第五章 对流换热(Convective HT)

Rose 与 Jack的不同命运

在电影泰坦尼克号中Jack冻死了，但Rose没有，为什么？

第五章 对流换热(Convective HT)

研究目的：计算在各种不同条件下的表面传热系数h

$$\Phi = hA(t_w - t_f) \qquad h = ?$$

内容：

- 一般知识

（§5-1：分类、影响因素、研究方法等）

- 理论基础

（§5-2数学描述、§5-3边界层理论、§5-5相似原理）

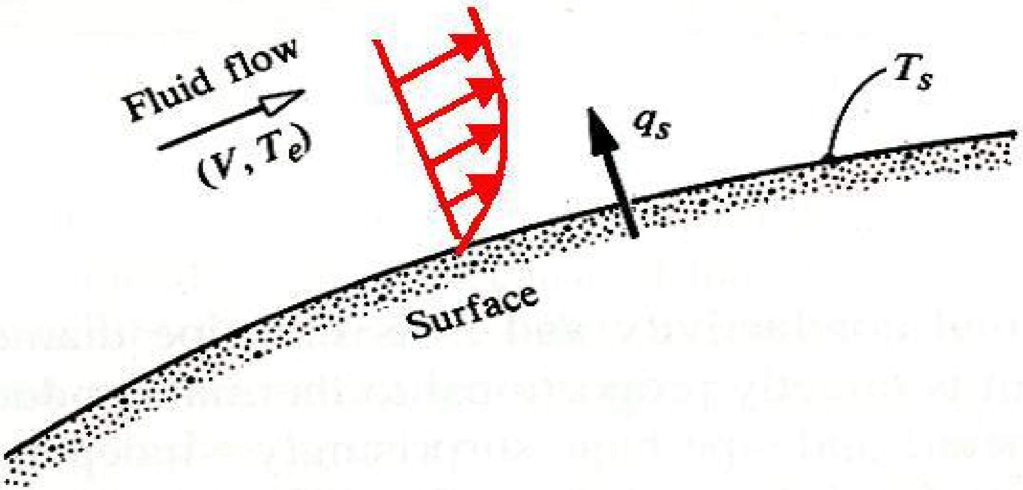
- 理论求解

（§5-4边界层方程组求解结果(相似原理&比拟理论））

§5-1 对流换热概述

一、对流换热的定义和机理

对流换热：流体流过固体壁面时所发生的热量传递过程。



特点：温差存在，与固体表面直接接触；既有热对流，也有导热，不是基本的热量传热方式

二、影响对流换热的因素

对流换热

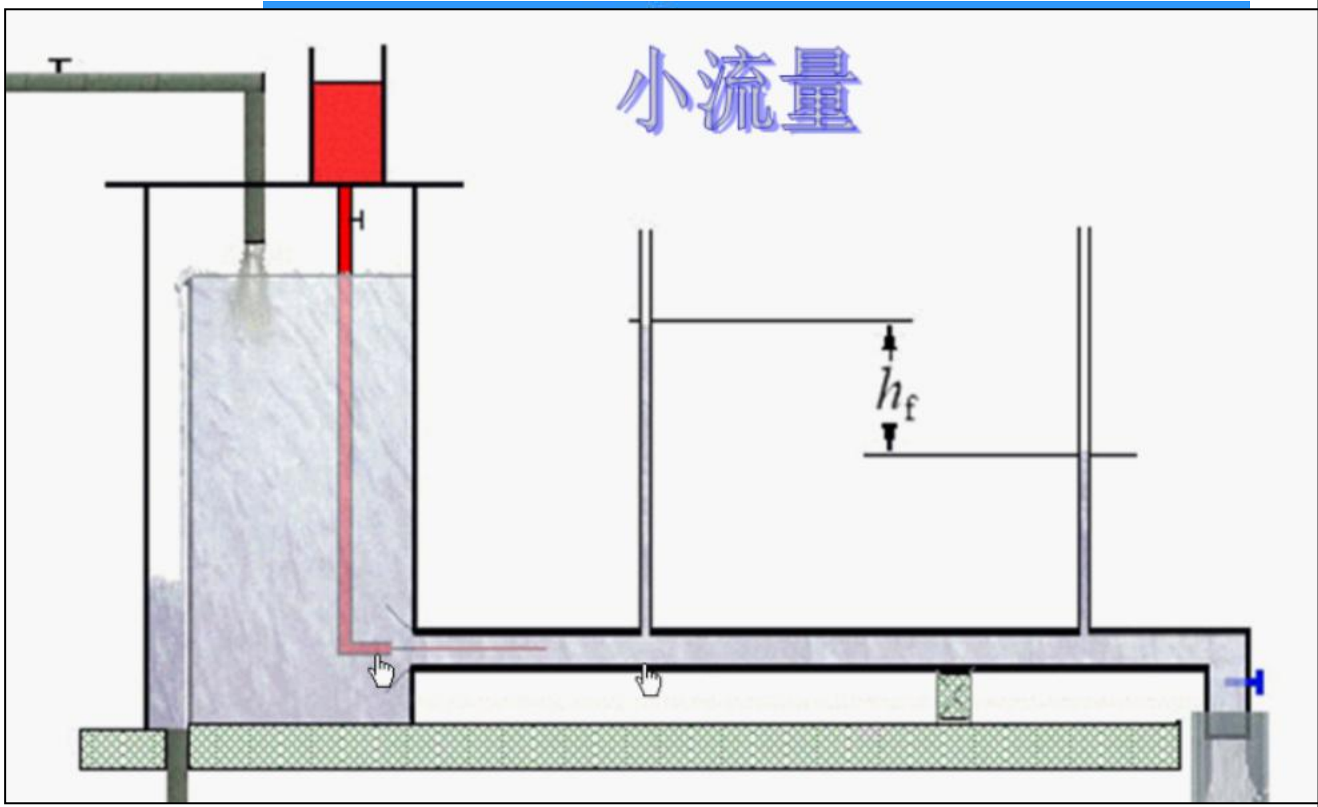
- 热对流（流动）
  - 流体种类、密度、粘度
    - 如：水、空气、油等
  - 驱动力：外部动力；浮升力 → 流动状态
    - 如：泵、重力或浮力
    - 流动状态：层流、湍流
  - 几何因素：形状、大小、位置、表面粗糙度
  - 流体相态的变化：沸腾、冷凝
- 导热 → 流体种类、导热系数、比热和密度

$$h = f(\vec{v}, t_w, t_f, \lambda, c_p, \rho, \alpha, \eta, l, r)$$

流体流动状态(The flow regimes)

- **Laminar flow**
- **Turbulent flow**

流体力学实验：雷诺实验



$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u d}{\eta}$$

$$h = f(\vec{v}, t_w, t_f, \lambda, c_p, \rho, \alpha, \eta, l, r)$$

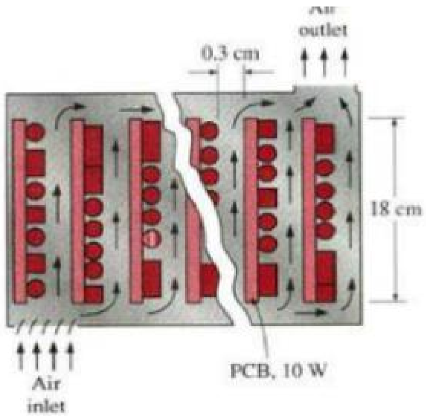
- 流动起因、流动状态、几何条件、以及相变因素构成将对流换热进行分类的基架。

- 流体的物性将通过特殊的无量纲数来予以反映

$$h = h(u, l, \lambda, \rho, c_p, \eta)$$

三、对流换热的分类(classification)

- 对流换热
  - 无相变换热
    - 受迫对流换热
      - 内部流动
        - 圆管内受迫流动
        - 非圆形管内受迫流动
      - 外部流动
        - 外掠平板
        - 外掠单管
        - 外掠管束（光管；翅片管）
    - 自然对流换热
      - 无限空间
        - 竖壁；竖管
        - 横管
        - 水平壁（上表面和下表面）
      - 有限空间——夹层空间
    - 混合对流换热（受迫对流与自然对流并存）
  - 相变换热
    - 凝结换热
      - 垂直壁凝结换热
      - 水平单圆管及管束外凝结换热
      - 管内凝结换热
    - 沸腾换热
      - 大空间沸腾换热
      - 管内沸腾换热（横管，竖管）



自然界中的种种对流现象　电子器件冷却　强制对流与自然对流

沸腾换热原理　空调蒸发器、冷凝器　动物的身体散热

四、研究对流换热的方法

1. 获得h的方法

- **分析解法**：采用数学分析求解的方法，有指导意义。
- **实验法**：通过大量实验获得表面传热系数的计算式，是目前的主要途径。
- **比拟法**：通过研究热量传递与动量传递的共性，建立起表面传热系数与阻力系数之间的相互关系，限制多，范围很小。
- **数值解法**：与导热问题数值思想类似，发展迅速，应用越来越多。

2. 如何从获得的温度场来计算*h*

无论是分析解法还是数值法首先获得都是温度场，

如何由$T \rightarrow h$?

由傅里叶定律 $q_w = -\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}$

牛顿冷却公式 $q_c = h\left(t_w - t_\infty\right)$

$q_w = q_c$ ➡ $h = -\frac{\lambda}{t_w - t_\infty}\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}$

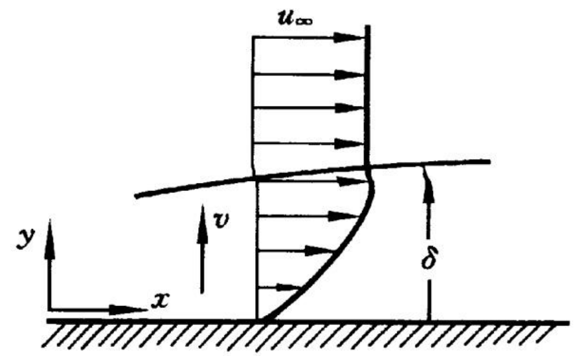


图 5-3 壁面附近速度分布的示意图

3. 注意上式与导热问题IIIBC的差别

(1) 导热问题中，*h*已知，此处*h*为未知值

(2) 导热问题中，λ为固体导热系数，此处λ为流体导热系数

(3) 导热问题中，*t*为固体温度，此处*t*为流体温度

4. 上式h为局部表面传热系数，而求整个表面的表面传热系数应把牛顿冷却公式用于整个表面得出

$$h_x = \frac{-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{x,y=0}}{(t_w - t_\infty)}$$

$$h = \frac{1}{L(t_w - t_\infty)}\int_0^L h_x(t_w - t_\infty)dx = \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$$

§5-2 对流换热问题的数学描写 (mathematical formulation)

$$h_x = -\frac{\lambda}{t_w - t_\infty} \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0,x} \rightarrow \text{温度场}$$

特别是壁面附近的温度分布

温度场 ⟶ 受到流场的影响

流场
- Continuity Eq. Mass conservation law
- Momentum Eq. Momentum conservation law

温度场 — Energy Eq. Energy conservation law

对流换热微分方程式

一、能量微分方程导出

1. 简化假设

2D;常物性(△T不大；△P足够小；流速较低);不可压缩、牛顿流体；无内热源；不计动能位能的变化；不计粘性耗散

2. 基本原理

Fourier导热定律

能量守恒定律，用于开口系统

$$\text{外界导入微元体的净热流量}\,\Phi + (q_m)_{in}\left(h+\cancel{\frac{1}{2}v^2}+\cancel{gz}\right)_{in} =$$

$$\text{热力学内能增量}\,\frac{\partial U}{\partial \tau} + (q_m)_{out}\left(h+\cancel{\frac{1}{2}v^2}+\cancel{gz}\right)_{out} + \cancel{W_{net}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial \tau}}_{\text{热力学能增量}} = \underbrace{\Phi}_{\text{净导入热量}} + \underbrace{(q_m)_{in}h_{in} - (q_m)_{out}h_{out}}_{\text{宏观运动（对流）交换的净能量}}$$

热力学能增量

净导入热量

宏观运动（对流）交换的净能量

开口系

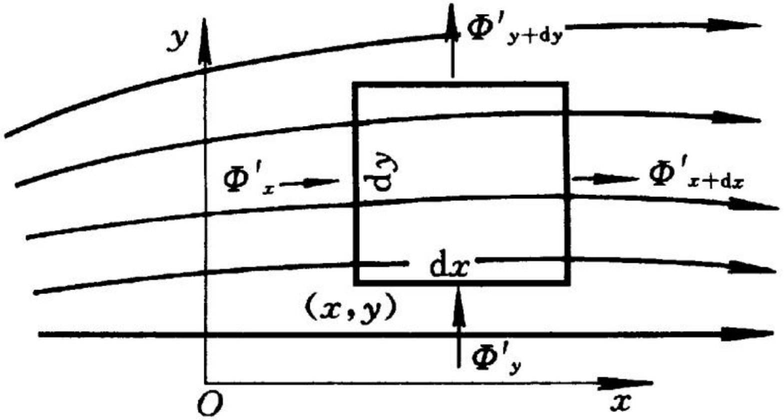


图 5-4 能量微分方程推导中的微元体

$$\Phi = \lambda(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2})dxdy \qquad \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho c_p t\right)dxdy$$

$$H_x = \left(q_m\right)_{in} h_{in,x} = \rho udyc_p t = \rho c_p utdy$$

$$H_{x+dx} = H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x}dx = H_x + \frac{\partial\left(\rho c_p utdy\right)}{\partial x}dx$$

$$= H_x + \rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy$$

$$H_x - H_{x+dx} = -\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy$$

$$H_y - H_{y+dy} = -\rho c_p\left(v\frac{\partial t}{\partial y} + t\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \Phi + (q_m)_{in} h_{in} - (q_m)_{out} h_{out}$$

$$\Phi = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)dxdy \qquad \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho c_p t\right)dxdy$$

$$H_x - H_{x+dx} = -\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy$$

$$H_y - H_{y+dy} = -\rho c_p\left(v\frac{\partial t}{\partial y} + t\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

带入等式并移项 → 对流净流入变为净流出

$\boxed{\text{开口系}}$

$$\underbrace{\frac{\partial t}{\partial \tau}}_{\text{非稳态项}} + \underbrace{\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y}\right)}_{\text{对流项}} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)}_{\text{扩散项}}$$

3. 讨论

（1）有内热源 $$\frac{\partial t}{\partial \tau}+(u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y})=\frac{\lambda}{\rho c_p}(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2})+\frac{\dot{\varphi}}{\rho c_p}$$

流体内部粘性耗散

$$\dot{\varphi}(x,y)=\eta\{2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2]+(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})^2\}$$

(2)稳态对流扩散问题

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c_p}(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2})+\frac{\dot{\varphi}}{\rho c_p}$$

(3) 对流换热过程中，热量传递除了导热引起的**扩散项**外，还有依靠流体流动所产生的**对流项**，对流与导热综合传递热量

(4) $u=v=0$，纯导热方程，对流换热能量微分方程是导热微分方程的推广

$$\underbrace{\frac{\partial t}{\partial \tau}}_{\text{非稳态项}} + \cancel{\underbrace{\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y}\right)}_{\text{对流项}}} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)}_{\text{扩散项}}$$

二、对流换热问题完整的数学描写

二维，常物性，无内热源，不可压流动

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

连续性方程

要求知道各项物理意义

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

动量微分方程

$$\rho c_p\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

能量微分方程

$$h_x=-\frac{\lambda}{t_w-t_\infty}\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0,x}$$

局部对流传热系数公式

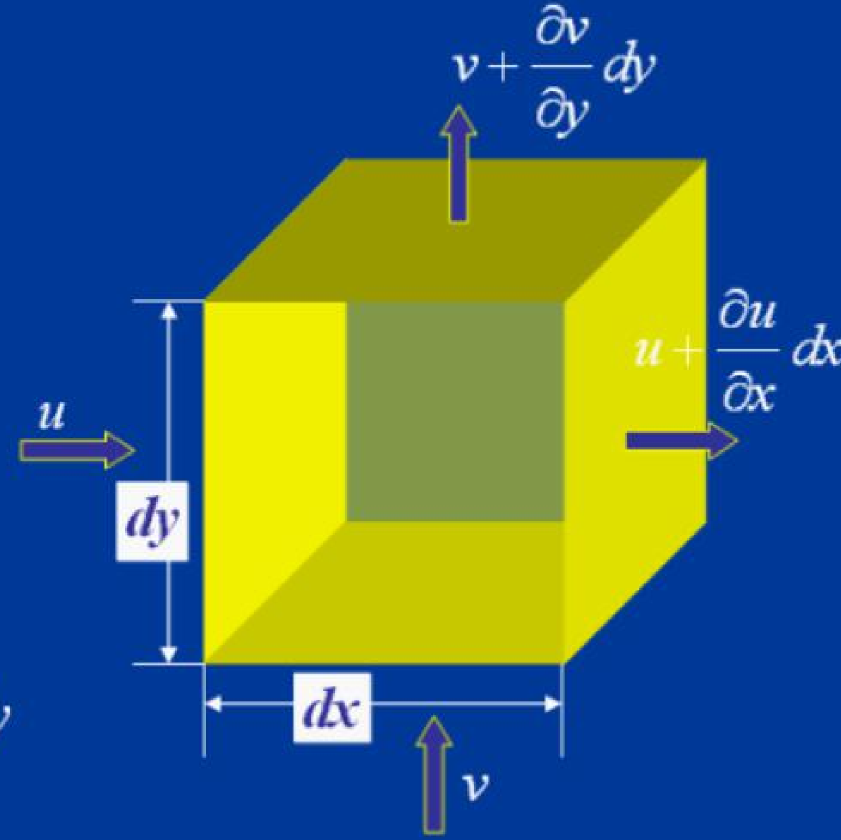
5个方程，5个未知量 — 理论上可解

连续性方程

单位时间内流入微元体的净质量 ＝ 微元体内流体质量的变化。

mass balance

$$\begin{Bmatrix} mass \\ in \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mass \\ out \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mass \\ changed \end{Bmatrix}$$



单位时间内、沿x轴方向流入微元体的净质量：

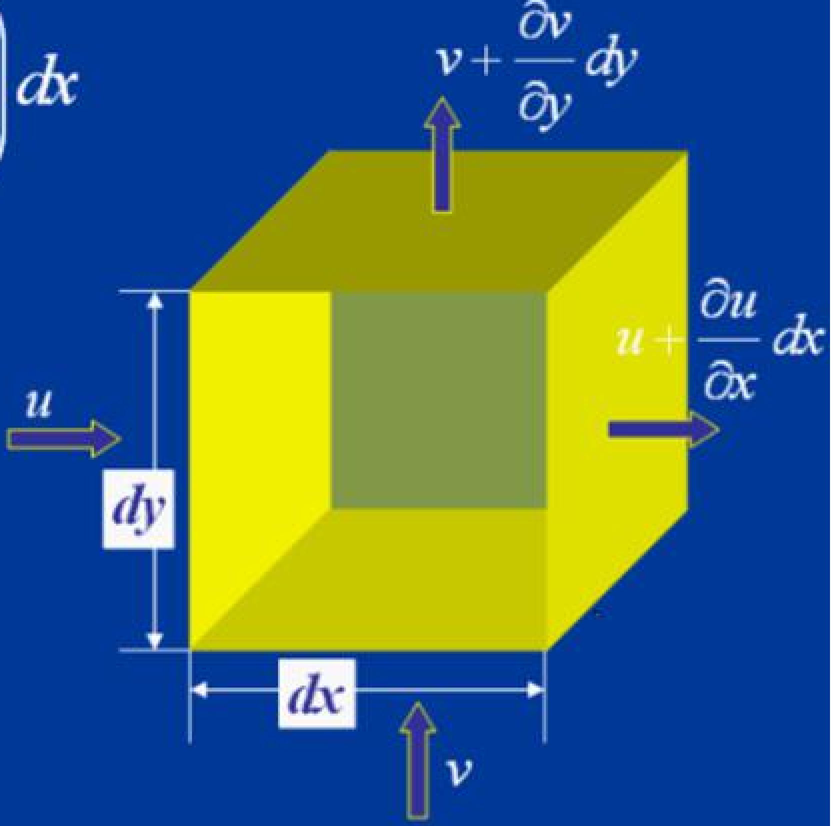
$$M_x - M_{x+dx} = \rho u dy - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy$$

$$= -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy$$

单位时间内、沿y轴方向流入微元体的净质量：

$$M_y - M_{y+dy} = \rho v dx - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \right) dx$$

$$= -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dxdy$$



单位时间内微元体内流体质量的变化：

$$\frac{\partial(\rho dxdy)}{\partial \tau} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dxdy$$

单位时间：流入微元体的净质量 = 微元体内流体质量的变化

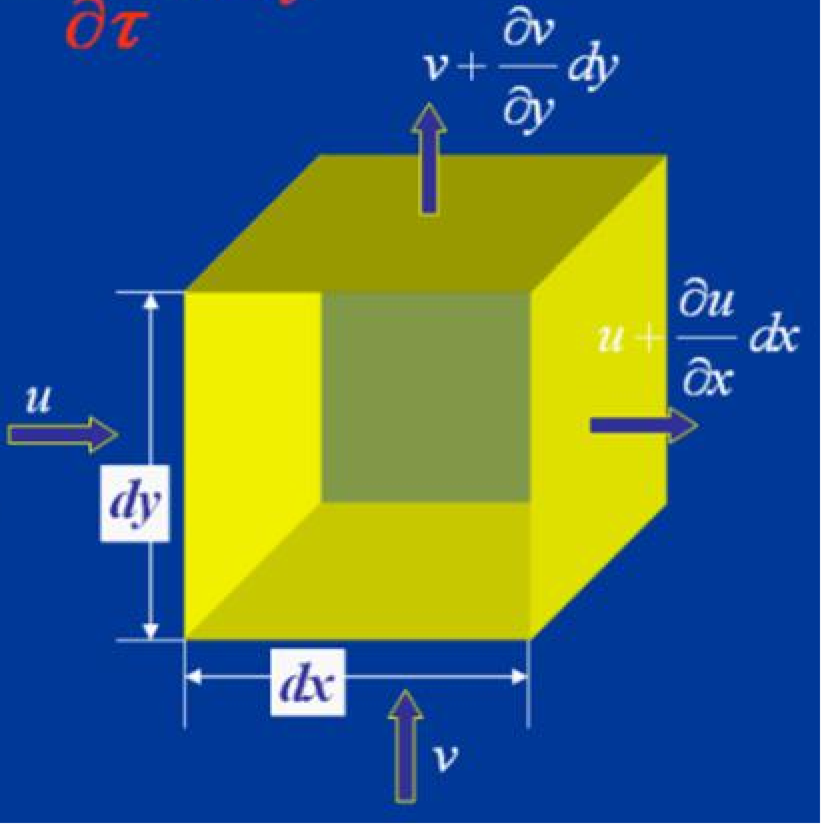
$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdy-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdy=\frac{\partial \rho}{\partial \tau}dxdy$$

连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0$$

对于二维、稳定、常物性流场 ：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$



动量微分方程

动量微分方程式描述流体速度场——动量守恒

动量微分方程是纳维埃和斯托克斯分别于1827和1845年推导的。 Navier-Stokes方程（N-S方程）

牛顿第二运动定律：作用在微元体上各外力的总和等于控制体中流体动量的变化率

作用力 = 质量 × 加速度（$F=ma$）

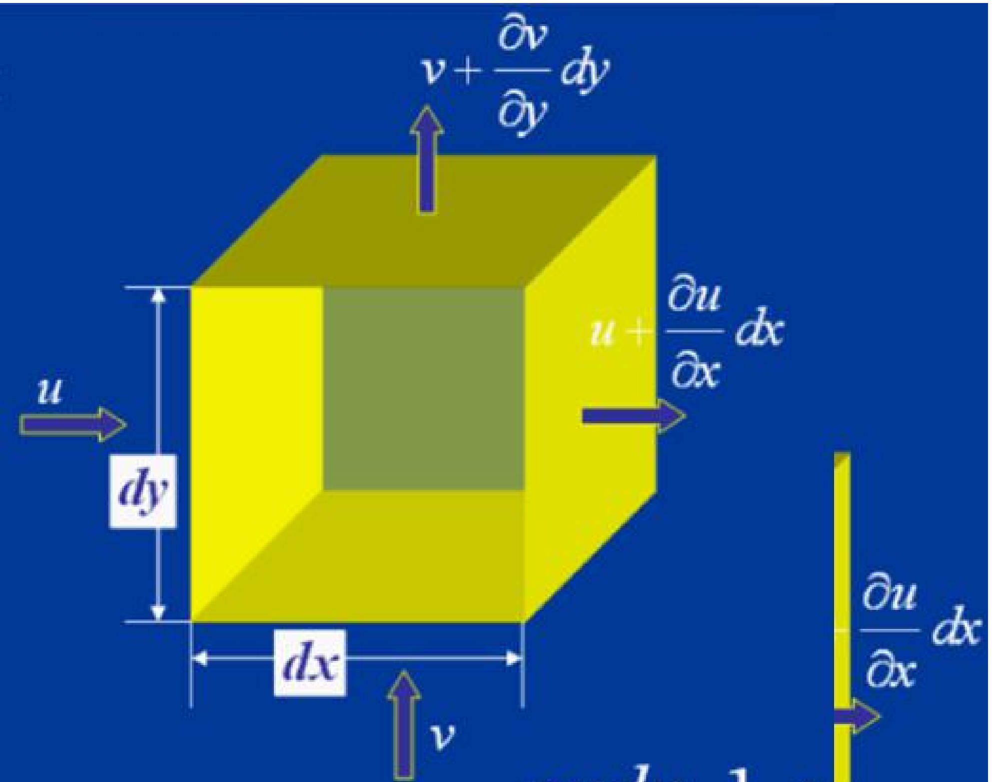
① 控制体中流体动量的变化率

从x方向进入微元体质量流量在x方向上的动量 ：

$$\rho u dy \cdot 1 \cdot u$$

从x方向流出元体的质量流量在x方向上的动量

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy \cdot 1 \cdot \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)$$



从y方向进入元体的质量流量在x方向上的动量为 ： $\rho v dx \cdot 1 \cdot u$

从y方向流出元体的质量流量在x方向上的动量：

$$\left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dx \cdot 1 \cdot \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)$$

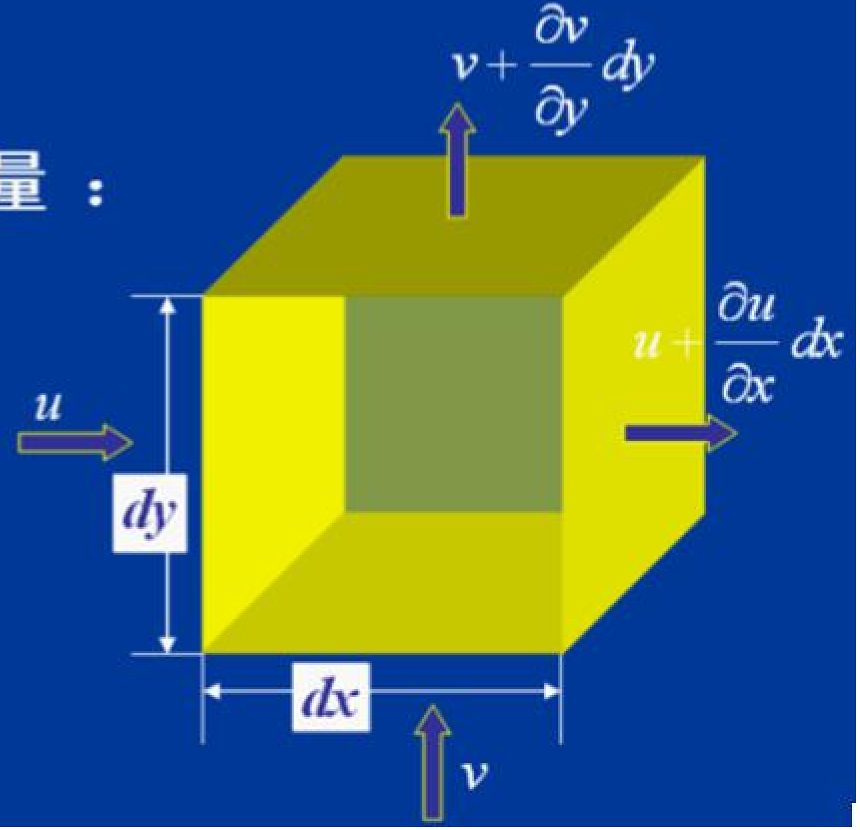
x方向上的动量改变量 ： $\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\cdot 1$

化简过程中利用了连续性方程

和忽略了高阶小量。

同理，导出y方向上的动量改变量 ：

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\cdot 1$$



② 作用于微元体上的外力

作用力：体积力、表面力

体积力：重力、离心力、电磁力

设定单位体积流体的体积力为F，相应在x和y方向上的分量分别为F_x和F_y。

在x方向上作用于微元体的体积力：$F_x dxdy \cdot 1$

在y方向上作用于微元体的体积力：$F_y dxdy \cdot 1$

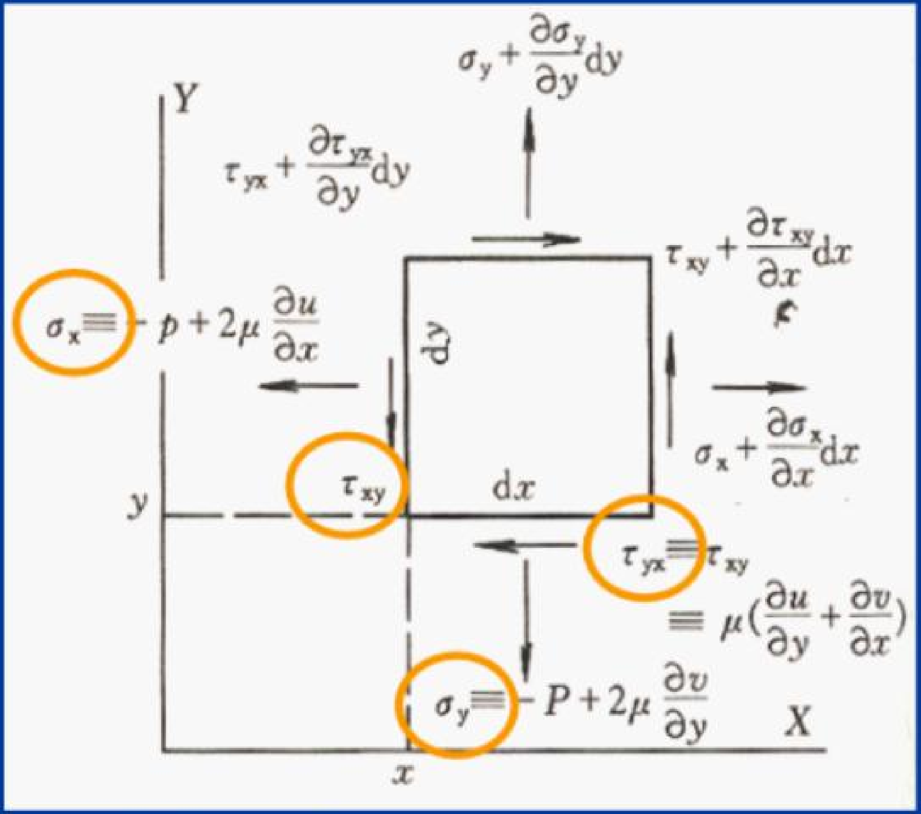
表面力:作用于微元体表面上的力。

通常用作用于单位表面积上的力来表示，称之为应力。包括粘性引起的切向应力和法向应力、压力等。

法向应力 σ 中包括了压力 p 和法向粘性应力 。

对于我们讨论的二维流场应力只剩下四个分量，记为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$



σ_x为x方向上的正应力（力与面方向一致）；
σ_y为y方向上的正应力（力与面方向一致）；
τ_{xy}为作用于x表面上的y方向上的切应力；
τ_{yx}为作用于y表面上的x方向上的切应力。

得出作用在微元体上**表面力**的净值表达式：

x方向上 $$\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]dxdy\cdot 1$$

y方向上 $$\left[-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]dxdy\cdot 1$$

③ 动量微分方程式

在x方向上 $$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

y方向上 $$\rho\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{惯性力}}=\underbrace{F_y}_{\text{体积力}}-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{压力}}+\underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}_{\text{粘性力}}$$

在x方向上

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

y方向上

$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{惯性力}}=\underbrace{F_y}_{\text{体积力}}\underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{压力}}+\underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}_{\text{粘性力}}$$

对于稳态流动： $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}=0;\quad \dfrac{\partial v}{\partial \tau}=0$

只有重力场时： $F_x=\rho g_x;\quad F_y=\rho g_y$

流体沿平板流动时： $u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

连续性方程

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

动量微分方程

$$\rho c_p\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

能量微分方程

$$h_x=-\frac{\lambda}{t_w-t_\infty}\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0,x}$$

对流换热微分方程

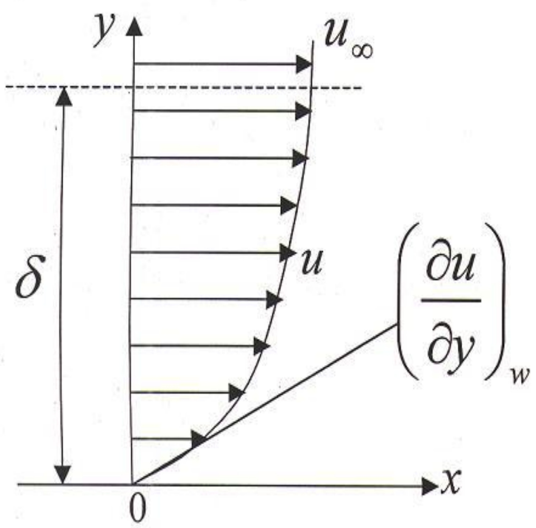
要求知道各项物理意义

如何简化：**边界层理论**

§5-3 对流换热的边界层方程组

一、流动边界层

1. 定义：当流体流过固体壁面时，由于流体粘性的作用，使得在固体壁面附近存在速度发生剧烈变化的薄层称为流动边界层或速度边界层。



2. 速度边界层厚度δ：速度等于99%主流速度。

$$u\big|_{\delta} = 99\% u_\infty$$

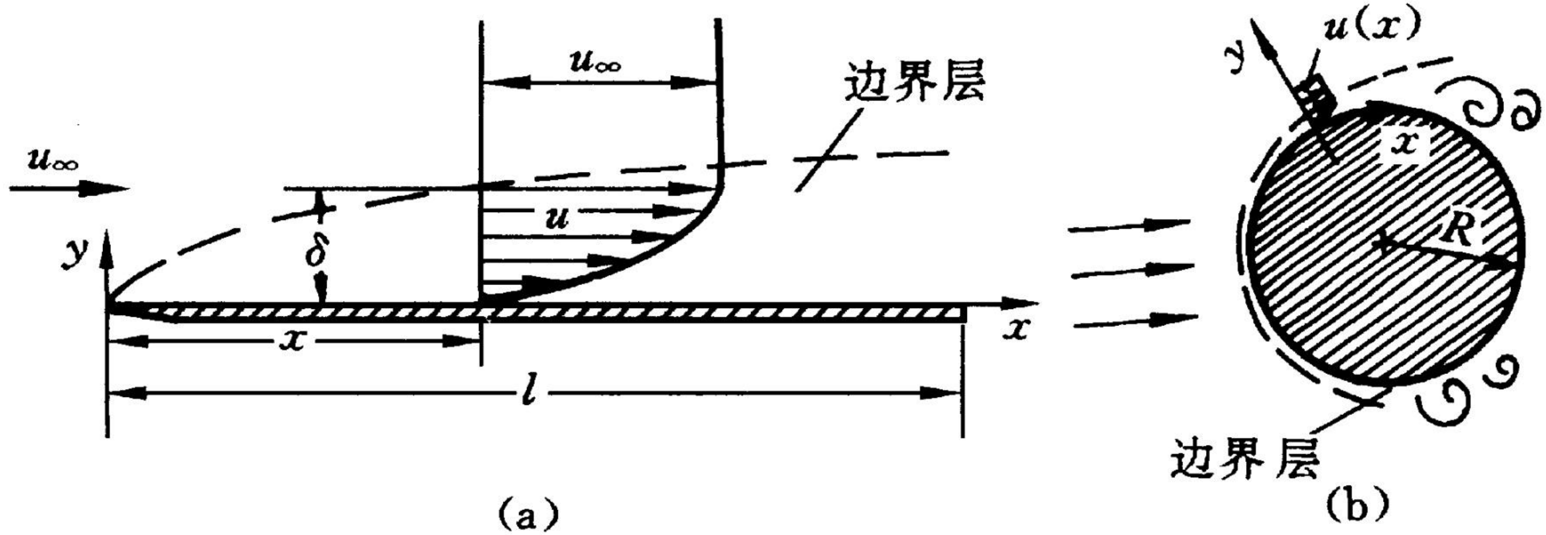


图 5-5 边界层示意图

3．特点：边界层厚度δ是比壁面尺度*l* 小一个数量级以上的小量。 δ ＜＜ *l*

如：**20℃空气在平板上以16m/s 的速度流动，在1m处边界层的厚度约为5mm。**

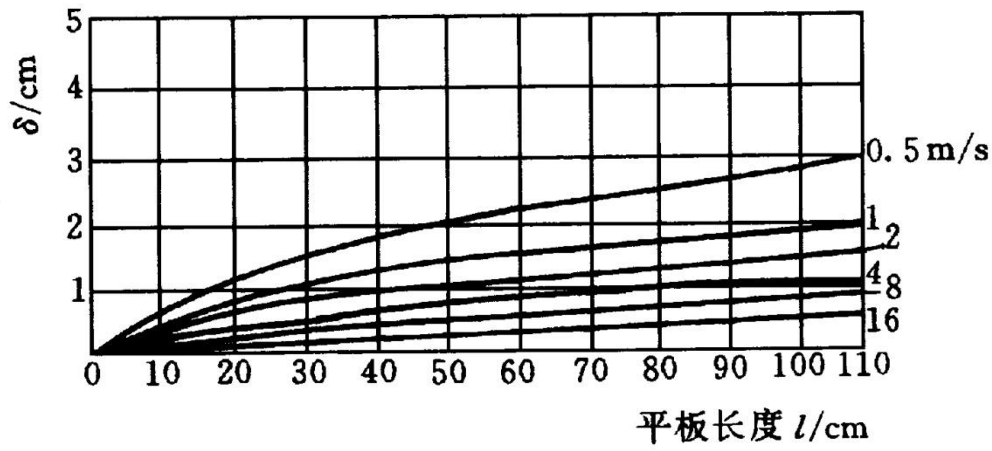


图 5-6 空气沿平板流动时边界层增厚的情况

空气沿平板流动时边界层厚度变化的情况

4. 边界层内的流动状态：也有层流和湍流之分。

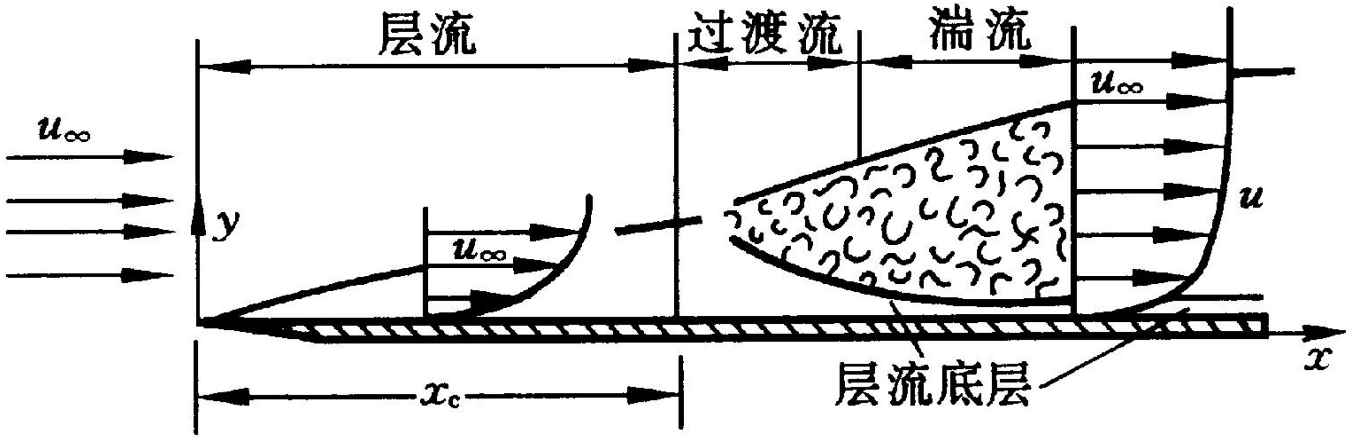
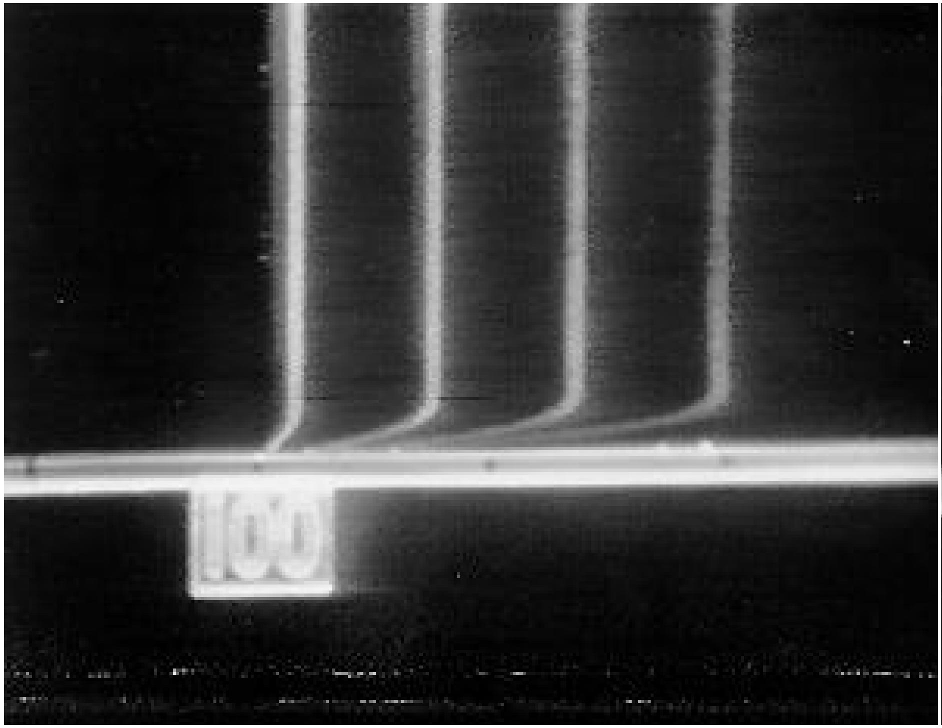


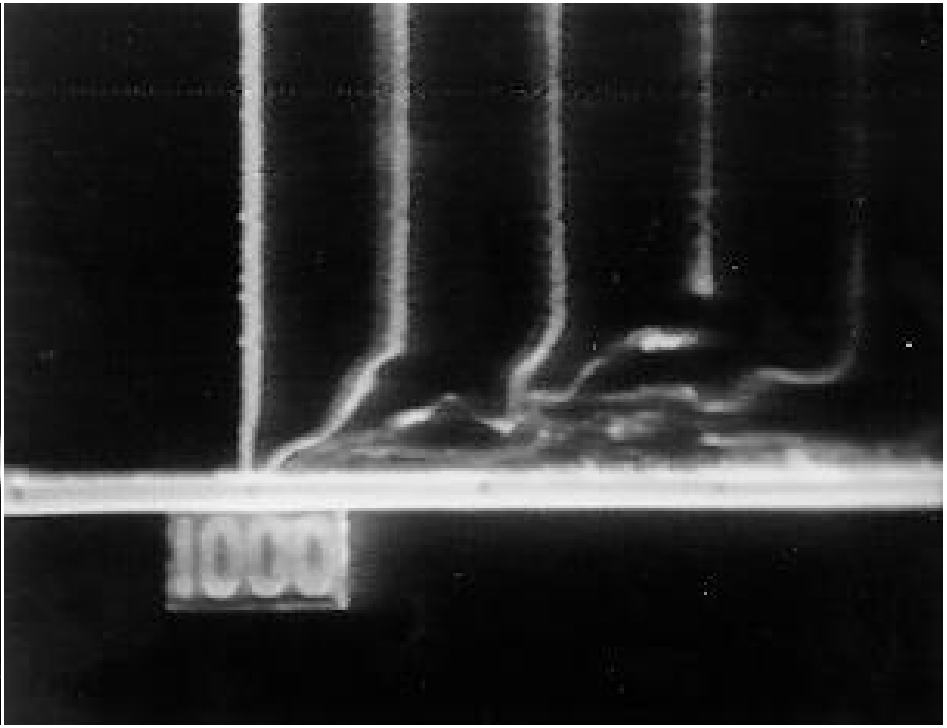
图 5-7　掠过平板时边界层的形成和发展

对于外掠平板的流动，一般取

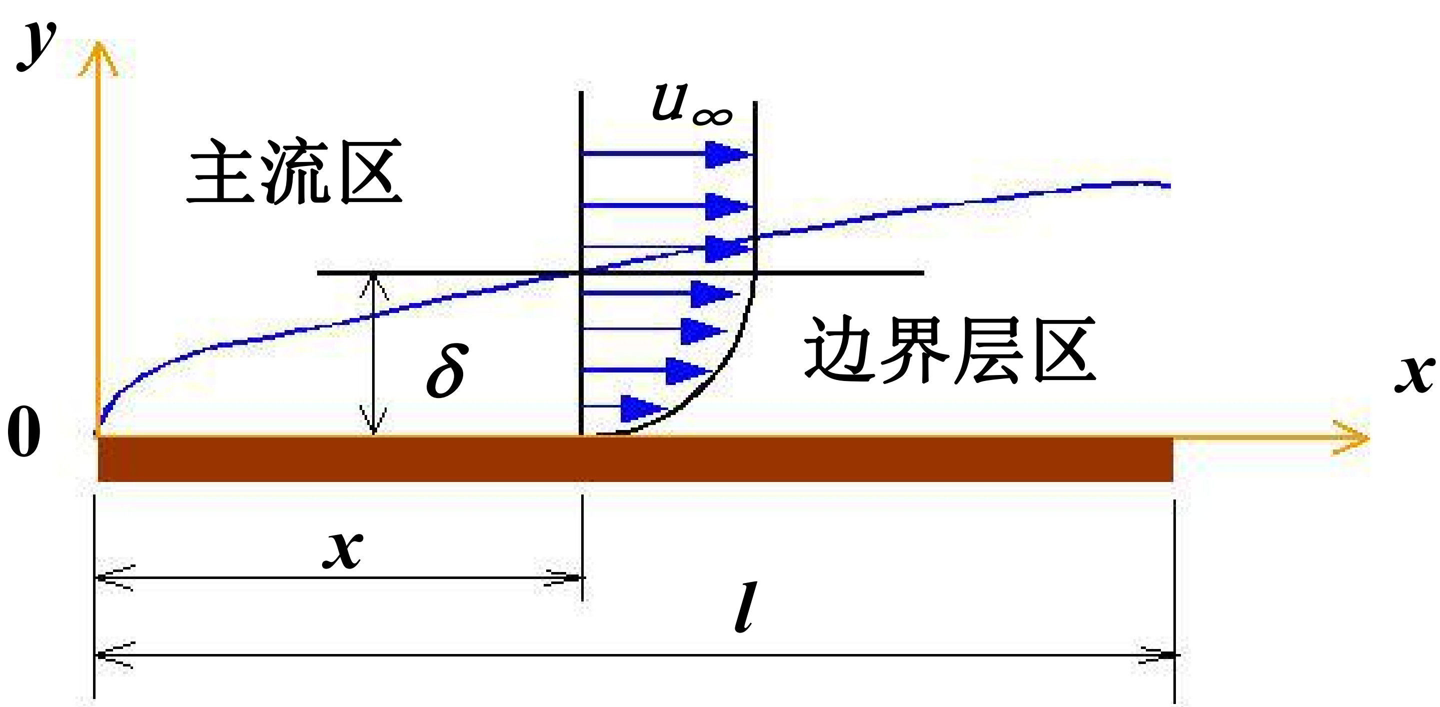
临界雷诺数

$$Re_c = 5\times10^5$$


100


1000

5. 引入速度边界层的意义：流动区域可分为主流区和边界层区，主流区可看作理想流体的流动，只在边界层区才需要考虑流体的粘性作用。（简化方程组）



简化前

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

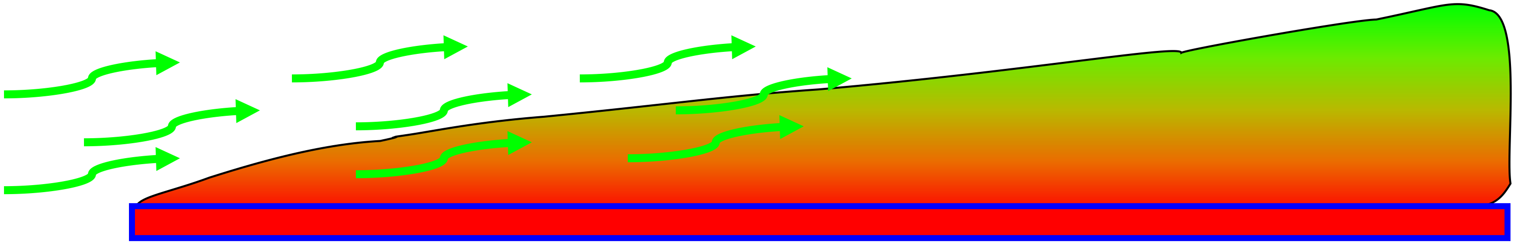
边界层方程:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

y方向速度　　　　运动粘度

二、温度边界层(热边界层)

1. 定义：在对流换热时，固体壁面附近温度发生剧烈变化的薄层称为温度边界层或热边界层。



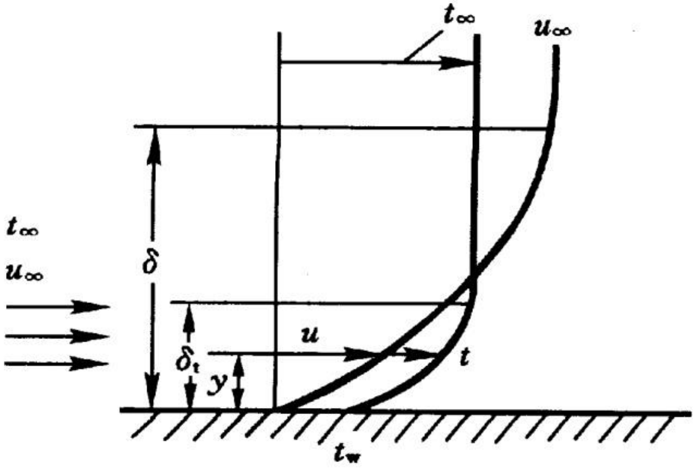
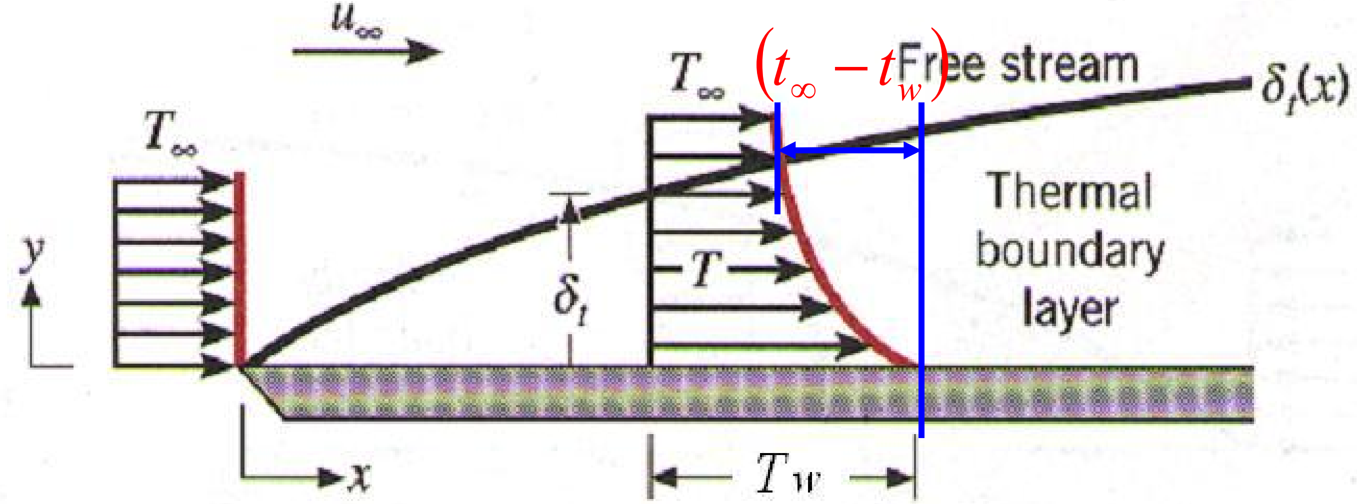


图 5-8 速度边界层与温度边界层

2. 温度边界层厚度δ_t的规定：过余温度等于99%主流区流体的过余温度。

$$\left.\left(t-t_w\right)\right|_{\delta_t}=99\%\left(t_\infty-t_w\right)$$



思考：热边界层厚度可否定义成$t_\delta=99\%\,t_\infty$?

3. 特点：温度边界层厚度δ_t也是比壁面尺度l小一个数量级以上的小量。 $\delta_t \ll l$

4. 引入温度边界层：温度场也可分为主流区和边界层区，主流区流体中的温度变化可看作零，因此，只需要确定边界层区内的流体温度分布。

意义
- 理论求解方面：可以将求解区域缩小，描述问题的微分方程进一步简化。
- 定性分析方面：可以根据壁面边界层的情况定性分析对流换热系数的相对大小。

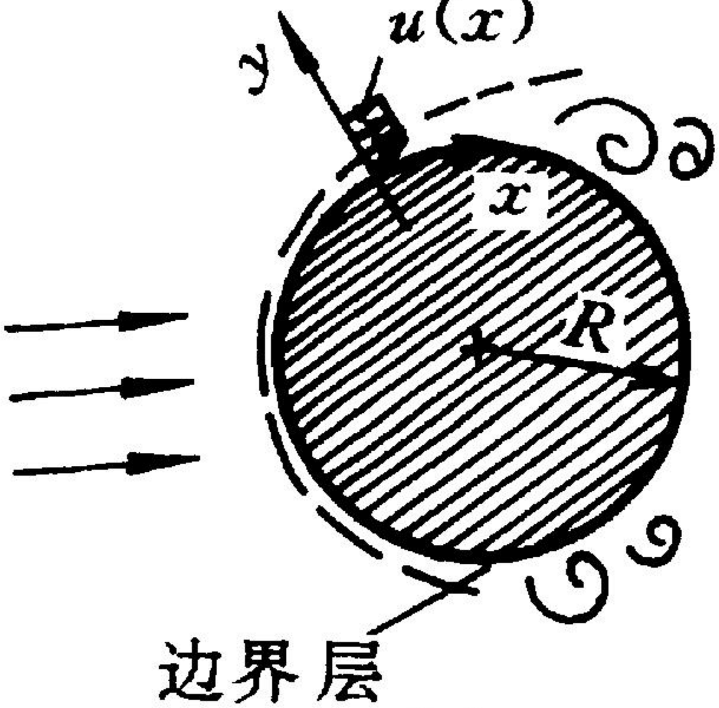
边界层总结：

- 流场区域可以分为边界层区和主流区
- 边界层内 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial t}{\partial y}$ 很大
- $\delta \ll l, \delta_t \ll l,$
- 边界层内流动状态分为层流与湍流，湍流边界层又分为湍流核心与层流底层
- 主流区：理想流体（无粘流体）

边界层微分方程：粘性流体，主流方向速度二阶导数忽略不计

边界层概念适用范围：并非所有问题都适用

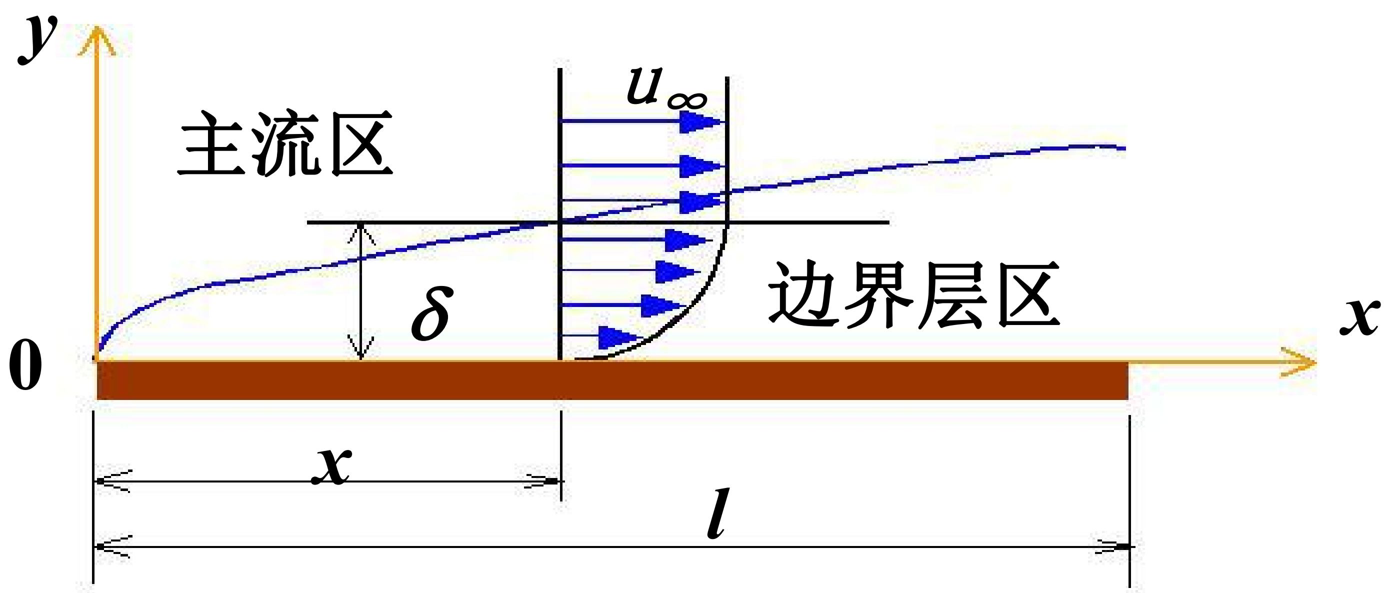
脱体问题边界层概念不能适用



(b)

三、边界层微分方程组

边界层微分方程组是指对边界层区域的数学描述，它是在完整的数学描述基础上根据边界层的特点简化而得到。简化可采用数量级分析的方法。



以稳态、二维、常物性、不可压缩流体的对流换热问题为例，其微分方程组可表示为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \rho\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=F_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ \rho c_p\left(u\dfrac{\partial t}{\partial x}+v\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\left(\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

4个方程，4个未知量，理论上可解：速度和温度分布

1. 数量级分析方法的基本思想

分析比较方程中等号两侧各项的数量级大小，在同一侧内保留数量级大的项而舍去数量级小的项

2. 实施方法

①列出所研究问题中几何变量及物理变量的数量级的大小，一般以**1**表示数量级大的物理量的量级。以**Δ**表示小的数量级(至于**Δ**比**1**小多少，没有严格规定，一般至少小两个数量级)

②导数中导数的数量级由自变量及因变量的数量级代入获得

3. 能量方程的简化

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

设x数量级为1，则y数量级为Δ（小量级），x~1，板长L~1，y~Δ，δ~Δ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\ \therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow u\sim 1, \upsilon\sim\Delta$$

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)$$

$$1\cdot\frac{1}{1}+\Delta\cdot\frac{1}{\Delta}=a\left[\left(\frac{1}{1}\right)/1+\left(\frac{1}{\Delta}\right)/\Delta\right]$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\left(\cancel{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

简化过程

$v \sim \Delta$， $y \sim \Delta$， $\delta \sim \Delta$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = F_x - \dfrac{dp}{dx} + \eta\left(\cancel{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\[2ex]
\cancel{\rho\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = F_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)} \\[2ex]
\rho c_p\left(u\dfrac{\partial t}{\partial x} + v\dfrac{\partial t}{\partial y}\right) = \lambda\left(\cancel{\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)
\end{cases}
$$

二维稳态边界层型方程对流传热问题

简化后

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\[2ex]
\rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\dfrac{dp}{dx}+\eta\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\[2ex]
\rho c_p\left(u\dfrac{\partial t}{\partial x}+v\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2}
\end{cases}
$$

4. 边界层微分方程的特点

(1) 边界层由椭圆型方程简化到抛物线型。略去动量方程和能量方程中主流方向的二阶导数项。

(2) 方程少了一个，变量少了一个

(3) $\dfrac{\partial p}{\partial y}=0$ $\qquad \dfrac{\partial p}{\partial x} \longrightarrow \dfrac{dp}{dx}$

边界条件 $\quad y=0 \quad u=0, v=0, t=t_w$

$$y=\infty \quad u=u_\infty, t=t_\infty$$

比较 δ 与 δ_t 的相对大小

举例：外掠平板流动

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\frac{dp}{dx}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

动量方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

能量方程

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

$$y=0 \quad u=u_w, t=t_w \qquad y=\infty \quad u=u_\infty, t=t_\infty$$

如果 $\nu=a$

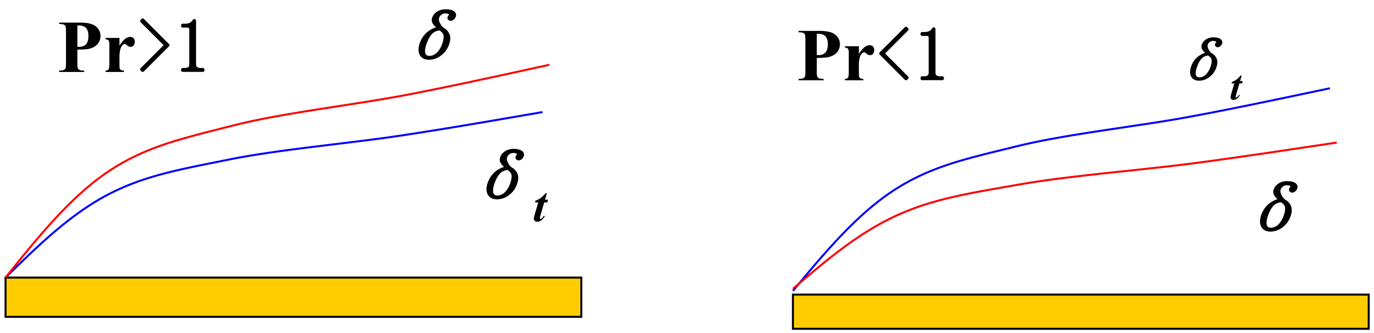
$$\frac{u-u_w}{u_\infty-u_w}=\frac{t-t_w}{t_\infty-t_w} \longrightarrow \delta=\delta_t$$

$$\boxed{\mathrm{Pr} = \nu / a}$$

- 流体的运动粘度反映了流体中由于分子运动而扩散动量的能力，这一能力越大，粘性的影响传递越远，因而流动边界层越厚。
- 相类似，热扩散率越大则温度边界层越厚。

普朗特数反映了动量扩散与热扩散能力的对比，即流动边界层与温度边界层厚度的相对大小。

重要



根据普朗特数的大小，流体一般可分为三类：

（1）高普朗特数流体，如一些油类的流体，在102~103的量级；

（2）中等普朗特数的流体，0.7~10之间，如气体为0.7~1.0, 水为 0.9~10；

（3）低普朗特数的流体, 如液态金属等，在0.01的量级。