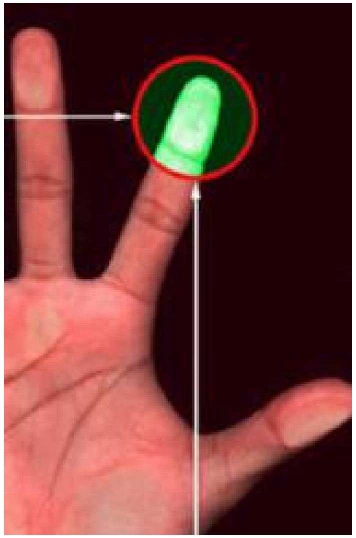
2-4 通过延伸体的稳态导热分析



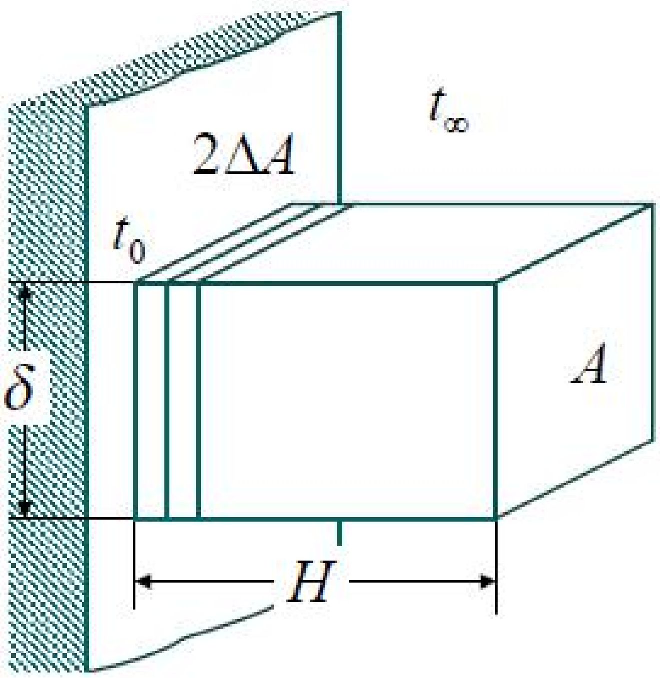
科学家有争论说：恐龙是温血的动物，其身上的肋片加强了过多运动带来的热量散失。

在工业和日常生活中广泛采用肋片。

目的

(1) 当肋片加在换热系数较小(热阻较大)的一侧时，是为了强化传热；

(2) 有时肋片加在换热系数较大的冷流体侧，此时，是为了降低壁温。



传热面积 A　　传热量 $\Phi = Ah\Delta t$

传热面积　$A+\Delta A$

传 热 量　$\Phi' = \left(A+\Delta A\right)h\Delta t$

传热面积　$A+2\Delta A$

传 热 量　$\Phi'' = \left(A+2\Delta A\right)h\Delta t$

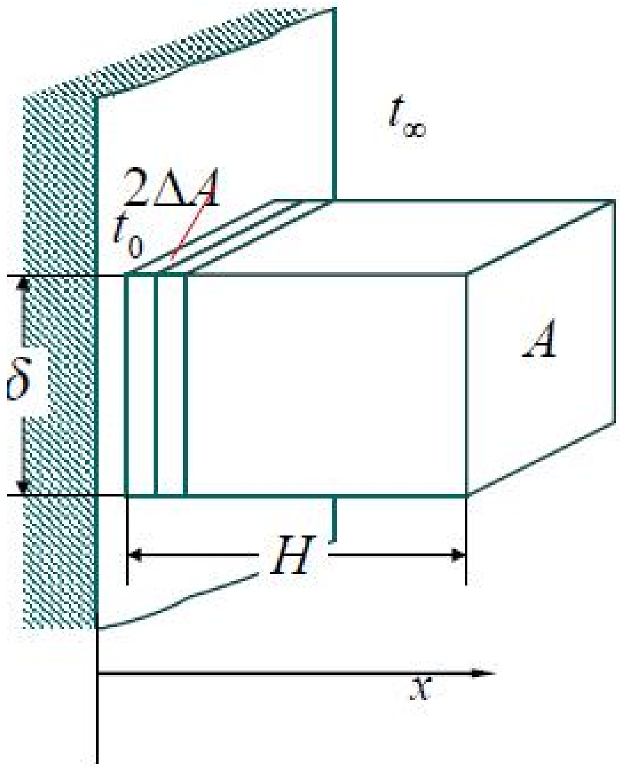
⋮

传热面积　$A+HP$

传 热 量　$\Phi_0 = \left(A+HP\right)h\Delta t$

问题：延伸体内的温度等于根部的温度吗？

如果不等于根部的温度延伸体的传热量如何计算？



最大传热量

$$\Phi_0 = \left(A + HP\right) h \Delta t$$

实际传热量 $\Phi < \Phi_0$

肋效率 $\eta_f = \dfrac{\Phi}{\Phi_0}$

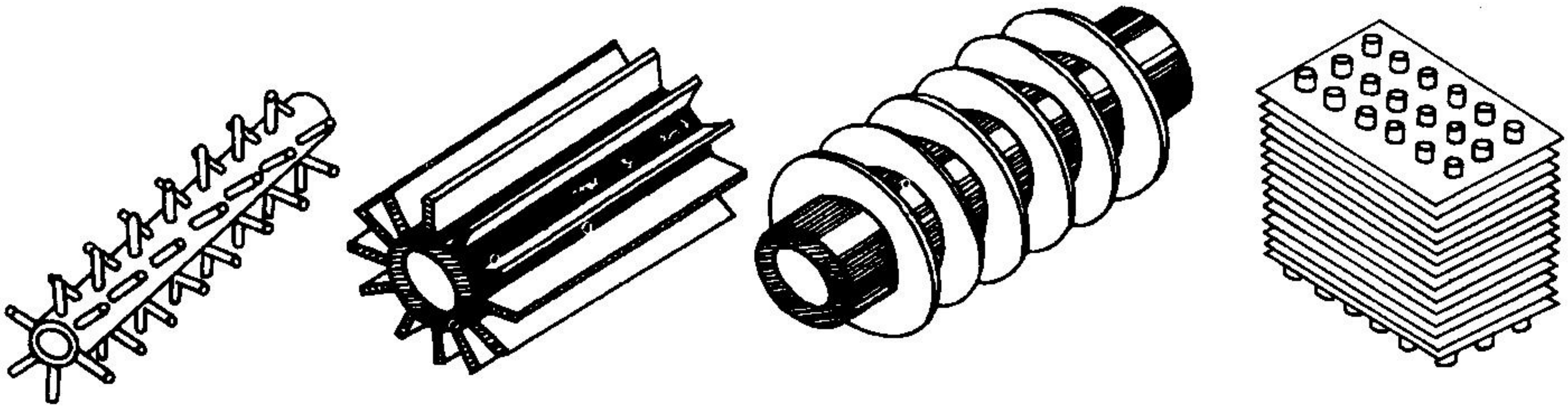
下面的任务：

计算出加了延伸体

——肋之后的传热量。

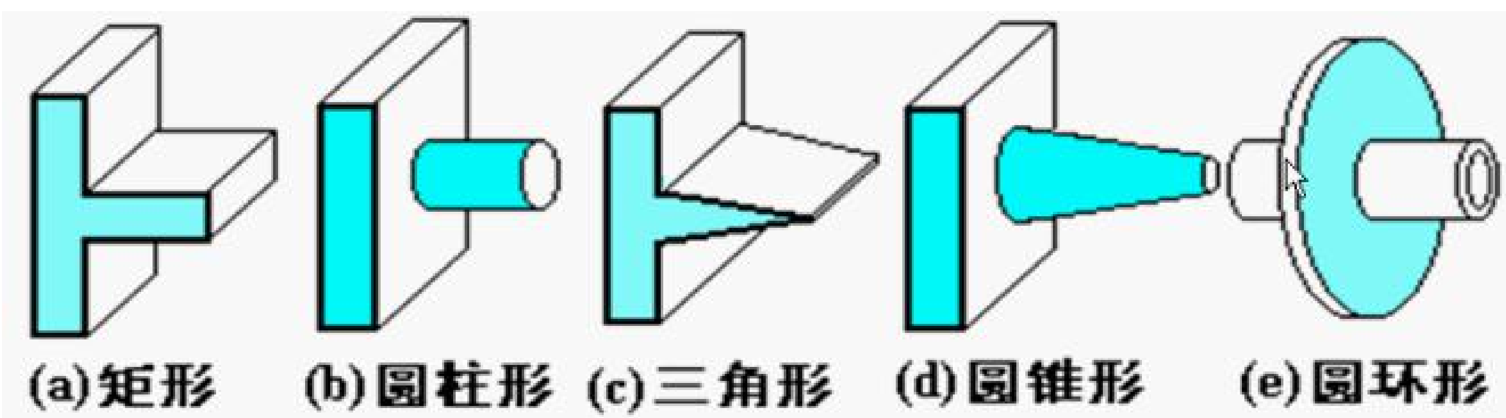
肋片的导热：热流量在传递路径上处处变化的稳态导热情况

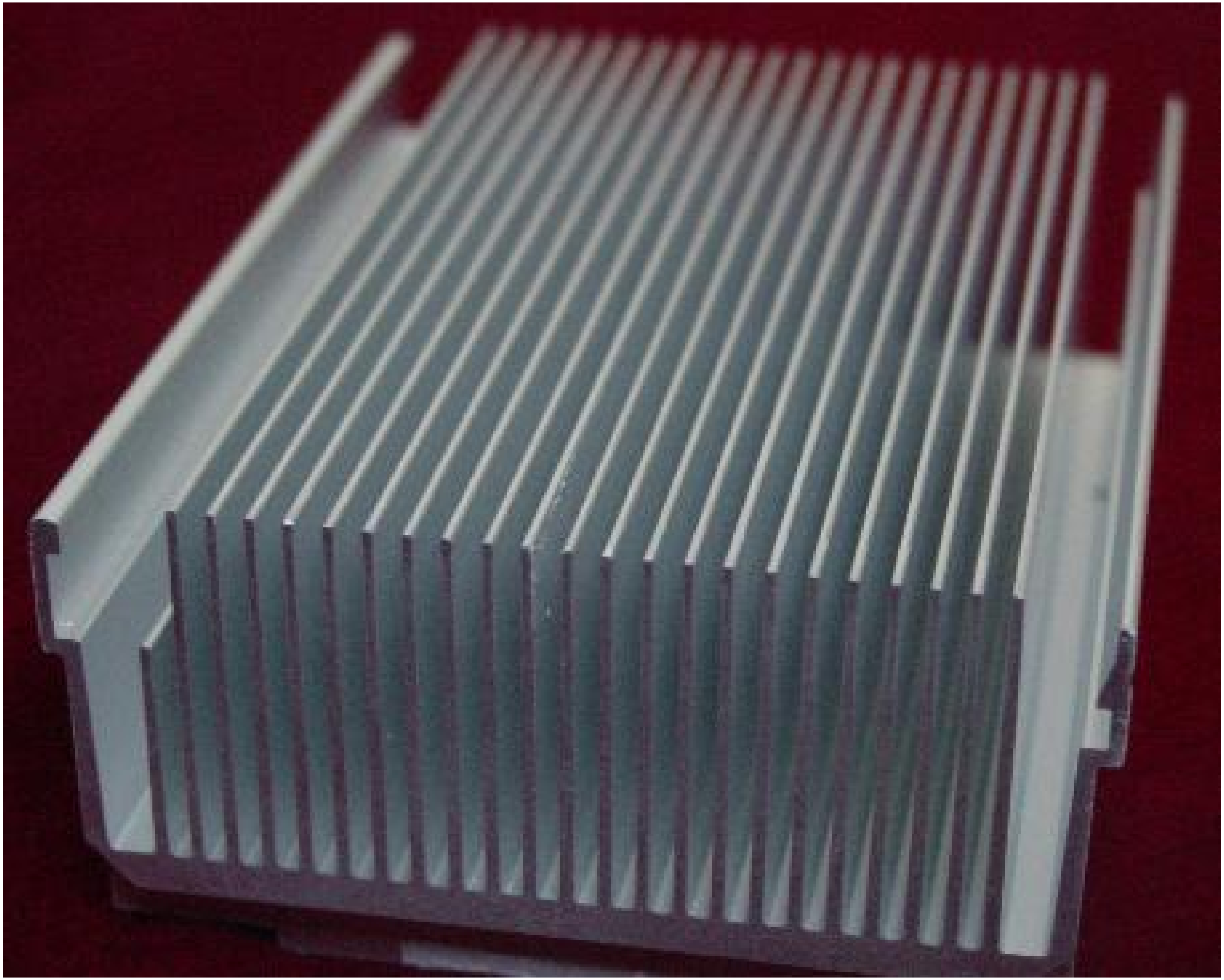
一、等截面直肋的导热



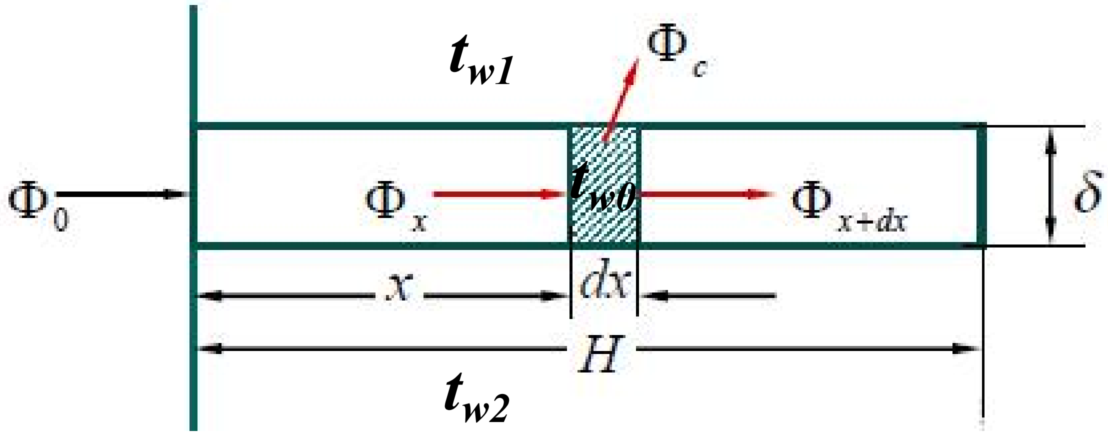
(a) 针肋　(b) 直肋　(c) 环肋　(d) 大套片

图 2-10　肋片的典型结构





③ 2D -> 1D

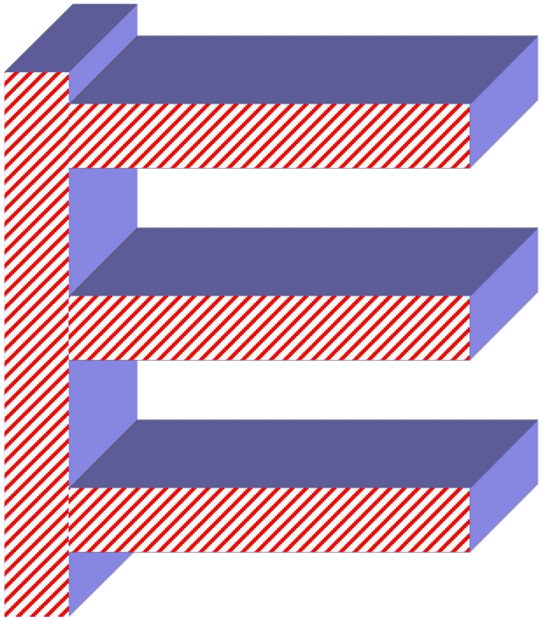


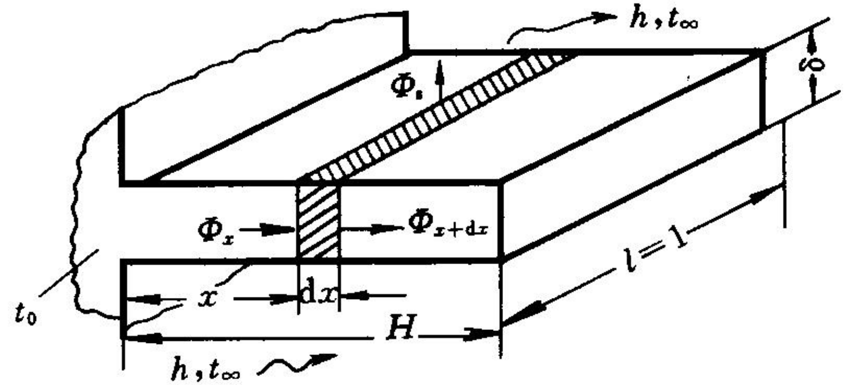
假定：温度仅沿长度方向变化。

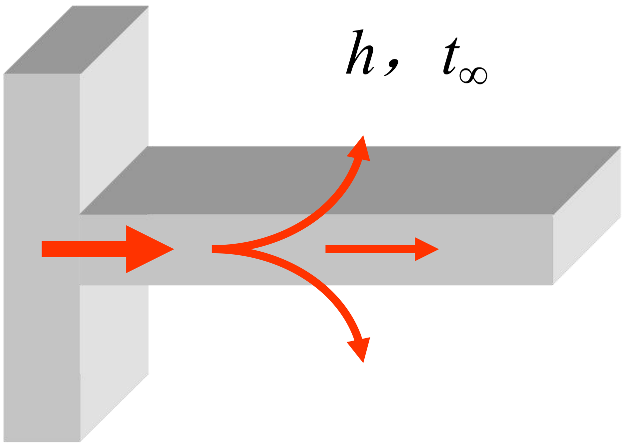
要使$t_{w1}=t_{w2}=t_{w0}$，应使导热热阻远小于对流热阻，主要温差分布在表面与空气之间$t_{w0}=60℃$，$t_w=58℃$，$t_f=20℃$

设肋片的导热系数比较大，因而$1/h >> \delta/\lambda$，即沿厚度方向肋片中温度可假设为均匀（只随x方向变化）

二、主要研究的问题







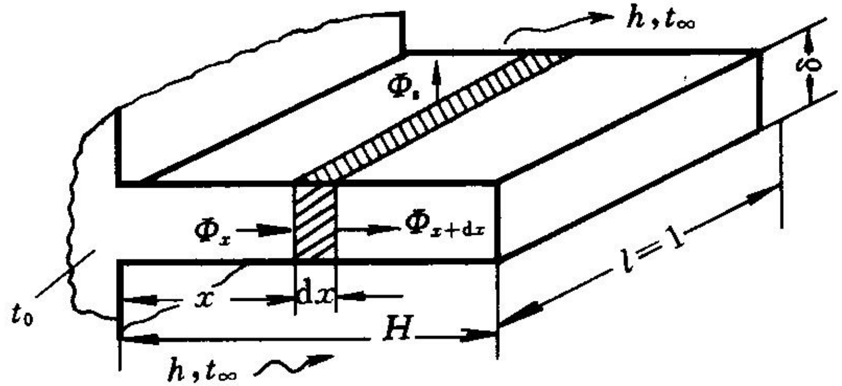
1. 通过肋片散热的热流量

2. 肋片上的温度分布

三、通过等截面直肋导热的分析和计算

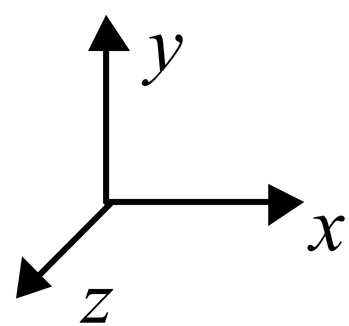
1. 物理问题

2. 假设简化



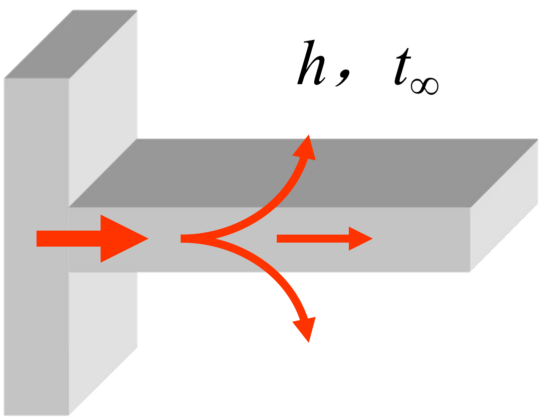
①肋片的 λ，*h*均为常数，厚度均匀，等截面直肋

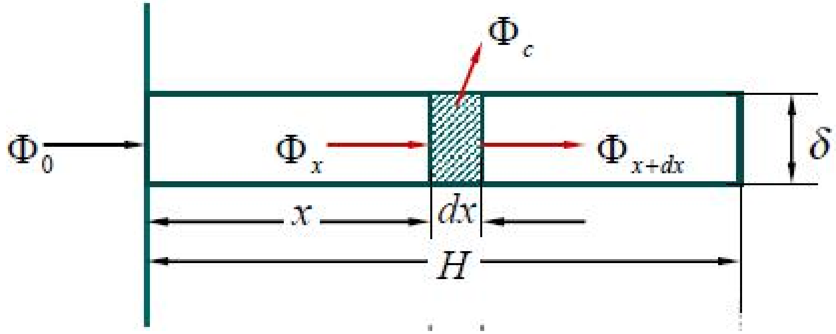
②设肋片温度垂直于纸面方向不变化，取出一个截面分析，**3D -> 2D**



④肋片顶端可以认为是绝热

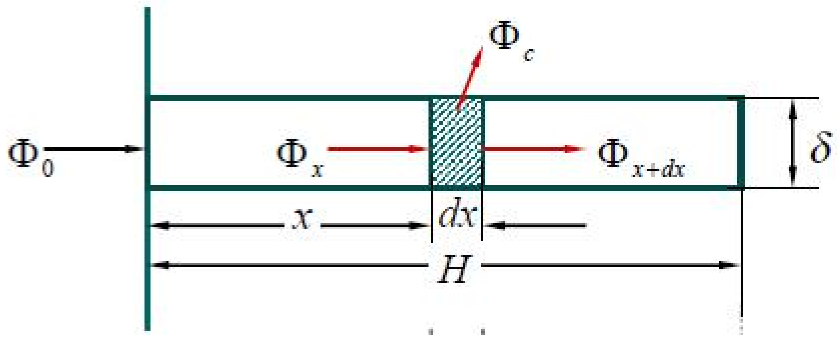
$$\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=H}=0$$





$$\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=H}=0$$

3.数学描写



$$\boxed{\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=H}=0}$$

Governing Equation $\quad G.Eq:\quad \dfrac{d^2t}{dx^2}=\dfrac{hP(t-t_\infty)}{\lambda A_c}$

$$BC:\quad x=0, t=t_0;\quad x=H, \frac{dt}{dx}=0$$

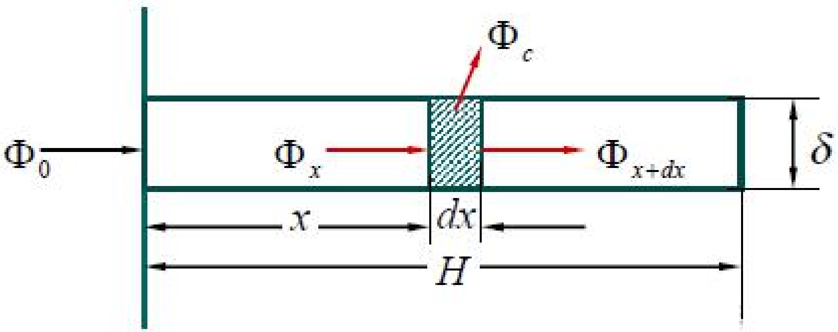
G. Eq.推导

方法一： 由能量守恒

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_c \qquad \Phi_x = -\lambda A \frac{dt}{dx}$$

$$\Phi_{x+dx} = \Phi_x - \lambda A \frac{d^2 t}{dx^2} dx$$

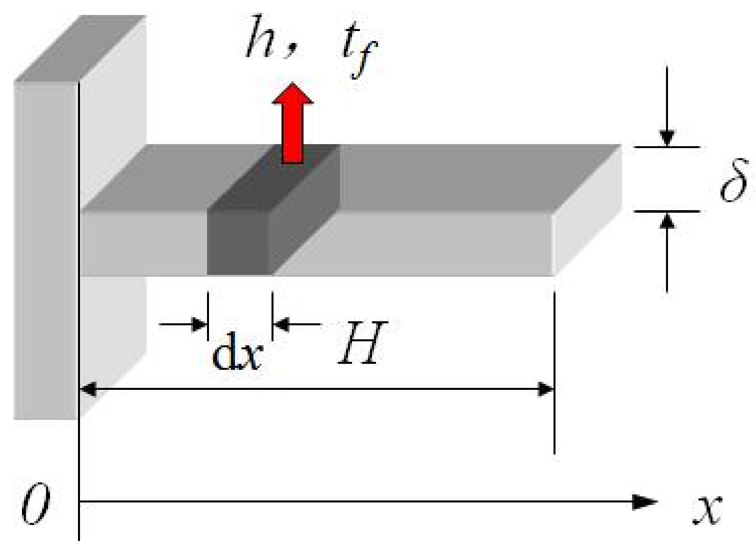
$$\Phi_c = Pdx \cdot h\left(t - t_f\right)$$



由能量守恒方程;

$$\therefore -\lambda A \frac{d^2 t}{dx^2} + Ph\left(t - t_f\right) = 0$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A}\left(t - t_f\right) = 0$$

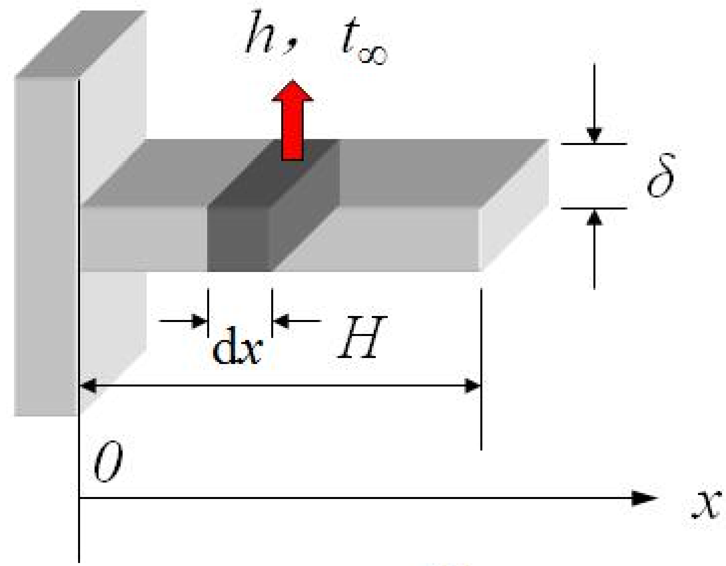


二阶线性非齐次常微分方程

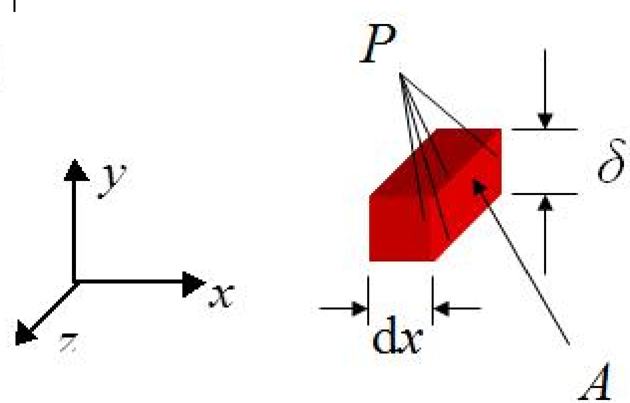
G. Eq.推导

方法二：把肋片的表面散热当作负的内热源⇒可看作有负内热源的一维稳态导热问题。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2t}{dx^2}+\dfrac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0 \\ x=0 \quad t=t_0 \\ x=H \quad \dfrac{dt}{dx}=0 \end{cases}$$



$$\dot{\Phi}=\frac{-d\Phi_c}{dV}=-\frac{h(P\,dx)(t-t_f)}{A\,dx}=-\frac{hP}{A}(t-t_f)$$



为使方程求解方便，令 $\theta = t - t_f$

过余温度

令 $m = \sqrt{\dfrac{hP}{\lambda A}}$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A}\left(t - t_f\right) = 0$$

则导热微分方程变为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \\ x = 0, \quad \theta = \theta_0 \\ x = H, \quad \dfrac{d\theta}{dx} = 0 \end{cases}$$

这里一个二阶线性齐次常微分方程，通解为

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

求$y''+py'+qy=0$的通解的步骤:

(1) 写出微分方程的特征方程$r^2+pr+q=0$;

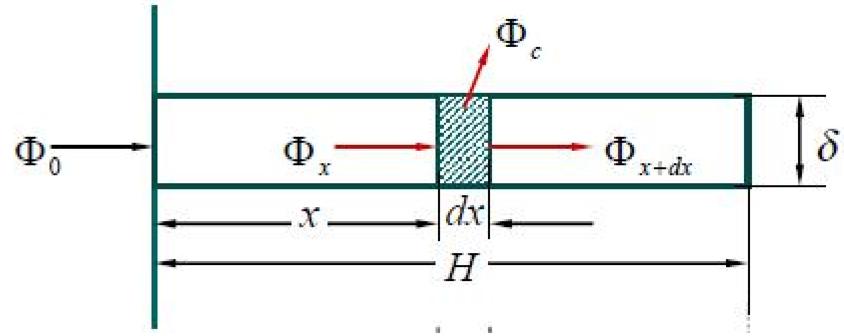
(2) 求出特征方程的两个根r_1, r_2;

(3) 根据特征方程根的不同情况, 写出微分方程的通解.

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

应用边界条件可得：

$$c_1 = \frac{\theta_0}{1+e^{2mH}}, \quad c_2 = \frac{\theta_0 e^{2mH}}{1+e^{2mH}}$$



最后可得等截面内的温度分布：

$$\theta = \theta_0 \frac{e^{mx} + e^{2mH} e^{-mx}}{1+e^{2mH}} = \theta_0 \frac{\cosh[m(x-H)]}{\cosh(mH)}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

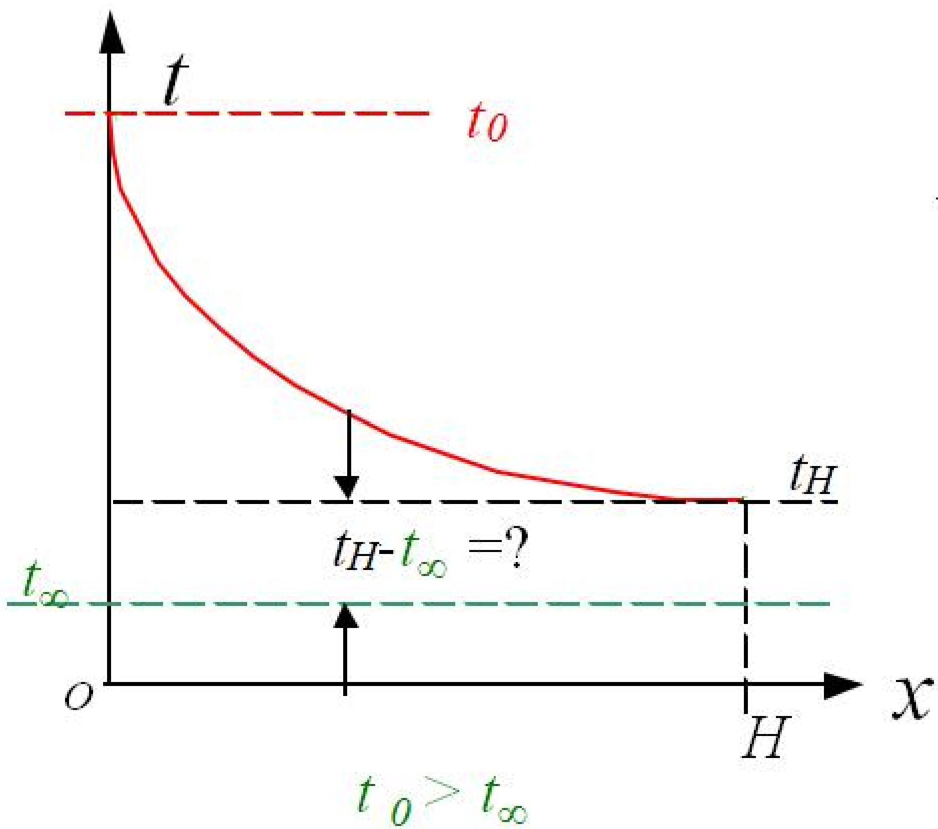
双曲正弦　　双曲余弦　　双曲正切

过余温度分布为

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\frac{\mathrm{ch}[m(H-x)]}{\mathrm{ch}(mH)}$$

$$\theta=\theta_0\frac{ch\left[m(H-x)\right]}{ch(mH)}$$

肋片温度沿肋长呈双曲线衰减变化

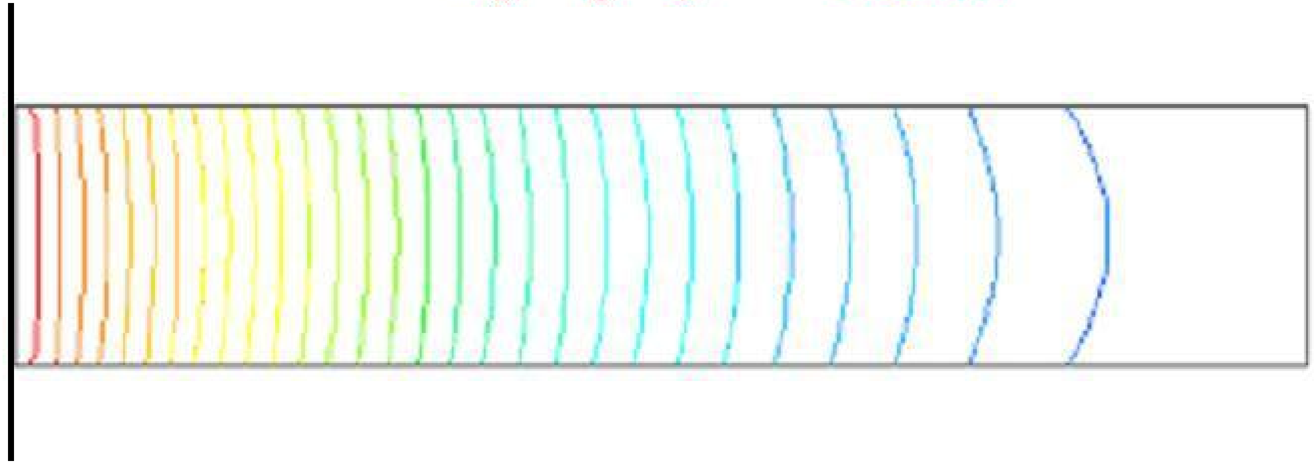


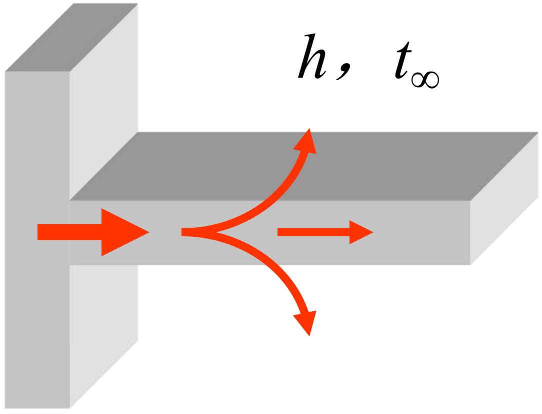
肋顶端温度为

$$\theta_H=\frac{\theta_0}{\mathrm{ch}(mH)}$$

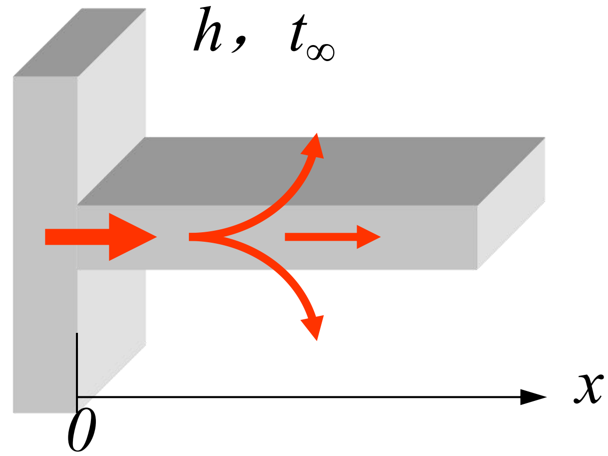
温度分布物理含义

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\frac{\mathrm{ch}[m(H-x)]}{\mathrm{ch}(mH)}$$





②热流量



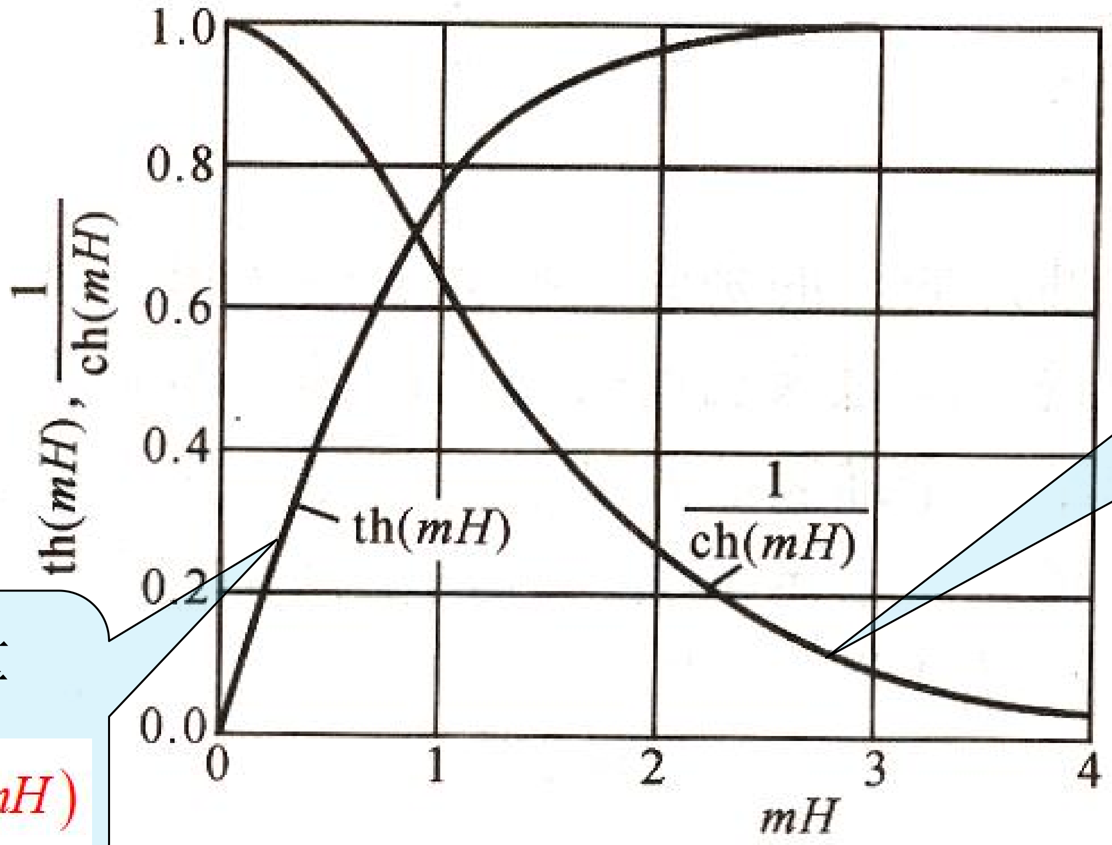
$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\frac{\mathrm{ch}[m(H-x)]}{\mathrm{ch}(mH)}$$

傅立叶导热定律

$$\Phi=-\lambda A_c\left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-\lambda A_c\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{hP\theta_0}{m}\mathrm{th}(mH)$$

对对流散热量求积分

$$\Phi=\int d\phi=\int_0^H hPdx(t-t_\infty)=\frac{hP\theta_0}{m}\mathrm{th}(mH)$$



肋顶端温度

$$\theta_H = \frac{\theta_0}{\mathrm{ch}(mH)}$$

总导热量

$$\Phi = \frac{hP\theta_0}{m}\mathrm{th}(mH)$$

肋顶端温度应用举例

温度计套管

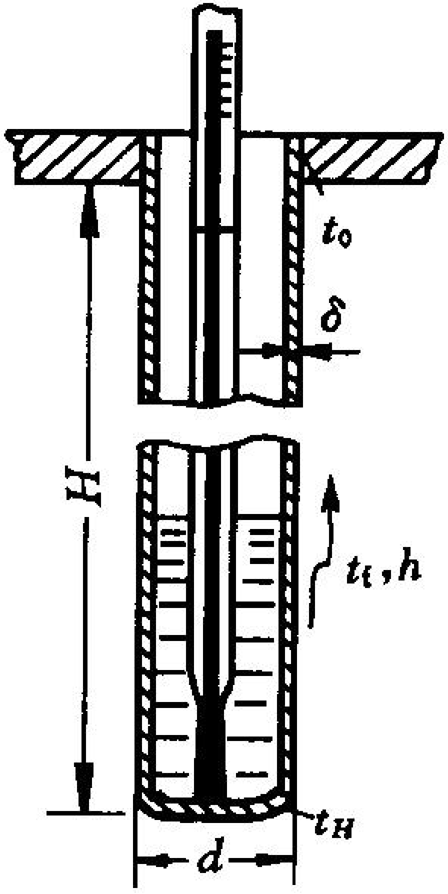
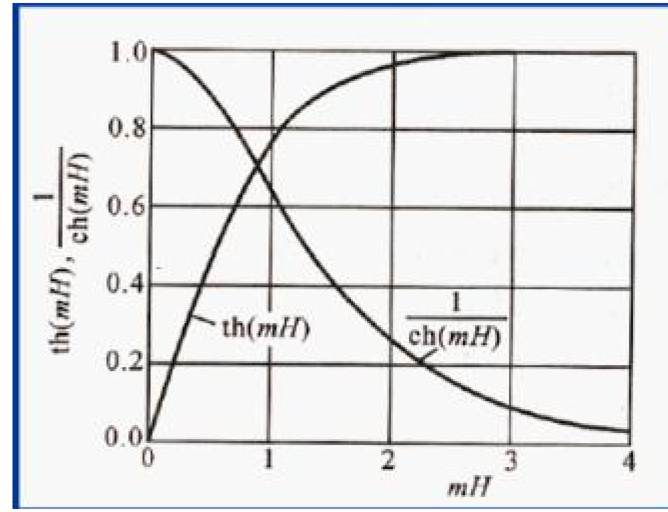


图 2-12　温度计的测量误差

【讨论】由$\theta_H = \theta_0 \dfrac{1}{ch(mH)}$可知，为了减小套管温度计的测温误差，可采取如下措施：



① 选用λ较小的材料做套管；

② 增加套管长度H，

并减小套管壁厚δ；

③ 强化套管与流体间的换热以增大h；

④ 加强套管的保温以减小沿套管长度方向的温降θ_0

$$m = \sqrt{\frac{hp}{\lambda A}}$$

考虑端部散热，肋端部边界条件（第三类）为：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \\ x = 0, \quad \theta = \theta_0 \\ x = H, \; -\lambda \left.\dfrac{d\theta}{dx}\right|_{x=H} = h_H\theta_H \end{cases}$$

通解仍然为：

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

温度分布

$$\theta = \theta_0 \frac{\mathrm{ch}\left[m(x-H)\right] + \dfrac{H}{m\lambda} sh\left[m(H-x)\right]}{\mathrm{ch}(mH) + \dfrac{H}{m\lambda} sh(mH)}$$

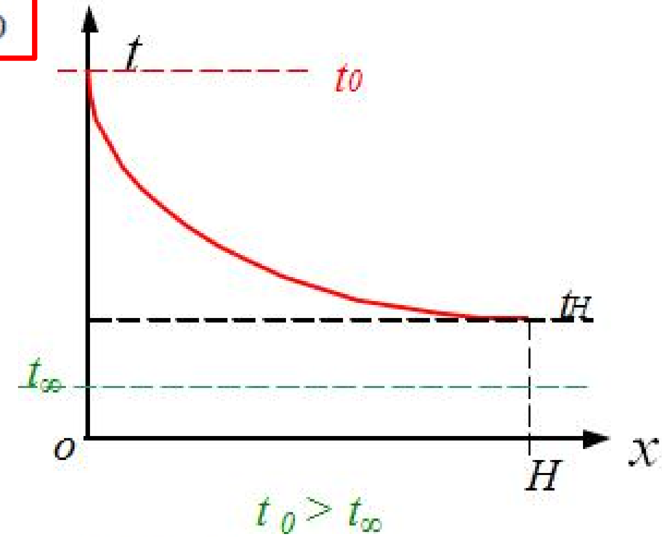
肋散热量

$$\Phi = -\lambda A \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = \lambda A\theta_0 m \frac{\mathrm{th}(mH) + \dfrac{h}{m\lambda}}{1 + \dfrac{H}{m\lambda}\mathrm{th}(mH)}$$

四、肋片效率

$$\eta_f = \frac{\text{肋片的实际散热量}}{\text{肋片全部处于根部温度下的散热量}} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

$$= \frac{hA_f(t_m - t_\infty)}{hA_f(t_0 - t_\infty)} = \frac{t_m - t_\infty}{t_0 - t_\infty}$$



对于等截面直肋

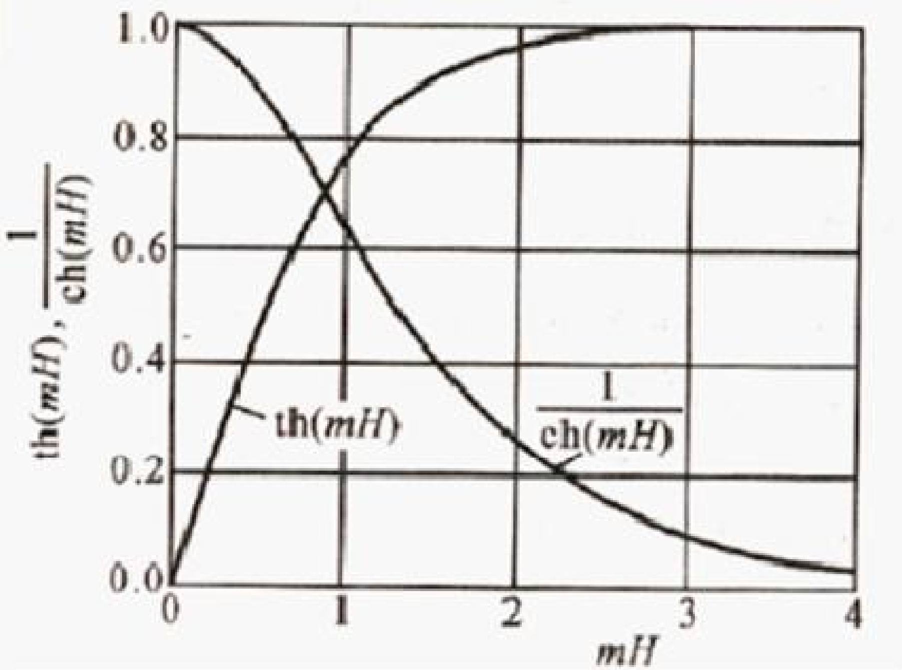
$$\eta_f = \frac{\lambda A\theta_0 m\,\mathrm{th}(mH)}{hPH(t_0 - t_f)} = \frac{\mathrm{th}(mH)}{mH}$$

在实际计算中，肋片的端部边界条件应该是第三类边界条件，所以把端面的面积折算成当量长度来处理，取

$$H_c = H + \frac{A}{P}$$

带入前面的计算公式进行计算。

肋效率讨论：



th(mH)的数值随mH的增加而趋于一定值（mH~3）

$$\eta_f=\frac{\Phi}{\Phi_0}=\frac{th(mH)}{mH}\qquad m=\sqrt{\frac{hU}{\lambda A}}$$

$$\Phi=\sqrt{hU\cdot\lambda A}\theta_0 th(mH)$$

（1）当m数值一定时，随着肋片高度H增加，Φ先迅速增大，但逐渐增量越来越小，最后趋于一定值。

说明：当H增加到一定程度，再继续增加H ⇒ ηf↓

若m，θ_0一定，$\Phi = \lambda A\theta_0 m \cdot th(mH)$

$H\uparrow$ $\Phi\uparrow$ 但增量逐渐变小

$H\uparrow$ $\eta_\mathrm{f}\downarrow$ $\because \theta_H = \dfrac{\theta_0}{ch(mH)}$ $H\uparrow\theta_H\downarrow$

肋片与流体温差减小，导致 $\eta_f\downarrow$

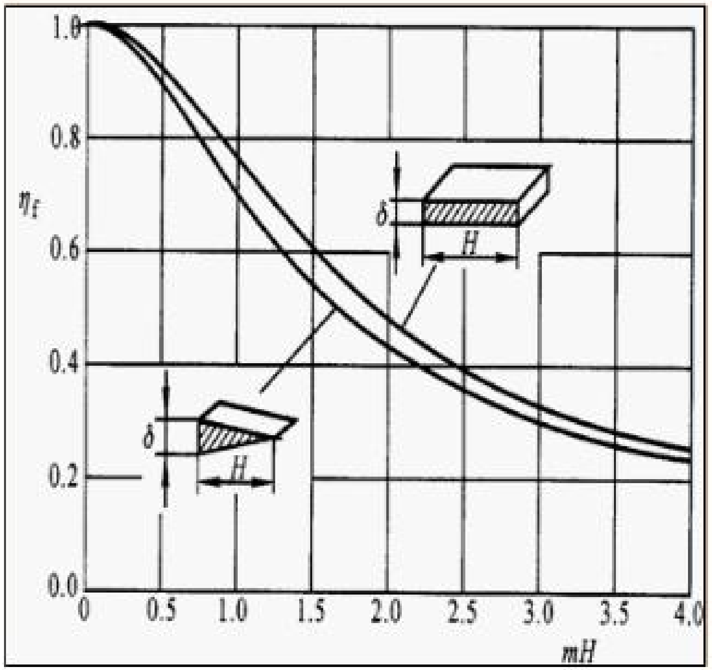
最佳肋片高度H

$mH\uparrow\rightarrow\dfrac{1}{\mathrm{ch}(mH)}\downarrow$ $\theta_H = \theta_0\dfrac{1}{\mathrm{ch}(mH)}$

$mH\uparrow\rightarrow$端部温度$\downarrow\rightarrow\eta_f\downarrow$

（2）mH 的数值较小时，ηf 较高。在高度H一定时，较小的m有利于提高ηf。

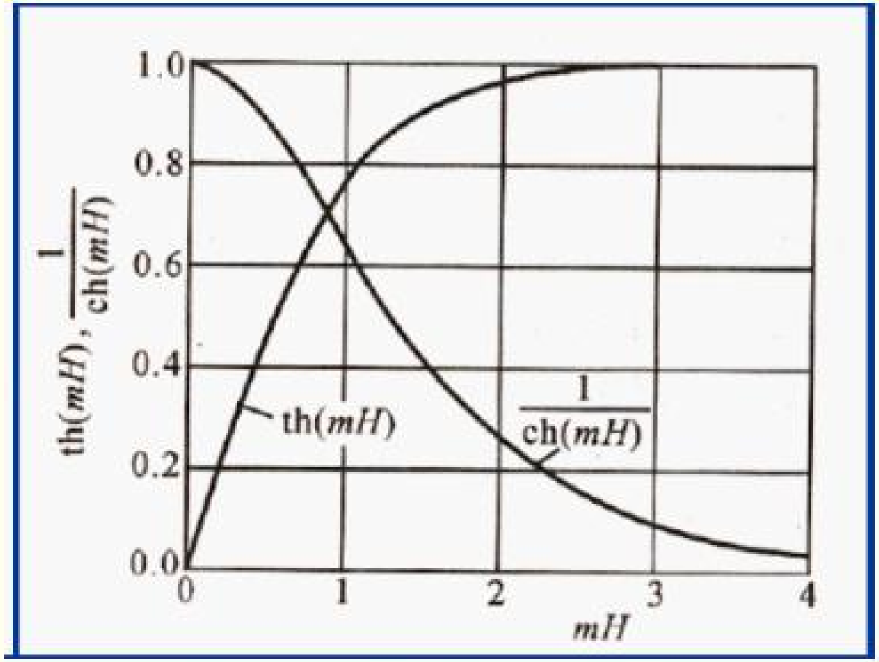
当λ和h都给定时，m随P/A的降低而减小。P/A取决于肋片几何形状和尺寸。



$$\eta_f = \frac{th(mH)}{mH}$$

$$m = \sqrt{\frac{hU}{\lambda A}}$$

说明：当H增加到一定程度，再继续增加H ⇒ ηf ↓



$$\eta_f = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{th(mH)}{mH}$$

$$m = \sqrt{\frac{hU}{\lambda A}}$$

（3）肋片应选用热导率较大的材料：

导热系数越大，效率越高

ηf >80%的肋片经济实用

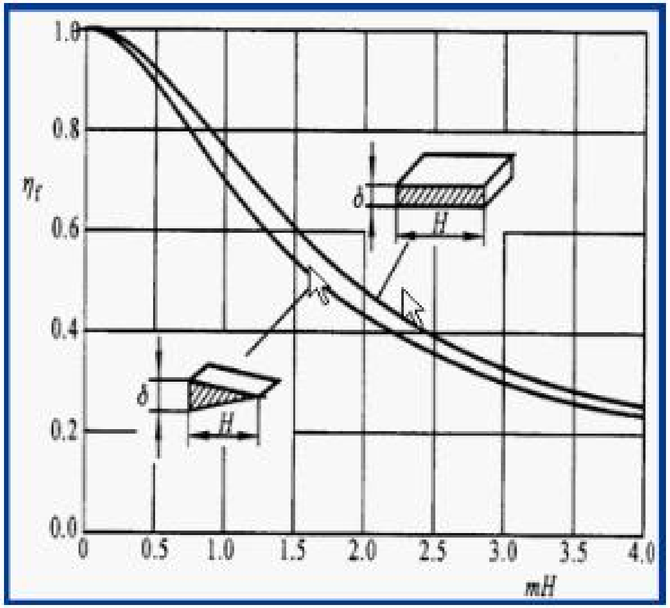
变截面肋片：保持散热量基本不变并减轻肋片重量、节省材料

4）肋表面与流体之间的换热系数h越大，效率越低；

通常在h在较小的一侧加肋较为合理，当壁面与气体换热，尤其是自然对流换热是，加肋效果明显；

$$h\uparrow \Rightarrow m\uparrow \rightarrow mH\uparrow \rightarrow \eta_{\mathrm{f}}\downarrow$$

$$\eta_f = \frac{th(mH)}{mH} \qquad m = \sqrt{\frac{hU}{\lambda A}}$$



变截面肋片：保持散热量基本不变并减轻肋片重量、节省材料

影响肋效率的因素

$$\eta_f=\frac{\text{实际散热量}\Phi}{\text{整个肋表面温度均为}t_0\text{时的散热量}\Phi_0}\approx\boxed{\frac{\theta_m}{\theta_0}=\frac{t_m-t_f}{t_0-t_f}}$$

影响肋片效率的因素：肋片材料的热导率λ、肋片表面与周围介质之间的表面传热系数*h*、肋片的几何形状和尺寸（*P*、*A*、*H*）。

措施：

$$\lambda\uparrow,h\downarrow,H\downarrow\Rightarrow\quad\eta_f\uparrow$$

$$\eta_f=\frac{th(mH)}{mH}$$

$$m=\sqrt{\frac{hU}{\lambda A}}$$

mH越小，效率越高，但要满足散热量要求

例题 2-11 一矩形直肋，厚6mm，高50mm，宽800mm，根部温度95℃，材料的热导率120 W/(m. K)。肋片周围流体的温度为20℃，表面传热系数为12W/(m². K)。试计算肋片的散热量（不计肋端的散热）。

解　散热量 $m=\sqrt{\dfrac{hP}{\lambda A}}=\sqrt{\dfrac{12\times(0.8+0.006)\times 2}{120\times 0.8\times 0.006}}=5.795\mathrm{m}^{-1}$

$$\begin{aligned}\Phi&=\lambda A\theta_0 m\,\mathrm{th}(mH)\\&=120\times 0.8\times 0.006\times(95-20)\times 5.795\times \mathrm{th}(5.795\times 0.05)\\&=70.57\mathrm{W}\end{aligned}$$

考虑端部散热 $H_c=H+\dfrac{A}{P}=0.05+\dfrac{0.8\times 0.006}{(0.8+0.006)\times 2}=0.0530\mathrm{m}$

$$\begin{aligned}\Phi&=\lambda A\theta_0 m\,\mathrm{th}(mH_c)\\&=120\times 0.8\times 0.006\times(95-20)\times 5.795\times \mathrm{th}(5.795\times 0.053)\\&=74.56\mathrm{W}\end{aligned}$$

不考虑端部散热时的误差

$$\left|\frac{74.56-70.57}{74.56}\right|\times100\%=5.35\%$$

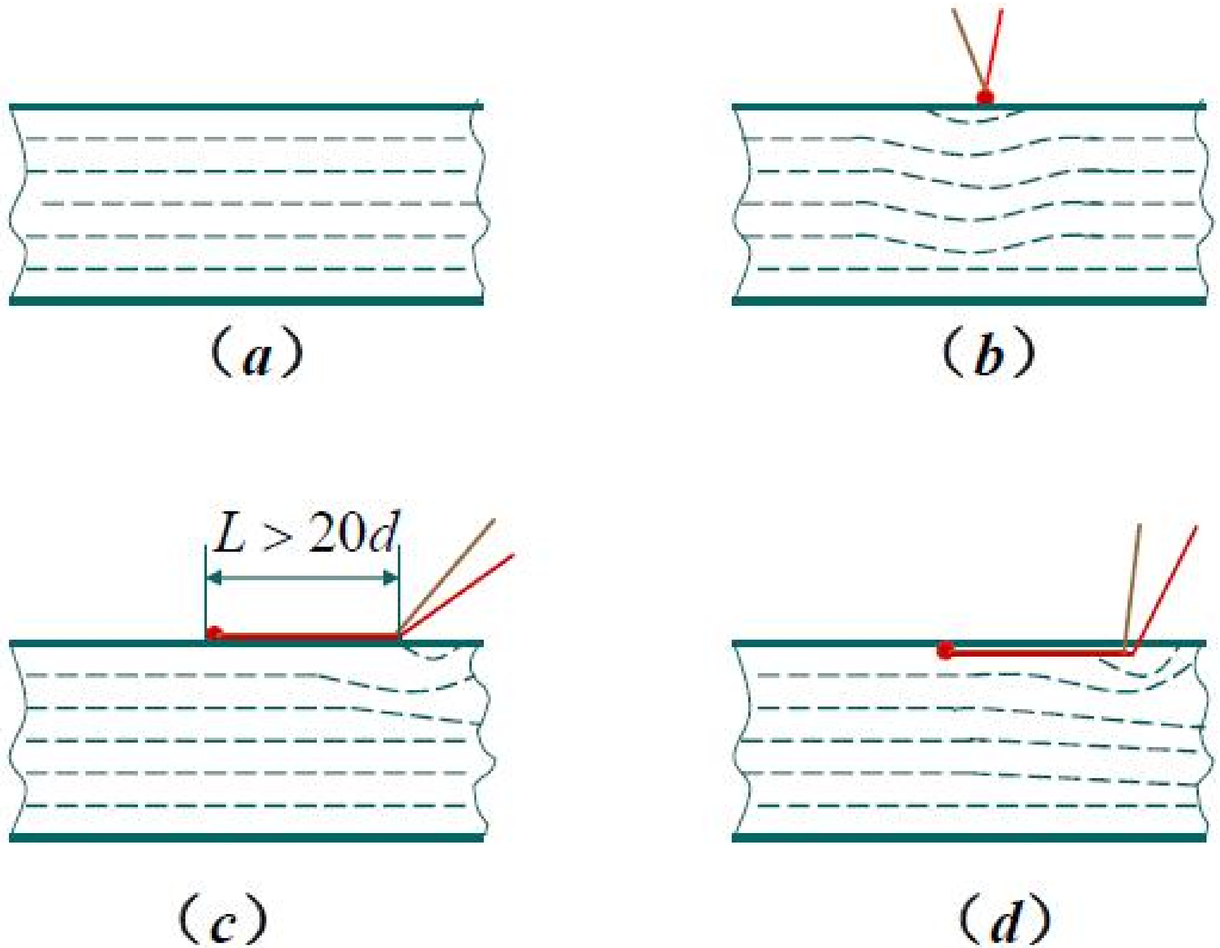
肋效率 $$\eta_f=\frac{\lambda A\theta_0 m\,\mathrm{th}(mH_c)}{hPH_c\theta_0}=\frac{74.56}{12\times1.612\times0.053\times(95-20)}=0.970$$

与无肋时相比 $$\Phi'=hA\theta_0=4.32\mathrm{W}$$

$$\frac{\Phi}{\Phi'}=\frac{74.57}{4.32}=17.26$$

加装了肋后，散热量增加为无肋时的17倍之多。

例题2-9　在对流传热实验中壁面等温线如图所示。试分析如何正确用热电偶测量壁面温度。



讨论：对延伸体导热边界条件的分析

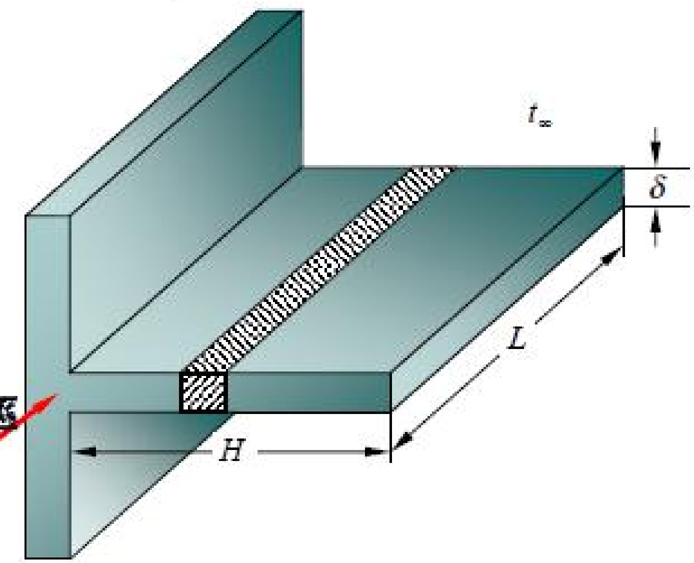
微分方程 $$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0$$

边界条件 $x=0, t=t_0$ 其它 $-\lambda\frac{\partial t}{\partial n}=h(t-t_\infty)$

将后面一个条件无因次化，例如对 $-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}=h(t-t_\infty)$

令 $\overline{\theta}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}$， $\overline{y}=\frac{y}{\delta}$ 则经过处理得

$$-\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\overline{y}}=\frac{h\delta}{\lambda}\overline{\theta}$$



无因次量 $\frac{h\delta}{\lambda}$ 越小，显然上式左边的温度变化率就越小，在延伸体厚度方向的温度就越均匀。

讨论：对延伸体导热的完整描述与边界条件的分析

定义毕奥数 $\mathrm{Bi}=\dfrac{h\delta}{\lambda}$ **Bi 是一无因次量**

其意义可理解为物体内部导热热阻与边界对流传热热阻的相对大小

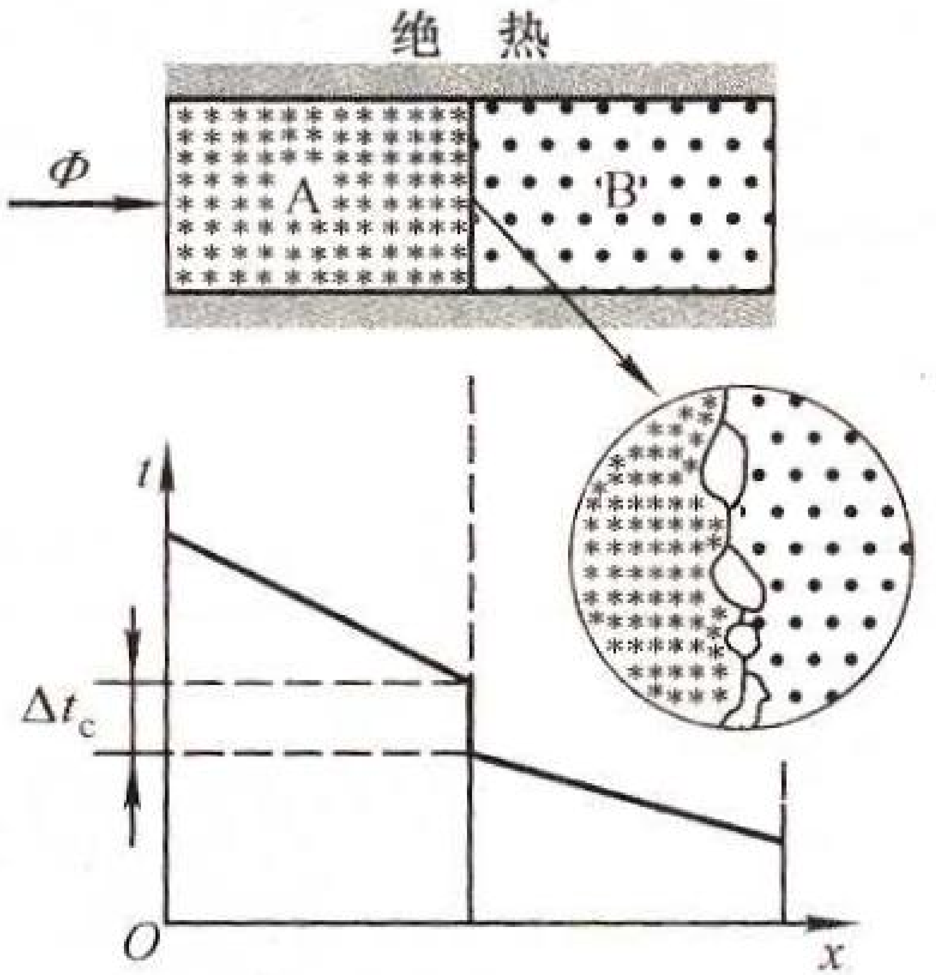
导热热阻 $R_{cd}=\dfrac{\delta}{\lambda}$; 对流传热热阻 $R_{cv}=\dfrac{1}{h}$

两者的相对大小

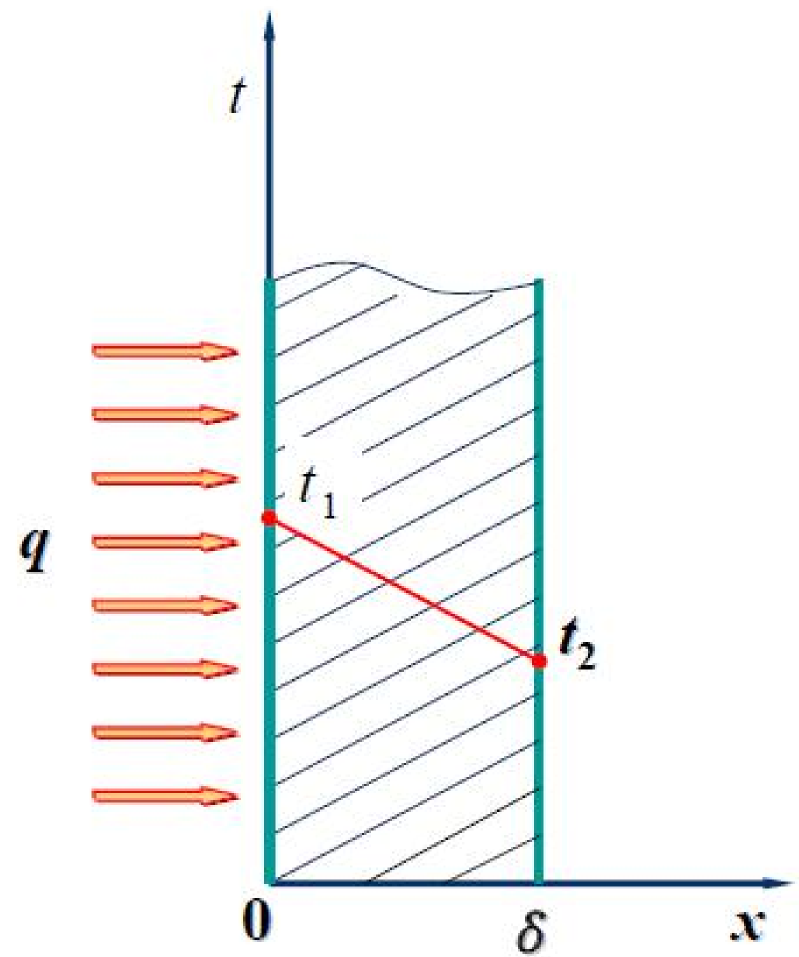
$$\mathrm{Bi}=\frac{h\delta}{\lambda}=\frac{\dfrac{\delta}{\lambda}}{\dfrac{1}{h}}=\frac{R_{cd}}{R_{cv}}\frac{h\left[\mathrm{W/(m^2\cdot K)}\right]\delta\left[\mathrm{m}\right]}{\lambda\left[\mathrm{W/(m\cdot K)}\right]}=\text{无因次量}$$

上面得到的公式对于 $B_i<0.1$ 的等截面直肋具有很好的精度。

- 接触热阻 **(Thermal contact resistance）**



2-3-2　稳态平板法测定材料导热系数



● 测量原理 $$\Phi = \lambda A \frac{t_2 - t_1}{\delta}$$

材料的导热系数 $$\lambda = \frac{\Phi\delta}{A(t_2 - t_1)}$$

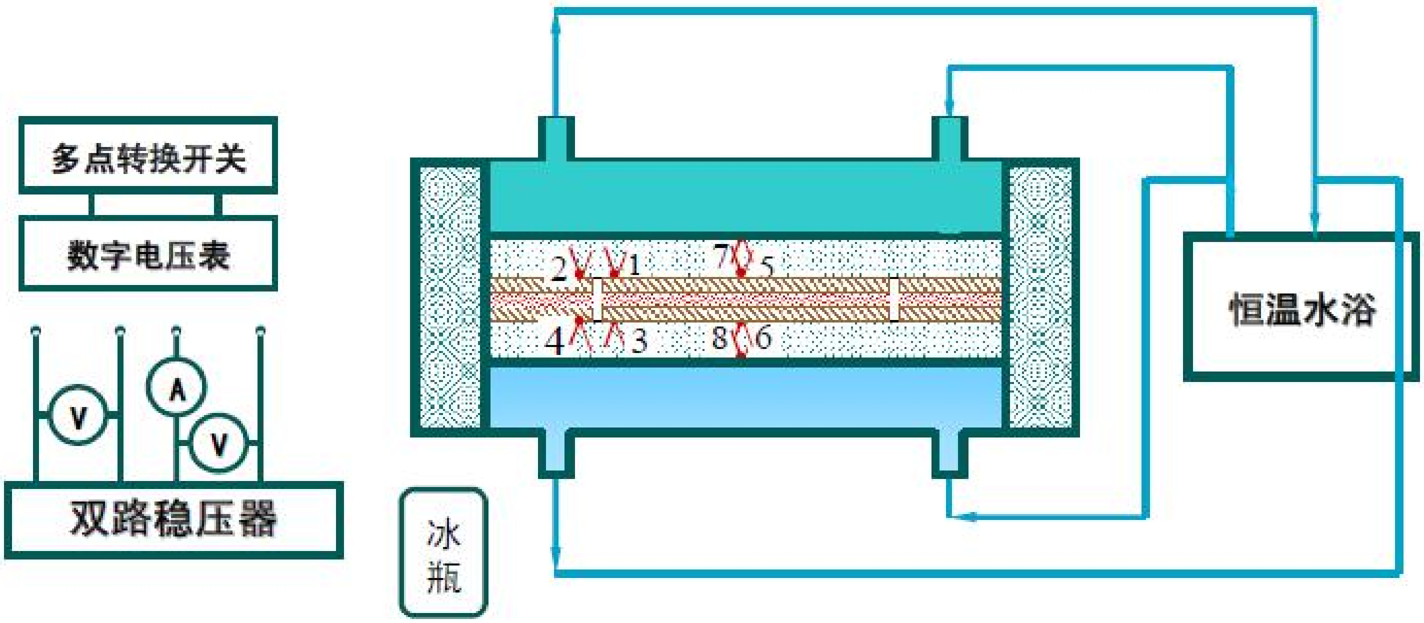
待测参数： δ —试样的厚度；

Φ—热流量；

t_1、t_2 —试样表面温度。

实验初期准备： 试样、电加热器1个、热电偶2对、电源。

双试样平板导热系数测试装置简图



实验准备： 试样2个、 电加热器2个、 均热片 4 个、

热电偶 8 对、 冷却器2个、 恒温水浴1个、

冰瓶1个、 保温材料、电源、测量仪表若干

- **平均温度**

$$\overline{t_m} = \frac{t_5 + t_6 + t_7 + t_8}{4}$$

- **计算平均温度下的平均导热系数**

$$\overline{\lambda} = \frac{\Phi\delta}{F_e\left[(t_5 - t_7) + (t_6 - t_8)\right]}$$

式中： F_e —**一维稳态导热的计算面积，** $F_e = \frac{\pi}{4} D_e^2$

小结

（1）介绍了与导热有关的基本概念—温度场、等温面（线）、温度梯度等。

（2）重点介绍了导热的基本定律—傅里叶定律，应熟练掌握。

（3）介绍了导热现象的数学描述方法—导热微分方程式和单值性条件，应能针对不同边界条件写出典型导热问题的完整数学描述。

（4）首先根据具体导热过程的特点合理简化成一定的导热物理模型$\Rightarrow$再选择适当的坐标系建立相应的导热数学模型（包括导热微分方程和单值性条件）$\Rightarrow$然后进行数学求解得到物体的温度场$\Rightarrow$再利用傅立叶定律求得相应的热流密度或热流量。