理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

运 动 学

点的合成运动

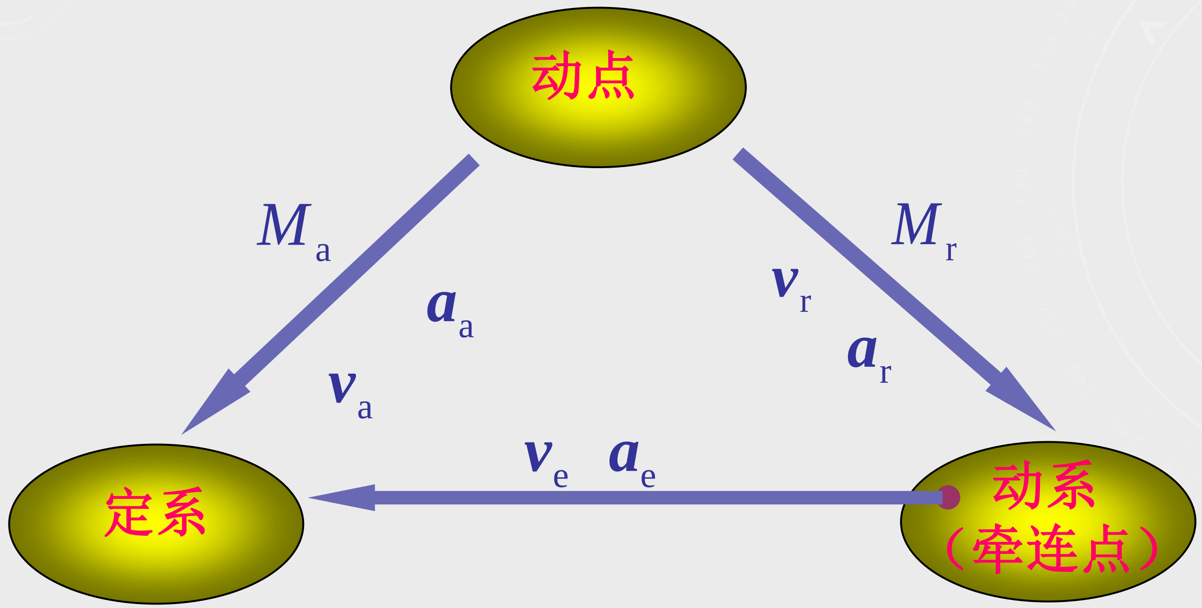
Composite Motion of a Point

动点相对不同参考系（坐标系）的运动

1. 点的合成运动的概念

2. 速度合成定理

一 点
二 系
三 运动



速度合成定理

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

绝对速度　　　　牵连速度　　　　相对速度

牵连点： 某瞬时，动系所在刚体上与动点重合的点。

动点动系的选择规律

（1）动点、动系分别在两个物体上，否则就没有相对运动。

（2）三运动尽可能清晰，特别是相对运动：为已知的、简单的情况。

（3）让问题变简单、不是变复杂。

3. 加速度合成定理

加速度合成定理

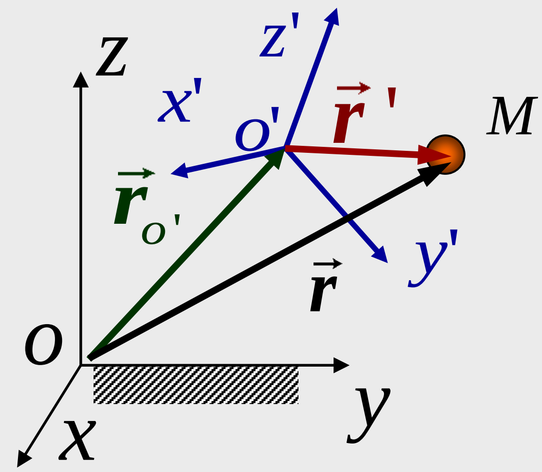
$\cancel{\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}}}$?

$$\vec{r} = \vec{r}_{o'} + \vec{r}\,'$$

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,' \\ \vec{r}_{o'} = x_{o'}\vec{i} + y_{o'}\vec{j} + z_{o'}\vec{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_{\mathrm{a}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{v}_{\mathrm{r}} = \dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,' \\ \vec{v}_e = \vec{v}_{o'} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}\,' \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}_{\mathrm{a}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \\ \vec{a}_{\mathrm{r}} = \ddot{x}'\vec{i}\,' + \ddot{y}'\vec{j}\,' + \ddot{z}'\vec{k}\,' \\ \vec{a}_e = \vec{a}_{o'} + \vec{\alpha}_e \times \vec{r}\,' + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,') \end{cases}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{o'} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}\,'$$

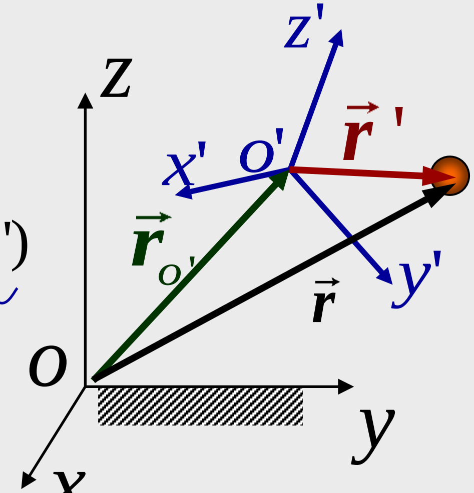
两边再对t求导 $\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{O'}} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}(\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t}$



$$\begin{cases}\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\\ \vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'\\ \vec{r}_{o'} = x_{o'}\vec{i} + y_{o'}\vec{j} + z_{o'}\vec{k}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{v}_{\mathrm{a}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\\ \vec{v}_{\mathrm{r}} = \dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,'\\ \vec{v}_e = \vec{v}_{o'} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}\,'\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{a}_{\mathrm{a}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\\ \vec{a}_{\mathrm{r}} = \ddot{x}'\vec{i}\,' + \ddot{y}'\vec{j}\,' + \ddot{z}'\vec{k}\,'\\ \vec{a}_e = \vec{a}_{o'} + \vec{\alpha}_e \times \vec{r}\,' + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,')\end{cases}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{O'}} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

$$= \vec{a}_{\mathrm{O'}} + \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r + \vec{\alpha}_e \times \vec{r}\,' + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,')$$



◎ $$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,')}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

◎ $$\frac{\mathrm{d}(\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha}_e \times \vec{r}\,' + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,')$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}_{\mathrm{e}} \times \vec{r}\,' + \vec{v}_{\mathrm{r}}$$

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \boxed{2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r}}$$

科氏加速度 **(Coriolis acceleration, 1835)** $\vec{a}_{\mathrm{C}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_{\mathrm{r}}$

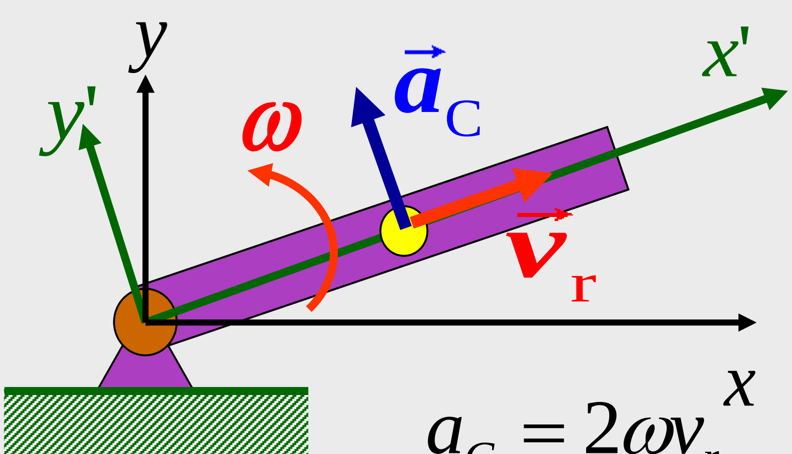
加速度合成定理

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{C}}}$$

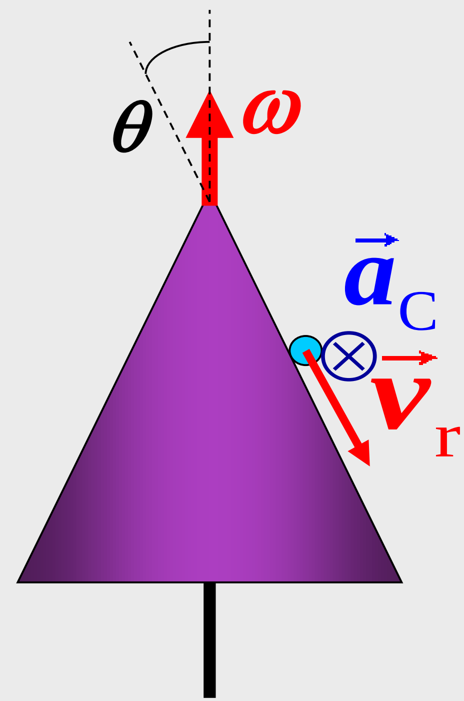
$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ ⟶ 由动系转动引起

动系平移时： $\boxed{\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}}}$

练习： 已知动系角速度和动点相对速度，求动点的科氏加速度。



$$a_C = 2\omega v_{\mathrm{r}}$$



$$a_C = 2\omega v_{\mathrm{r}} \sin\theta$$

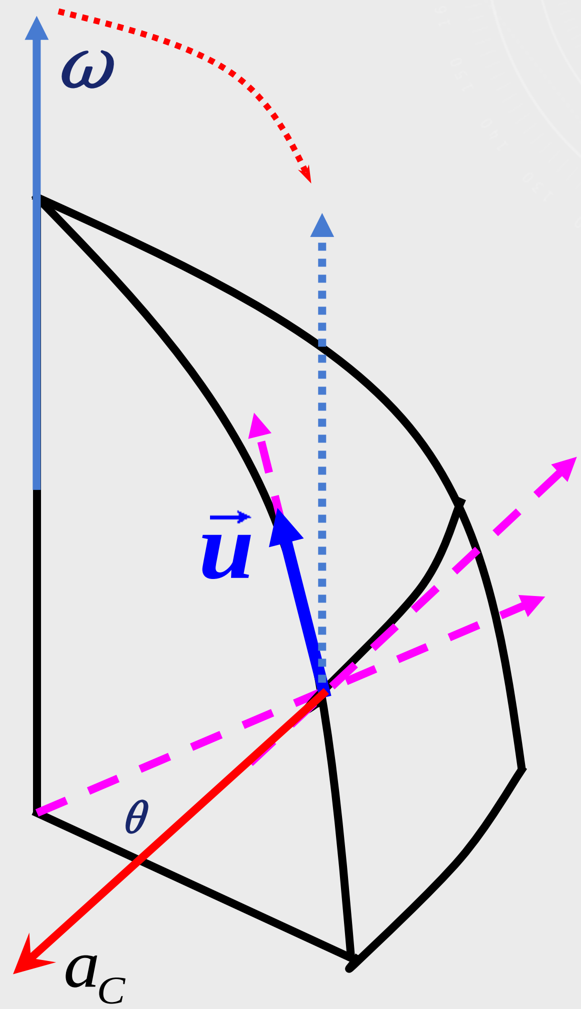
问题：地球自转所导致的科氏加速度：纬度θ，正北向u

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

$$a_C = 2\omega \cdot u \sin\theta$$

✓ 北半球：科氏加速度向左

✓ 南半球：？



河水对堤岸的冲刷

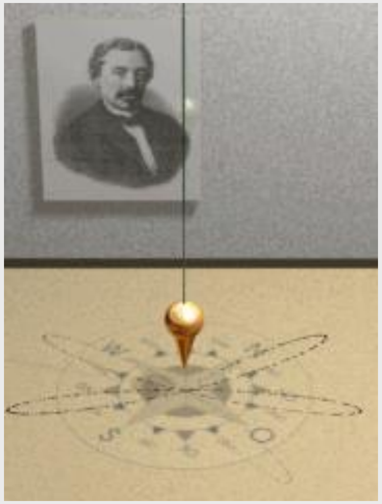
长江三峡

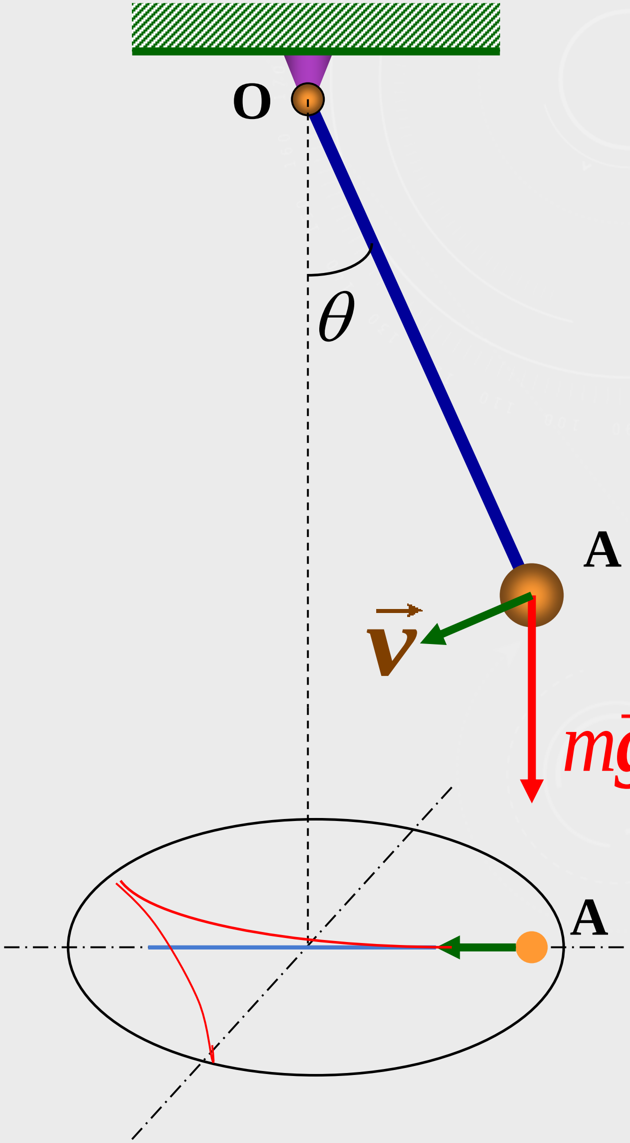
水流方向右岸冲刷的强度比左岸大，因此右岸比左岸陡

傅科摆（1851）

傅科用摆平面的转动
证明了地球的自转

巴黎先贤祠(Pantheon, Paris)





特点：质点在北半球运动时，
向其运行方向的右侧偏移

速度合成定理

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}}}$$

加速度合成定理

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{C}}}$$

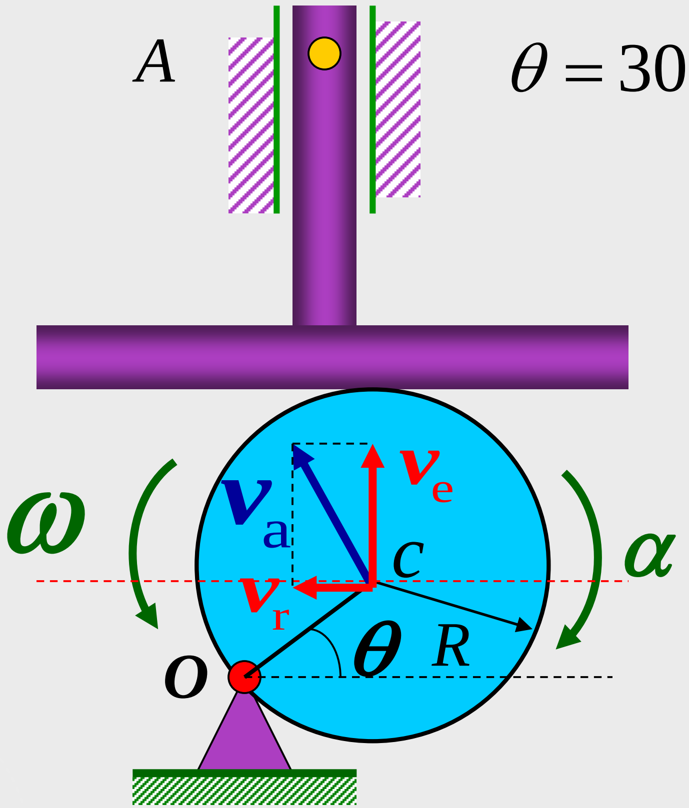
$$\vec{a}_{\mathrm{C}} = 2\vec{\omega}_{e} \times \vec{v}_{\mathrm{r}}$$

动系平移时：

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}}}$$

练习和讨论

例： 已知图示瞬时圆盘的角速度 ω 和角加速度 α，求杆上A点的速度和加速度



解： 动点： 盘心C

动系： 杆

运动分析

绝对运动： 圆周运动

相对运动： 直线运动

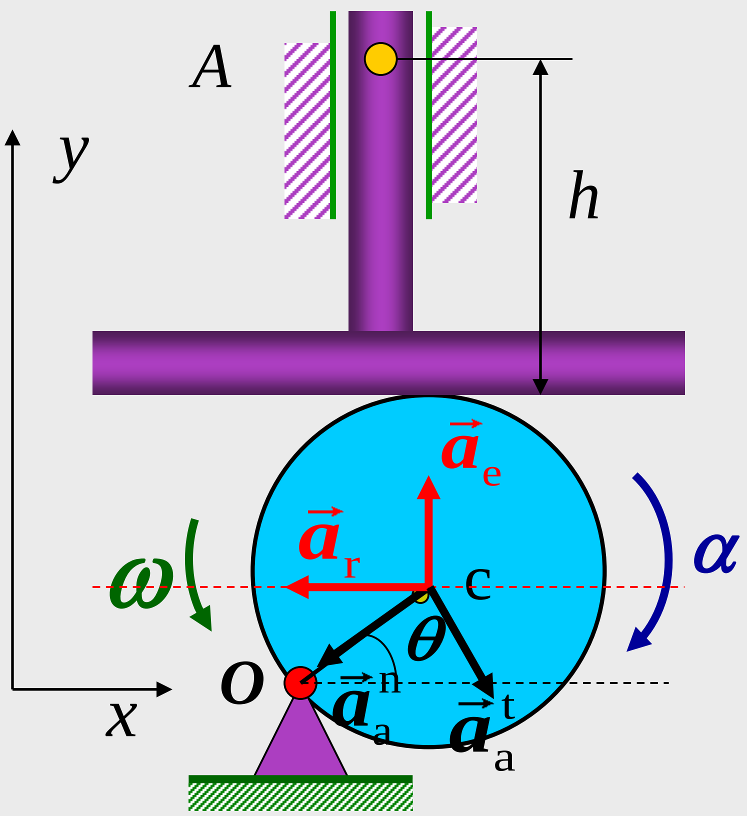
牵连运动： 直线平移

速度分析： $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{a}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{e}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{r}}$

$$v_{\mathrm{a}} \cos\theta = v_{\mathrm{e}}$$

$$\boxed{v_{\mathrm{e}} = R\omega \cos 30^{0}}$$

加速度分析：$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$　　其中 $a_C = 0$



$$\vec{a}_a^n + \vec{a}_a^t = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

？　？

$$y:\quad -a_a^n \sin\theta - a_a^t \cos\theta = a_e$$

$$a_e = -R\alpha\cos\theta - R\omega^2\sin\theta$$

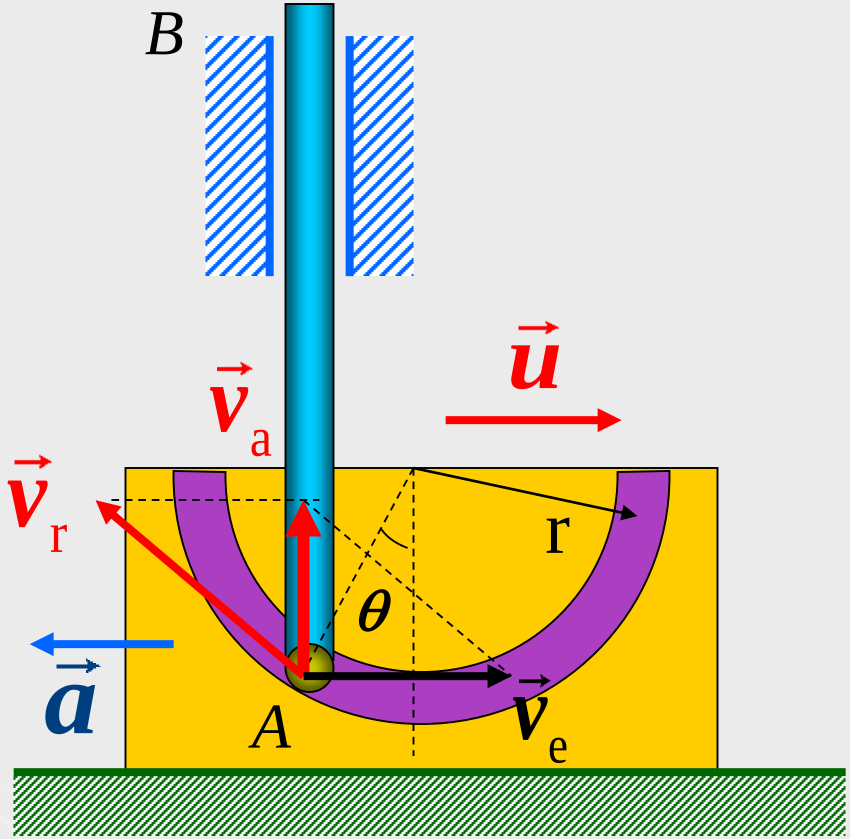
另一种求解方法

$$y_A = h + R + R\sin\theta$$

$$\dot{y}_A = R\dot{\theta}\cos\theta = R\omega\cos\theta$$

$$\ddot{y}_A = R\ddot{\theta}\cos\theta - R\omega\dot{\theta}\sin\theta = -R\alpha\cos\theta - R\omega^2\sin\theta$$

例： 已知滑块在图示瞬时的速度和加速度，求此瞬时杆上A点的速度和加速度。



解： 动点： 杆上A点

动系： 滑块

运动分析

绝对运动： **直线运动**

相对运动： **圆周运动**

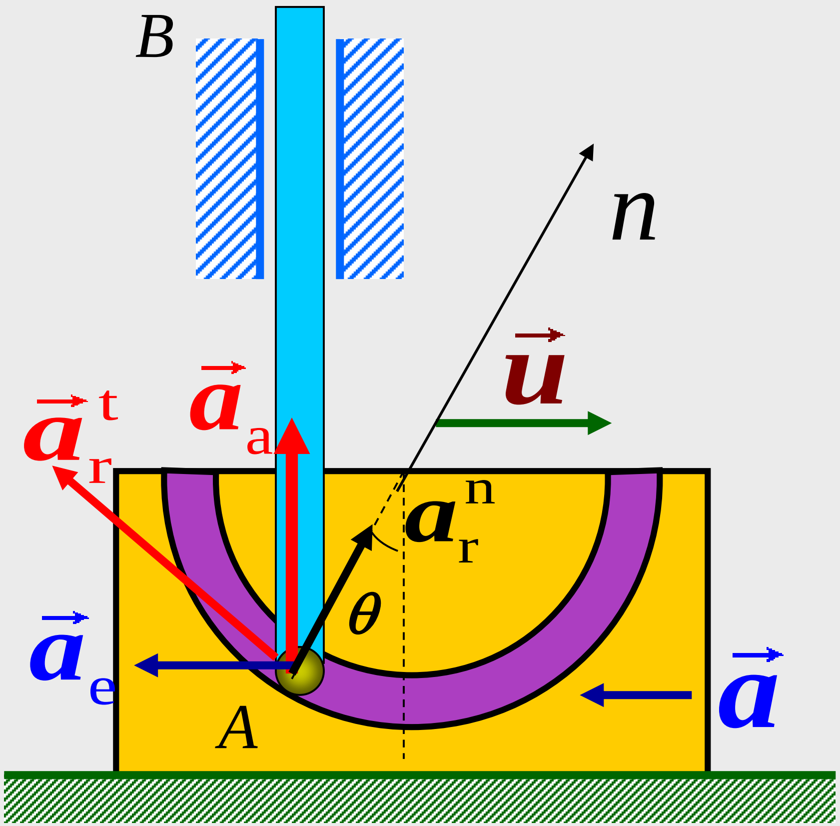
牵连运动： **直线平移**

速度分析： $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$v_a = v_e \tan\theta = u \tan\theta$$

$$v_r = \frac{v_e}{\cos\theta} = \frac{u}{\cos\theta}$$

加速度分析：$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$ 其中 $a_C = 0$



$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n$$

? ?

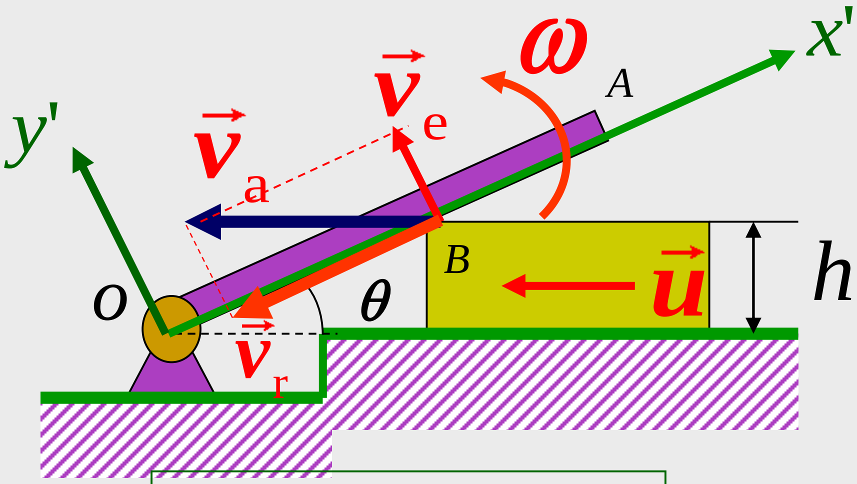
'n'

$$a_a \cos\theta = -a_e \sin\theta + a_r^n$$

$$a_a = -a \tan\theta + \frac{a_r^n}{\cos\theta}$$

其中：$a_r^n = \dfrac{v_r^2}{r}$

例： 已知滑块以匀速 u 平移，求在图示位置时，杆的角速度和角加速度。



$$\omega=\frac{v_e}{OB}=\frac{u\sin^2\theta}{h}$$

解： 动点：板上与杆的接触点B

动系：OA杆

运动分析

绝对运动：直线运动

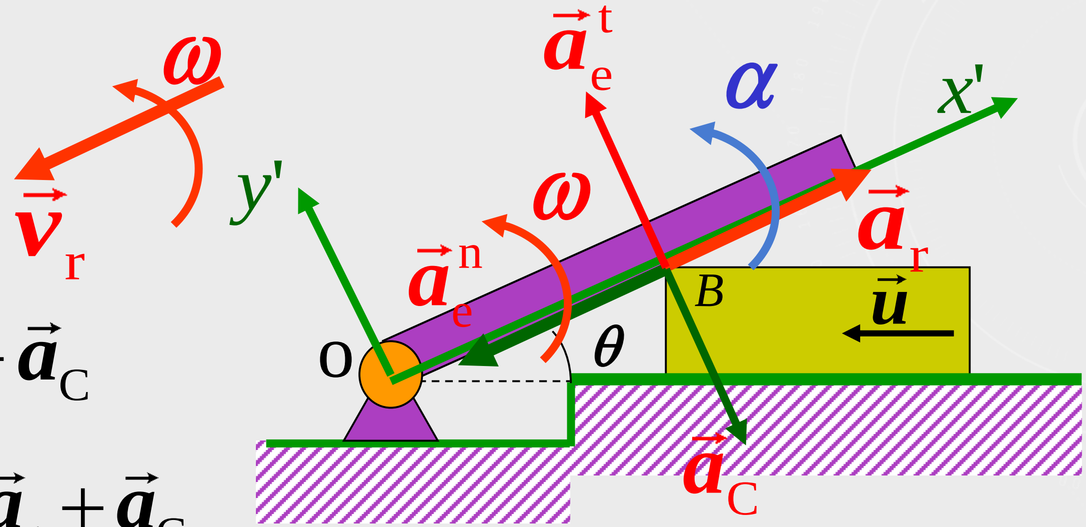
相对运动：直线运动

牵连运动：定轴转动

速度分析：$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

$v_e=v_a\sin\theta \qquad v_r=v_a\cos\theta$

加速度分析：



加速度合成定理

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$0 = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$y': \quad 0 = a_e^t + 0 + 0 - a_C \Rightarrow a_e^t = a_C$$

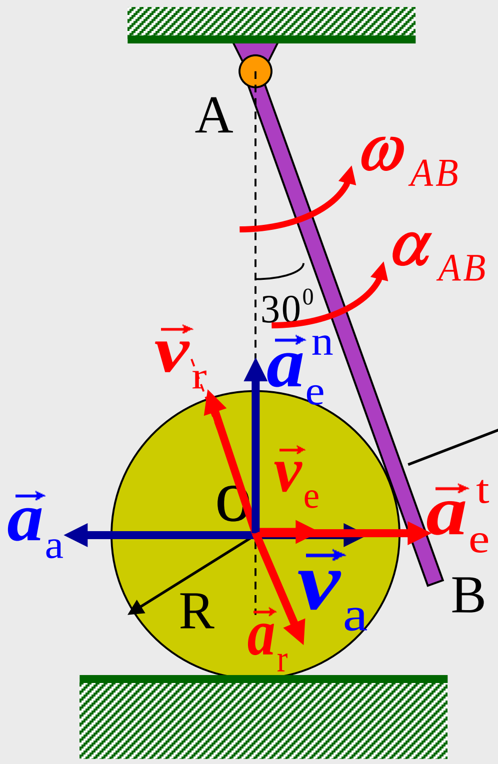
其中 $a_C = 2\omega v_r \Rightarrow a_e^t = a_C = 2\omega v_r$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a_e^t}{OB} = \frac{2\omega v_r}{OB} = \frac{u^2 \sin 2\theta \sin^2\theta}{h^2}$$

$$v_r = u\cos\theta$$

$$\omega = \frac{u\sin^2\theta}{h}$$

例： 已知图示瞬时圆盘中心O的速度和加速度，求此瞬时AB杆的角速度和角加速度。



动点：圆盘中心O　动系：AB杆

运动分析：

绝对运动：直线运动

相对运动：直线运动

牵连运动：定轴转动

速度分析　$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$\because \vec{v}_r = 0, \quad \therefore \vec{v}_a = \vec{v}_e$

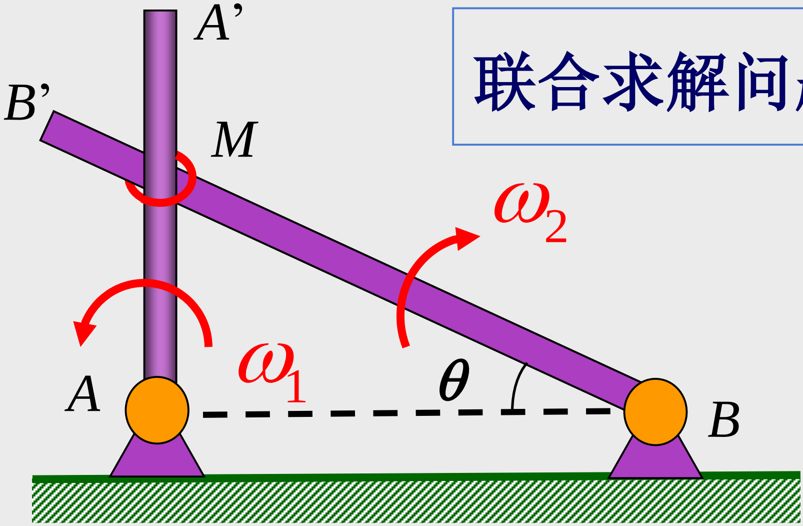
$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{OA} = \frac{v_a}{2R}$$

加速度分析　$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r$$

$$y': -a_a \cos 30^0 = a_e^t \cos 30^0 + a_e^n \sin 30^0 \Rightarrow a_e^t \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{a_e^t}{OA}$$

例： 已知 $AB=L$，求图示瞬时，小环M的速度



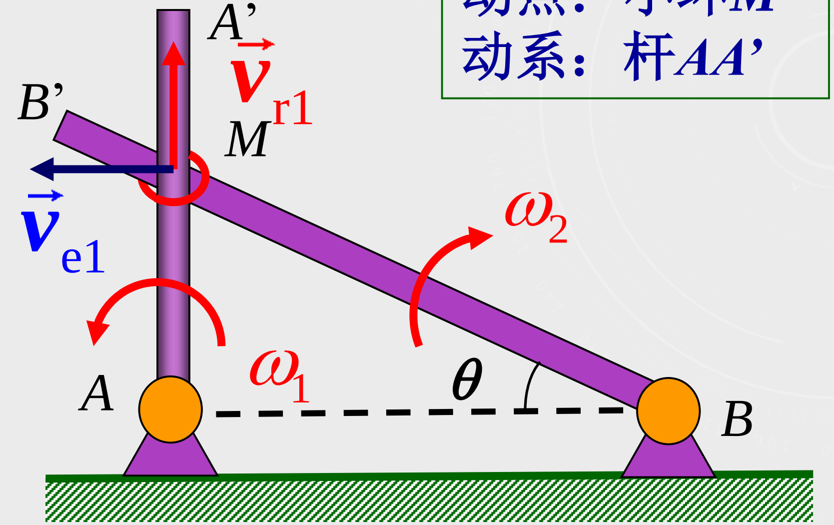
联合求解问题

$$\omega_1=\omega_2=\omega,\theta=30^0$$

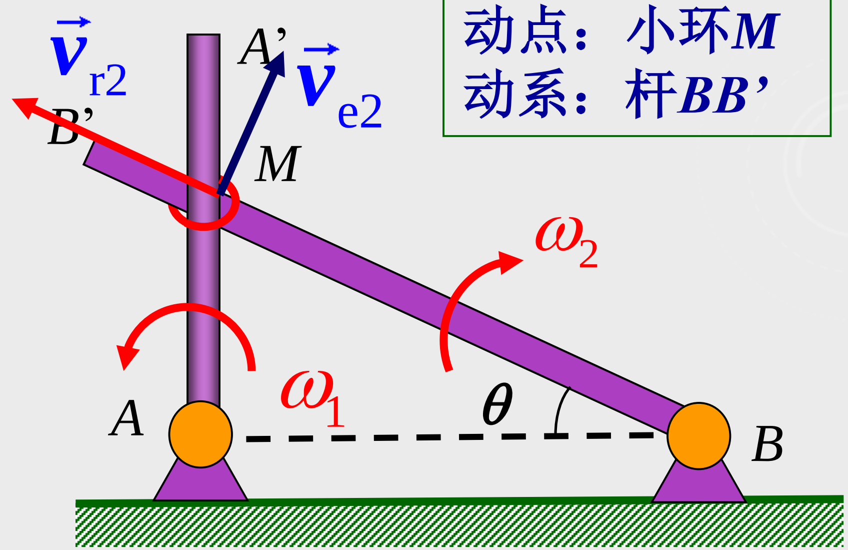
$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$$

$$\underset{?}{\vec{v}_{e1}+\vec{v}_{r1}}=\vec{v}_{e2}+\underset{?}{\vec{v}_{r2}}$$

动点：小环M
动系：杆AA'



动点：小环M
动系：杆BB'



Take-Home Message

1、一点，二系，三运动

2、$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{a}}=\vec{v}_{\mathrm{e}}+\vec{v}_{\mathrm{r}}}$ $\boxed{\vec{a}_{\mathrm{a}}=\vec{a}_{\mathrm{e}}+\vec{a}_{\mathrm{r}}+\vec{a}_{\mathrm{C}}}$

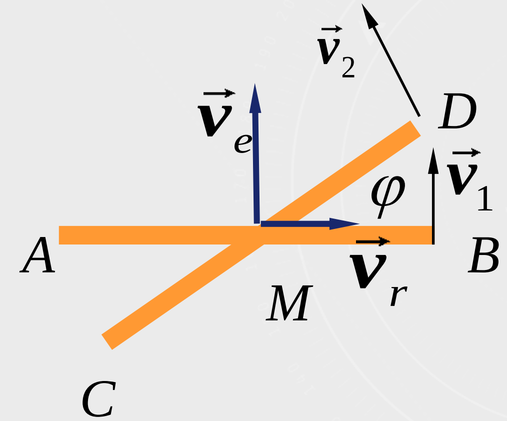
3、让问题变得简单

课后作业：8-8,9,11,15,17,19,34

附加材料

例

> 已知：两根杆分别以速度v_1、v_2在平面上平动，两杆夹角为 φ，
>
> 试求交点M的速度。



解： 将动系固结于AB杆

1、 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_r$

大小： ? ?

方向： ?

再将动系固定于CD杆

2、 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_2 + \vec{v}_r\,'$

大小： ? ?

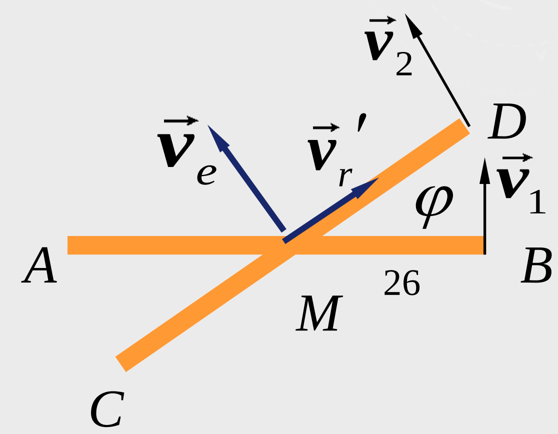
方向： ?

由于 v_a不随动系而变

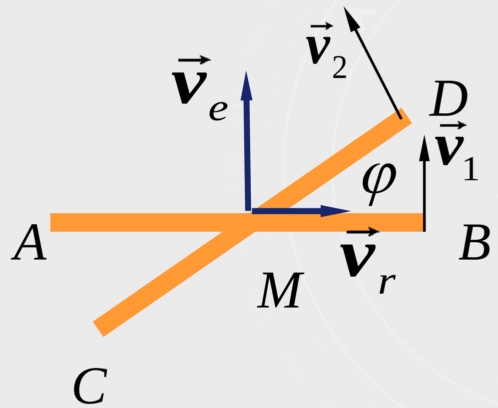
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_r = \vec{v}_2 + \vec{v}_r\,'$$

大小： ? ?

方向：

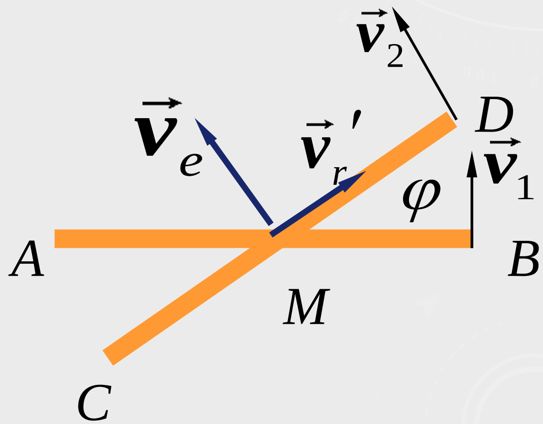


$$\vec{v}_1 + \vec{v}_r = \vec{v}_2 + \vec{v}_r'$$



将上式投影到垂直于*AB*方向：

$$v_1 + 0 = v_2\cos\varphi + v_r'\sin\varphi$$



将上式投影到垂直于*CD*方向：

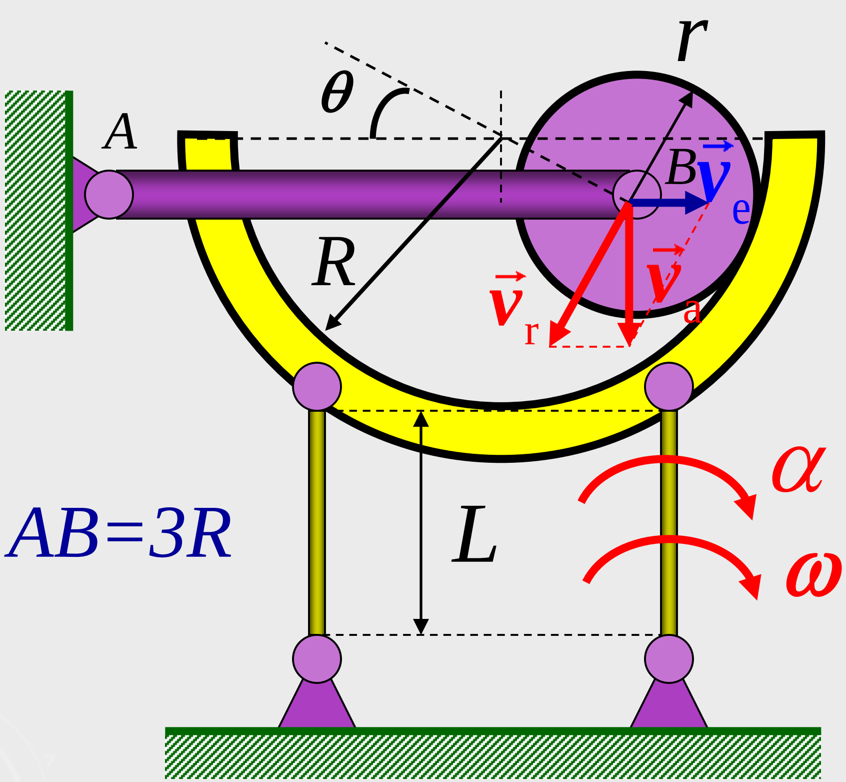
$$v_1\cos\varphi - v_r\sin\varphi = v_2$$

再利用(1)或(2)将 v_r或v_r 代入

$$v_a = \sqrt{v_1^2 + v_r^2} = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_1}{v_r} = \frac{v_1\sin\varphi}{v_1\cos\varphi - v_2}$$

例：已知铅垂摇杆在图示瞬时的角速度为 ω，角加速度为 α，求此瞬时水平AB杆的角速度和角加速度。



解：动点：　杆上B点

动系：　半圆滑道

运动分析

绝对运动：　圆周运动

相对运动：　圆周运动

牵连运动：　曲线平移

1、速度分析：$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$v_e = L\omega$$

$$v_a = v_e \cot\theta$$

$$v_r = v_e / \sin\theta$$

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{v_a}{AB} = \frac{v_a}{3R}}$$

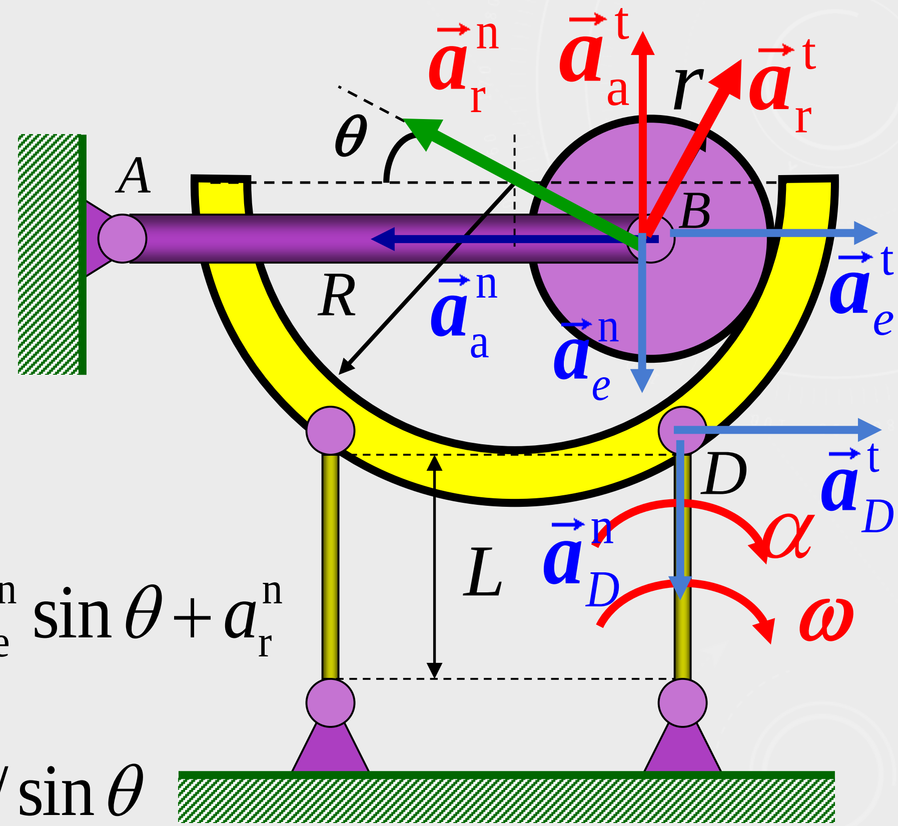
加速度分析：　$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{C}}$

其中　$\vec{a}_{\mathrm{C}} = 0$

$$\vec{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} = \vec{a}_{e}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{e}^{\mathrm{n}} + \vec{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}$$

?　　　?

$$\vec{a}_{\mathrm{e}} = \vec{a}_{D} = \vec{a}_{D}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{D}^{\mathrm{n}}$$



在 $\vec{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}$ 上投影：

$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} \sin\theta + a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} \cos\theta = -a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} \cos\theta - a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} \sin\theta + a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}$$

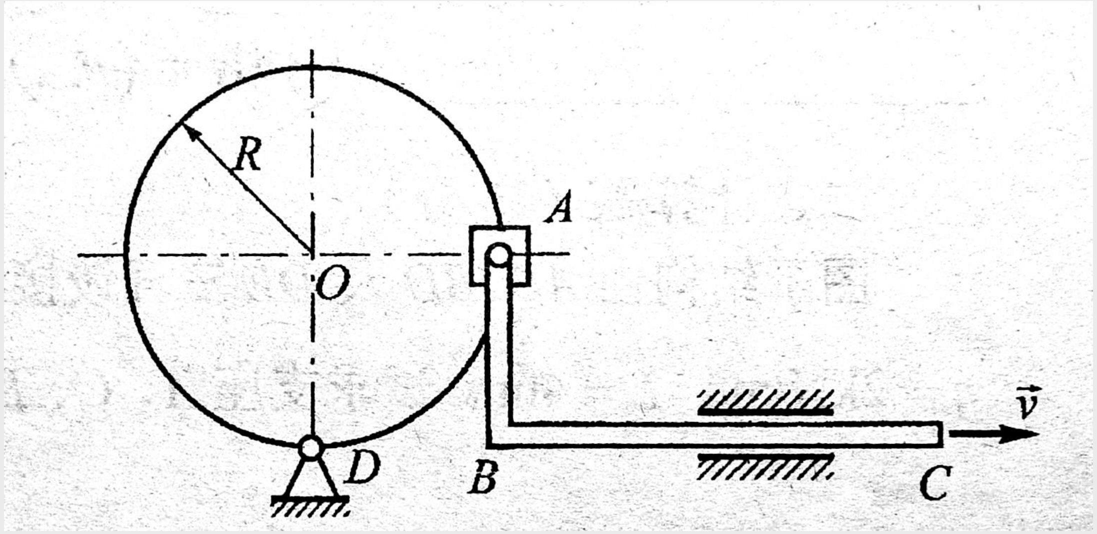
$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} = -a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} \cot\theta - a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} \cot\theta - a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} / \sin\theta$$

其中：　$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} = 3R\omega_{AB}^{2}$　　$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} = L\omega^{2}$

$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} = \alpha L$　　$a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \dfrac{v_{\mathrm{r}}^{2}}{R-r}$

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{AB}} = \frac{a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}}{AB}}$$

- 例：图示机构中，半径为*R*的圆环，可绕*D*轴转动，曲杆*ABC*在*A*端与套筒铰接，已知曲杆以匀角速度*v*运动。试求图示位置(*OD*铅直，*OA*水平)时圆环的角速度和角加速度。



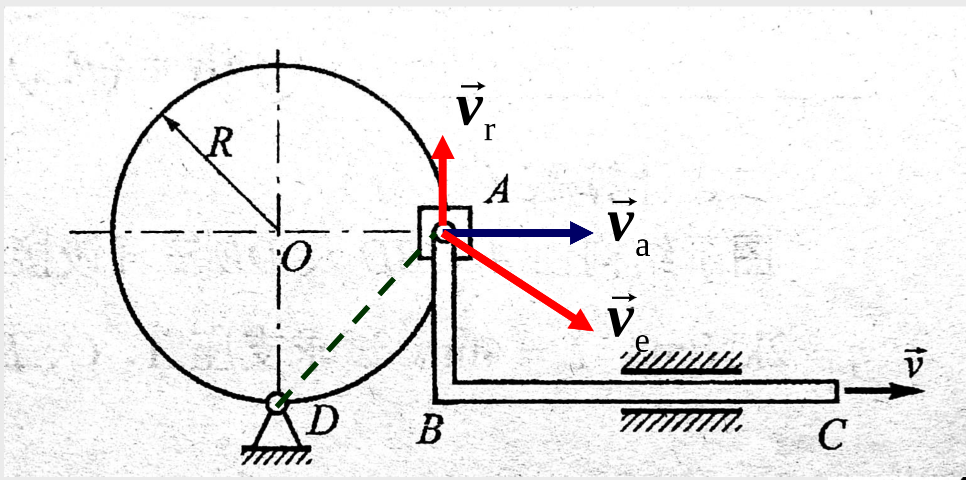
动点：A；动系：圆环

绝对运动：直线运动

相对运动：圆周运动

牵连运动：定轴转动

速度 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$



$$v_e = \sqrt{2} v_a = \sqrt{2} v$$

$$\omega = v_e / \sqrt{2} R = v / R$$

$$v_r = v_a = v$$

动点：O；动系：ABC杆

绝对运动：圆周运动

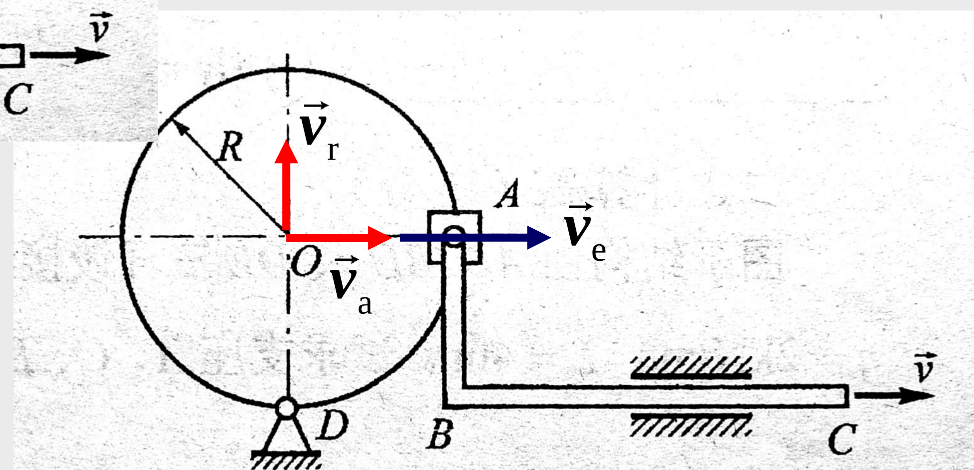
相对运动：圆周运动

牵连运动：平移

$$v_a = v_e = v$$

$$\omega = v / R$$

$$v_r = 0$$



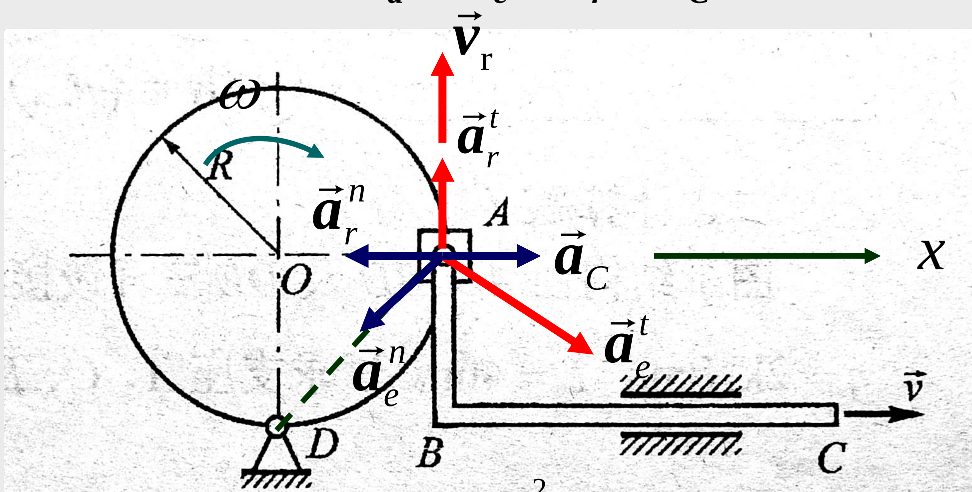
动点：A；动系：圆环

绝对运动：直线运动

相对运动：圆周运动

牵连运动：定轴转动

加速度 $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$



$$a_e^n = \omega^2 \sqrt{2} R \qquad a_r^n = \frac{v_r^2}{R} \qquad a_C = 2\omega v_r$$

$$0 = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t + \vec{a}_C$$

“x”:

$$0 = -a_e^n \cos 45 + a_e^t \cos 45 - a_r^n + a_C$$

动点：O；动系：ABC杆

绝对运动：圆周运动

相对运动：圆周运动

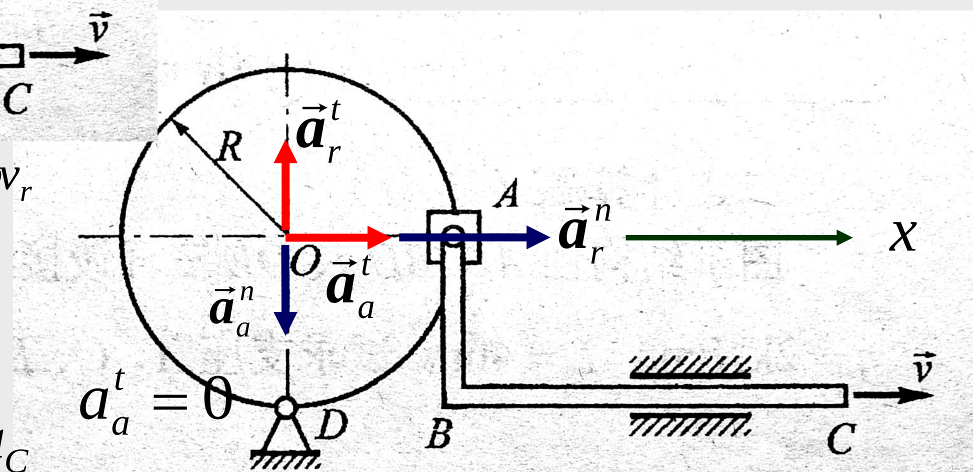
牵连运动：平移

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

$$\vec{a}_a^n + \vec{a}_a^t = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t$$

“x”: $a_a^t = a_r^n = 0$

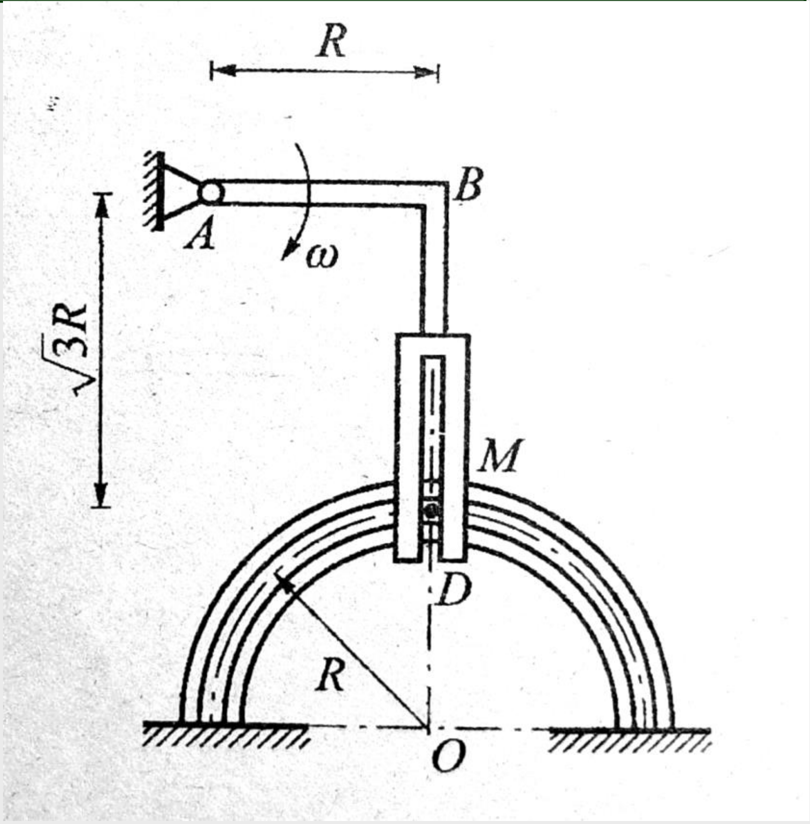
$\alpha = 0$



$a_a^t = 0$

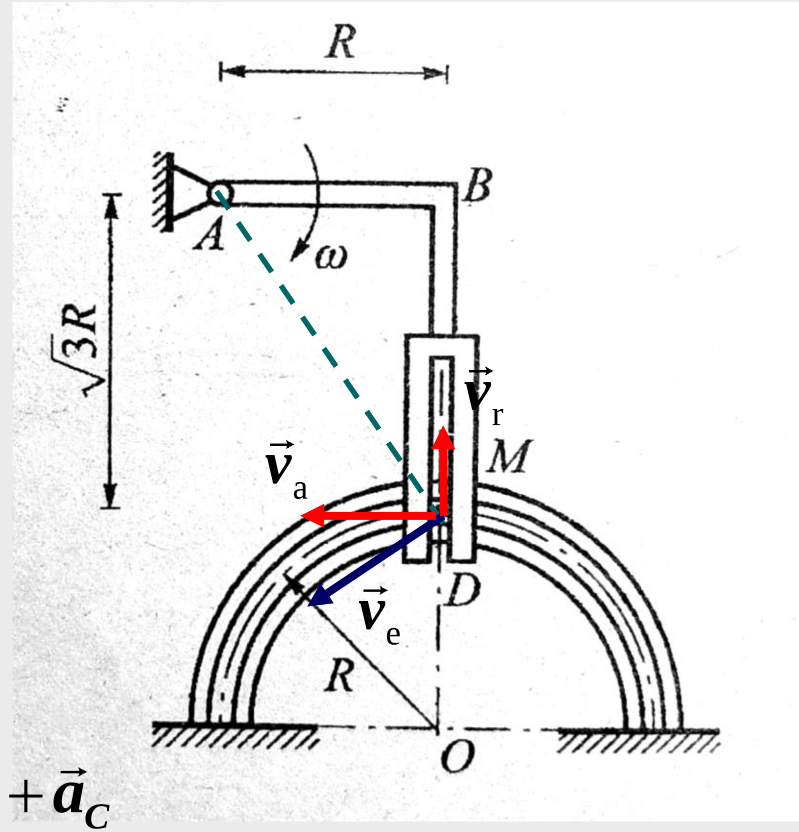
$\alpha = 0$

- **例：**图示机构中，直角杆*ABD*绕A轴转动，带动销钉*M*沿半径为*R*的固定圆弧槽运动，当*AB*在水平位置时，杆*ABD*的角速度为ω，角加速度为零。求该瞬时销钉*M*的速度与加速度。

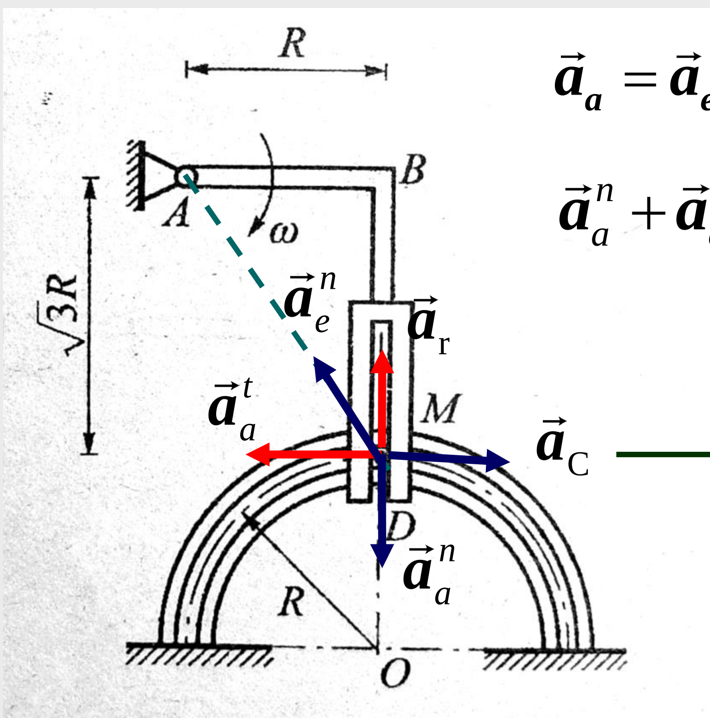


- 动点：销钉M；动系：ABD杆
- 绝对运动：圆周运动
- 相对运动：直线运动
- 牵连运动：定轴转动

速度 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$



$$v_a = v_e \cos 30 = \sqrt{3}\omega R \qquad v_r = 0.5 v_e = \omega R$$



$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_a^n + \vec{a}_a^t = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

“x”： $-\underline{a_a^t} = -a_e^n \cos 60 + a_C$

$$a_e^n = \omega^2 \cdot 2R \qquad a_C = 2\omega \cdot v_r$$

$$\Rightarrow a_a^t = -\omega^2 R$$

M加速度 $\begin{cases} a_a^t = -\omega^2 R \\ a_e^n = \omega^2 \cdot 2R \end{cases}$