理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

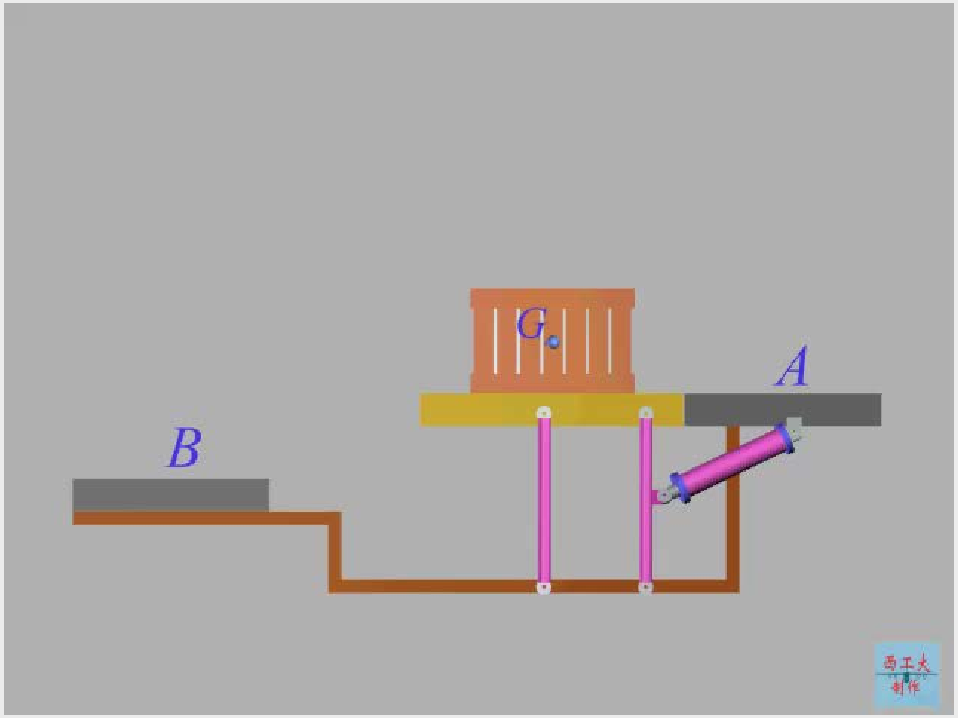
运 动 学

刚体的简单运动

1. 平 移
2. 定轴转动

1. 刚体的平行移动 (translation)

平移实例



平移定义：

运动过程中，刚体内直线始终与初始位置保持平行，称为**平行移动**，简称为**移动**或**平动**、**平移**。

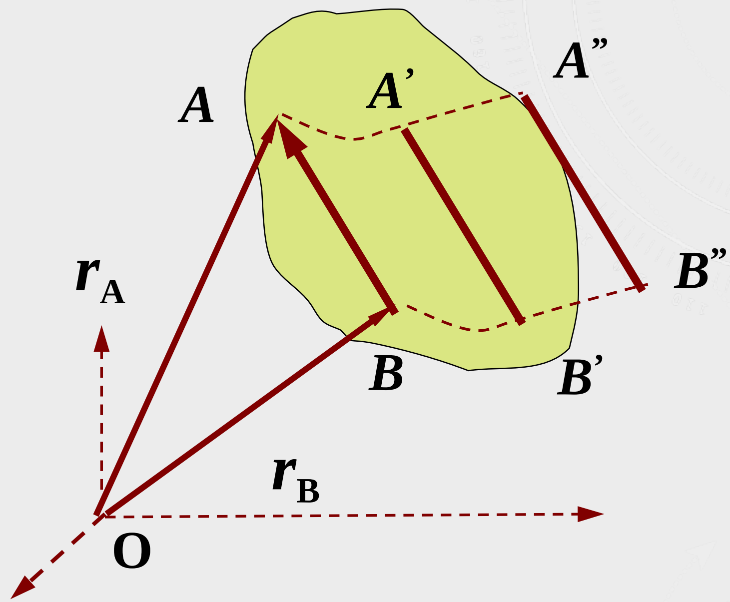
- ✓ 一般地，刚体可沿任意曲线作平移。
- ✓ 刚体作平移并不意味着刚体只能在平面内移动。

刚体的平移

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{BA}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{BA}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_A}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B,$$



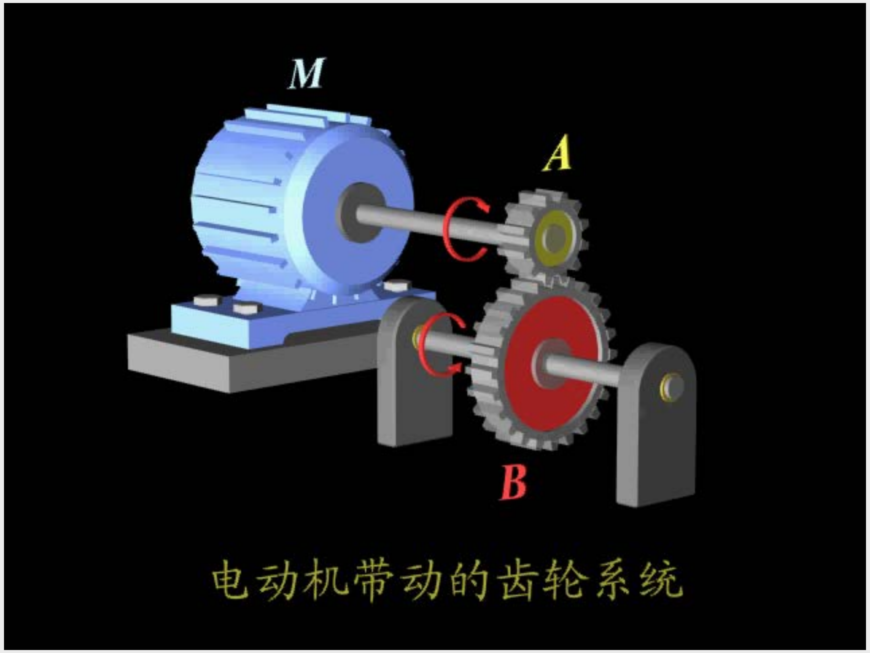
平移的特点

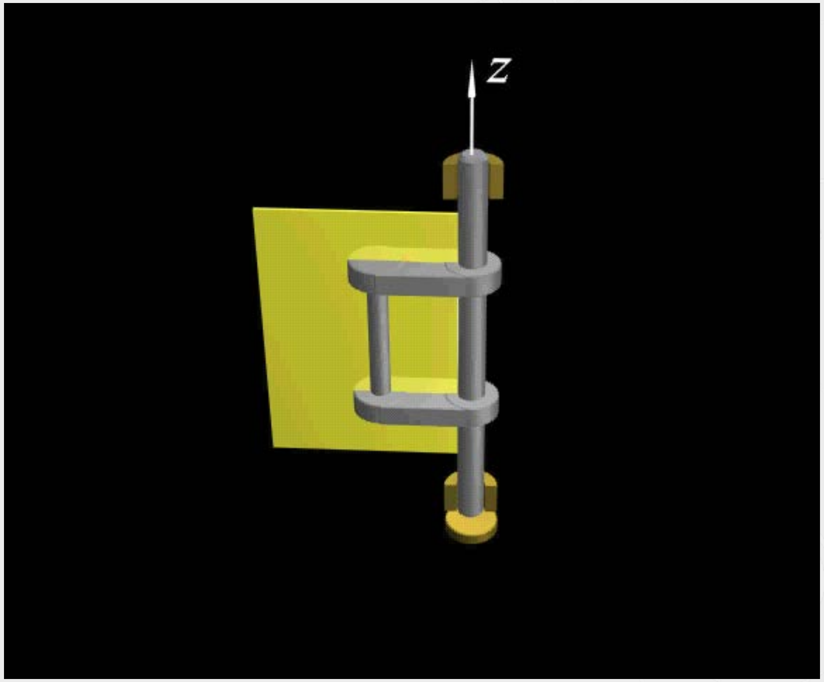
- 刚体上的各点具有形状相同的运动轨迹；
- 刚体上的各点在某一瞬时具有相同的速度和加速度；

刚体平移（刚体运动）=> 刚体内任一点的运动（点的运动）

2. 刚体的定轴转动
(rotation)

定轴转动实例





定轴转动：刚体运动时，体内或其扩展部分，有一 条直线始终保持不动。

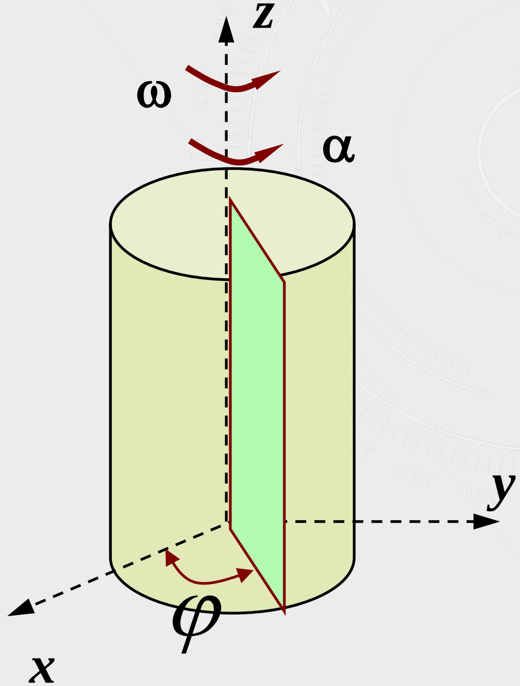
转轴：该直线

刚体的定轴转动　如何定位转动刚体？

$\varphi = \varphi(t)$ ——转动方程　（rad）

$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$ ——瞬时角速度　（rad/s）

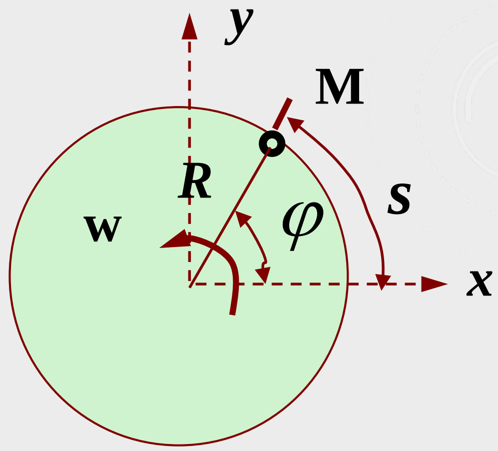
$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega}$ ——瞬时角加速度　（rad/s²）



转速 n：一分钟转过的圈数

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

任意点M的速度、加速度



刚体作定轴转动，刚体上任意一点作以该点到转轴的距离为半径的圆周运动

$s = R\varphi$　　$\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$　　$v = R\omega$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}R\omega = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

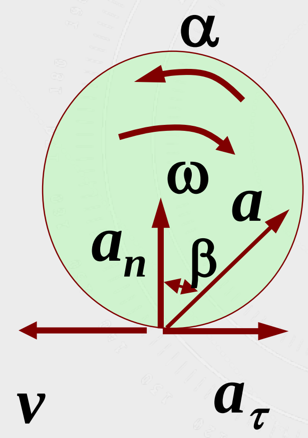
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

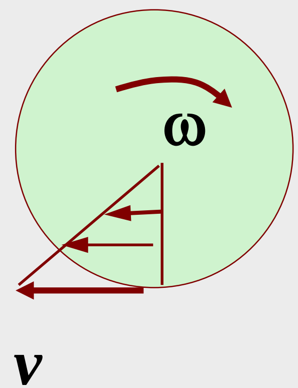
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_\mathrm{n}$$

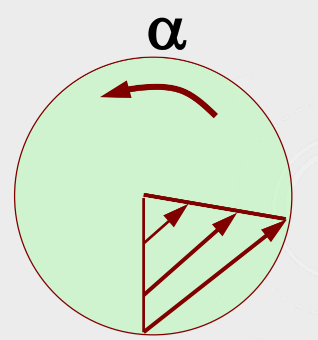
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\mathrm{n}^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

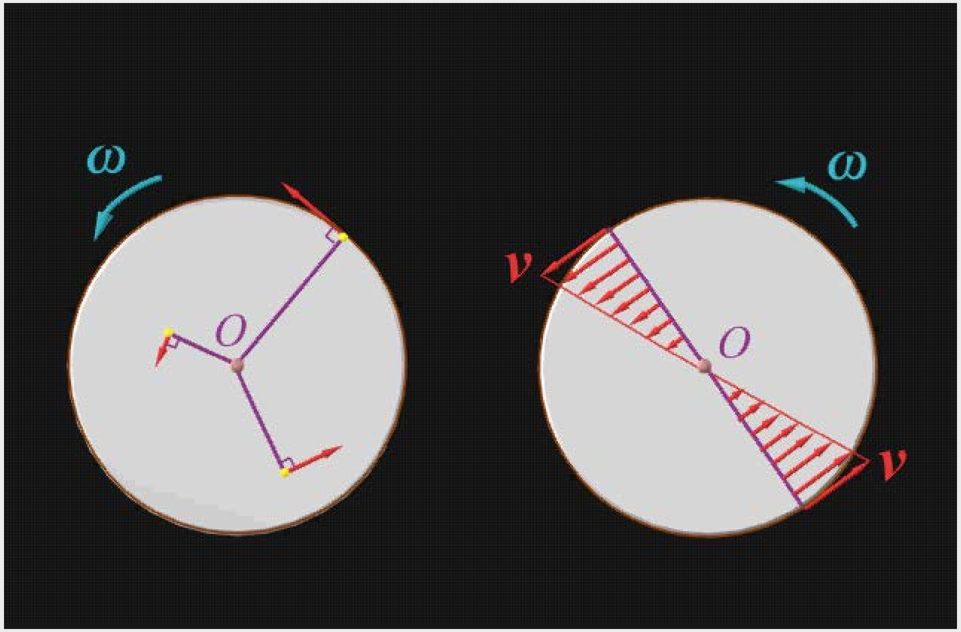
$$\tan\beta = \frac{a_\tau}{a_\mathrm{n}} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

$v=R\omega$



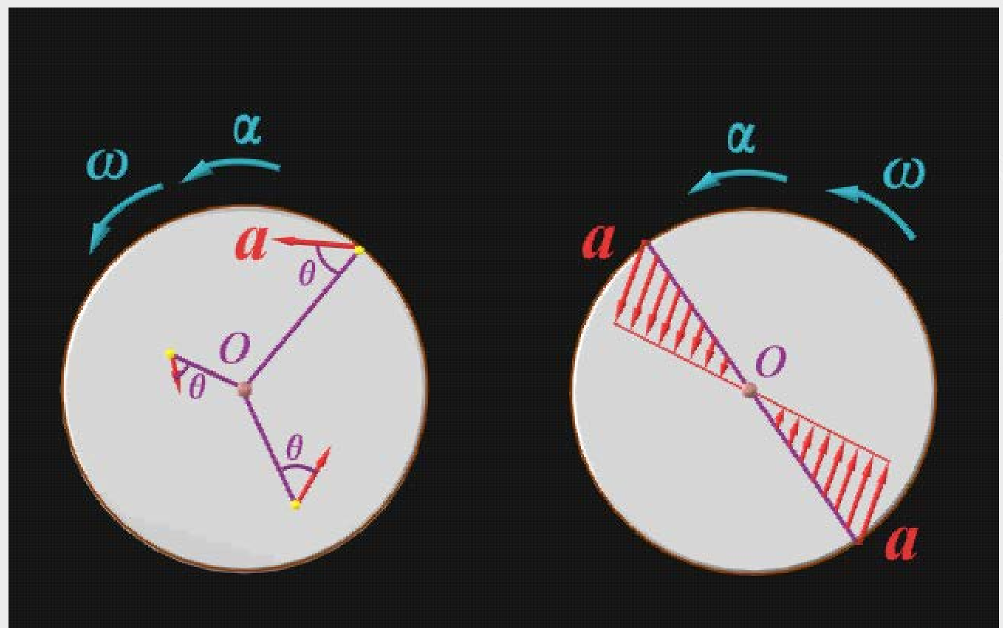




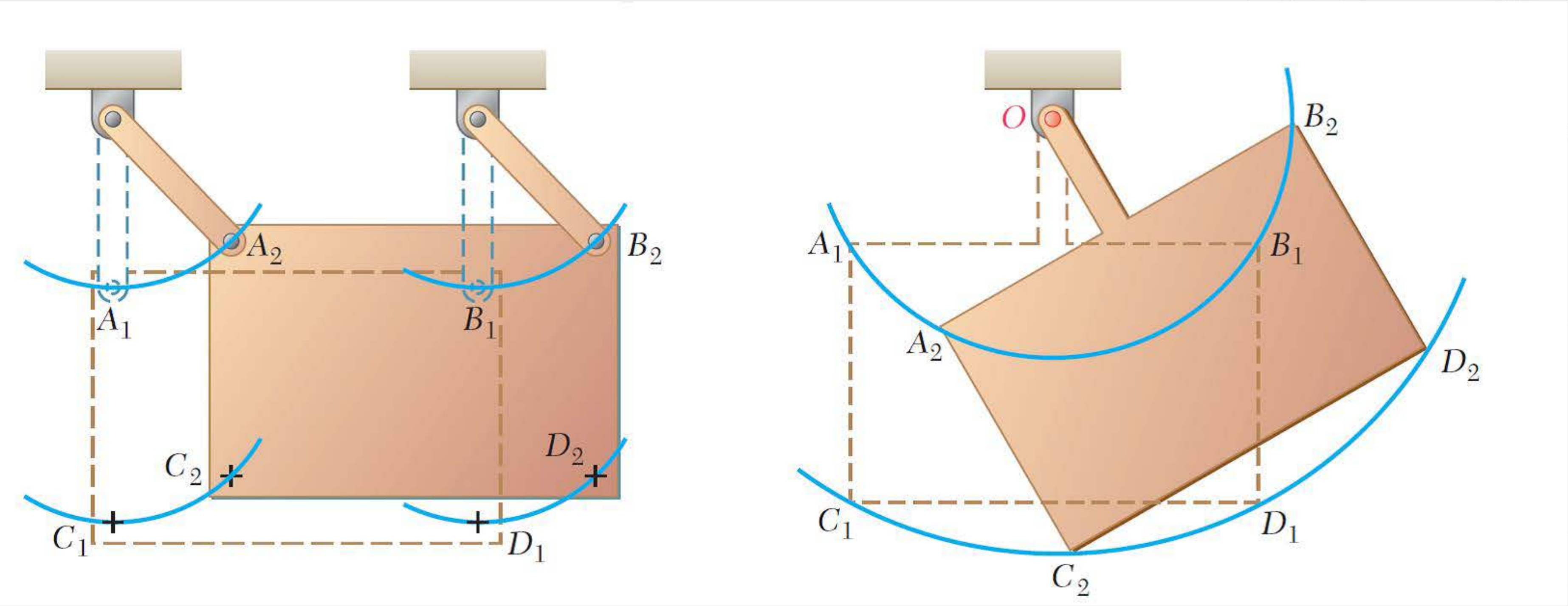


速度分布

加速度分布

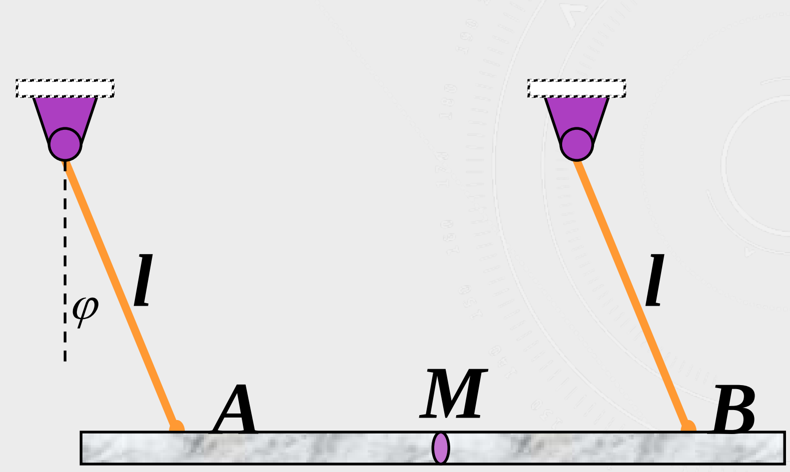


平行移动 v.s. 定轴转动



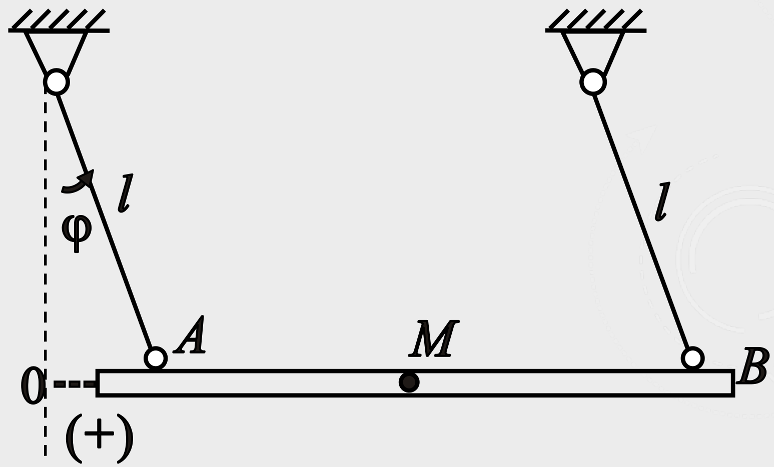
例1 已知：$\varphi = \varphi_0 \sin\dfrac{\pi}{4}t$

试求：当 $t=2s$ 时 M 的速度、加速度。



解:

AB 杆作平动：点M的运动与A点相同。



A点运动：自然法

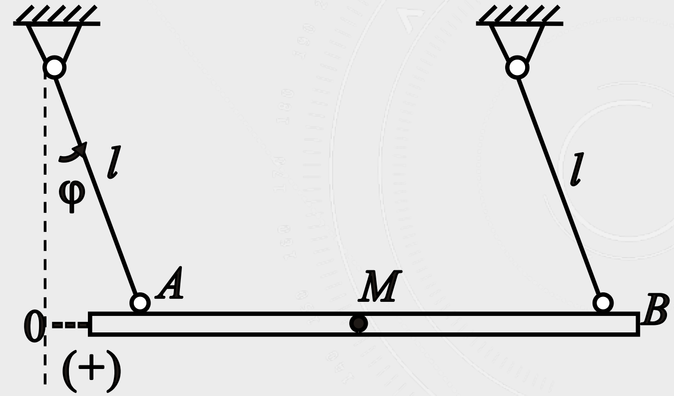
$$s = l\varphi = \varphi_0 l \sin\frac{\pi}{4}t$$

速度

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{4} l \varphi_0 \cos\frac{\pi}{4}t \qquad v\big|_{t=2} = 0$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{16} l\varphi_0 \sin\frac{\pi}{4}t$$

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{\pi^2}{16} l\varphi_0^2 \cos^2\frac{\pi}{4}t$$

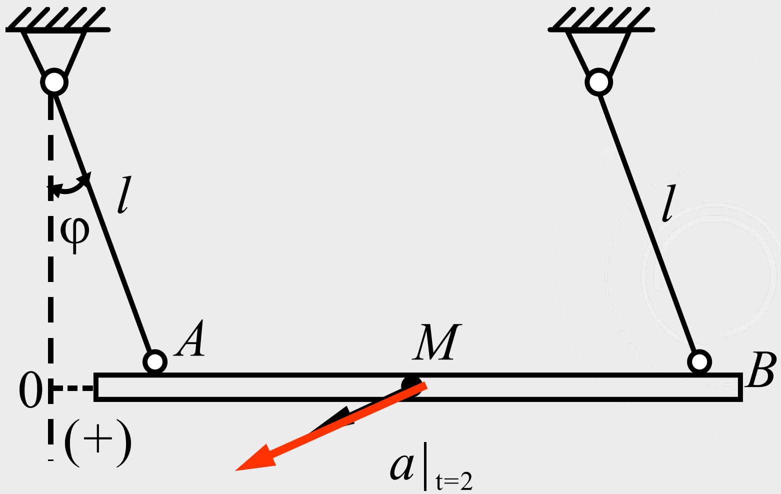


$$\varphi\big|_{t=2} = \varphi_0$$

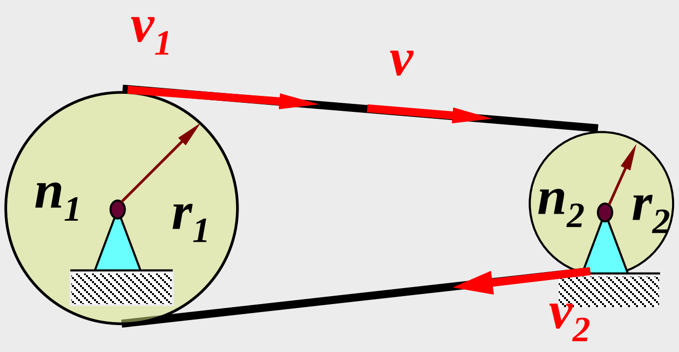
$$a_\tau\big|_{t=2} = -\frac{\pi^2}{16} l\varphi_0$$

$$a_n\big|_{t=2} = 0$$

方向如图所示



例2　轮系传动问题

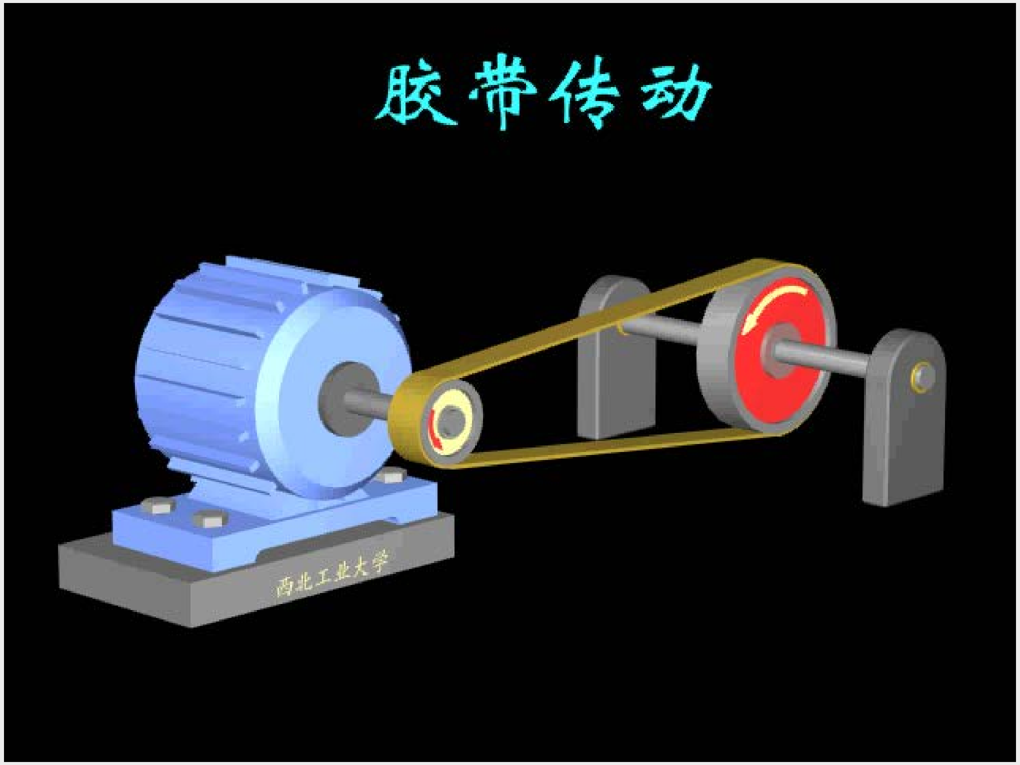


1、皮带轮传动

$$v_1 = v = v_2$$

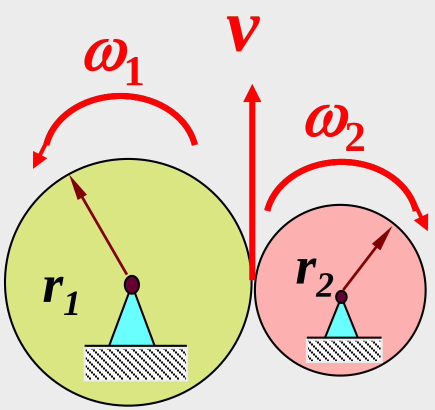
$$v_1 = r_1\omega_1 \qquad v_2 = r_2\omega_2;$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



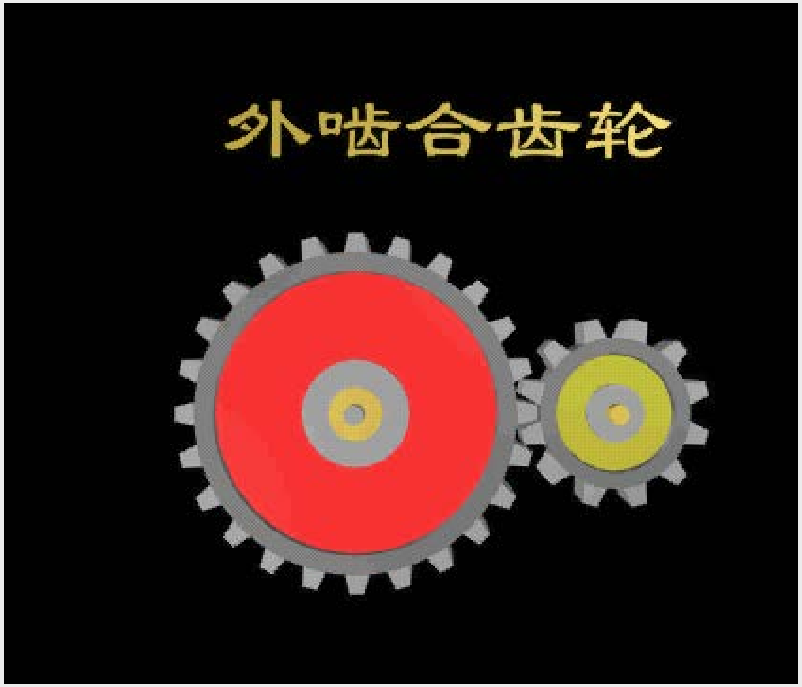
2、齿轮传动

$$r_1\omega_1 = -r_2\omega_2$$

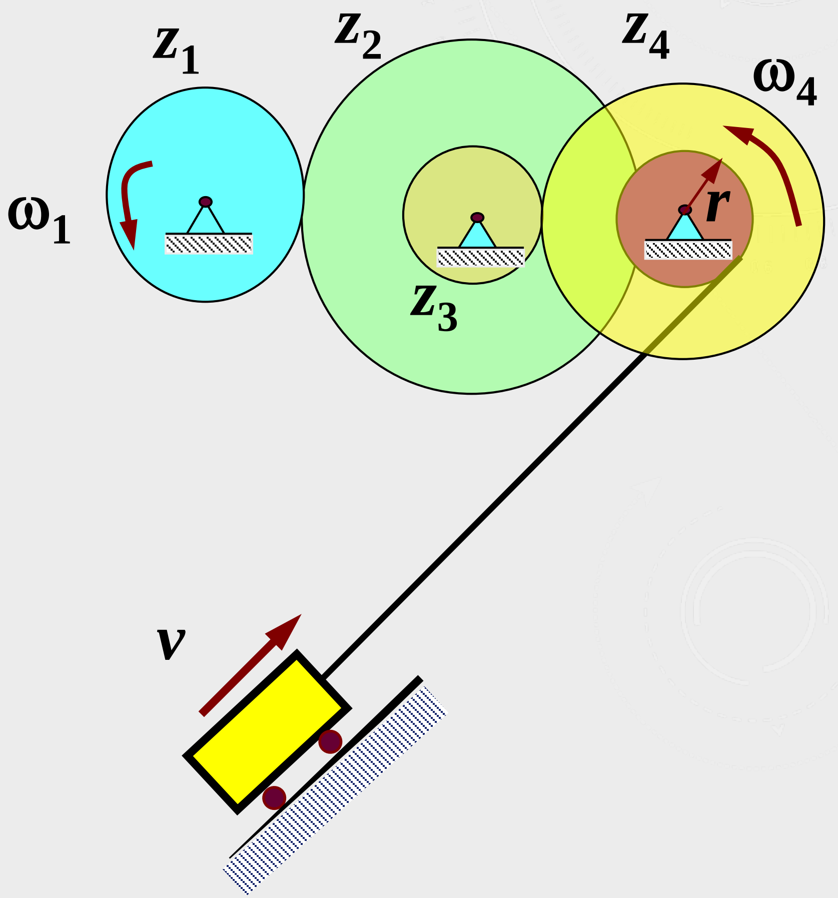


$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}$$

传动比



例3 提升齿轮机械。已知：马达带动齿轮1转速为：n_1=700转/分，同模数的齿数 z_1=42，z_2=132，z_3=25，z_4=128，鼓轮半径：r =1m，试求小车上升速度。



解:

$$i_{14}=\frac{\omega_1}{\omega_4}=\frac{z_2\cdot z_4}{z_1\cdot z_3}$$

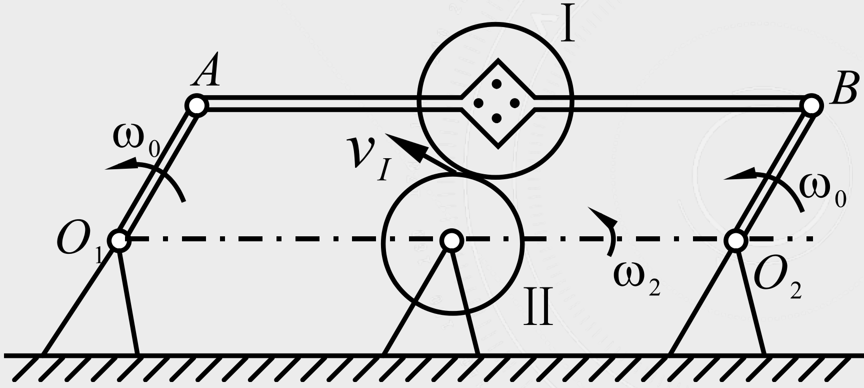
$$\omega_4=\frac{700\pi}{30}\frac{42\cdot 25}{132\cdot 128}=3.94$$

$$v=\omega_4 r=3.94\ \text{m/s}$$

例4 已知：$O_1A = O_2B = 2r$，ω_0

齿轮半径均为r，且 $O_1O_2 = AB$

求：轮I与轮II轮缘上任一点的加速度。



解 AB 平动故轮I 平动　　轮II：定轴转动

速度：轮 I ：$v_{\mathrm{I}} = v_A = O_1A \cdot \omega_0 = 2r\omega_0$

轮II：$\omega_2 = \dfrac{v_{\mathrm{I}}}{r} = 2\omega_0$　　　$v_{\mathrm{II}} = v_{\mathrm{I}}$

加速度：轮 I ：$a_{\mathrm{I}} = a_A = 2r\omega_0^2$ 方向平行于O_1A

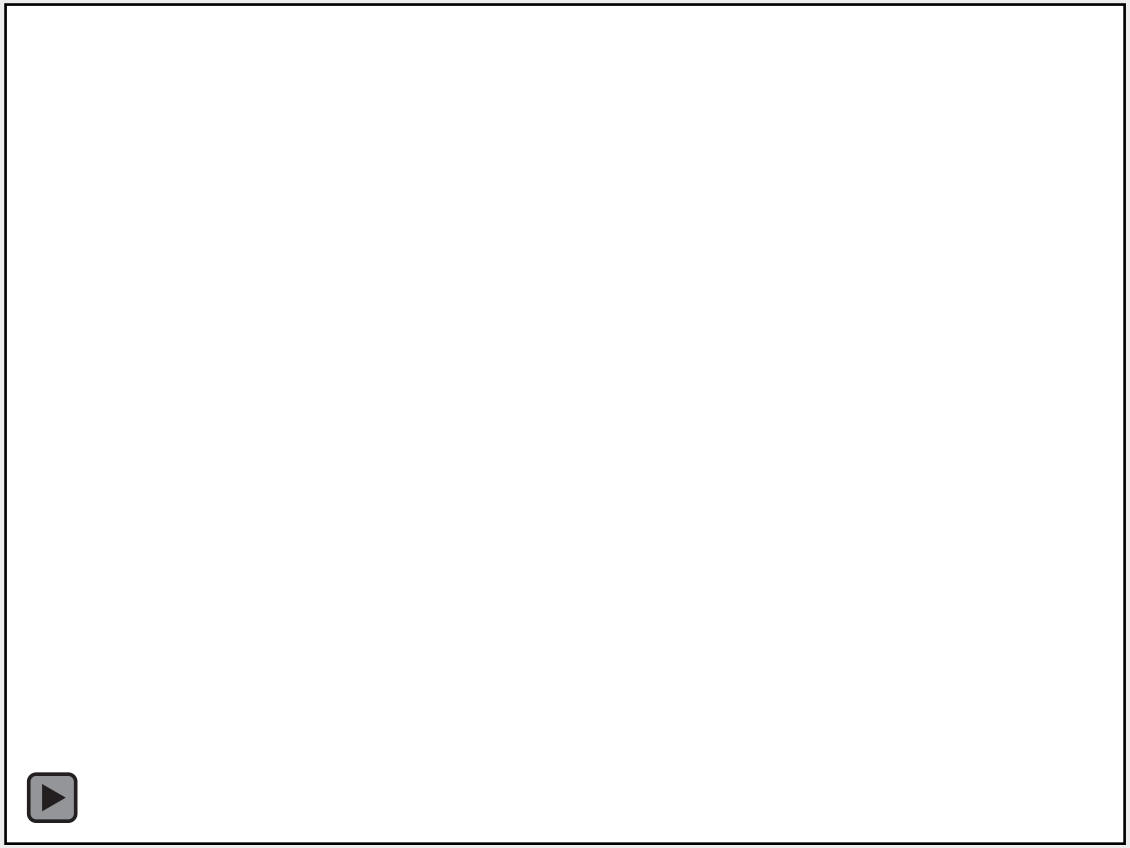
轮 II：$\alpha_2 = \dfrac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 0$　　　$a_{\mathrm{II}}^{\tau} = r\alpha_2 = 0$

$a_{\mathrm{II}}^{\mathrm{n}} = r\omega_2^2 = 4r\omega_0^2$　　　$a_{\mathrm{II}} = a_{\mathrm{II}}^{\mathrm{n}} = 4r\omega_0^2$

3. 刚体定轴转动的向量表示

角速度、角加速度的矢量表示

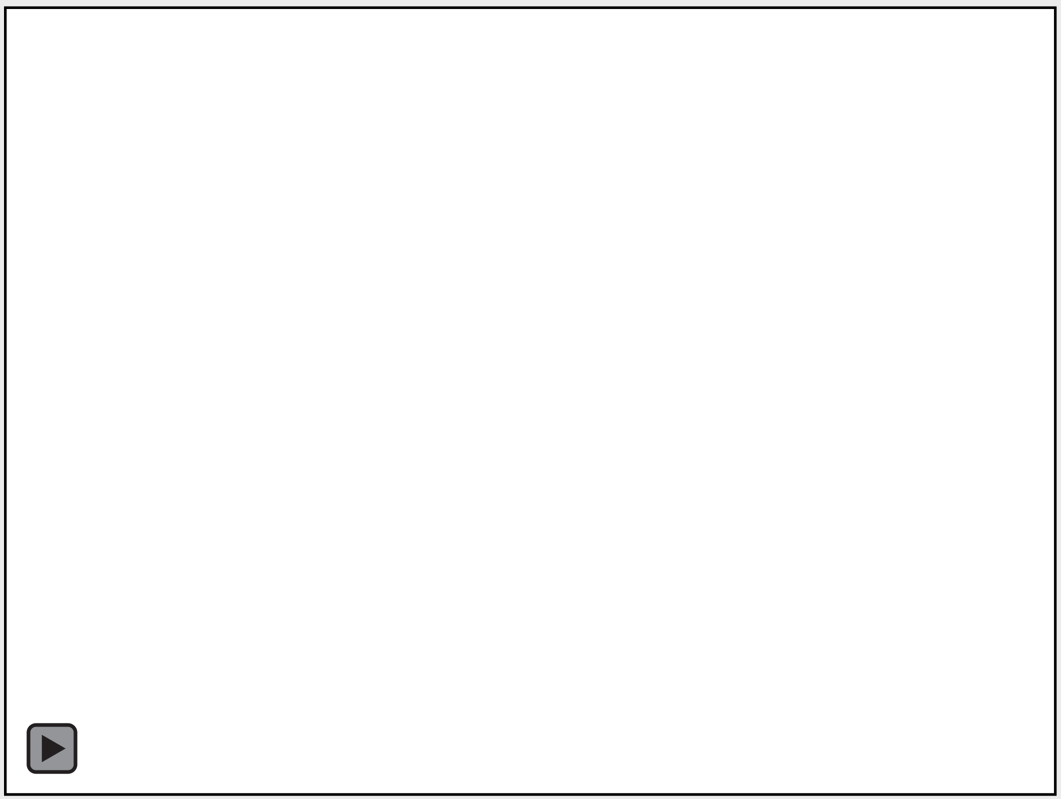
$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} \qquad \vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \alpha\vec{k}$$



以矢积表示转动刚体上一点的速度

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\vec{\omega}\right| R = \left|\omega\right| r \sin\theta = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right|$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



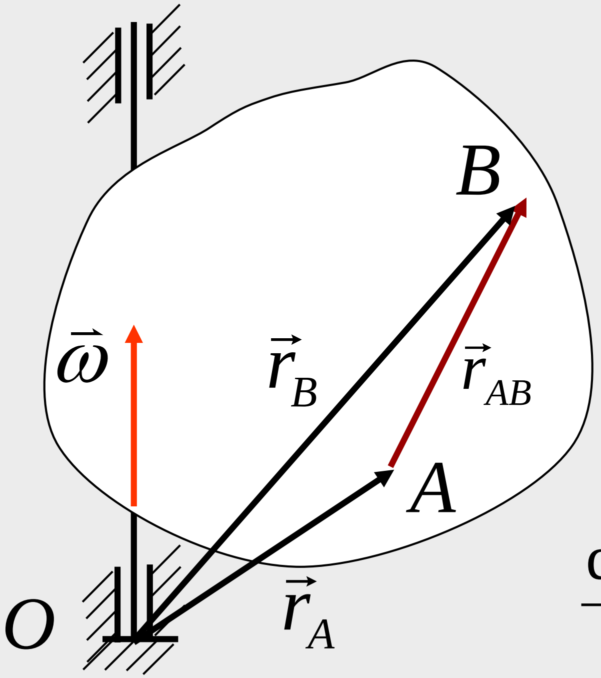
以矢积表示转动刚体上一点的加速度

速度：$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ 加速度: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

$$\left|\vec{\alpha} \times \vec{r}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| r \sin\theta = \left|\vec{\alpha}\right| R = \left|\vec{a}_{\mathrm{t}}\right| \qquad \left|\vec{\omega} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{v}\right| \sin 90^\circ = \omega^2 R = \left|\vec{a}_{\mathrm{n}}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_{\mathrm{t}} &= \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \vec{a}_{\mathrm{n}} &= \vec{\omega} \times \vec{v} \end{aligned}\right\}$$

例5 在定轴转动刚体上，任意取两点A与B，连成一线，用矢量$\vec{r}_{AB}$表示，试证明：$\dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$ 。



证： $$\vec{r}_{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$$

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\frac{d\vec{r}_B}{dt}-\frac{d\vec{r}_A}{dt}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$$

$$\vec{v}_B=\vec{\omega}\times\vec{r}_B \quad \text{与} \quad \vec{v}_A=\vec{\omega}\times\vec{r}_A$$

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}_B-\vec{\omega}\times\vec{r}_A=\vec{\omega}\times(\vec{r}_B-\vec{r}_A)=\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$$

此结果表示：

当转动刚体上的一个大小不变的矢量，只要其方向发生变化，其对时间的变化率等于刚体的角速度与本矢量的叉积。

推论： 若在转动刚体上，固结一组坐标系 $O'x'y'z'$，其相应的单位矢量为 $\vec{i}'$，$\vec{j}'$，$\vec{k}'$，该坐标系随同刚体以角速度 $\vec{\omega}$ 绕某轴转动，则必定有：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t} &= \vec{\omega}\times\vec{i}' \\
\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t} &= \vec{\omega}\times\vec{j}' \\
\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t} &= \vec{\omega}\times\vec{k}'
\end{aligned}\right\}
$$

泊桑公式

习题作业：7-3, 5, 9, 14, 15