

# 二维稳态导热问题的计算

## 求解代数方程组

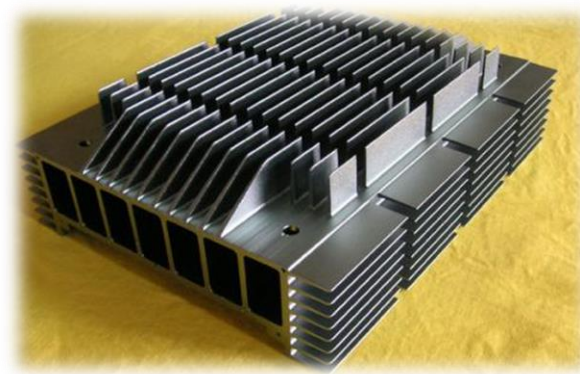
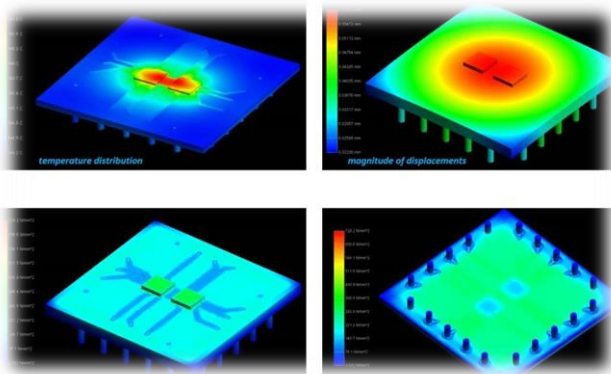
- ◆ 在实际工程问题的计算中，代数方程的个数一般在 $10^3 - 10^6$ 的量级，只有利用**现代的计算机**才能迅速获得所需的解。
- ◆ 对于常物性、无内热源（或具有均匀的内热源）的问题，代数方程一经建立，其中各项的系数在整个求解过程中不再变化，称为**线性问题**。
- ◆ 如果物性为温度的函数，则邻点温度的系数不再是常数，而是温度的函数。这些系数在迭代过程中要相应地不断更新。这种问题称为**非线性问题**。
- ◆ **是否收敛判断**：指用迭代方法求解代数方程是否收敛，即本次迭代计算所得之解与上一次迭代计算所得之解的偏差是否**小于允许值**。



# 二维稳态导热问题的计算

## (6) 解的分析

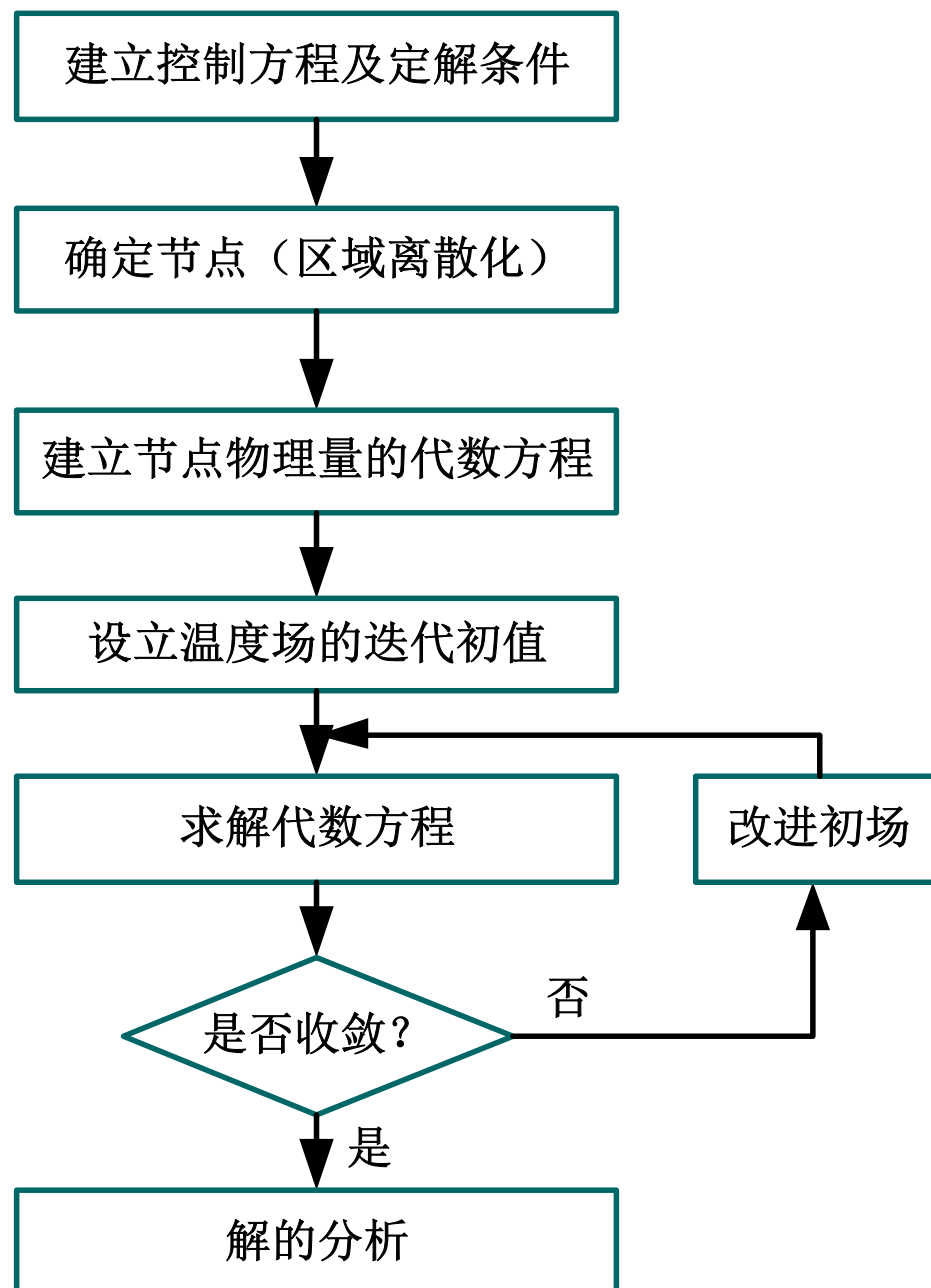
获得物体中的温度分布常常不是工程问题的最终目的，所得出的温度场可能进一步用于计算**热流量**或计算设备、零部件的**热应力及热变形**等。计算一个二维肋片，则最终的目的可能是要计算**肋效率**。对于数值计算所获得的温度场及所需的一些其他物理量应作仔细分析，以获得定性或定量上的一些新的结论。





## 4.4 代数方程组的求解方法

导热  
问题  
数值  
求解  
基本  
步骤





# 代数方程组的求解方法

写出所有内节点和边界节点的温度差分方程

$n$ 个未知节点温度,  $n$ 个代数方程式:

内节点

$$t_{m-1,n} + t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} - 4t_{m,n} = 0$$

平直边界节点

$$2t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} - 4t_{m,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{\lambda} = 0$$

外部角点

$$t_{m-1,n} + t_{m,n-1} - 2t_{m,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2\lambda} = 0$$

内部角点

$$2t_{m-1,n} + 2t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + t_{m+1,n} - 6t_{m,n} + \frac{3\Delta x^2}{2\lambda} \dot{\Phi} + \frac{2\Delta x^2}{\lambda} q_w = 0$$

# 代数方程组的求解方法

n个未知节点温度，n个代数方程式通用形式：

$$a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n = b_1$$

$$a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nn}t_n = b_n$$



代数方程组的求解方法：

- (1) 直接解法
- (2) 迭代法





# 代数方程组的求解方法

## ➤ 直接解法

通过有限次运算获得代数方程精确解

- 高斯消元法
- 主元消去法

直接解法的缺点：  
所需内存较大  
方程数目多时不便  
不适用于非线性问题

## ➤ 迭代解法

先对要计算的场作出假设，在迭代计算过程中不断改进，直到计算结果与假定值相差结果小于允许值，称迭代计算已经收敛，如：

- 高斯-赛德尔(Guass -Seidel)迭代法
- 雅可比 (Jacobi)迭代法

$$\begin{aligned} &a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots\dots + a_{1n}t_n = b_1 \\ &a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots\dots + a_{2n}t_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots\dots + a_{nn}t_n = b_n \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$



# 迭代解法

$$a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n = b_1$$

$$a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nn}t_n = b_n$$

改写显  
式格式



$$t_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}t_2 - \dots - a_{1n}t_n)$$

$$t_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}t_1 - \dots - a_{2n}t_n)$$

.....

$$t_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}t_1 - a_{n2}t_2 - \dots + a_{nn-1}t_{n-1})$$

## 迭代法

先对要计算的场作出假设（给定初始值）、在迭代计算过程中不断予以改进、直到计算结果与假定值的结果相差小于允许值，表示迭代计算已经收敛。





# G-S法迭代步骤

假设初场数值:  $t_1^{(0)}$ 、 $t_2^{(0)}$ .... $t_n^{(0)}$

根据迭代计算式:  $t_1^{(1)} = A_{12}t_2^{(0)} + \dots + A_{1n}t_n^{(0)} + B_1^{(0)}$

根据第 k 次迭代的数值:  $t_1^{(k)}$ 、 $t_2^{(k)}$ ..... $t_n^{(k)}$

k+1次迭代节点温度:  $t_1^{(k+1)} = A_{12}t_2^{(k)} + \dots + A_{1n}t_n^{(k)} + B_1^{(k)}$

在计算后面的节点温度时应按下式（采用最新值）

$$t_2^{(k+1)} = A_{21}t_1^{(k+1)} + \dots + A_{2n}t_n^{(k)} + B_2^{(k)}$$

$$t_3^{(k+1)} = A_{31}t_1^{(k+1)} + A_{32}t_2^{(k+1)} + \dots + a_{3n}t_n^{(k)} + B_3^{(k)}$$

.....

$$t_n^{(k+1)} = A_{n1}t_1^{(k+1)} + A_{n2}t_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn-1}t_{n-1}^{(k+1)} + B_n^{(k)}$$

特点

每次迭代时总是使用节点温度的最新值

# G-S迭代解法



判断迭代是否收敛的准则：

$$(1) \quad \max \left| t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon$$

$$(2) \quad \max \left| \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{t_i^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$$

$$(3) \quad \max \left| \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{t_{\max}^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon$  — 允许的偏差；  
相对偏差 $\varepsilon$ 值一般  
取 $10^{-3} \sim 10^{-6}$

$k$ 及 $k+1$ 表示迭代次数； $t_{\max}^{(k)}$  — 第 $k$ 次迭代得到的最大值

注意：当 $t$ 有接近于零值时，采用式（3）

## 如何保证迭代过程收敛？

每个迭代变量的系数总大于/等于该式中其余变量系数绝对值的代数和

$$\begin{array}{l} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n = b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nn}t_n = b_n \end{array}$$


$$\frac{\sum_{i \neq j} |a_{i,j}|}{|a_{i,j}|_{i=j}} \leq 1$$

# 回顾



写出所有内节点和边界节点的温度差分方程

$n$ 个未知节点温度,  $n$ 个代数方程式:

内节点

$$t_{m-1,n} + t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} - 4t_{m,n} = 0$$

平直边界节点

$$2t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} - 4t_{m,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{\lambda} = 0$$

外部角点

$$t_{m-1,n} + t_{m,n-1} - 2t_{m,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2\lambda} = 0$$

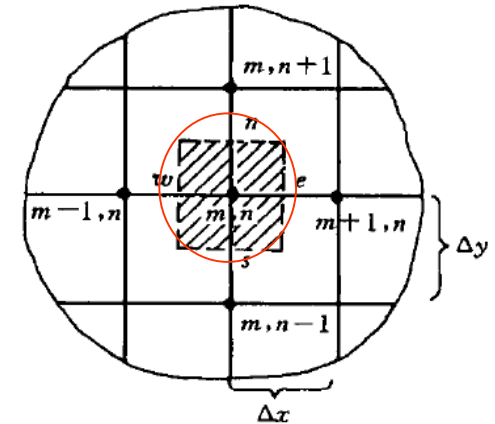
内部角点

$$2t_{m-1,n} + 2t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + t_{m+1,n} - 6t_{m,n} + \frac{3\Delta x^2}{2\lambda} \dot{\Phi} + \frac{2\Delta x^2}{\lambda} q_w = 0$$

# 稳态导热节点有限差分方程

## 1) 内部节点

$$t_{m,n} = \frac{1}{4} (t_{m-1,n} + t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1})$$



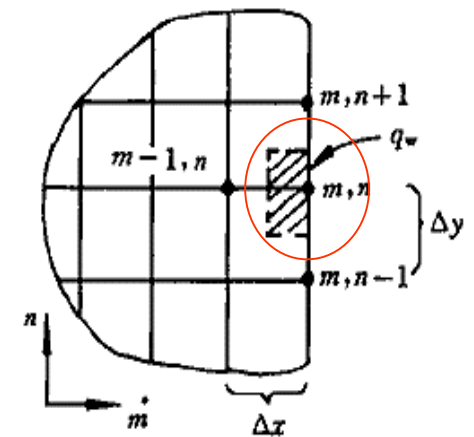
## 2) 边界平直界面节点

恒热流:

$$t_{m,n} = \frac{1}{4} (2t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w)$$

对流表面:

$$t_{m,n} = \frac{2t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \frac{2h\Delta x}{\lambda} t_f}{4 + \frac{2h\Delta x}{\lambda}}$$



# 稳态导热节点有限差分方程

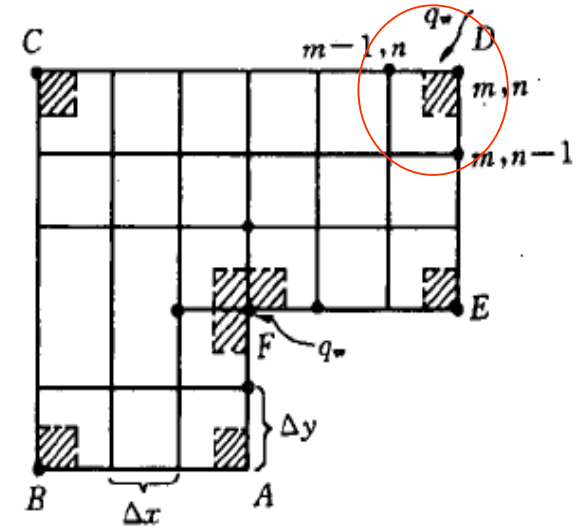
## 3) 边界外部角点

恒热流:

$$t_{m,n} = \frac{1}{2} (t_{m-1,n} + t_{m,n-1} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w)$$

对流边界:

$$t_{m,n} = \frac{t_{m-1,n} + t_{m,n-1} + \frac{2h\Delta x}{\lambda} t_f}{2 + \frac{2h\Delta x}{\lambda}}$$



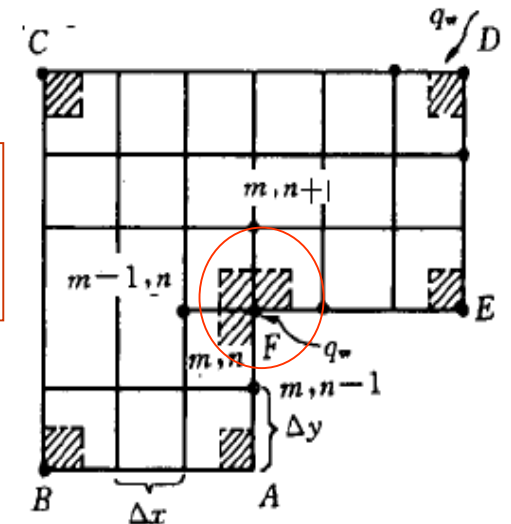
## 4) 边界内部角点

恒热流:

$$t_{m,n} = \frac{1}{6} (2t_{m-1,n} + 2t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + t_{m+1,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w)$$

对流边界:

$$t_{m,n} = \frac{2t_{m-1,n} + 2t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + t_{m+1,n} + \frac{2h\Delta x}{\lambda} t_f}{6 + \frac{2h\Delta x}{\lambda}}$$



# 代数方程组的求解方法

## 讨论

1、有限差分的基本思想是什么？

答：将控制方程中的导数用相应的差分表达式来代替，从而形成每个节点离散代数方程的方法。

2、为什么高斯-赛德尔迭代收敛较快？

答：高斯-赛德尔迭代法采用了比旧值更准确的新值，使下一步计算更接近于真值，在一定误差范围内迭代次数可以减少，即迭代收敛快。

**稳态导热的数值计算过程中注意：收敛性与计算精度判别**



# 计算案例



例1:

		200 °C				
	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)		
	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)		
100°C						300 °C
	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)		
	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)		
		200 °C				



迭代公式:

$$t_{2,2}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left( t_{3,2}^{(n)} + t_{1,2}^{(n)} + t_{2,3}^{(n)} + t_{2,1}^{(n)} \right)$$

$$t_{3,2}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left( t_{4,2}^{(n)} + t_{2,2}^{(n+1)} + t_{3,3}^{(n)} + t_{3,1}^{(n)} \right)$$

$$t_{2,3}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left( t_{3,3}^{(n)} + t_{1,3}^{(n)} + t_{2,4}^{(n)} + t_{2,2}^{(n+1)} \right)$$

$$t_{3,3}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left( t_{4,3}^{(n)} + t_{2,3}^{(n+1)} + t_{3,4}^{(n)} + t_{3,2}^{(n+1)} \right)$$

# 计算案例

例2：有一各向同性材料的方形物体，其导热系数为常数。已知各边界的温度，试用高斯-赛德尔迭代求其内部网格节点1、2、3和4的温度。

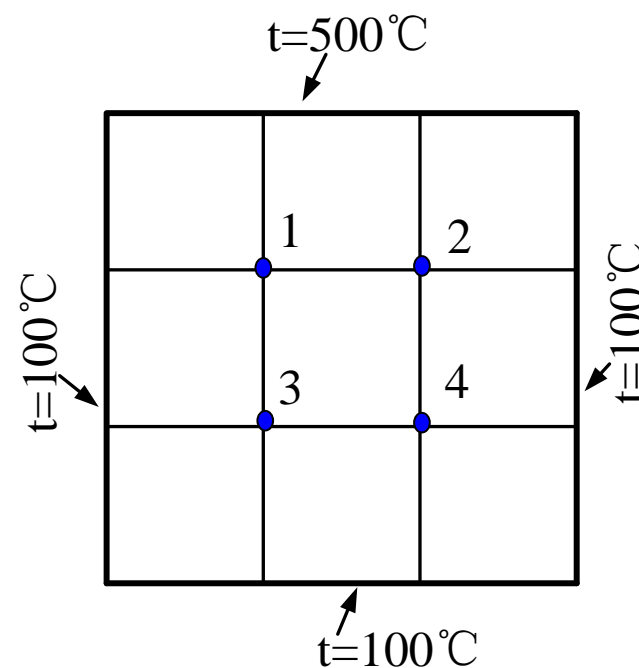
解：

(1) 确定节点数，节点1、2、3和4为内部节点。

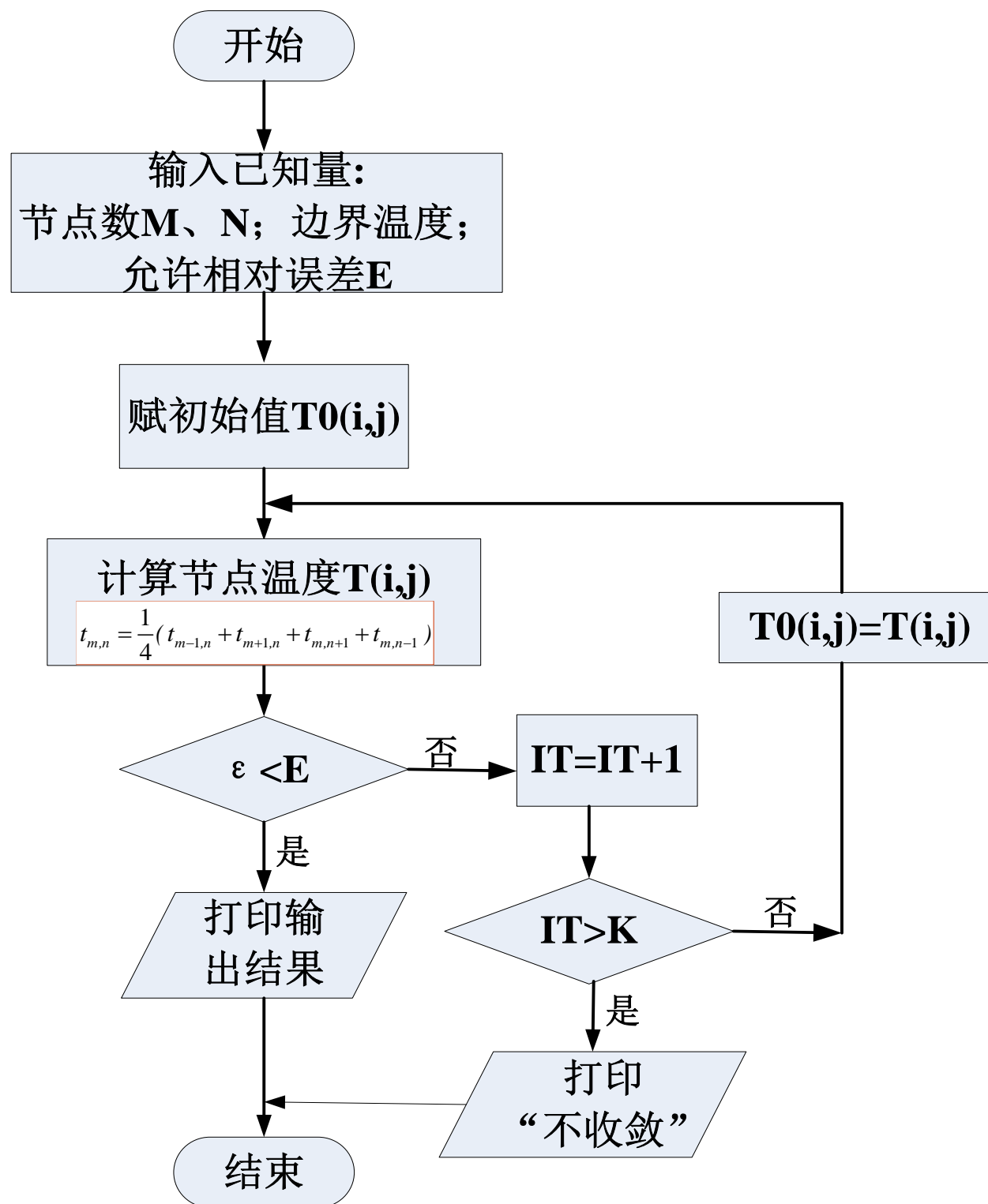
(2) 第1类边界条件，边界温度为已知值，内部节点离散方程：

$$t_{m,n} = \frac{1}{4} (t_{m-1,n} + t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1})$$

(3) 假设初始值：  $t_1^{(0)} = t_2^{(0)} = 300^\circ\text{C}$ ,  $t_3^{(0)} = t_4^{(0)} = 200^\circ\text{C}$



# 程序框图



# 迭代演示

# MATLAB®

*The Language of Technical Computing*

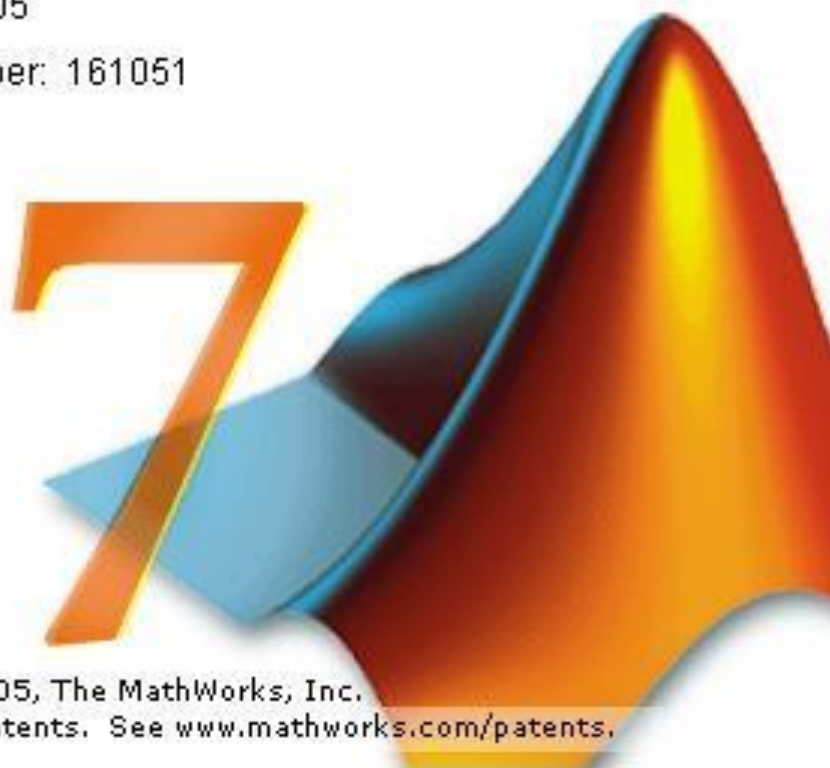
Version 7.1.0.246 (R14) Service Pack 3

August 02, 2005

License Number: 161051

ZhangHui

Powernet



Copyright 1984-2005, The MathWorks, Inc.  
Protected by U.S. patents. See [www.mathworks.com/patents](http://www.mathworks.com/patents).

## 4.5 一维非稳态导热问题的计算

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{\Phi}_v}{\rho c}$$

Diagram illustrating the components of the 1D unsteady heat conduction equation:

- 非稳态项** (Unsteady term):  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$
- 稳态项 (扩散项)** (Steady term / Diffusion term):  $a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$
- 源项** (Source term):  $\frac{\dot{\Phi}_v}{\rho c}$

- 由于非稳态项的存在，除了对空间坐标离散外，还需要对时间坐标进行离散处理。
- 稳态扩散项的离散格式：中心差分格式
- 非稳态项的离散格式：向前差分格式、向后差分格式、中心差分格式



# 显式格式和隐式格式

## 显式格式

非稳态项采用向前差分得到的离散方程

$$\rho c \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{\Delta \tau} \Delta x = -\lambda \left( \frac{t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}}{\Delta x} \right) + \lambda \left( \frac{t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}}{\Delta x} \right)$$

优点是求解方便，但是对时间步长和空间步长有限制

## 隐式格式

非稳态项采用向后差分得到的离散方程

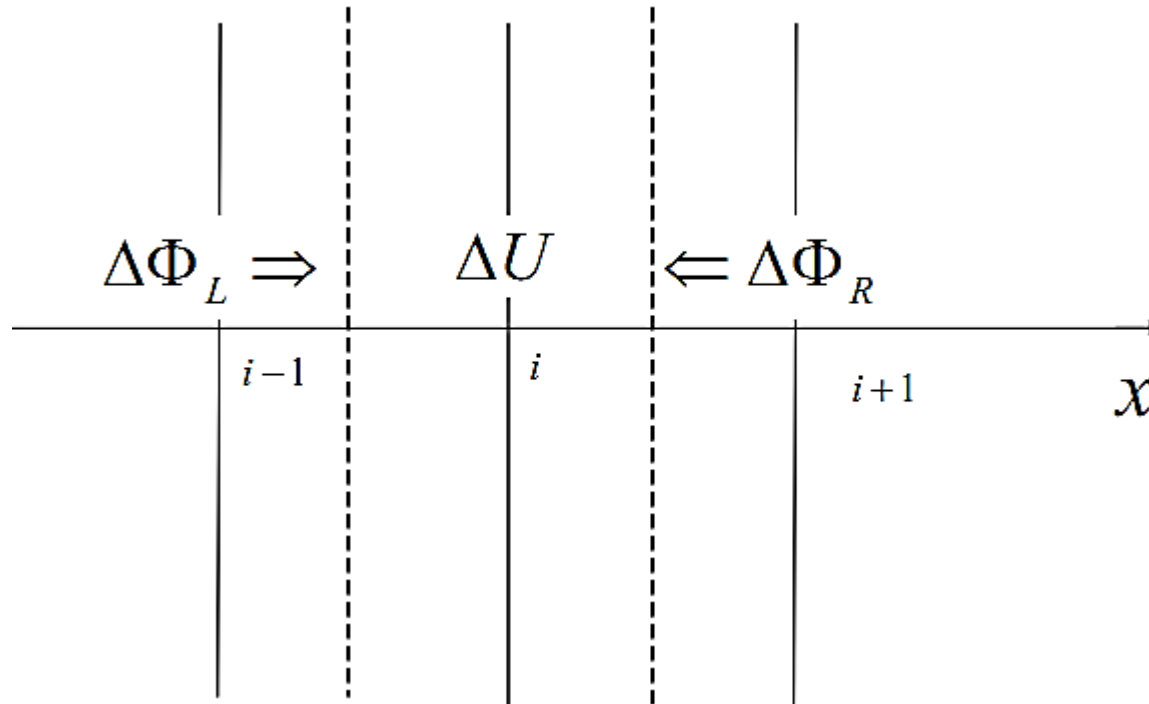
$$\rho c \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{\Delta \tau} \Delta x = -\lambda \left( \frac{t_i^{(k+1)} - t_{i-1}^{(k+1)}}{\Delta x} \right) + \lambda \left( \frac{t_{i+1}^{(k+1)} - t_i^{(k+1)}}{\Delta x} \right)$$

优点：无条件稳定。缺点：需对每一个时间层进行联立求解



# 内部节点的离散化方程（显式）

$$\Delta U = \Delta \Phi_L + \Delta \Phi_R$$





# 内部节点的离散化方程（显式）

$$\rho c \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{\Delta \tau} \Delta x = -\lambda \left( \frac{t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}}{\Delta x} \right) + \lambda \left( \frac{t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}}{\Delta x} \right)$$

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} + \frac{\lambda \Delta \tau}{\rho c (\Delta x)^2} (t_{i-1}^{(k)} + t_{i+1}^{(k)} - 2t_i^{(k)})$$

$$t_i^{(k+1)} = \left[ 1 - \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \right] t_i^{(k)} + \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} (t_{i-1}^{(k)} + t_{i+1}^{(k)})$$

令

$$\frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} = Fo_{\Delta}$$

得

$$t_i^{(k+1)} = Fo_{\Delta} (t_{i+1}^{(k)} + t_{i-1}^{(k)}) + (1 - 2Fo_{\Delta}) t_i^{(k)}$$

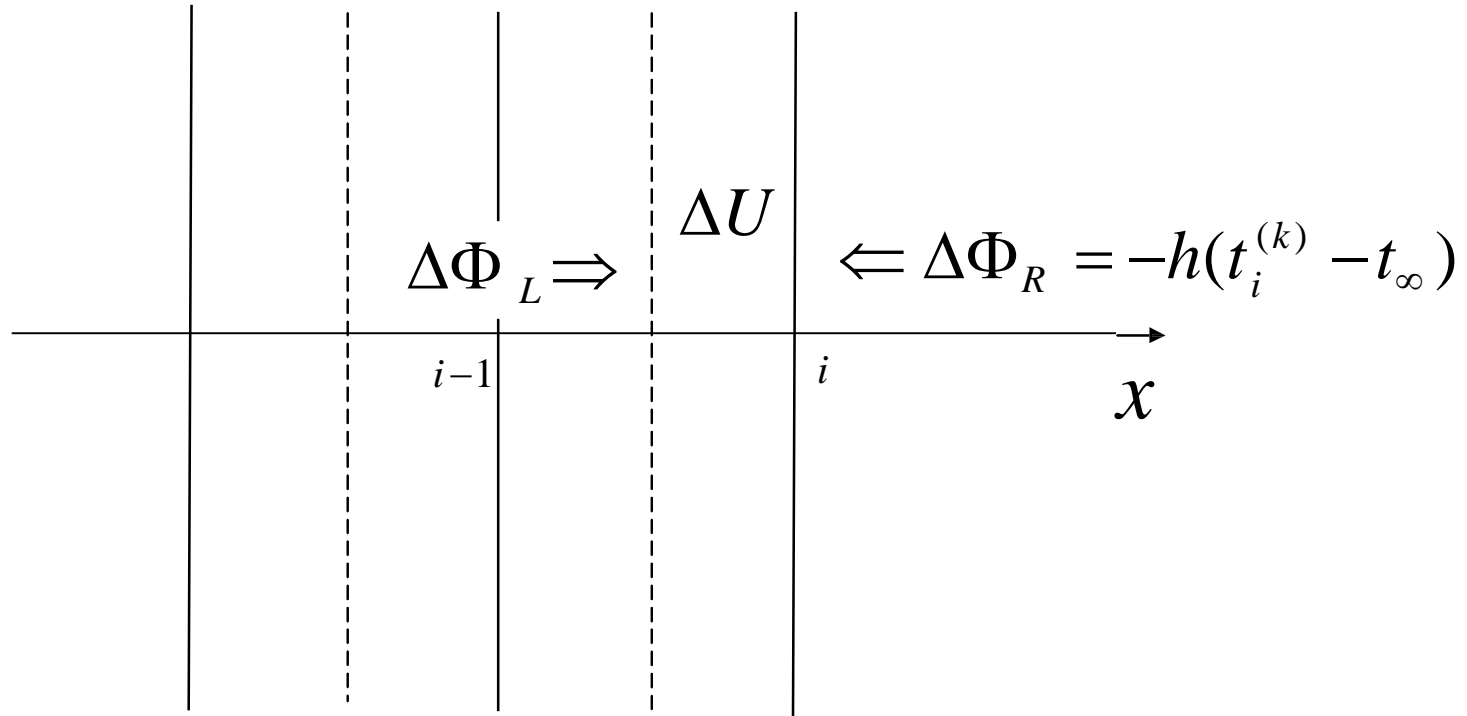
内节点离散方程（显式格式）





# 边界节点的离散化方程（显式）

$$\Delta U = \Delta \Phi_L + \Delta \Phi_R$$





# 边界节点的离散化方程（显式）

$$\rho c \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{\Delta \tau} \frac{\Delta x}{2} = -\lambda \left( \frac{t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}}{\Delta x} \right) + h(t_\infty - t_i^{(k)})$$

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - \frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c\Delta x} \left( \frac{t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}}{\Delta x} \right) + \frac{2h\Delta\tau}{\rho c\Delta x} (t_\infty - t_i^{(k)})$$

$$Bi_\Delta = \frac{h\Delta x}{\lambda}, a = \frac{\lambda}{\rho c}, Fo_\Delta = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$$

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - 2Fo_\Delta (t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}) + 2BiFo_\Delta (t_\infty - t_i^{(k)})$$

对流边界离散方程（显式格式）

$$t_i^{(k+1)} = [1 - 2(1 + Bi_\Delta)Fo_\Delta] t_i^{(k)} + 2Fo_\Delta t_{i-1}^{(k)} + 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta t_\infty$$

$$t_i^{(k+1)} = 2Fo_\Delta \cdot t_{i+1}^{(k)} + (1 - 2Fo_\Delta) t_i^{(k)}$$

绝热边界离散方程（显式格式）



# 内部节点的离散化方程（隐式）

$$\rho c \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{\Delta \tau} \Delta x = -\lambda \left( \frac{t_i^{(k+1)} - t_{i-1}^{(k+1)}}{\Delta x} \right) + \lambda \left( \frac{t_{i+1}^{(k+1)} - t_i^{(k+1)}}{\Delta x} \right)$$

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} + \frac{\lambda \Delta \tau}{\rho c (\Delta x)^2} (t_{i-1}^{(k+1)} + t_{i+1}^{(k+1)} - 2t_i^{(k+1)})$$

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} t_i^{(k+1)} + \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} (t_{i-1}^{(k+1)} + t_{i+1}^{(k+1)})$$

内节点离散方程（隐式格式）

$$(1+2Fo_{\Delta})t_i^{(k+1)} = Fo_{\Delta}(t_{i+1}^{(k+1)} + t_{i-1}^{(k+1)}) + t_i^{(k)}$$



# 边界节点的离散化方程（隐式）

$$\rho c \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{\Delta \tau} \frac{\Delta x}{2} = -\lambda \left( \frac{t_i^{(k+1)} - t_{i-1}^{(k+1)}}{\Delta x} \right) + h(t_\infty - t_i^{(k+1)})$$

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - \frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c\Delta x} \left( \frac{t_i^{(k+1)} - t_{i-1}^{(k+1)}}{\Delta x} \right) + \frac{2h\Delta\tau}{\rho c\Delta x} (t_\infty - t_i^{(k+1)})$$

$$t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} - 2Fo_\Delta (t_i^{(k+1)} - t_{i-1}^{(k+1)}) + 2Bi_\Delta Fo_\Delta (t_\infty - t_i^{(k+1)})$$

第三类边界条件边界下边界节点离散方程（隐式格式）

$$(1 + 2Fo_\Delta + 2Fo_\Delta Bi_\Delta) t_i^{(k+1)} = 2Fo_\Delta (t_{i-1}^{(k+1)} + Bi_\Delta t_\infty) + t_i^{(k)}$$



# 显式格式的不稳定性

显示格式存在稳定性问题：

$$t_i^{(k+1)} = Fo_{\Delta} (t_{i+1}^{(k)} + t_{i-1}^{(k)}) + (1 - 2Fo_{\Delta}) t_i^{(k)}$$

$$t_i^{(k+1)} = \left[ 1 - 2(1 + Bi_{\Delta}) Fo_{\Delta} \right] t_i^{(k)} + 2Fo_{\Delta} t_{i-1}^{(k)} + 2Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} t_{\infty}$$

$$t_i^{(k+1)} = 2Fo_{\Delta} \cdot t_{i+1}^{(k)} + (1 - 2Fo_{\Delta}) t_i^{(k)}$$

如果节点  $t_i^{(k)}$  前面的系数小于零，则数值解出现不稳定的振荡结果。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{内部节点,} \\ \text{绝热边界: } 1 - 2Fo_{\Delta} \geq 0, 1 - 2\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \geq 0, \quad Fo_{\Delta} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \\ \\ \text{对流边界: } 1 - 2Fo_{\Delta} \cdot Bi_{\Delta} - 2Fo_{\Delta} \geq 0, \quad Fo_{\Delta} \leq \frac{1}{2(1 + Bi_{\Delta})} \end{array} \right.$$

**注意**

空间步长 $\Delta x$ 和时间步长 $\Delta \tau$ 的选取有限制

# 显式格式的不稳定性

## 稳定性准则

$$1 - 2Fo_{\Delta} < 0$$

$$1 - 2Fo_{\Delta}(1 + Bi_{\Delta}) < 0$$



**思考**

导致不稳定的原因是什么？

对于内部节点，若出现 $1 - 2Fo_{\Delta} < 0$ ，即 $t_i^{(k)}$ 前出现负值，将导致前某点前一时刻的温度越高，后一个时刻的温度越低，违背了热力学第二定律。

出现这个问题的本质是：时间步长与空间步长不协调，导致数值精度下降而引起了计算结果的振荡。

为防止这种不稳定现象，必须使 $t_i^{(k)}$ 前的系数均大于0。这样， $\Delta x$ 选定后， $\Delta \tau$ 的选定就受到制约。



# 隐式格式绝对稳定

内节点:

$$(1+2Fo_{\Delta})t_i^{(k+1)} = Fo_{\Delta}(t_{i+1}^{(k+1)} + t_{i-1}^{(k+1)}) + t_i^{(k)}$$

第三边界条件的边界节点:

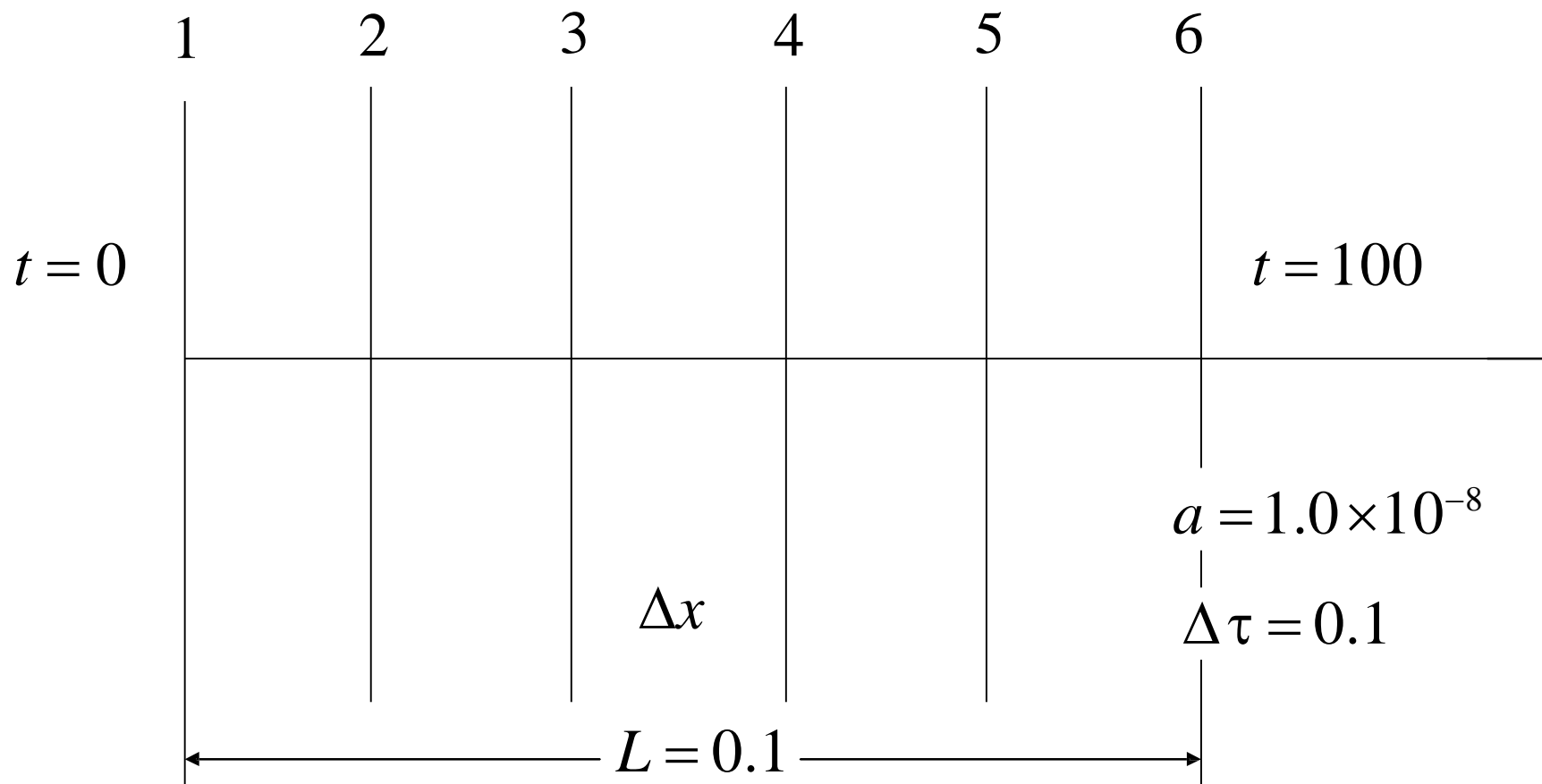
$$(1+2Fo_{\Delta} + 2Fo_{\Delta}Bi_{\Delta})t_i^{(k+1)} = 2Fo_{\Delta}(t_{i-1}^{(k+1)} + Bi_{\Delta}t_{\infty}) + t_i^{(k)}$$

隐式格式的稳定性:

隐式格式: 空间离散采用  $(k+1)$  时层的值。

隐式格式可直接计算, 不存在稳定性问题, 对时间步长和空间步长没有强迫限制, 但是需要进行迭代计算。

# 计算实例





# 本章要点



- 数值方法的基本概念和过程
- 二维稳态问题的有限差分方法
- 内部节点和边界节点方程的推导
- 代数方程组的迭代方法
- 一维非稳态问题的内部和边界节点方程
- 代数方程（组）的求解方法
- 显示格式和隐式格式
- 显式格式的不稳定性



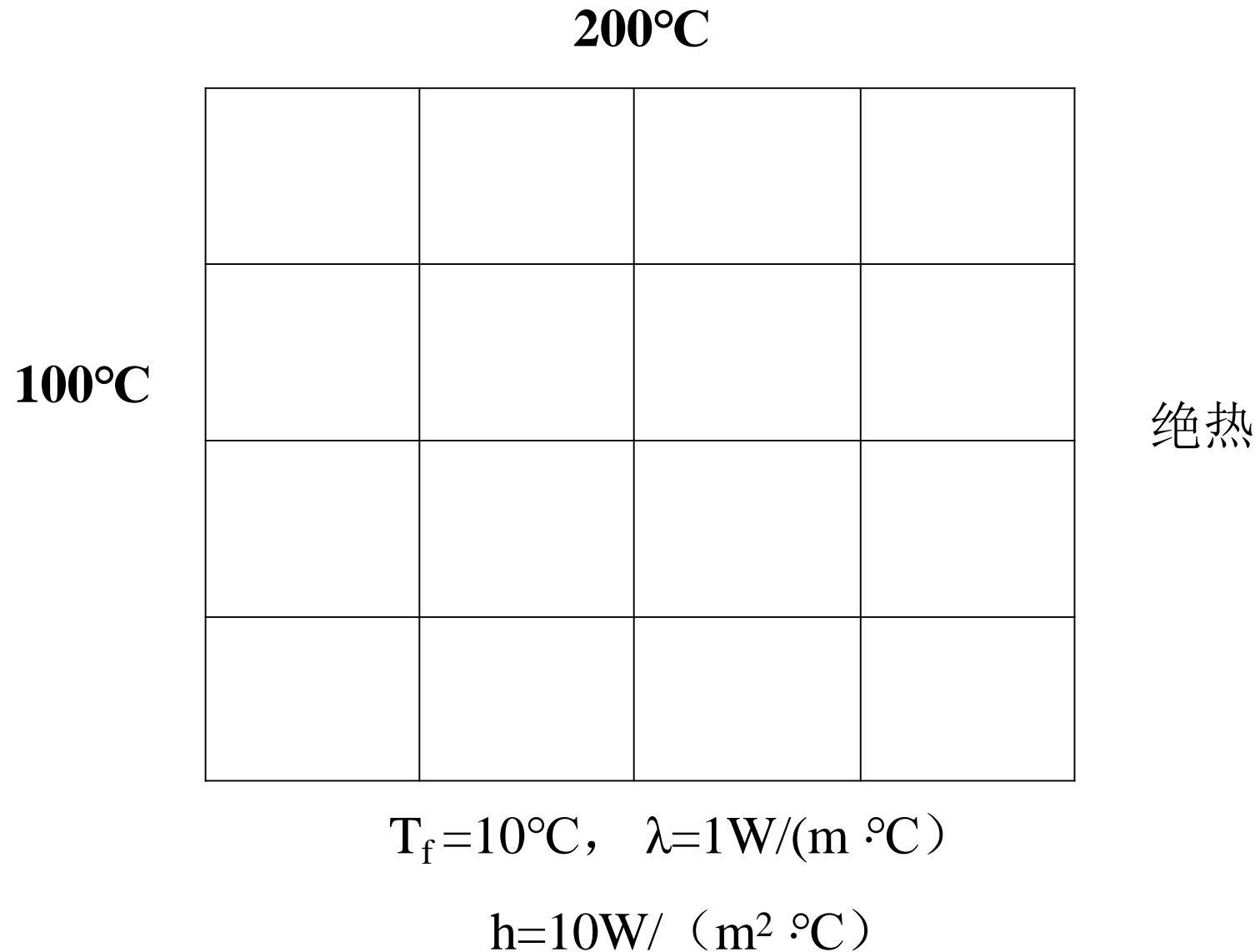


# 二维稳态导热问题的计算

- 本课程采用基于控制容积能量守恒的有限差分法
- 首先将求解区域离散化，确定节点和网格
- 围绕节点划分控制容积
- 建立控制容积的能量守恒方程
- 用傅里叶定律表示导入控制容积的热流量
- 用差商近似表示导数
- 形成关于节点温度的离散化代数方程
- 建立每个待求温度的离散化代数方程，形成代数方程组
- 求解代数方程组，获得离散节点上的温度分布



# 二维稳态计算练习



# 计算要求



- 1. 写出各未知温度节点的代数方程
- 2. 分别给出G-S迭代和Jacobi迭代程序
- 3. 程序中给出两种自动判定收敛的方法
- 4. 考察三种不同初值时的收敛快慢
- 5. 上下边界的热流量 [ $\lambda=1\text{W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$ ]
- 6. 绘出最终结果的等值线

# 报告要求



1. 原始题目及要求
2. 各节点的离散化的代数方程
3. 源程序
4. 不同初值时的收敛快慢
5. 上下边界的热流量 [ $\lambda=1\text{ W}/(\text{m}^2\text{ }^\circ\text{C})$ ]
6. 计算结果的等温线图
7. 计算小结



## 《三维非稳态导热问题的高效稳定数值解法》

利用古典的Crank-Nicolson格式，结合**多重网格方法**对三维导热问题进行了求解，避免了显式格式及ADI格式受稳定性条件限制的缺陷，并且用多重网格加速技术改善了传统迭代法收敛速度慢的状况。

**多重网格方法**的基本思想在于用简单迭代法作“光滑剂”对当前网格层上消除高频误差分量进行磨光，而在粗网格层上消除低频分量。

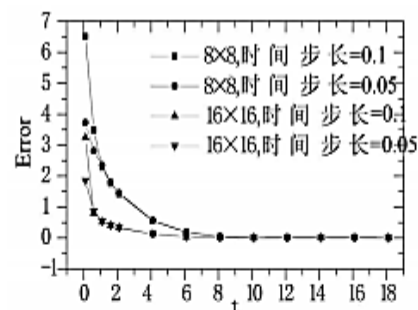


图2 壁温恒定 ( $T_w = 100^\circ\text{C}$ ) 时，温度平均误差随时间的变化曲线

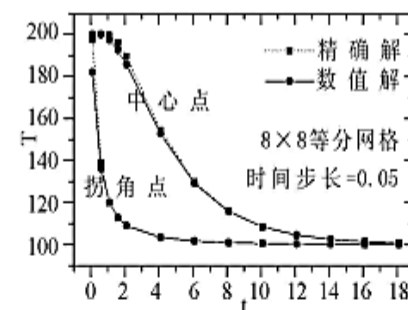


图3 壁温恒定 ( $T_w = 100^\circ\text{C}$ ) 时，中心和拐角点温度随时间的变化曲线

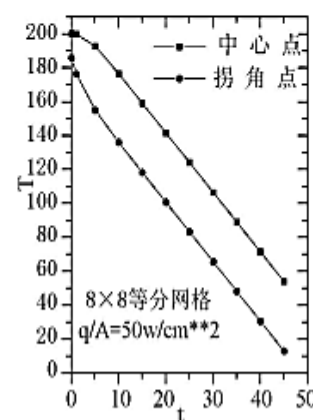


图4 热流密度恒定 ( $q/A = 20 \text{ W/cm}^2$ ) 时，中心和拐角点温度随时间的变化曲线

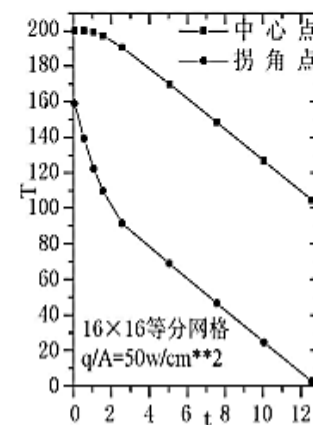


图5 热流密度恒定 ( $q/A = 50 \text{ W/cm}^2$ ) 时，中心和拐角点温度随时间的变化曲线



---

谢谢大家！