

理论力学

吴佰建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

物体系的平衡 静定与超静定

物体系的平衡

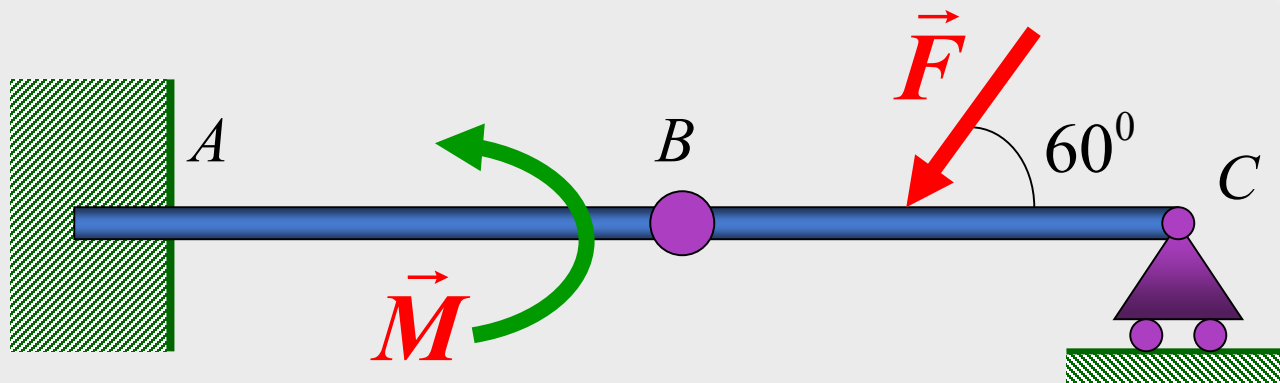
•物体系：

由若干个物体（刚体）用约束连接起来的系统。



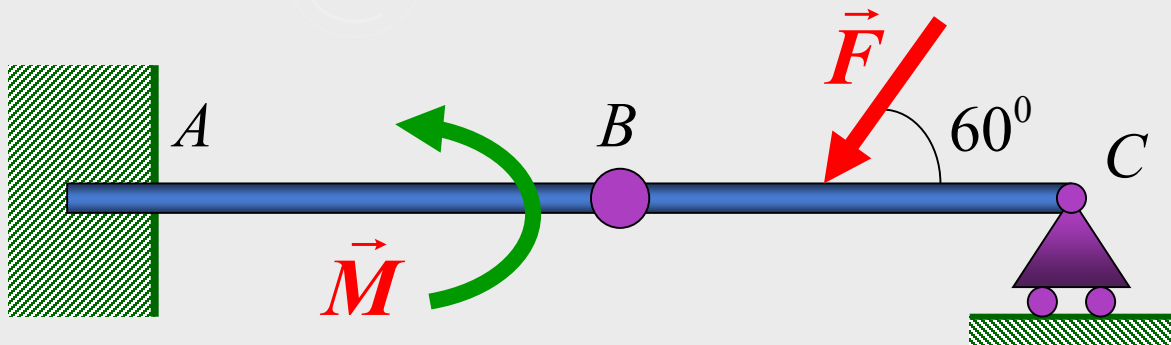
1. 静定与超静定问题

物体系平衡 \Leftrightarrow 系统中每个物体平衡

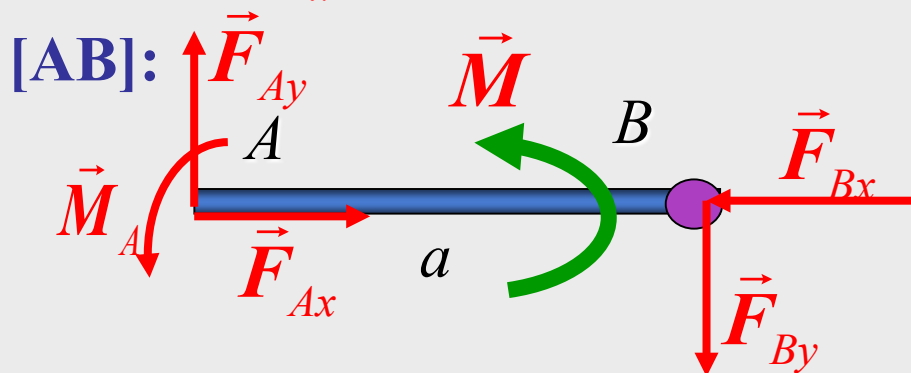
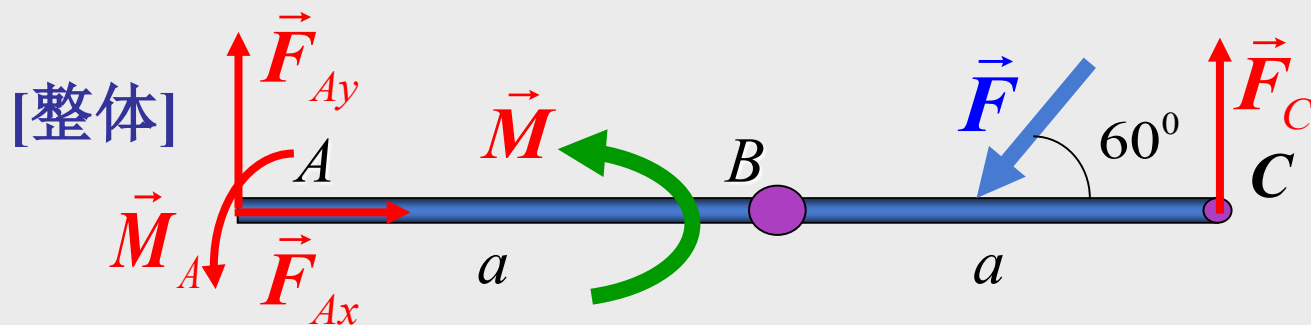


问题：平面刚体系由 n 个物体组合而成，独立平衡条件最多有多少？

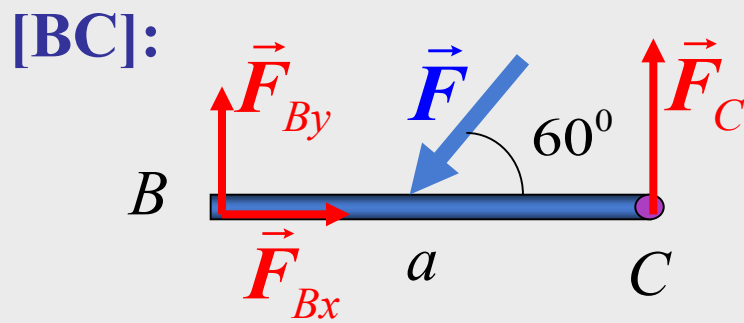
独立平衡方程数 N : $N = 3n$



作用力与反作用力
视为1个未知力



独立平衡方程数目: 6
未知数数目: 6



•静定问题

未知量的数目 = 独立平衡方程的数目

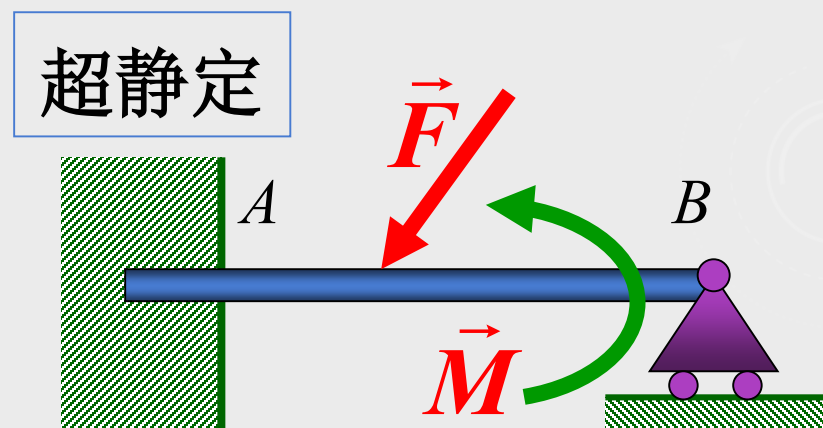
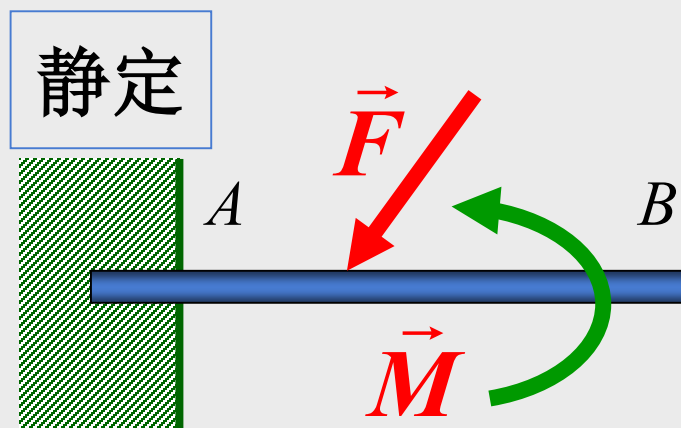
•有唯一解

•超静定问题

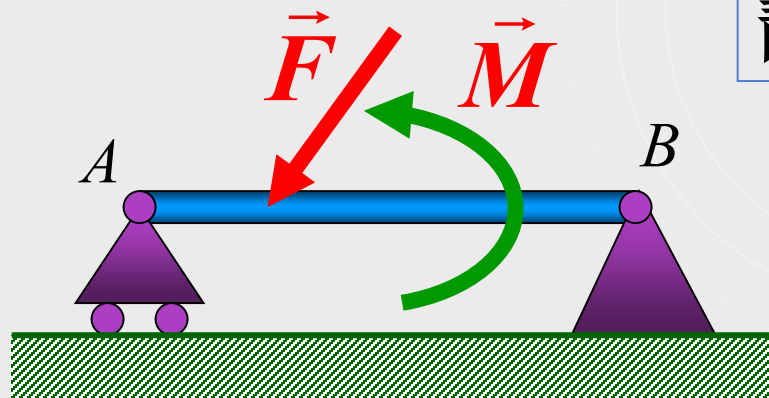
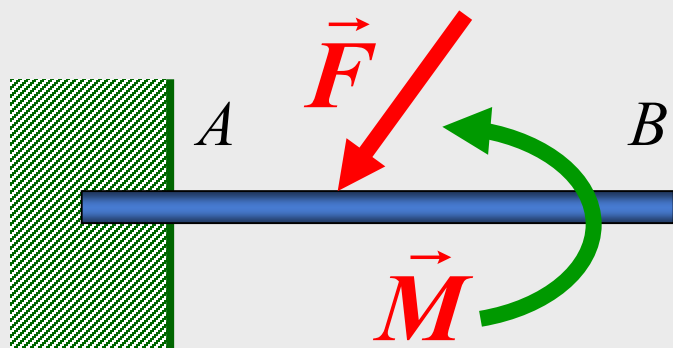
未知量的数目 > 独立平衡方程的数目

•无穷组解

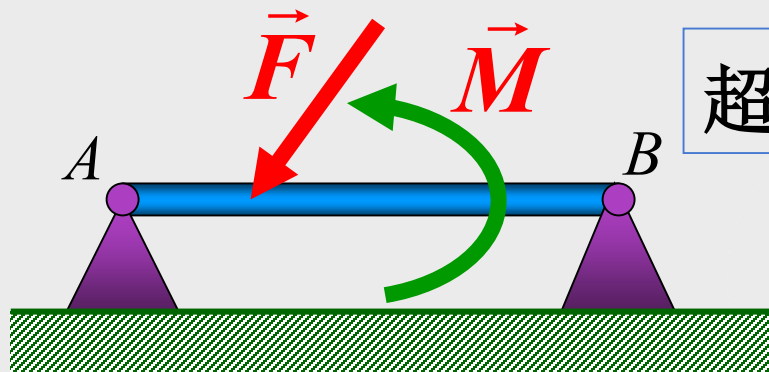
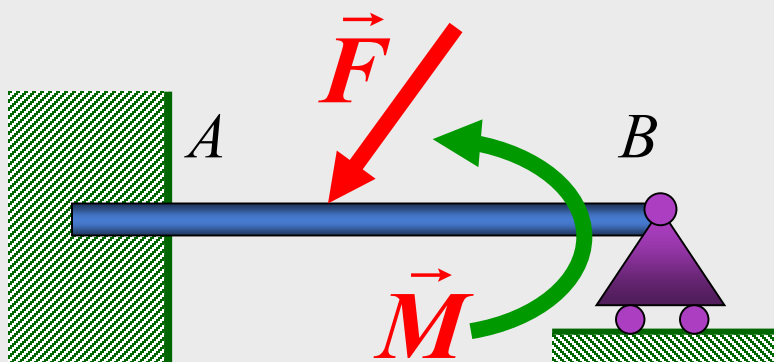
•利用变形协调条件确定真实解



静定



超静定

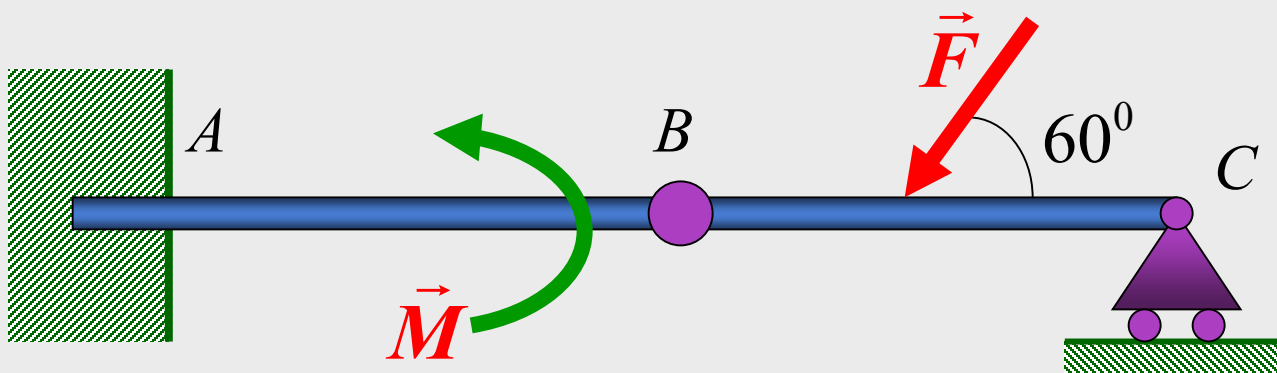


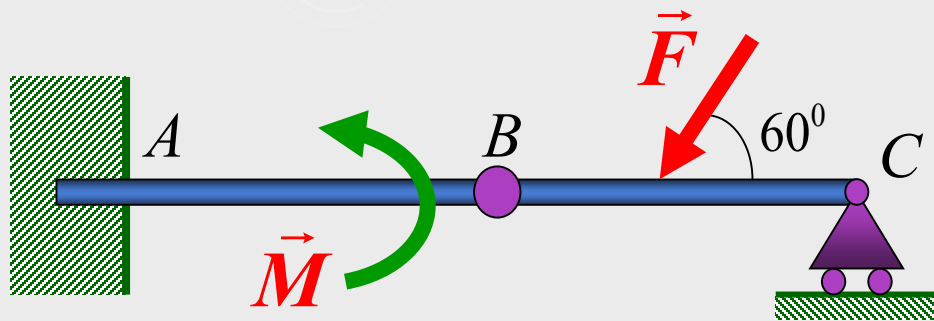
- 下面两图中存在多余的约束，
- 未知量数目大于独立平衡方程的个数

2. 刚体系统的平衡

[隔离体]、[整体]

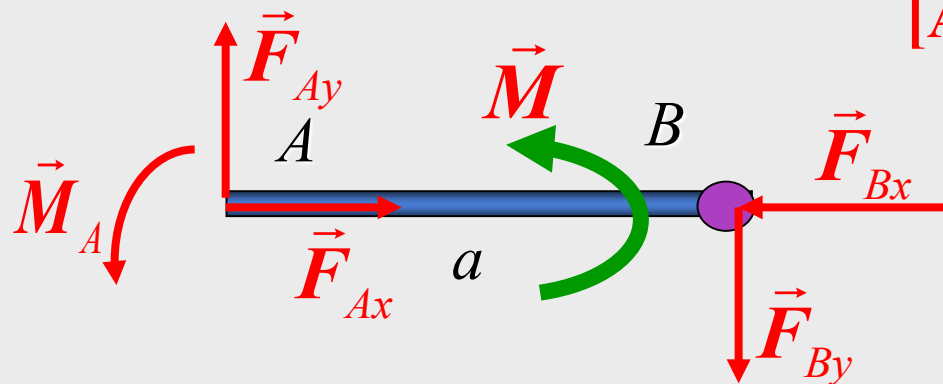
例：已知 $F, M, AB=BC=L$ ， F 作用在 BC 杆的中点，求 $A、C$ 的约束力





方法一:

解: 以每个物体为研究对象, 画其受力图。



[BC]:

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Bx} - F \cos 60^\circ = 0 \quad (4)$$

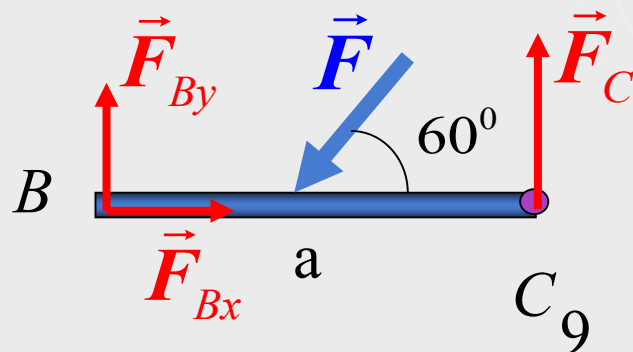
$$\sum F_y = 0 \quad F_{By} + F_C - F \sin 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_B = 0 \quad F \sin 60^\circ \frac{a}{2} - F_C \cdot a = 0 \quad (6)$$

$$[AB]: \sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_{Bx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - F_{By} = 0 \quad (2)$$

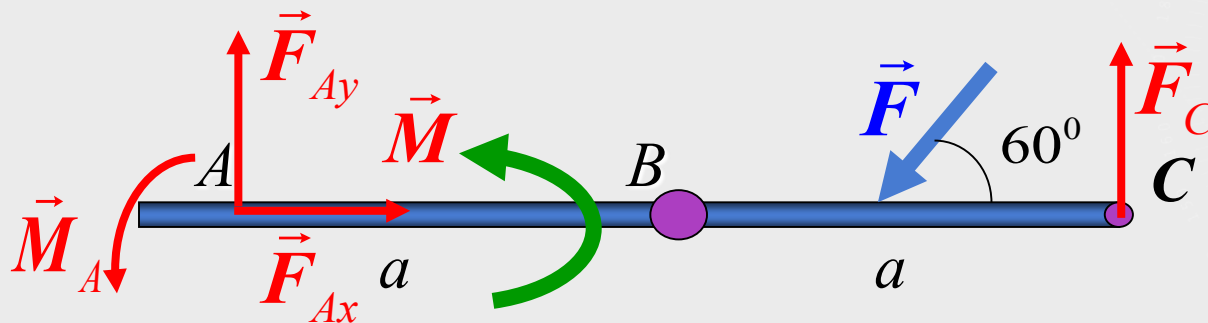
$$\sum M_A = 0 \quad M + M_A - F_{By}a = 0 \quad (3)$$



解方程(1)~(6)

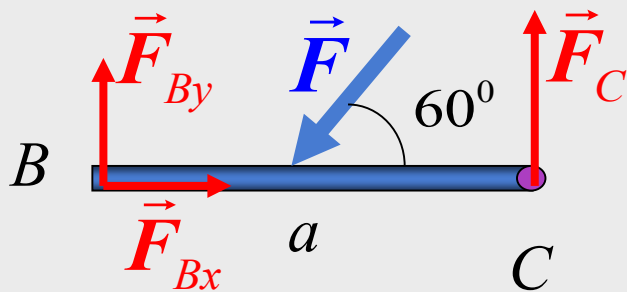
方法二:

解: 1、[整体] 受力图:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax}$$

2、[BC杆]受力图



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{Ay}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow F_C$$

平面刚体系平衡求解

1、一般解法 \longrightarrow 不用思考，但解方程复杂
隔离所有的 n 个刚体，每个刚体可列3个平衡方程。得到 $3n$ 个独立的方程(肯定独立)组成的方程组，可解 $3n$ 个未知量。

2、分析解法

选择合适的隔离体求解所需的未知量

原则：

- a、整体 \longleftrightarrow 局部，善用取矩，用一个方程求得某个未知数；
- b、通常从二力杆、受力简单或者静定的构件寻找突破；
- c、必要时也要敢于连列方程。

例：多跨桥梁简图如图示，已知： $F=500\text{N}$, $q=250\text{N/m}$, $M=500\text{N}\cdot\text{m}$, 求： A, B, E 处的支座约束反力。

解：取[整体]受力分析

$$Q=4\cdot q$$

$$\sum F_x=0, \quad F_{Ax}=0$$

取[CE]受力分析 $Q_1=2\cdot q$

$$\sum M_C=0, \quad 4\cdot F_E - M - Q_1 = 0$$

$$F_E=250\text{N}$$

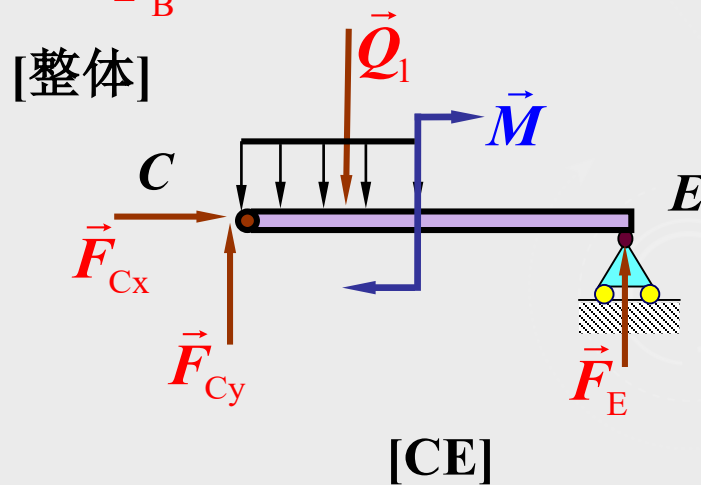
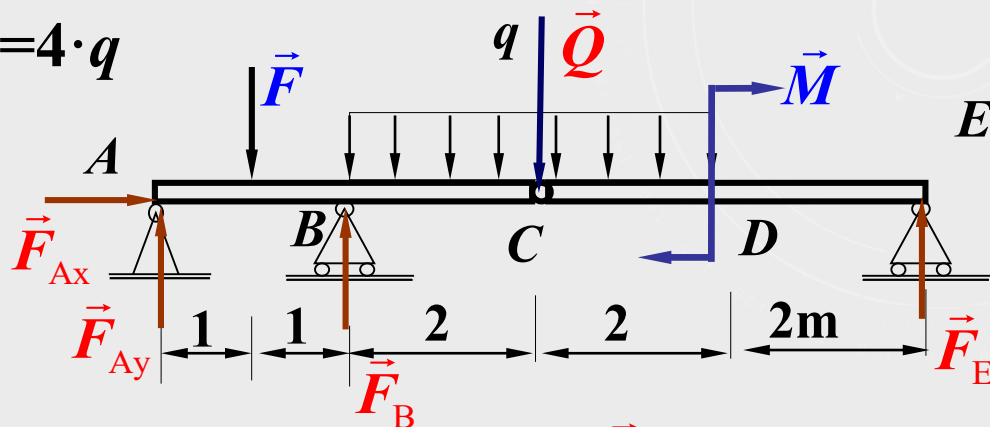
[整体]

$$\sum M_A=0, \quad -F + 2F_B - 4Q - M + 8F_E = 0$$

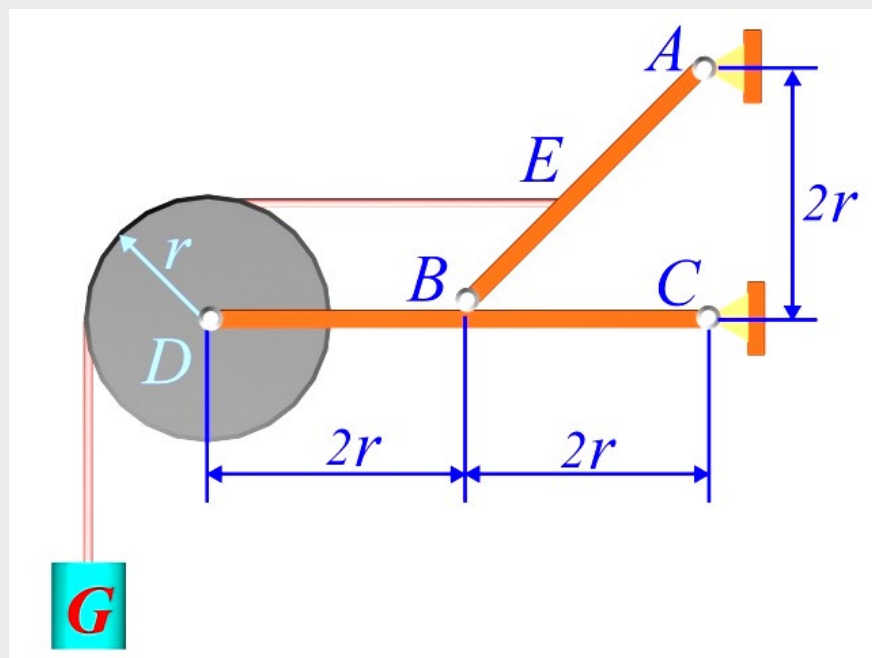
$$F_B=1500\text{N},$$

$$\sum F_y=0, \quad F_{Ay} + F_B + F_E - F - Q = 0$$

$$F_{Ay}=250\text{N}。$$



例： A , B , C , D 处均为光滑铰链，物块重为 G ，
通过绳子绕过滑轮水平地连接于杆 AB 的 E 点，
各构件自重不计，试求 B 处的约束力。



解： [整体]:受力分析如图

$$\sum M_C(\vec{F})=0, \quad 5r \times G - 2r \times F_{Ax} = 0$$

$$\text{解得 } F_{Ax} = 2.5G$$

[AB]: 受力分析如图

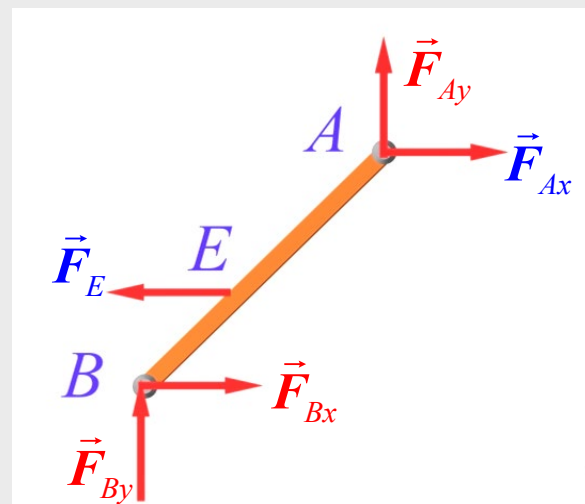
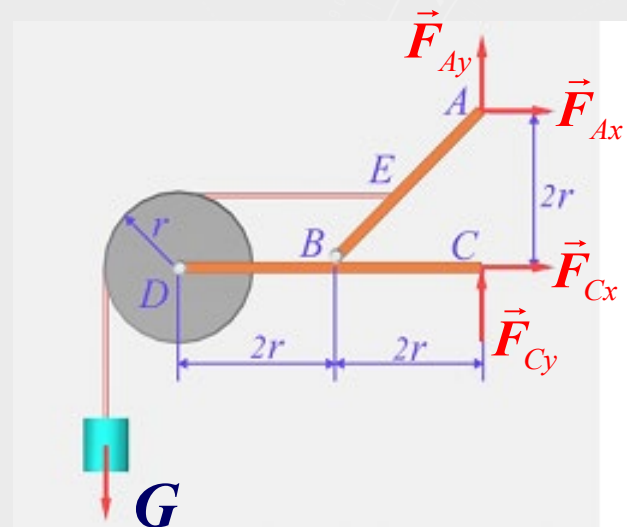
$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{Bx} - F_E = 0$$

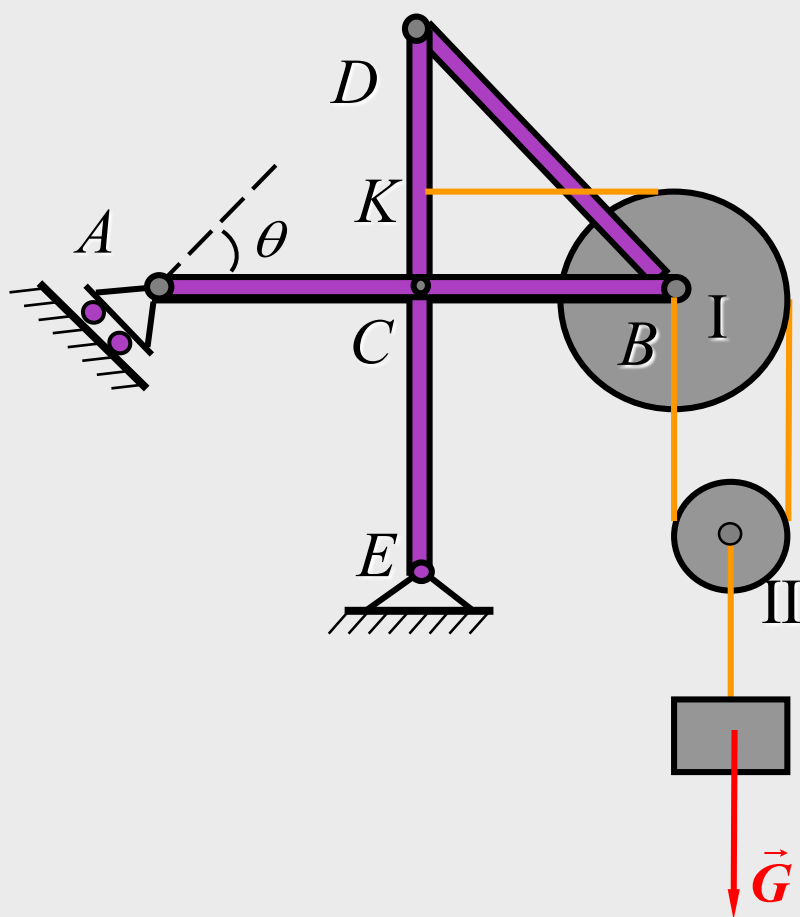
$$\sum M_A(F) = 0,$$

$$2r \times F_{Bx} - 2r \times F_{By} - rF_E = 0$$

联立求解可得

$$F_{Bx} = -1.5G, \quad F_{By} = -2G$$





例：如图所示，已知重力 G ， $DC=CE=AC=CB=2l$ ；定滑轮半径为 R ，动滑轮半径为 r ，且 $R=2r=l$ ， $\theta=45^\circ$ 。试求： A ， E 支座的约束力及 BD 杆所受的力。

解： 1. [整体] 受力分析如图所示

列平衡方程

$$\sum M_E(F) = 0 \quad F_A \times \sqrt{2} \times 2l + G \times \frac{5}{2}l = 0$$

$$F_A = \frac{-5\sqrt{2}}{8}G$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_A \cos 45^\circ + F_{Ex} = 0$$

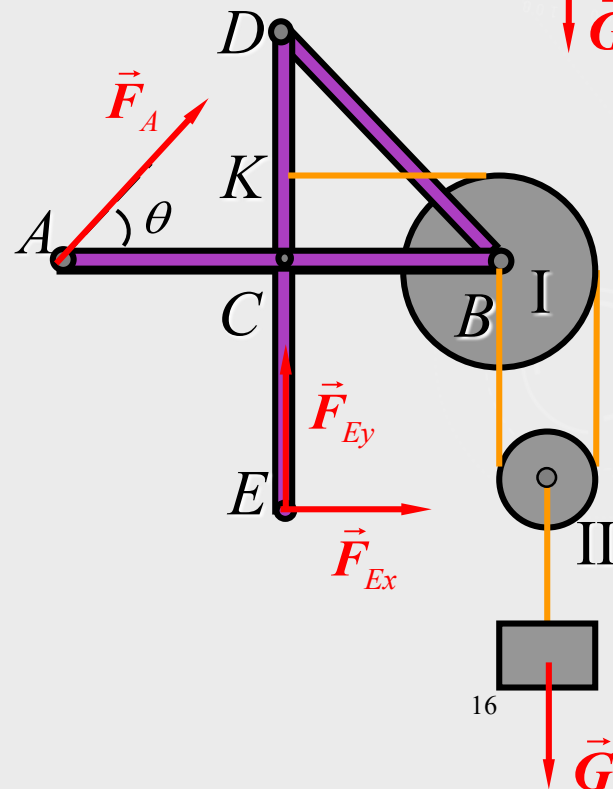
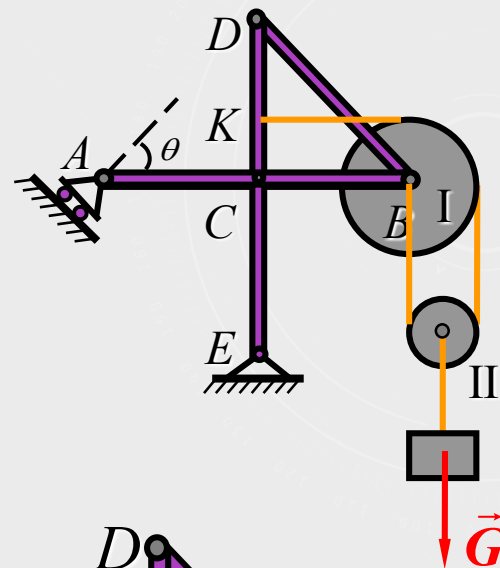


$$F_{Ex} = \frac{5G}{8}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_A \sin 45^\circ + F_{Ey} - G = 0$$



$$F_{Ey} = G - F_A \sin 45^\circ = \frac{13G}{8}$$



$$F_A = \frac{-5\sqrt{2}}{8}G \quad F_{Ex} = \frac{5G}{8}$$

$$F_{Ey} = G - F_A \sin 45^\circ = \frac{13G}{8}$$

2. [DEC] 受力分析如图所示

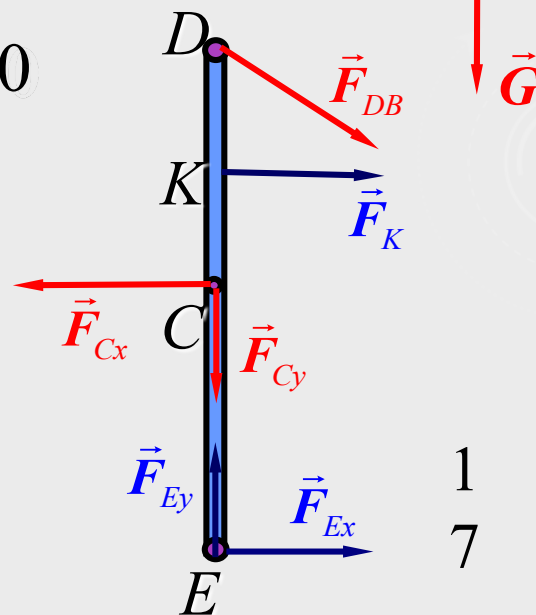
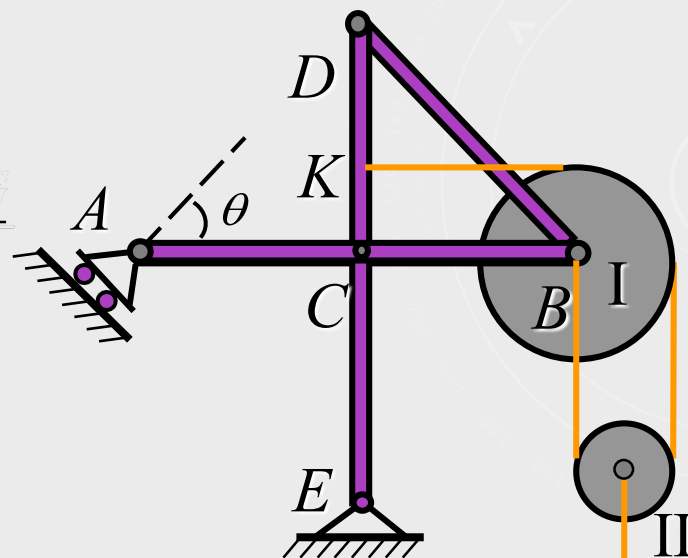
列平衡方程

$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$F_{DB} \cos 45^\circ \times 2l + F_K \times l - F_{Ey} \times 2l = 0$$

其中 $F_K = \frac{G}{2}$

➡ $F_{DB} = \frac{3\sqrt{2}G}{8}$



例：组合托架组成构件如图示，三根链杆自重不计，已知：
 $F=1\text{kN}$, $M=600\text{N}\cdot\text{m}$, 求： A 处约束反力。

解：取[整体]受力分析

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F = 0$$

$$\text{得： } F_{Ay} = 1000\text{N},$$

取[BD]受力分析

$$\sum M_B = 0, \quad -M - F_3 \times 2 \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

$$F_3 = -500\text{N},$$

$$\text{再取[C节点]} \quad \sum F_x = 0, \quad F_1 - F_3 \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

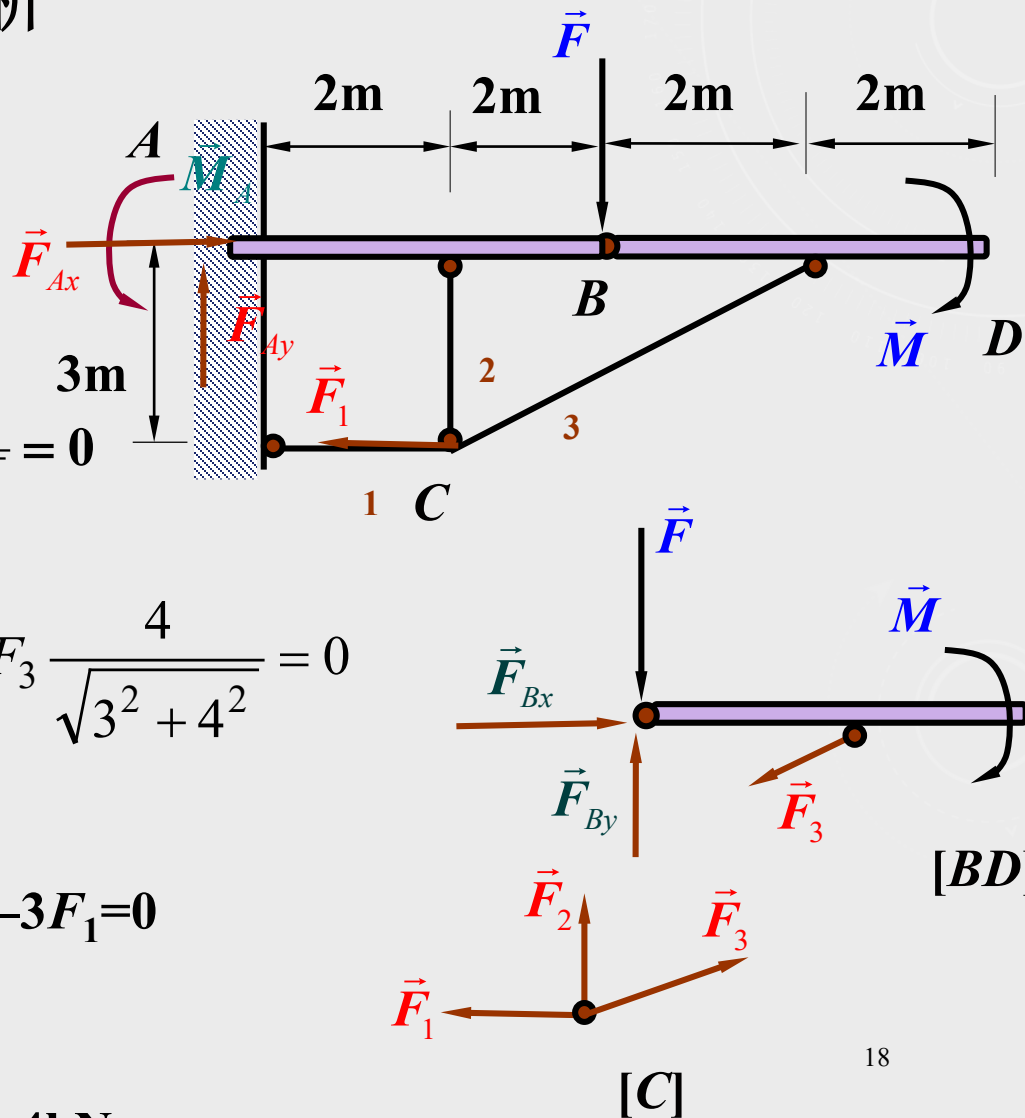
$$F_1 = -400\text{N},$$

[整体]

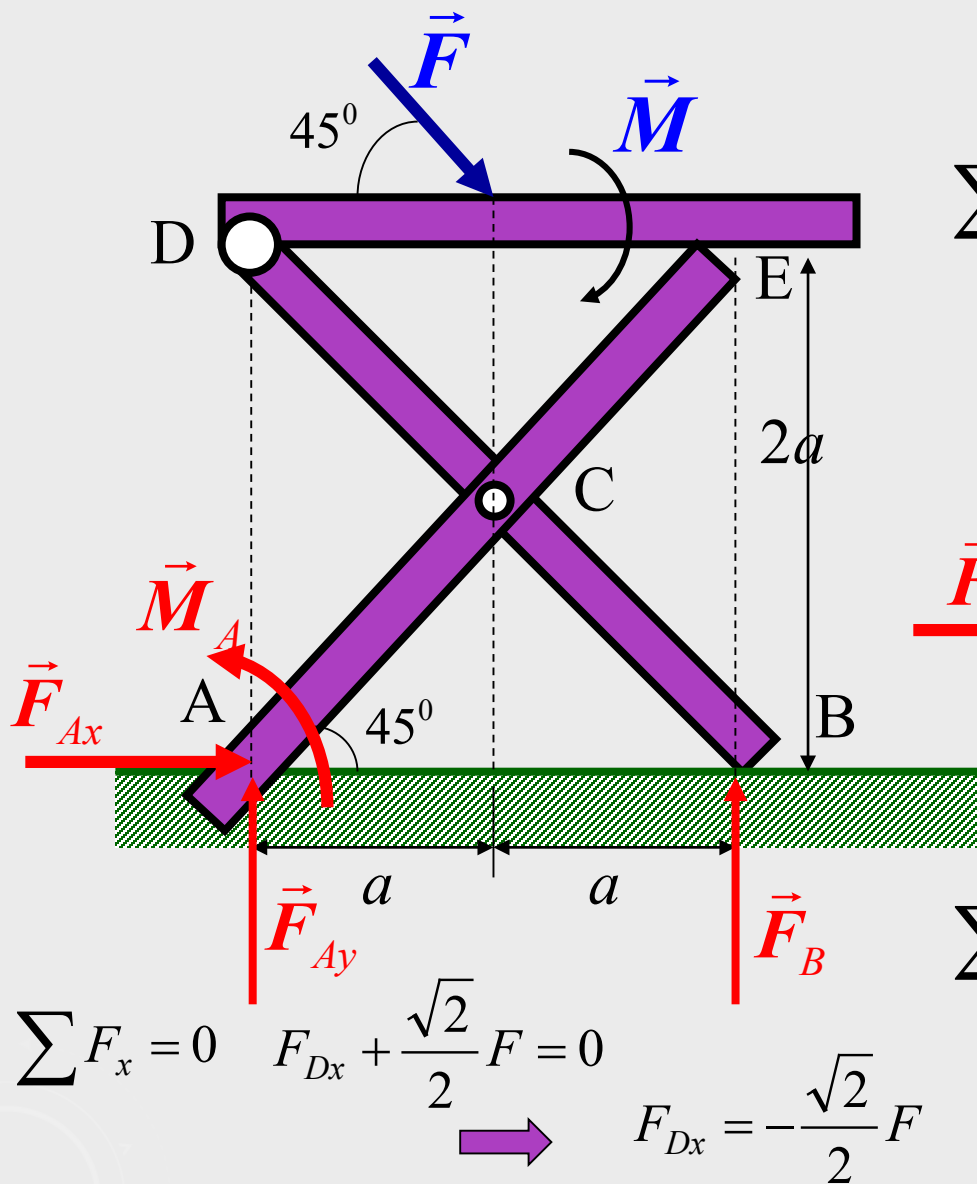
$$\sum M_A = 0, \quad M_A - 4F - M - 3F_1 = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_1 = 0$$

$$\text{可得： } F_{Ax} = -400\text{N}, \quad M_A = 3.4\text{kN}\cdot\text{m}$$



例：系统在图示位置平衡,已知 F, M, a 。求A, B处的约束力。

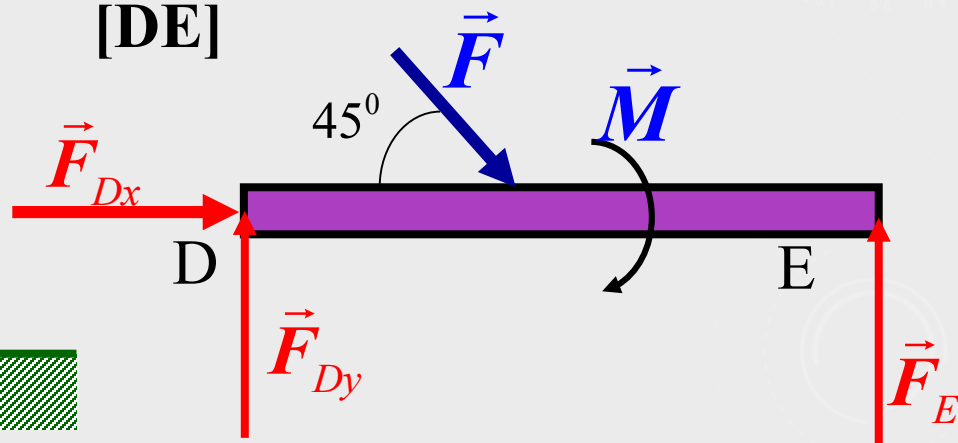


解：[整体]

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0$$

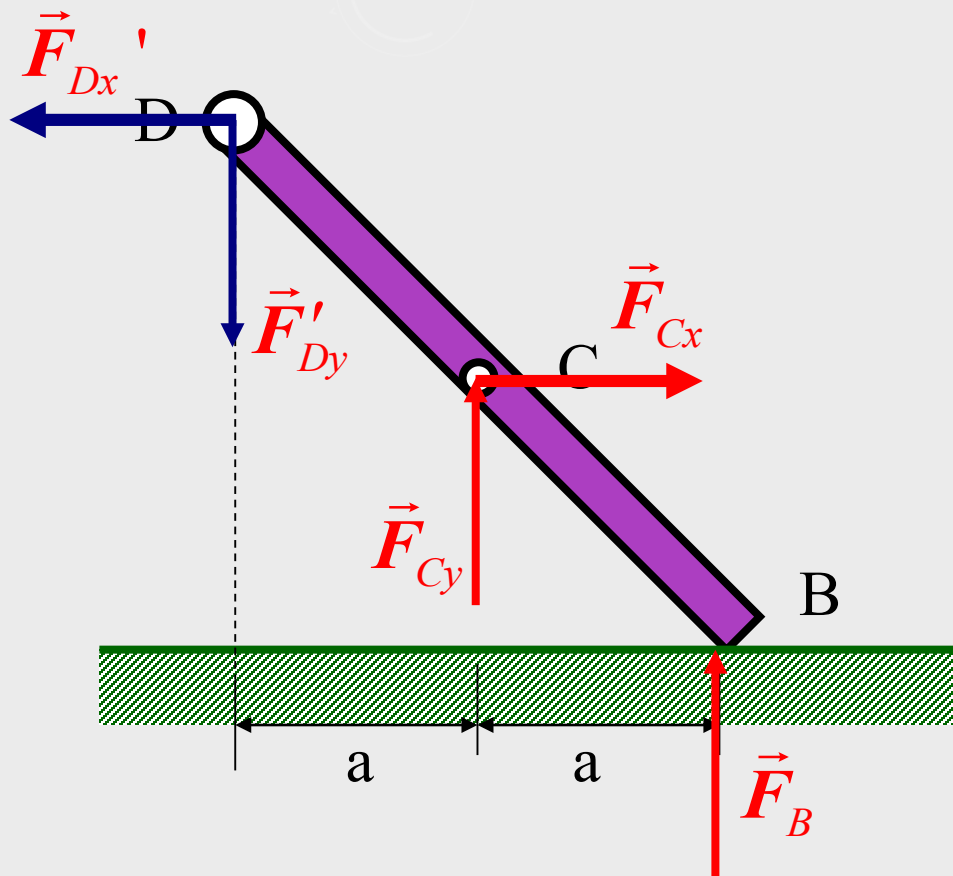
$$\Rightarrow F_{Ax} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

[DE]



$$\sum M_E = 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} Fa - M - F_{Dy} 2a = 0$$

$$\Rightarrow F_{Dy} = -\frac{M}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{194} F$$

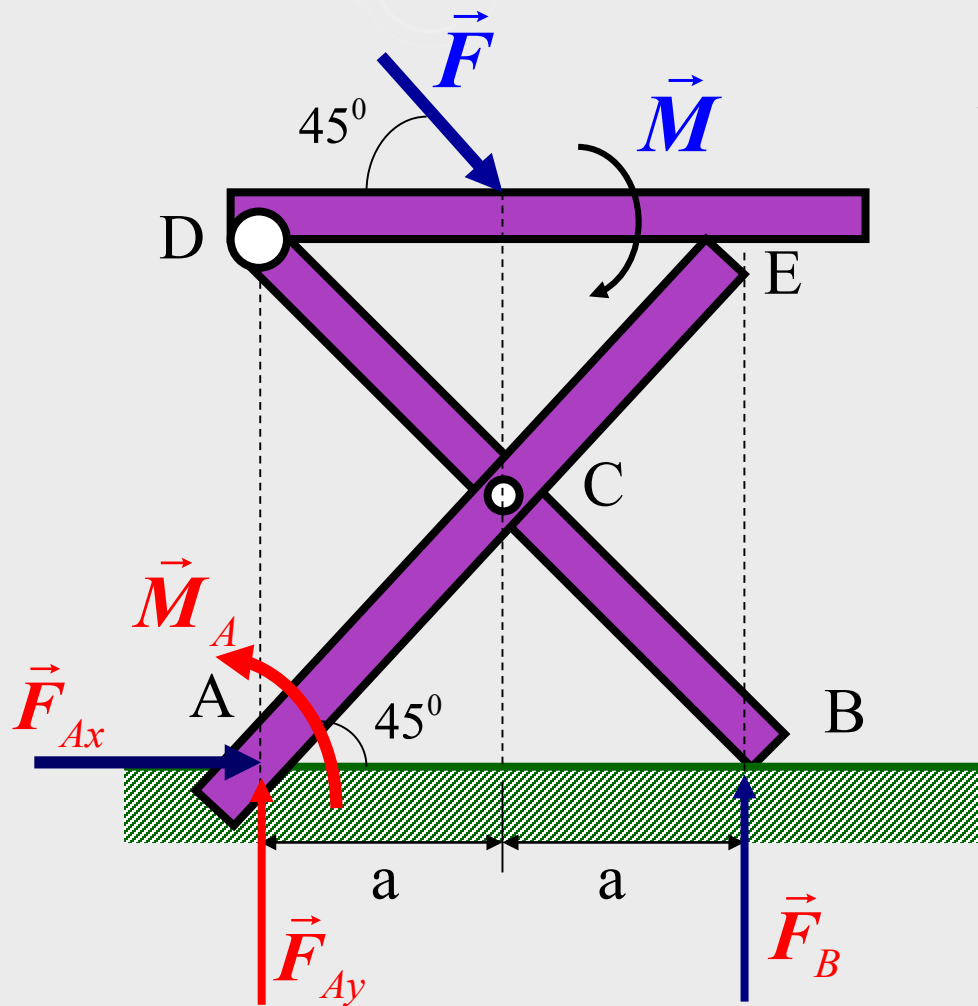


$$F_{Dx} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$F_{Dy} = -\frac{M}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{4} F$$

$$[\text{DB}] \quad \sum M_C = 0 \quad F_B a + F_{Dy}' a + F_{Dx}' a = 0$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{M}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{4} F$$



$$F_{Ax} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \quad F_B = \frac{M}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{4}F$$

[整体]

$$\sum F_y = 0 \quad F_B + F_{Ay} - \frac{\sqrt{2}}{2}F = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = -\frac{M}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{4}F$$

$$\sum M_A = 0$$

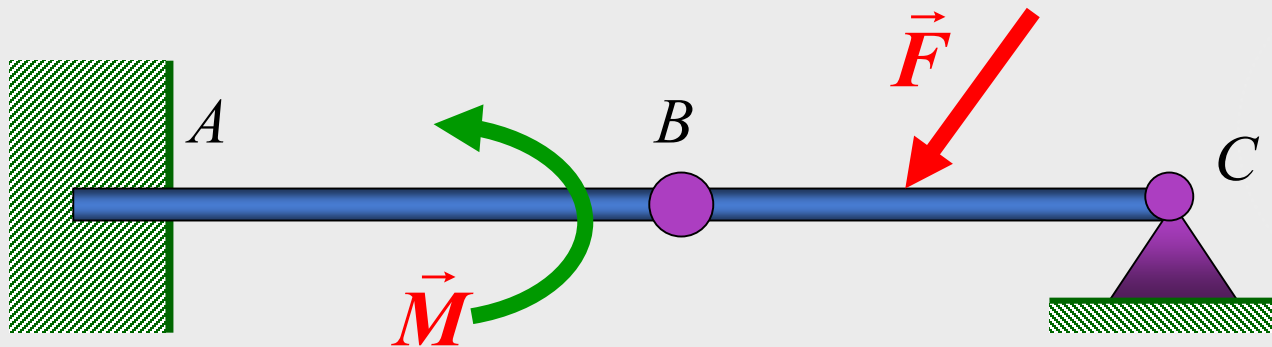
$$\frac{\sqrt{2}}{2}F \cdot 2a + \frac{\sqrt{2}}{2}F \cdot a + M - F_B \cdot 2a - M_A = 0$$

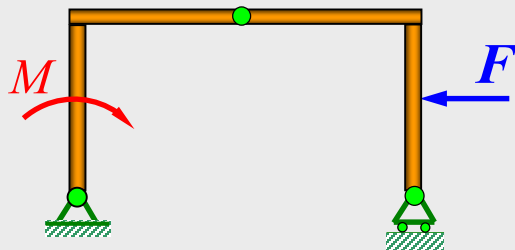
$$\Rightarrow M_A = -\sqrt{2}Fa$$

3. 刚体系静定与超静定的判定

- **静定问题** 未知量个数 $N_r \leq$ 独立方程数 N_e
- **超静定问题** 未知量个数 $N_r >$ 独立方程数 N_e

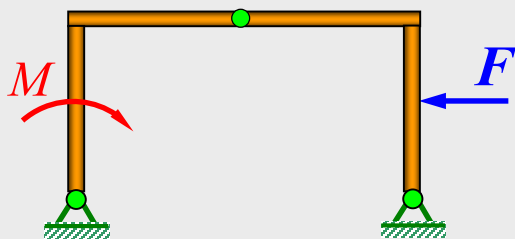
思考题： 确定图示系统的静定性。





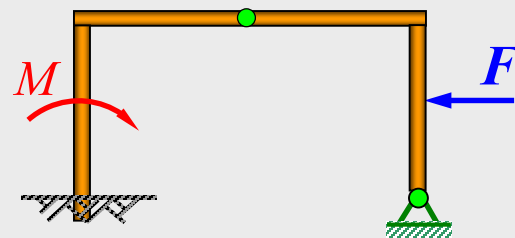
$$N_r = 5 \quad N_e = 6$$

运动机构($k=1$): 一个自由度



$$N_r = 6 \quad N_e = 6$$

静定结构



$$N_r = 7 \quad N_e = 6$$

超静定结构

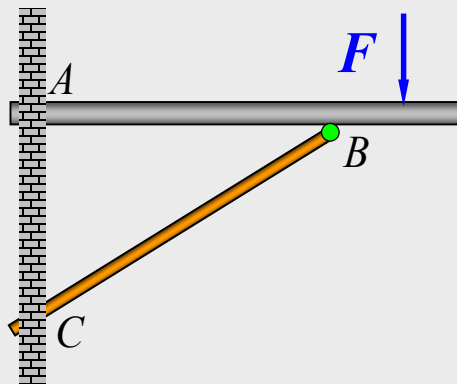


思考

试判断下列系统是否静定？



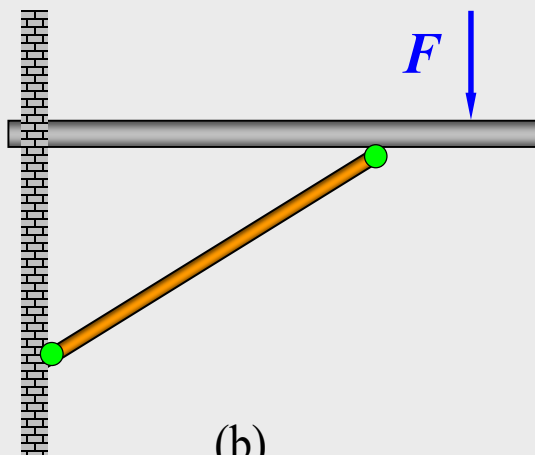
答 8



(a)

$$N_r = 8 \quad N_e = 6$$

二次超静定

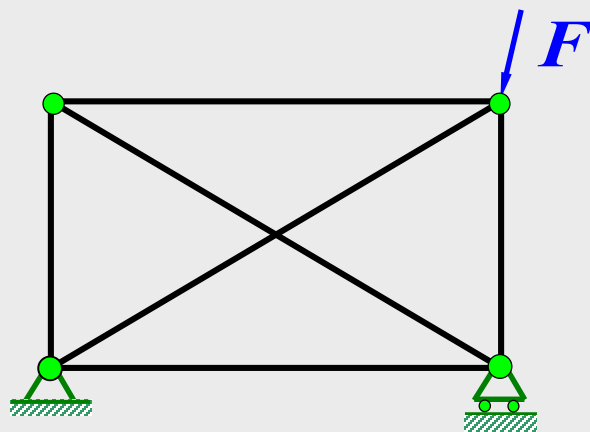


(b)

$$N_r = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$N_e = 2 \times 3 = 6$$

一次超静定



(d)

(c) $N_r = 6 + 3 = 9$ $N_e = 2 \times 4 = 8$; 一次超静定

刚体系平衡求解

- 1、研究对象
- 2、受力分析
- 3、平衡条件
- 4、列方程、求解

Best: 一个方程解一个未知量

Better: 一到两个方程连列求解

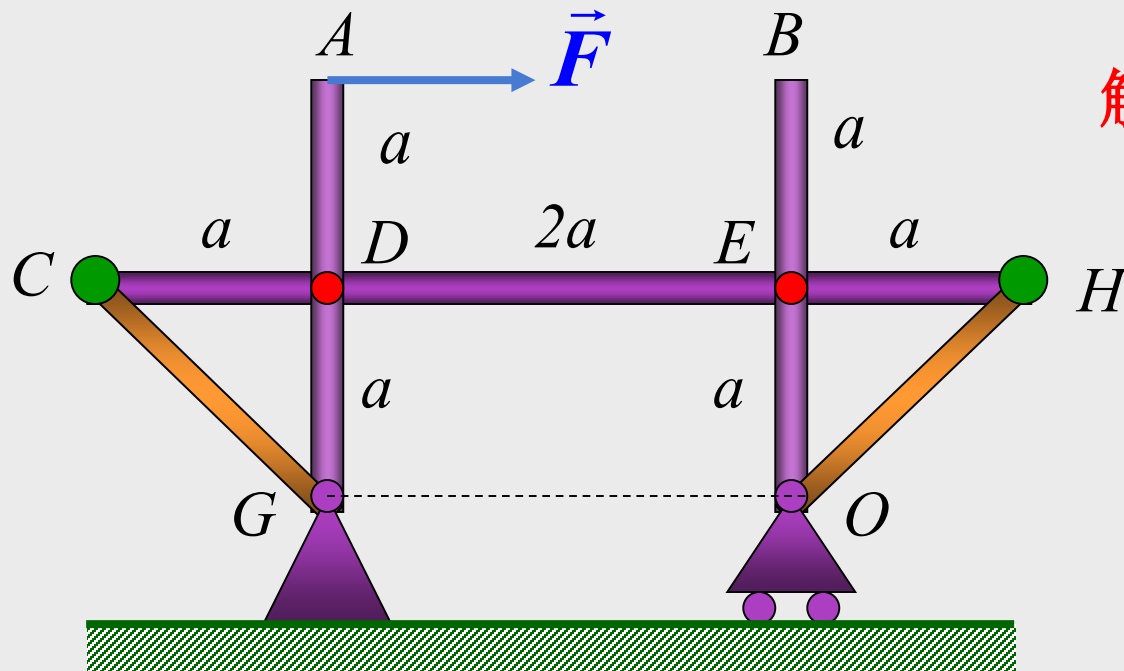
TAKE-HOME MESSAGE

- ✓ **受力分析！** 还是要从受力分析入手。
- ✓ **整体 \leftrightarrow 局部，善用取矩。**
- ✓ **一般从简单杆件寻找突破口。**

习题作业：3-10, 11, (13), 15

例16: 已知 F , 求 AG 杆上的约束力。

解: 1、研究 AG 杆, 画受力图。

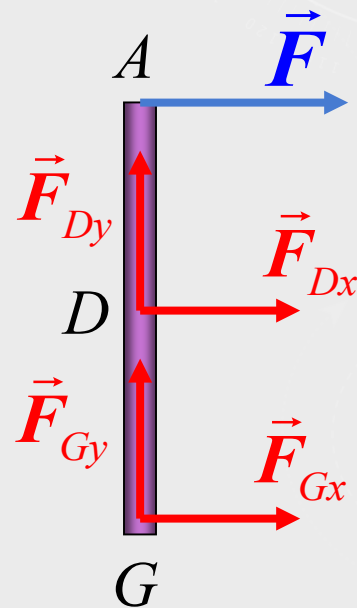


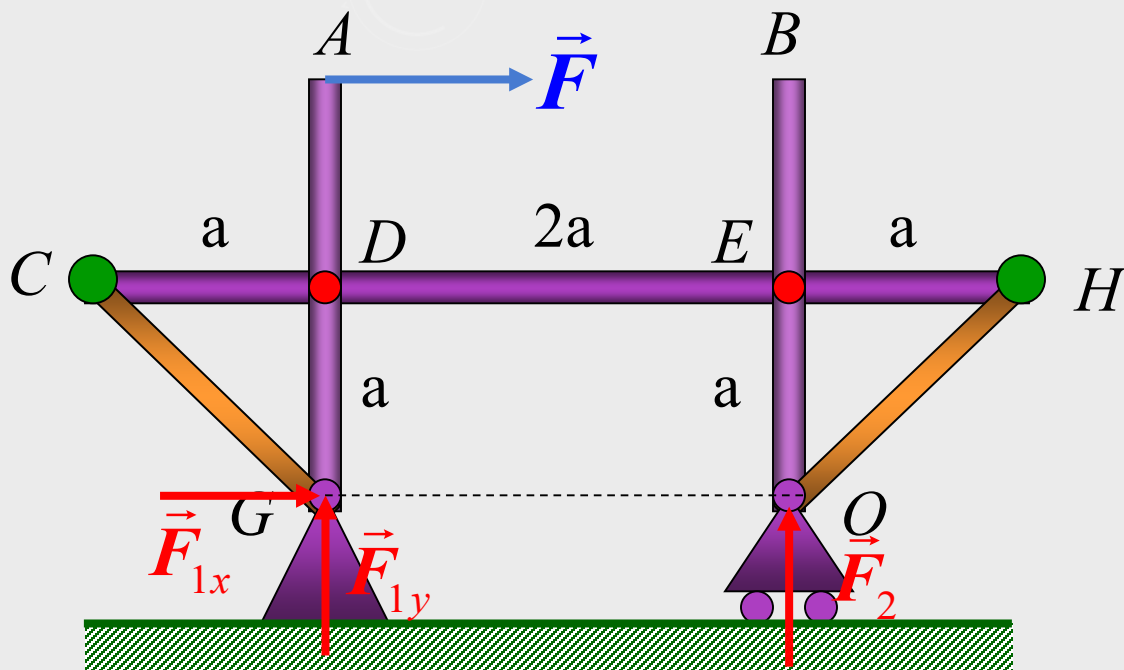
$$\sum M_D(\vec{F}) = 0$$

$$F_{Gx}a - Fa = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Gx} = F$$

$$\sum M_G(\vec{F}) = 0$$

$$F_{Dx}a + F \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Dx} = -2F$$





[整体] $\sum M_O(\vec{F}) = 0$

$$F_{1y} 2a + F 2a = 0$$

$\rightarrow F_{1y} = -F$

$$\sum F_x = 0$$

$\rightarrow F_{1x} = -F$

[销钉G] $\sum F_x = 0$

$$-F_{1x} \cos 45 - F_{1y} \cos 45 + F_{Gx} \cos 45 + F_{Gy} \cos 45 = 0$$

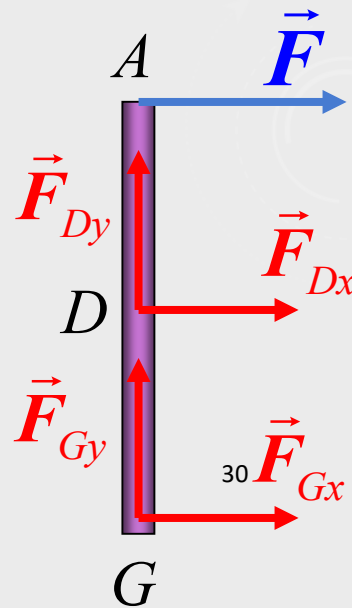
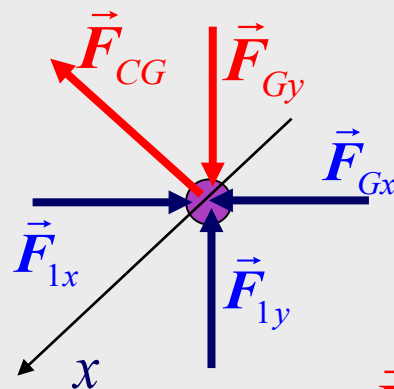
$\rightarrow F_{Gy} = -3F$

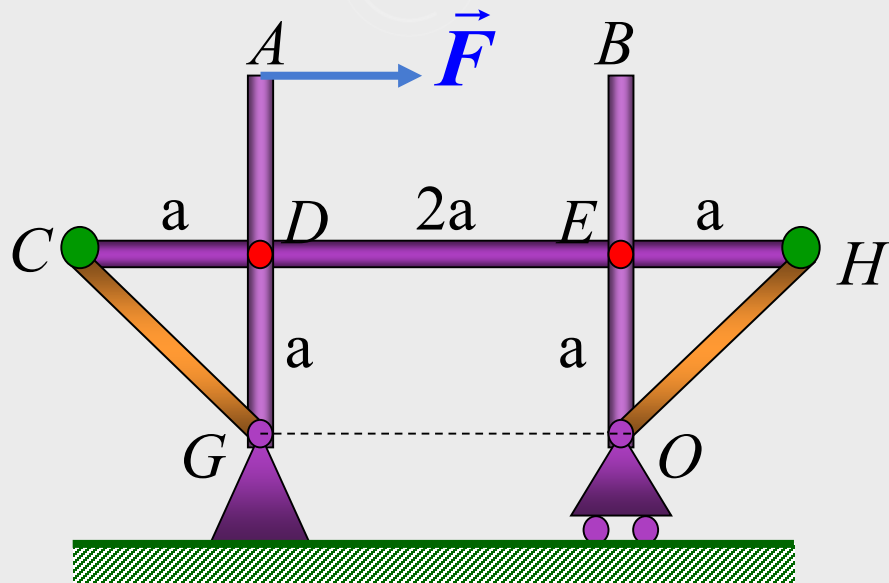
$$F_{Gx} = F$$

$$F_{Gy} = -3F$$

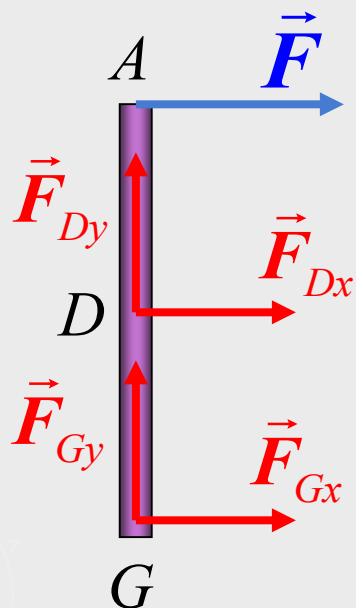
[AG]: $\sum F_y = 0$

$$F_{Dy} = 3F$$

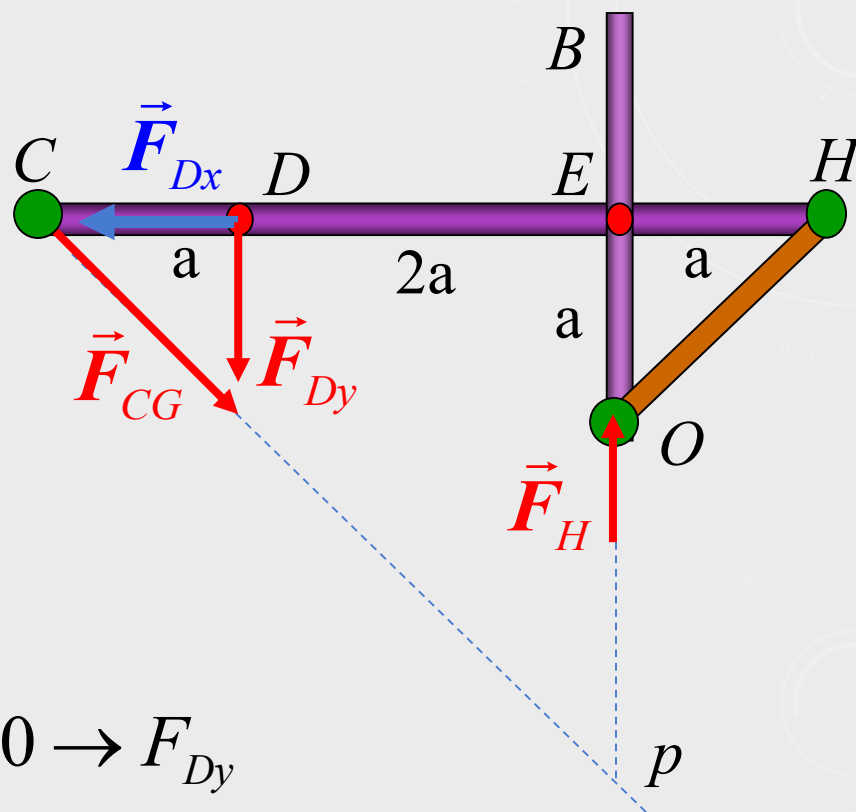




方法3



研究图示构件，画受力图



求出 \vec{F}_{Dy}

$$\sum M_p = 0 \rightarrow F_{Dy}$$

3、再研究AG杆，求出 F_{Gy}

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{Gy}$$