理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

OFFICE：12:30-14:00, MON

运 动 学

刚体的平面运动

刚体平面运动：速度

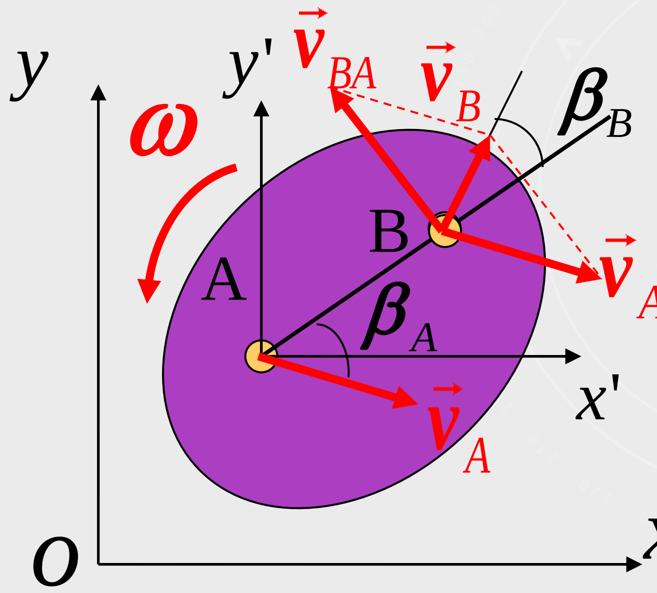
1、基点法

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

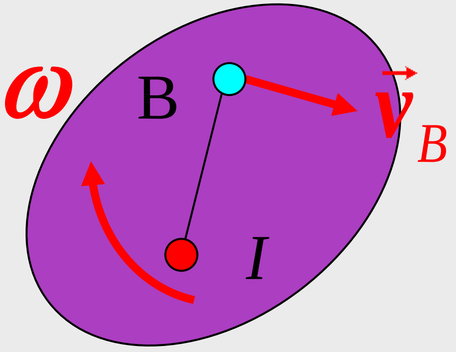
2、速度投影法

$$\boxed{[\vec{v}_\mathrm{B}]_{AB} = [\vec{v}_\mathrm{A}]_{AB}}$$

$$v_B \cos\beta_B = v_A \cos\beta_A$$



3、速度瞬心法

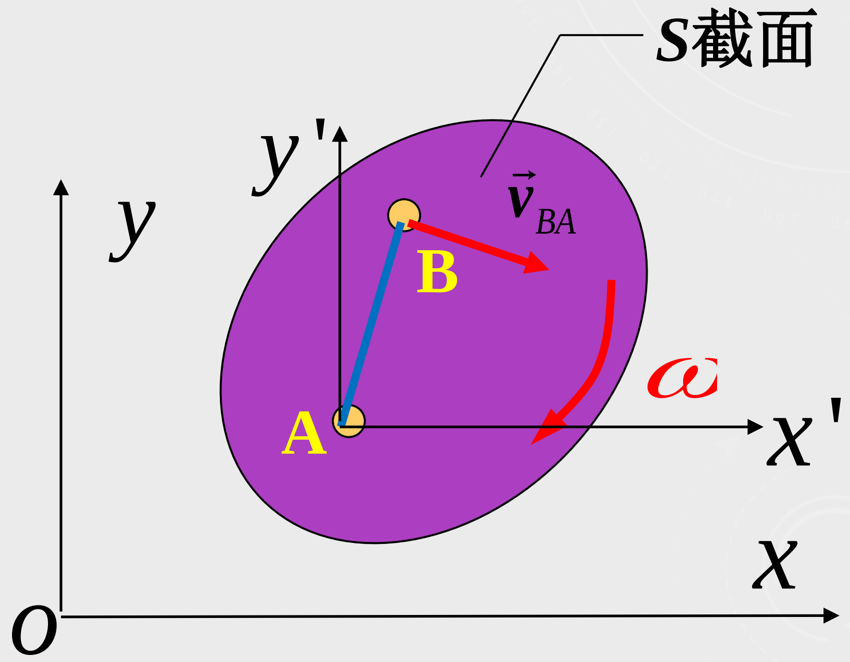


$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BI}, \quad v_B = \overline{BI} \cdot \omega$$

三、刚体平面运动加速度

SOLUTION:

以*A*为基点，建立平移坐标系*Ax'y'*，利用点的运动合成定理求解。



速度 $\vec{v}_B = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A,\quad \vec{v}_r = \vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

加速度 $\vec{a}_B = \vec{a}_e + \vec{a}_r$

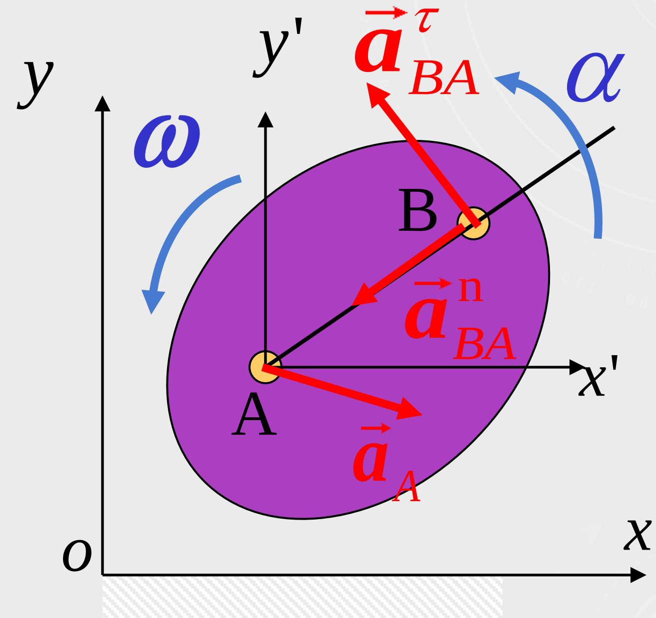
$$\vec{a}_e = \vec{a}_A,\quad \vec{a}_r = \vec{a}_{BA} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}}$$

平面运动刚体的加速度　　刚体上各点加速度之间的关系。

基点法

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$
$$= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau}$$
$$= \vec{a}_A + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{BA} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{BA})$$



其中：
$$\left|\vec{a}_{BA}^{\tau}\right| = \left|\vec{\alpha}\times\vec{r}_{AB}\right| = |AB|\cdot\alpha$$
$$\left|a_{BA}^{n}\right| = \left|\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB})\right| = |AB|\cdot\omega^2$$

基　　点：A

刚体上点：B

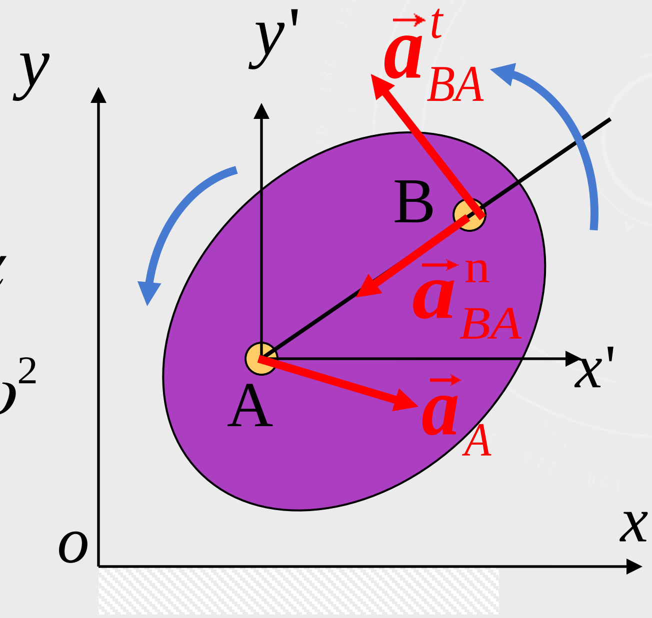
$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}}$$

基　　点：A

刚体上点：B

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{t} + \vec{a}_{BA}^{n}}$$

其中：
$$\left|\vec{a}_{BA}^{t}\right| = |AB| \cdot \alpha$$
$$\left|\vec{a}_{BA}^{n}\right| = |AB| \cdot \omega^2$$

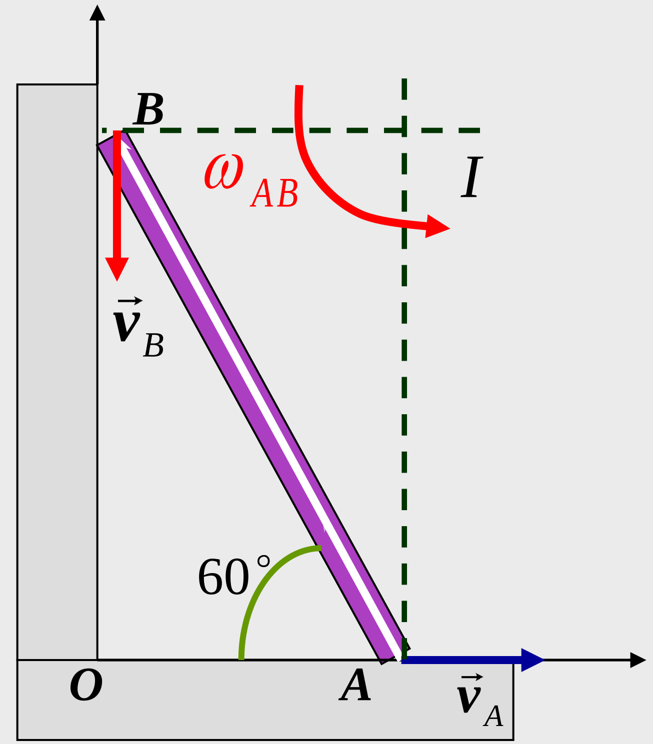


问题：如刚体在某时刻瞬时平动，任两点加速度是否相等？

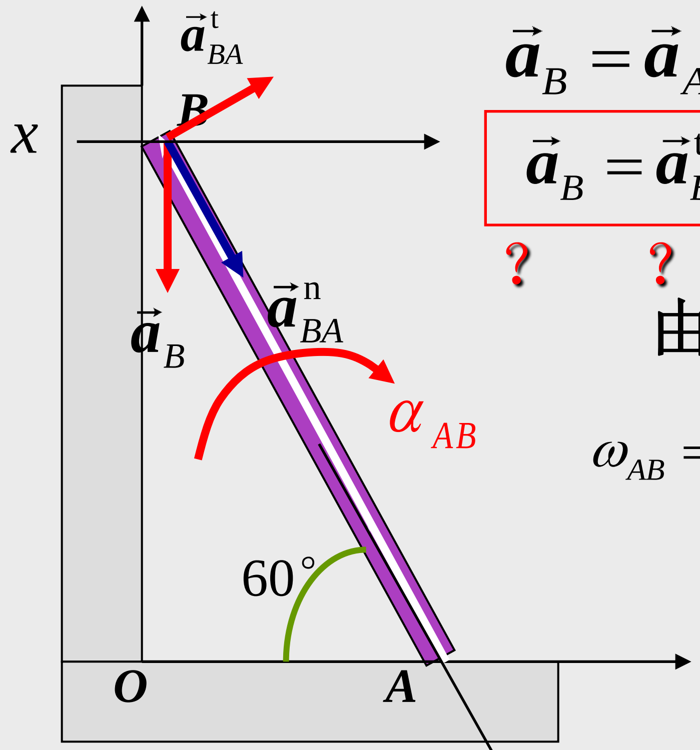
瞬时平动，则 $\omega = 0 \Longrightarrow \left|\vec{a}_{BA}^{n}\right| = 0 \Longrightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{t}$

$$\Longrightarrow \vec{a}_B \neq \vec{a}_A$$

例 一长为*L*的刚性杆*AB*， *B*端靠墙，*A*端着地，并以速度 *v* 匀速向右运动，求图示时刻杆*AB* 转动的角加速度。



解：[*AB*] 由加速度基点法：



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{t}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}^{t}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}}$$

? ?

由速度分析可得：

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{IA} = \frac{2\sqrt{3}v}{3L}$$

则：$a^{n}_{BA} = \omega_{AB}{}^2 \cdot AB = \dfrac{4v^2}{3L}$

“*x*”： $0 = a^{t}_{BA}\cos 30^\circ + a^{n}_{BA}\sin 30^\circ$

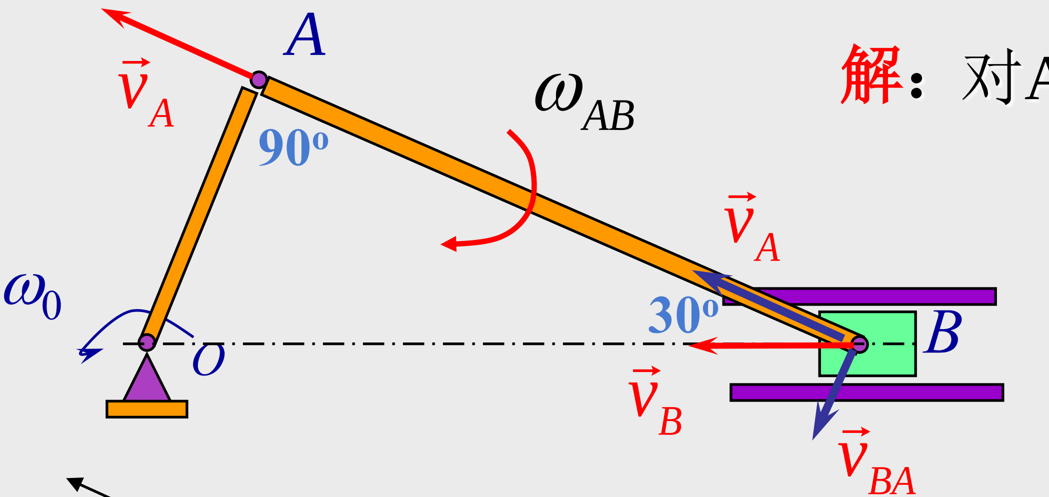
即： $0 = a^{t}_{BA}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{4v^2}{3L}\dfrac{1}{2}$ ⇒ $a^{t}_{BA} = -\dfrac{4\sqrt{3}v^2}{9L}$

⇒ $\alpha_{AB} = \dfrac{a^{t}_{BA}}{L} = -\dfrac{4\sqrt{3}v^2}{9L^2}$

“*n*”： $a_B\cos 30^\circ = a^{n}_{BA}$

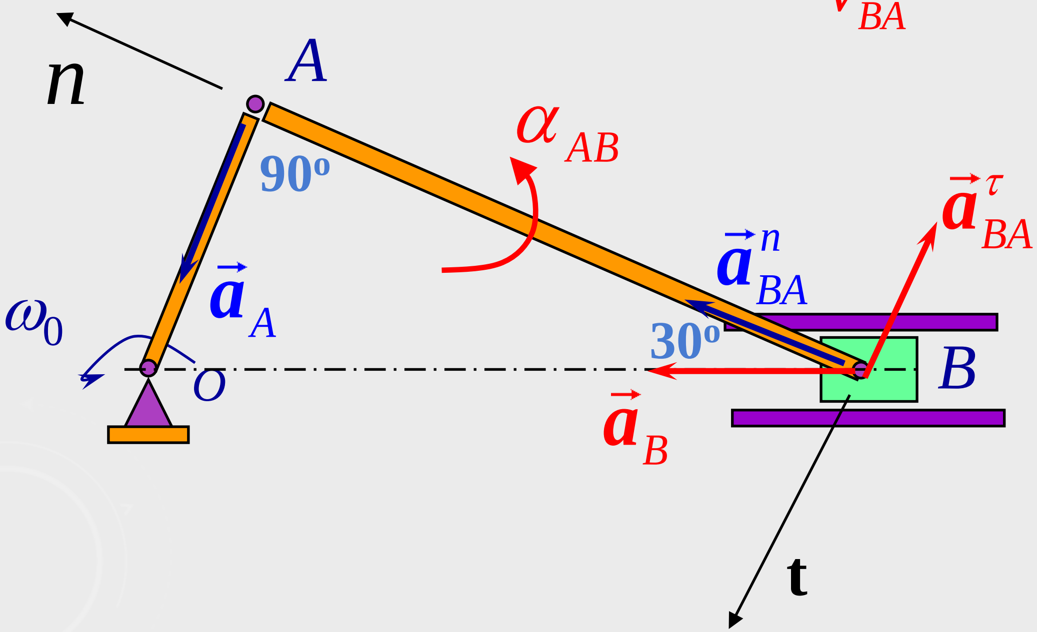
⇒ a_B

例： 曲柄—滑块机构，$OA = r$，$AB = l$，曲柄以等角速度ω_0绕 O 轴旋转。求：图示瞬时，滑块B的加速度 a_B 和连杆AB的角加速度α_{AB}。



解：对AB 杆 **1) 速度分析: 基点法**

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{\omega_0 \cdot AO}{\sqrt{3} \cdot AB} = \frac{\omega_0}{3}$$



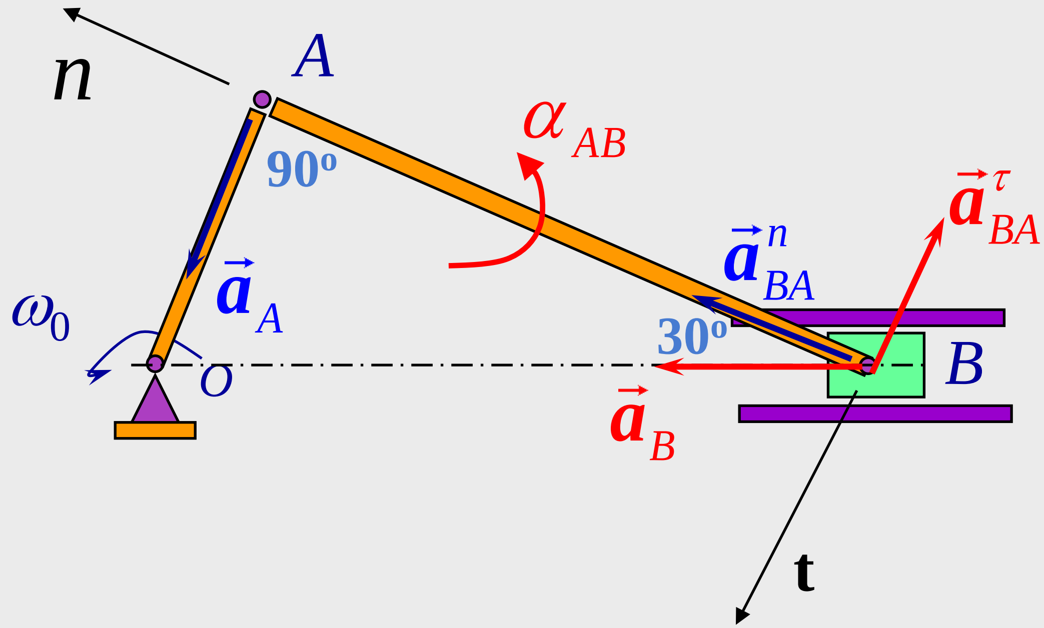
2) 加速度分析: 基点法

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$$

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 |AB| = \frac{l\omega_0^2}{9}$$

“n”: $$a_B \cos 30^\circ = a_{BA}^n$$

$$a_B = \frac{2\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2$$



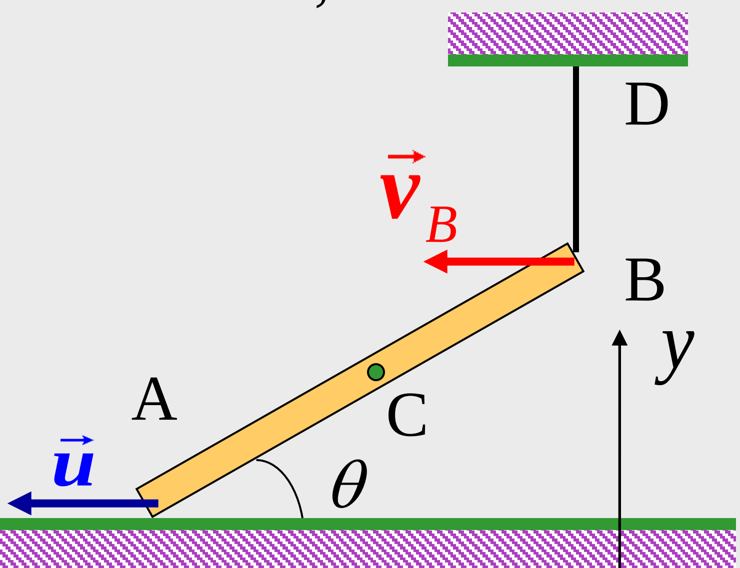
“t” $a_B \sin 30^\circ = a_A - a^{\tau}_{AB}$ 其中：$a_A = r\omega_0^2$

则：$\frac{2\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2 \frac{1}{2} = r\omega_0^2 - a^{\tau}_{AB}$ $\Rightarrow$ $a^{\tau}_{BA} = r\omega_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2 = (r - \frac{\sqrt{3}}{27} l)\omega_0^2$

因：$a^{\tau}_{BA} = \alpha_{AB} l$ $\Rightarrow$ $\alpha_{AB} = \frac{a^{\tau}_{BA}}{l} = (\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27})\omega_0^2 = \frac{8\sqrt{3}}{27_{10}}\omega_0^2$

例:*A*端沿直线匀速度*u*运动,求绳铅垂时*AB*杆的角加速度和中点*C*的加速度.

$AB=2r, BD=r$



解：[*AB*杆]，

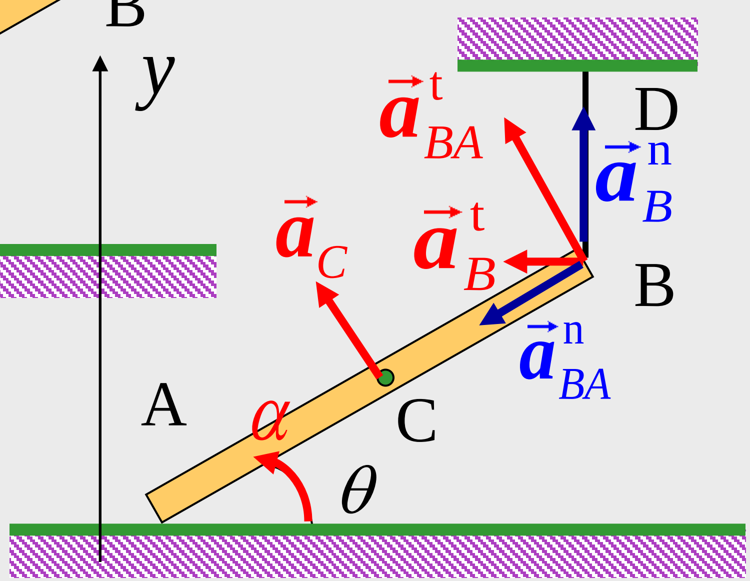
***AB*杆上A点为基点，由加速度基点法：**

$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}^{\mathrm{n}}+\vec{a}_{BA}^{\mathrm{t}}$$

$$\boxed{\vec{a}_B^{\mathrm{t}}+\vec{a}_B^{\mathrm{n}}=\vec{a}_{BA}^{\mathrm{n}}+\vec{a}_{BA}^{\mathrm{t}}}$$

? ?

“y”： $a_B^{\mathrm{n}}=-a_{BA}^{\mathrm{n}}\sin\theta+a_{BA}^{\mathrm{t}}\cos\theta$ (1)



***AB*杆瞬时平动**

$v_A=v_B=u \qquad \omega_{AB}=0$

$\Rightarrow \quad a_{BA}^{\mathrm{n}}=0 \qquad a_B^{\mathrm{n}}=\dfrac{u^2}{r}$

代入(1)式：

$$\frac{u^2}{r}=a_{BA}^{\mathrm{t}}\cos\theta$$

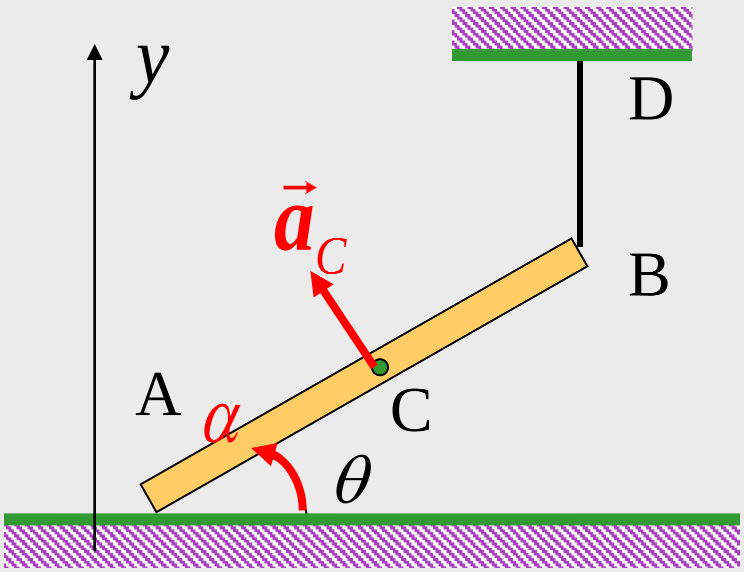
$$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{a_{BA}^{\mathrm{t}}}{2r}=\frac{u^2}{2r^2\cos\theta}$$

例:A端沿直线匀速度u运动,求绳铅垂时AB杆的角加速度和中点C的加速度.

$$\omega_{AB}=0$$

$$\alpha=\frac{u^2}{2r^2\cos\theta}$$

$AB=2r, BD=r$



中点C的加速度:

$$\vec{a}_C=\underbrace{\vec{a}_A+\vec{a}_{CA}^{\mathrm{n}}}_{=0}+\vec{a}_{CA}^{\mathrm{t}}$$

?

?

$$\Rightarrow\quad \vec{a}_C=\vec{a}_{CA}^{\mathrm{t}}$$

$$|a_C|=|a_{CA}^{\mathrm{t}}|=\alpha r=\frac{u^2}{2r\cos\theta}$$

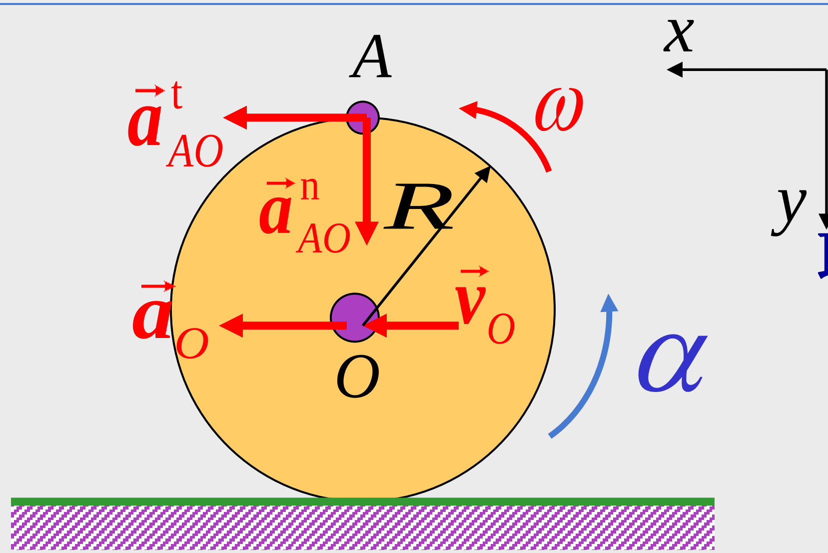
例：已知半径为 R 圆盘在地面上纯滚动，图示瞬时轮心的速度为 v_O和加速度a_O，求圆盘的角速度、角加速度和A点的加速度。

解：因为圆盘纯滚动

$$\omega = \frac{v_O}{R}$$

上式两边对时间 t 求导

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}_O}{R} = \frac{a_O}{R}$$



取O为基点，加速度基点法：

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}^{\tau}_{AO} + \vec{a}^{n}_{AO}$$

?

?

其中：

$$a^{\tau}_{AO} = \alpha R = a_O$$

$$a^{n}_{AO} = \omega^2 R = \frac{v_0^{\,2}}{R}$$

$$'x':\quad a_{Ax} = a_O + a^{\tau}_{AO} \Rightarrow a_{Ax} = 2a_O$$

$$'y':\quad a_{Ay} = a^{n}_{AO} \Rightarrow a_{Ay} = \frac{v_O^2}{R}$$

例：已知半径为R圆盘在地面上纯滚动，图示瞬时轮心的速度为$\mathbf{v}_O$和加速度$\boldsymbol{a}_O$，求圆盘的角速度、角加速度和A点的加速度。

解：因为圆盘纯滚动

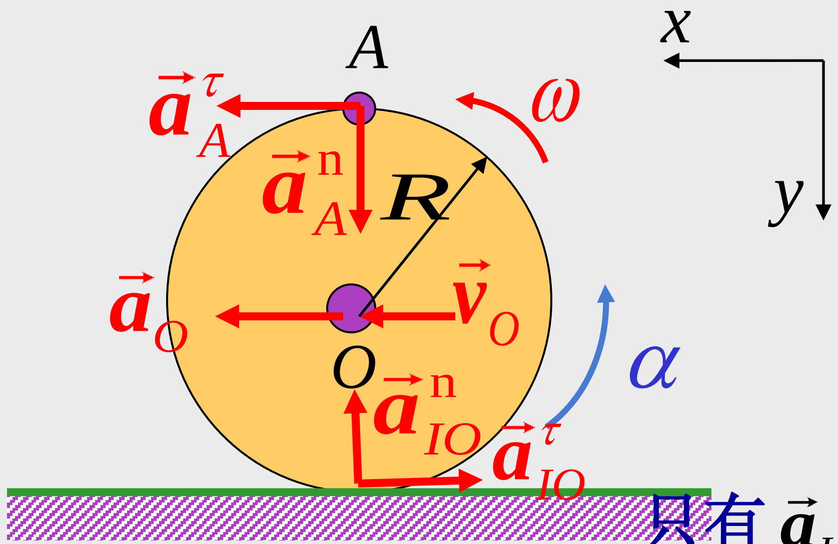
$$\omega = \frac{v_O}{R}$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}_O}{R} = \frac{a_O}{R}$$

~~I为瞬心：~~

$$\cancel{a_A^\tau = \alpha \cdot 2R = 2a_0}$$

$$\cancel{a_A^n = \omega^2 2R = \frac{2v_0^{\ 2}}{R}}$$



依据：$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_I + \vec{a}_{AI}^\tau + \vec{a}_{AI}^n}$

只有 $\vec{a}_I = 0$ $\vec{a}_A = \overline{\vec{a}_A^\tau} + \overline{\vec{a}_A^n}$

瞬心加速度 $\vec{a}_I = \vec{a}_O + \vec{a}_{IO}^\tau + \vec{a}_{IO}^n$

x： $a_{Ix} = 0$ y： $a_{Iy} = -\dfrac{v_O^2}{R}$

$$a_{Ax} = 2a_O$$

$$a_{Ay} = \frac{v_O^2}{R}$$

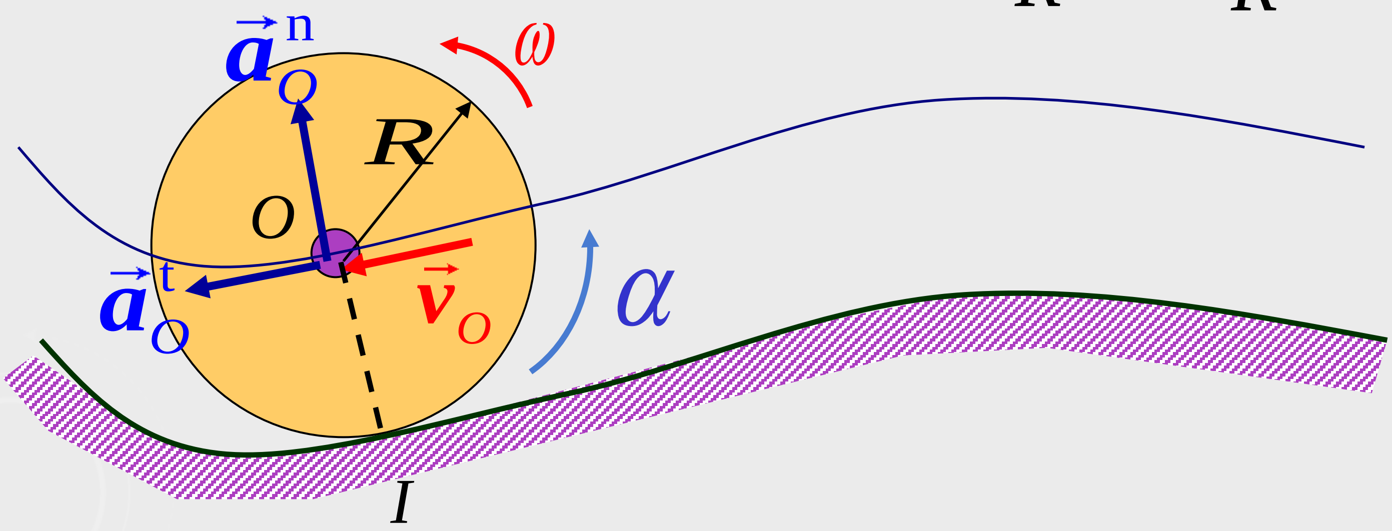
结论：瞬心是速度中心，但加速度不为零。

注意：速度瞬心不可用于加速度计算！ $\vec{a}_B = \vec{a}_I + \vec{a}_{BI}^{t} + \vec{a}_{BI}^{n}$

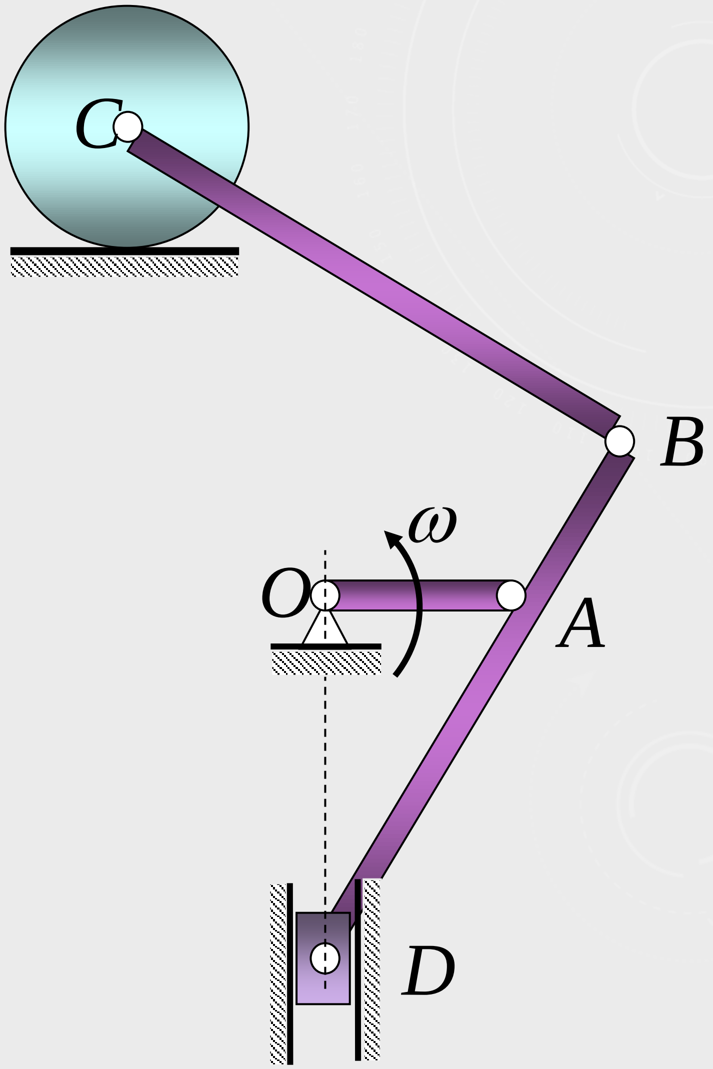
问题：轮在任意面上纯滚动，其角速度、角加速度与轮心速度、加速度有什么关系？

I为瞬心，$IO=R$，则 $\omega = \dfrac{v_O}{R}$ 不是矢量关系！

求导： $\alpha = \dfrac{\dot{v}_O}{R} = \dfrac{a_O^t}{R}$ ？



例:图示平面机构，半径为 R 的轮子沿固定水平轨道作纯滚动，杆OA以匀角速度绕轴 O 转动。已知：ω=2rad/s，OA = R = 15cm，BD = BC = 45cm，AD = 30cm，OD铅垂。在图示位置时，OA处于水平，$BD \perp BC$。试求该瞬时轮心C的速度和加速度。



解： 杆BD作瞬时平动

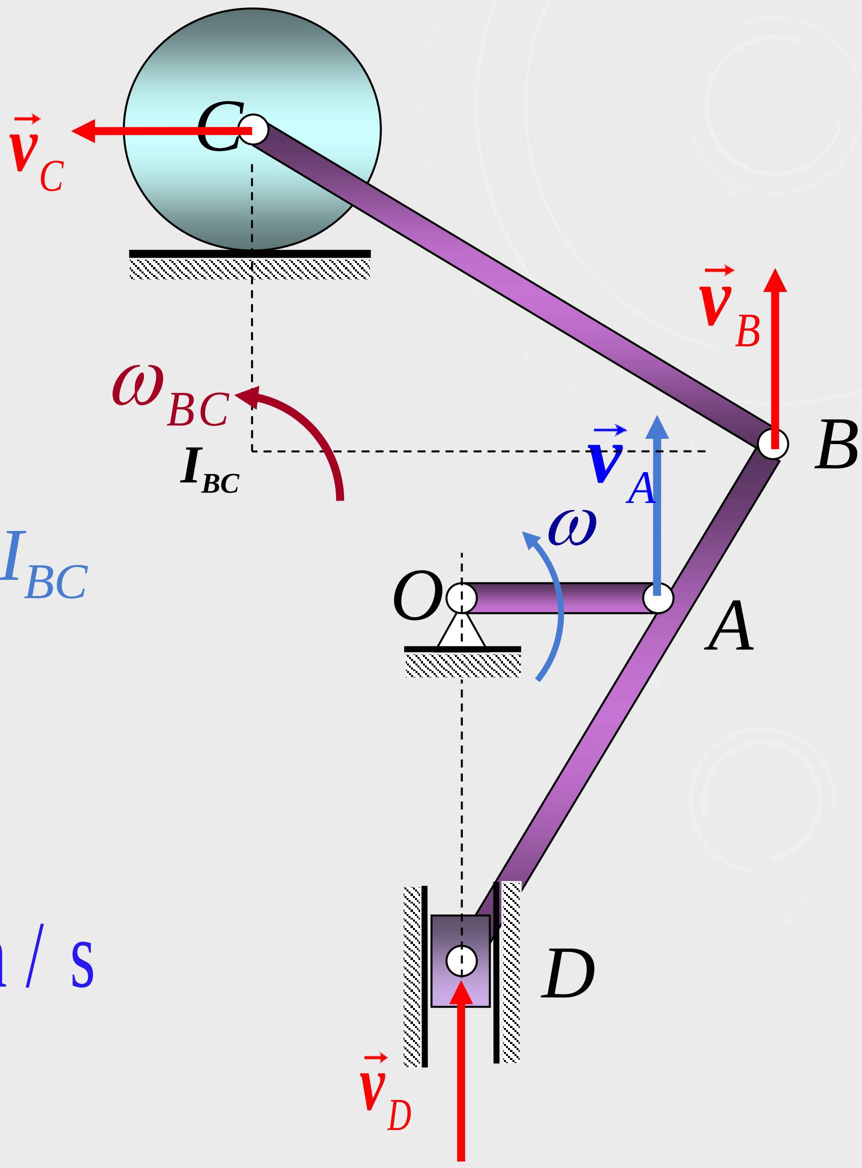
$$\omega_{BD}=0$$

$$v_B=v_A=30\,\mathrm{cm/s}$$

BC 平面运动，速度瞬心在点I_{BC}

$$\omega_{BC}=\frac{v_B}{PB}$$

$$v_C=IC\times\omega_{BC}=17.3\,\mathrm{cm/s}$$



选点A为基点，研究点D。

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_{DA}^{\,t}$$

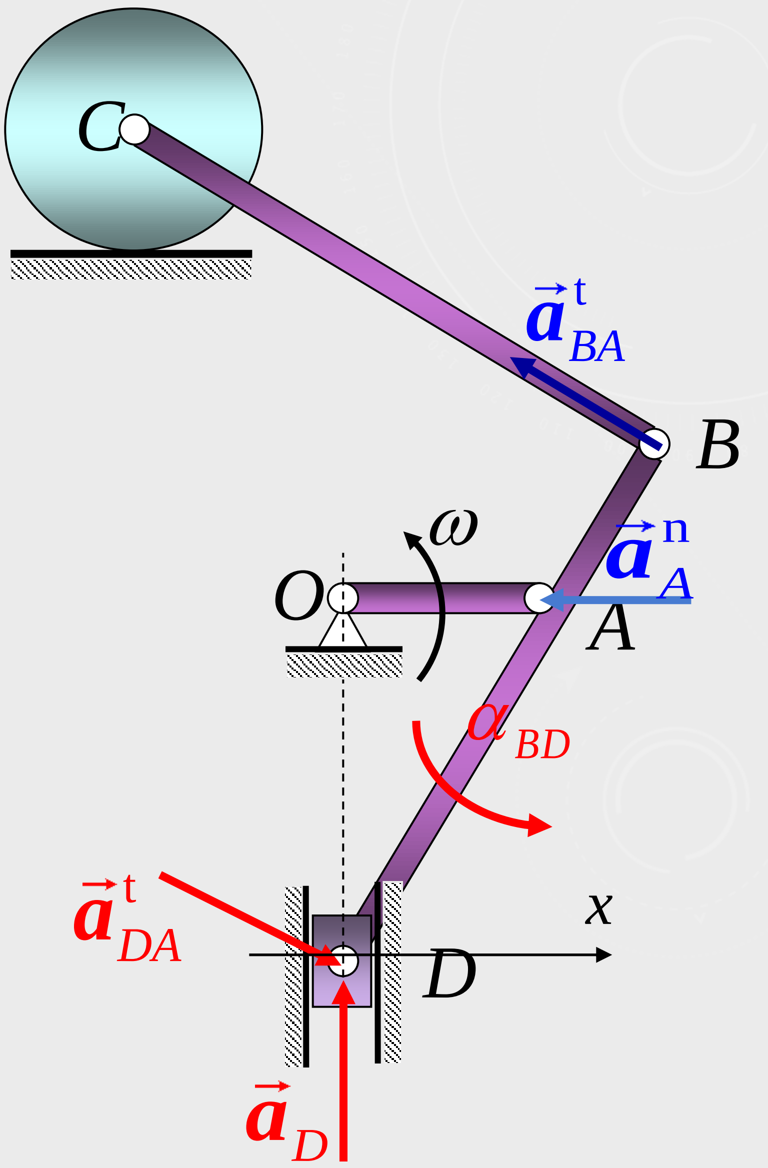
? ?

"x" $0 = -a_A^n + a_{DA}^t \cos 30°$

$$\alpha_{BD} = \frac{a_{DA}^t}{AD} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{rad/s}^2$$ （逆钟向）

选点A为基点，研究点B。

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,t}$$



选点A为基点，研究点B。

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t$$

再以点B为基点，研究点C。

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t$$

?

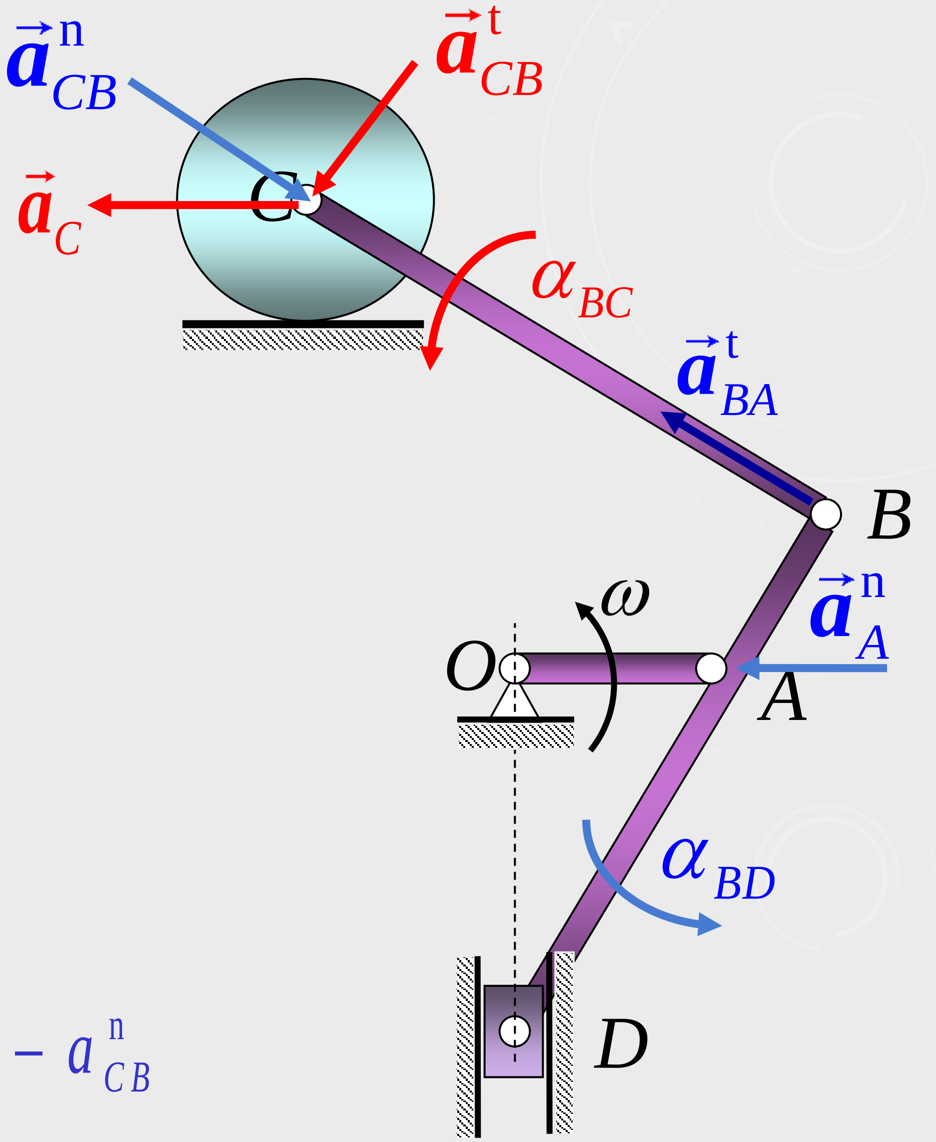
$$= \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t$$

?

“BC”

$$a_C \cos 30° = a_A^n \cos 30° + a_{BA}^t - a_{CB}^n$$

$$a_C = 69.2\,\text{cm/s}^2$$



◎平面刚体内各点速度、加速度求解；

◎平面运动刚体的角速度和角加速度求解

针对刚体系问题：通过公共点连接刚体系

平面运动问题：

1、选取研究对象；

2、给出基点法公式；

3、画矢量图；

4、分析已知、未知量（一个矢量投影式可解决两个未知量）；

5、选取投影方向；

6、代入已知计算。

例: 圆轮在曲面做纯滚动，杆OA做匀速转动，已知: w=10 rad/s, $OA = r$ =10cm, $AB = l$ = 40cm, R = 20cm, 试求圆轮与杆AB的角速度和角加速度。

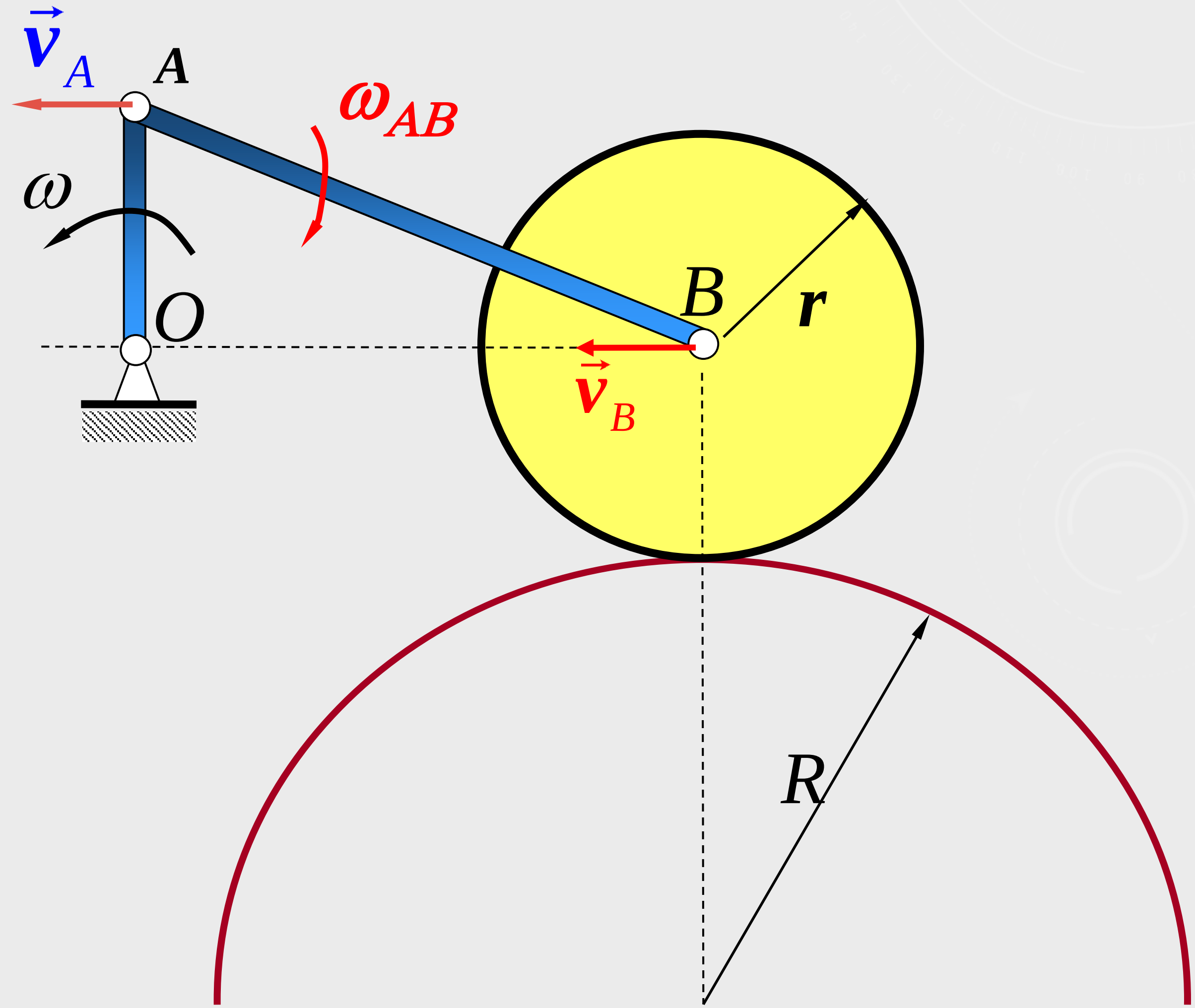
解: [AB]

杆AB作瞬时平动

$$v_A = v_B = \omega r$$

$$\omega_B = v_B/r = \omega$$

$$\omega_{AB} = 0$$

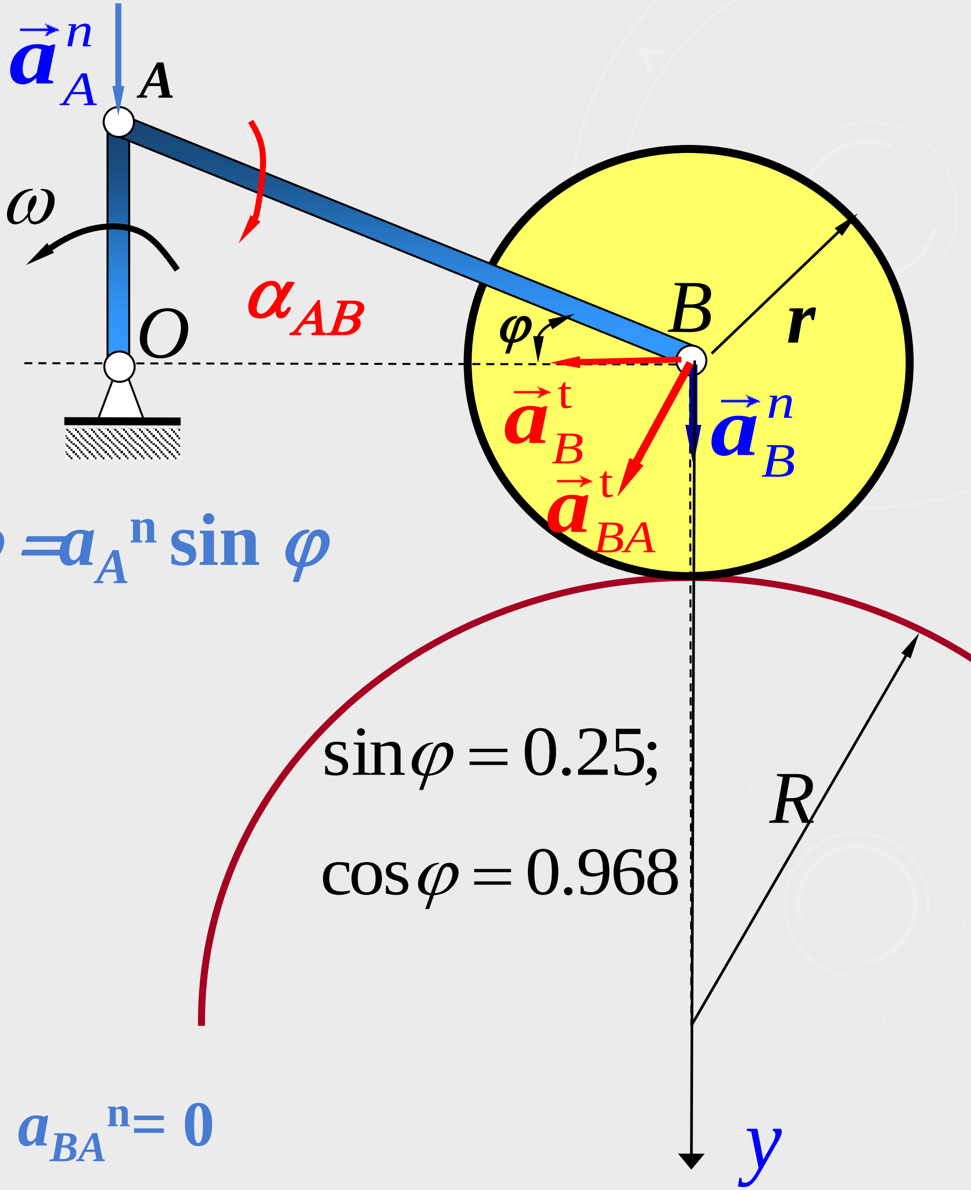


[AB]

以A为基点，求点B的加速度

$$\vec{a}_B^{\,t}+\vec{a}_B^{\,n}=\vec{a}_A^{\,n}+\vec{a}_{BA}^{\,t}$$

?　　　　　　　　?



"AB": $-a_B^t\cos\varphi+a_B^n\sin\varphi=a_A^n\sin\varphi$

$a_A^n=\omega^2 r$　　　$a_B^n=v_B^{\,2}/(R+r)$

$a_B^t=-172\ \text{cm/s}$　　$(\rightarrow)$

$\alpha_B=a_B^t/r=-17.2\ \text{rad/s}^2$;

"y": $a_B^n=a_{BA}^t\cos\varphi+a_A^n$　　　$a_{BA}^n=0$

$a_{BA}^t=-688.5\ \text{cm/s}$　　　$\alpha_{AB}=a_{AB}^t/l=-17.2\ \text{rad/s}^2$　　( )