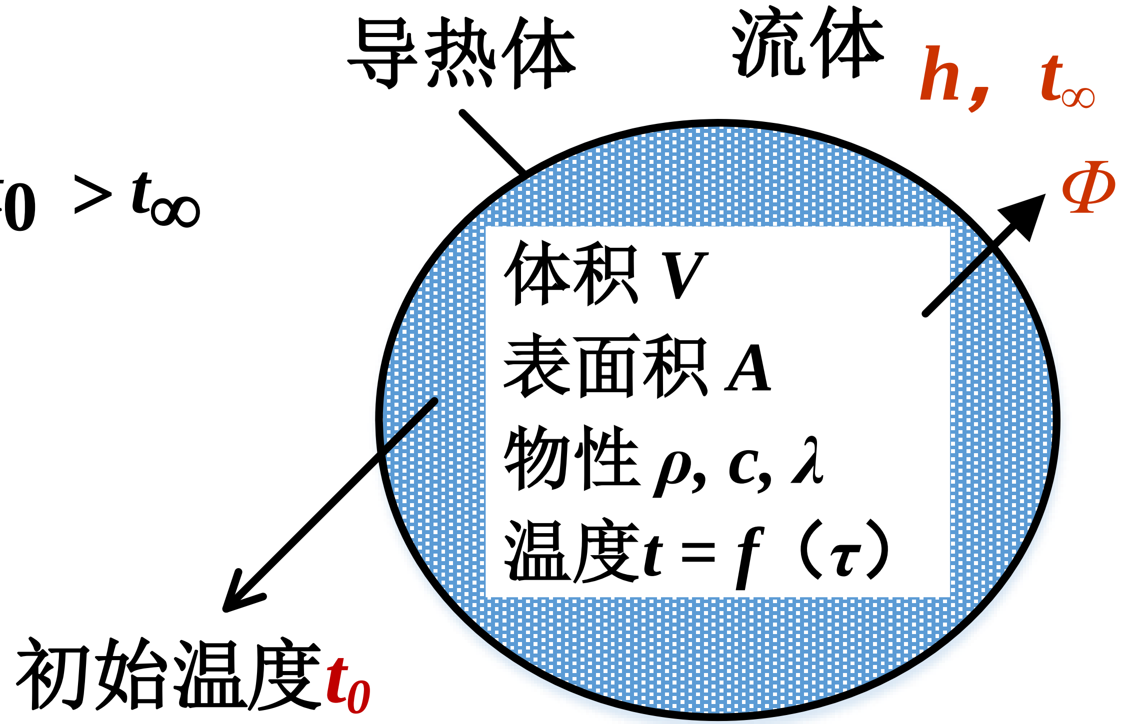
体积为V, 表面积为A,初始温度为 t_0 ,

突然将它置于温度恒为 t_∞ 的流体中。$t_0 > t_\infty$

h 及固体的物性参数均保持常数。

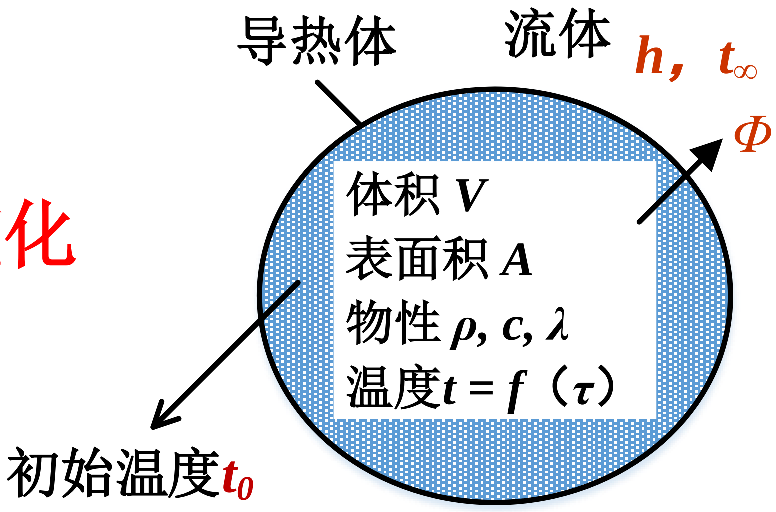
试求物体温度随时间的依变关系。

$$t = f(\tau)$$



能量平衡方程

传入物体的净热量＋物体自生热＝物体储存能的变化



单位时间内

传入物体的净热量 $= -hA\left(t - t_\infty\right)$

物体自生热 $= 0$

物体内储存能量的变化 $= dU = \rho c V \dfrac{dt}{d\tau}$

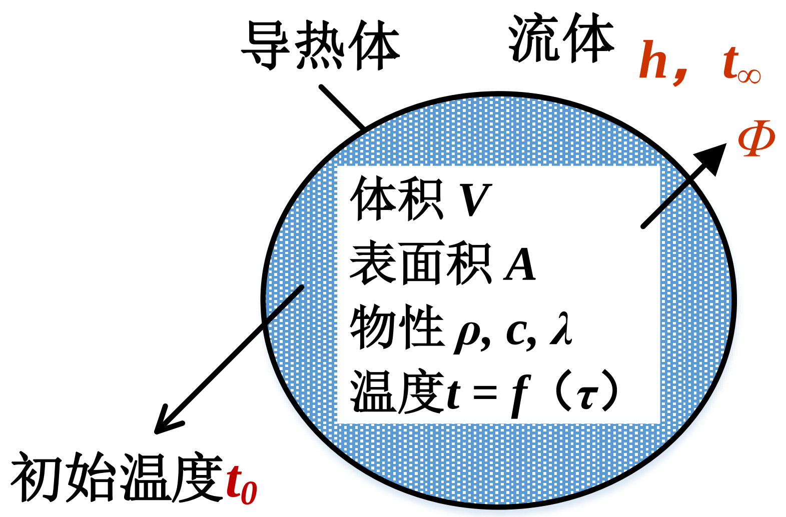
将各项代入能量平衡方程, 得

$$\boxed{hA\left(t - t_\infty\right) + \rho c V \frac{dt}{d\tau} = 0}$$

零维问题，无几何边界，只有初始条件　$\tau = 0$，$t = t_0$

求解过程

$$\boxed{hA(t-t_\infty)+\rho cV\frac{dt}{d\tau}=0}$$



$$\frac{dt}{d\tau}=-\frac{hA}{\rho cV}(t-t_\infty)$$

引入**过余温度**

$$\theta=t-t_\infty$$

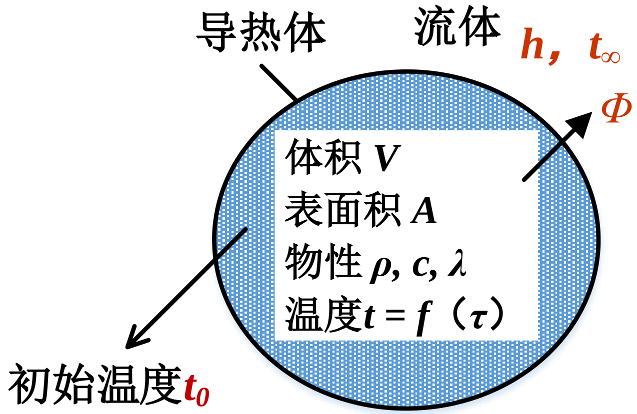
则得

$$\frac{d\theta}{d\tau}=-\frac{hA}{\rho cV}\theta$$

解方程，采用**分离变量法**

$$\frac{d\theta}{\theta}=-\frac{hA}{\rho cV}d\tau$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho c V} d\tau$$



积分 $$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^{\tau} \frac{hA}{\rho c V} d\tau \quad \Rightarrow \ln\frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{hA}{\rho c V}\tau$$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho c V}\tau}}$$

物体中的温度呈指数分布

温度变化规律

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)}$$

$$\frac{hA}{\rho cV}\tau=\frac{hV}{\lambda A}\cdot\frac{\lambda A^2}{V^2\rho c}\tau=\frac{h(V/A)}{\lambda}\cdot\frac{a\tau}{(V/A)^2}=Bi_v\cdot Fo_v$$

无量纲热阻

无量纲时间

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)=\exp\left(-Bi_v\cdot Fo_v\right)$$

注意： 下脚标“v”表示用（V/A）作特征尺寸，记为l_c

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)=\exp\left(-Bi_v\cdot Fo_v\right)$$

讨论： **Fo，Bi 对温度分布影响**

- Fo ↑ → θ/θ_0 ↓ ；
- Fo不变，Bi ↑ → θ/θ_0 ↓ ；
- Bi→0，与集总参数法的解相同；
- Bi→∞，转化为第一类边界条件下的解。

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)=\exp\left(-Bi_v\cdot Fo_v\right)$$

方程分析：

（1）物体内过余温度随时间呈指数衰减，且经历时间愈长，过余温度趋于0，即物体温度趋于流体温度。

（2）在过程开始阶段温度变化快，随后逐渐减慢。

方程指数的量纲分析：

$$\frac{hA}{\rho Vc}=\frac{\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\right]\cdot\left[\mathrm{m^2}\right]}{\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right]\cdot\left[\frac{\mathrm{Jkg}}{\mathrm{K}}\right]\cdot\left[\mathrm{m^3}\right]}=\frac{W}{J}=\frac{1}{s}$$