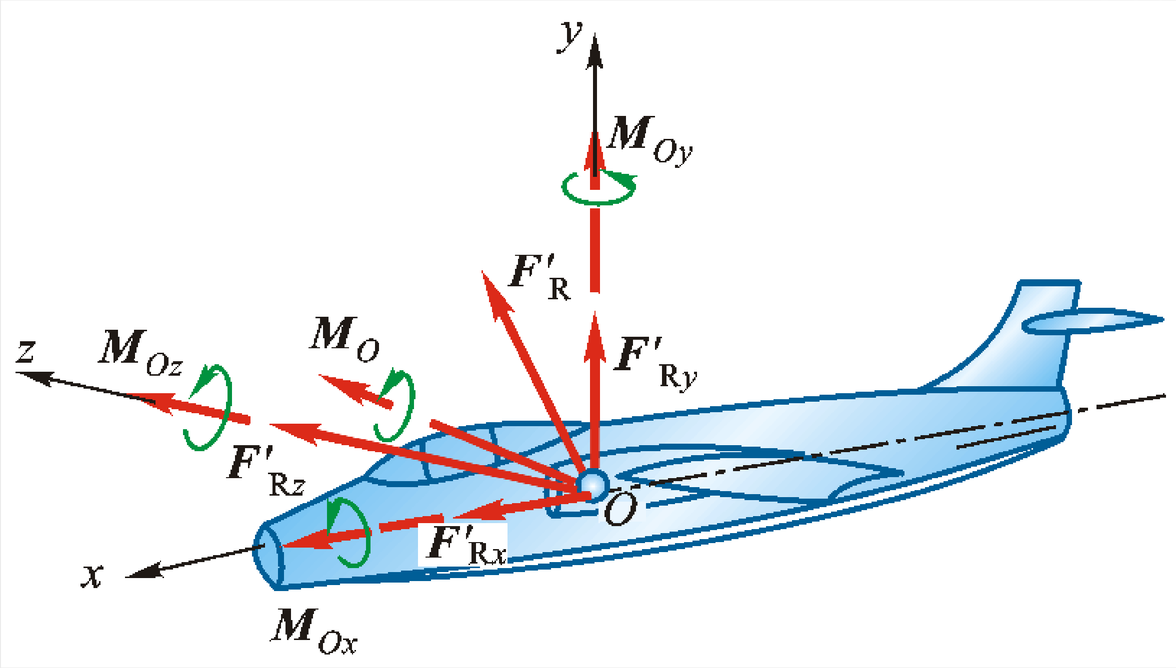
理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

空间力系的平衡

空间任意力系简化 $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n\} \Leftrightarrow \{\vec{F}_R, \vec{M}_O\}$



$\vec{F}'_{Rx}$ — 有效推进力 飞机向前飞行

$\vec{F}'_{Ry}$ — 有效升力 飞机上升

$\vec{F}'_{Rz}$ — 侧向力 飞机侧移

$\vec{M}_{Ox}$ — 滚转力矩 飞机绕x轴滚转

$\vec{M}_{Oy}$ — 偏航力矩 飞机转弯

$\vec{M}_{Oz}$ — 俯仰力矩 飞机仰头

空间任意力系的平衡条件

设空间任意力系 $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n\} \Leftrightarrow \{\vec{F}_R, \vec{M}_O\}$

其平衡的充分必要条件是 $\vec{F}_R = 0, \vec{M}_O = 0$

空间汇交力系

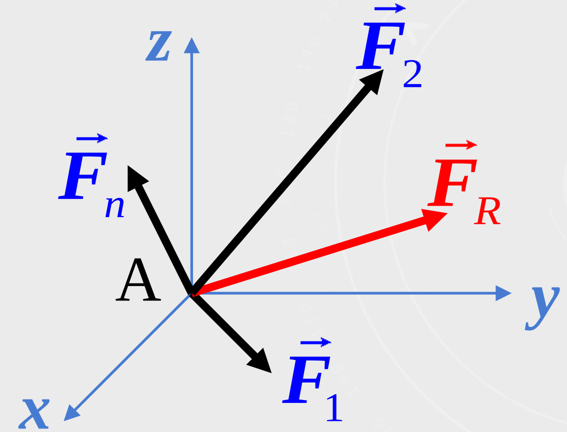
空间力偶系

空间任意力系

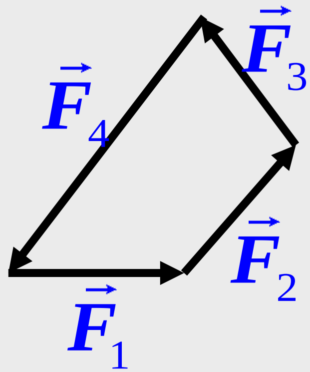
问题：力系平衡方程的

- 形式？
- 数目？

1. 汇交力系的平衡条件



(a)几何平衡条件



$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \sum \vec{F} = 0$$

有**3**个独立的平衡方程

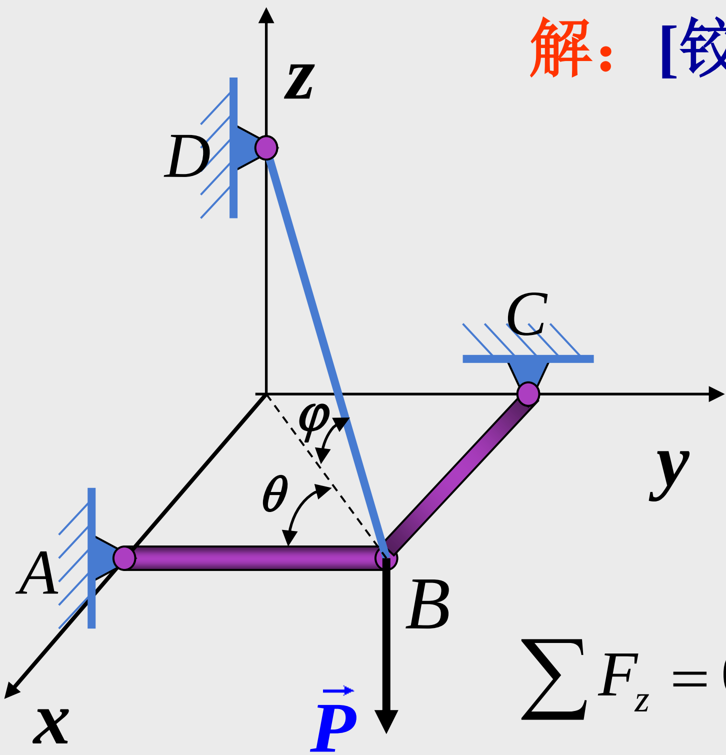
(b)解析平衡条件

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}x}\vec{i} + F_{\mathrm{R}y}\vec{j} + F_{\mathrm{R}z}\vec{k} = 0$$

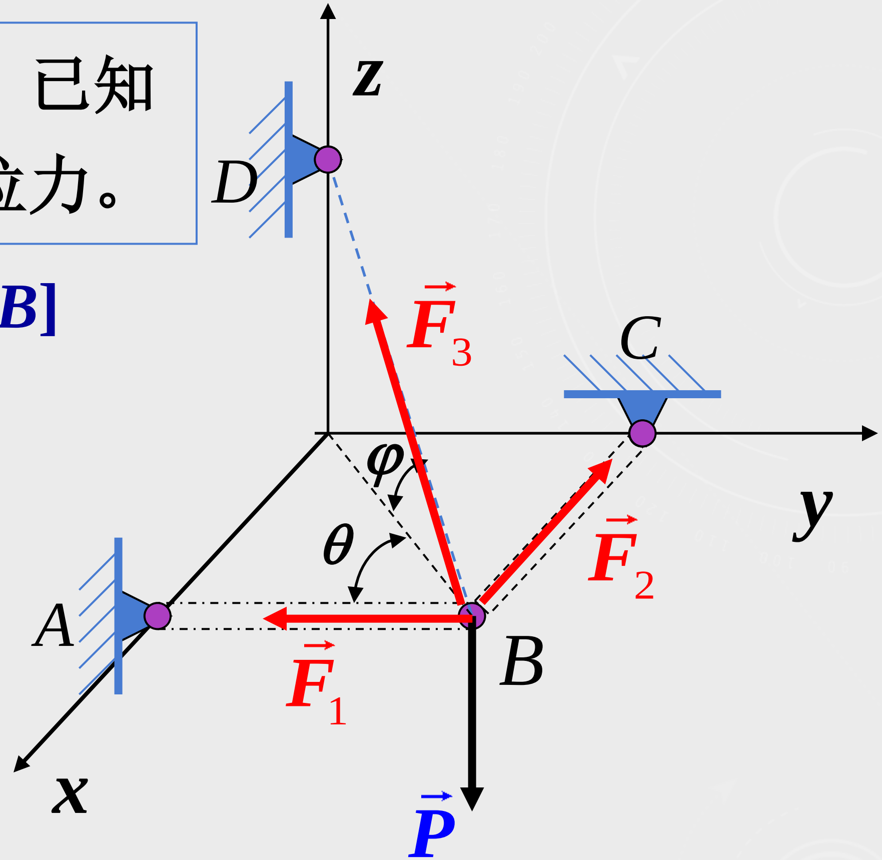
$$F_{\mathrm{R}} = \sqrt{F_{\mathrm{R}x}^2 + F_{\mathrm{R}y}^2 + F_{\mathrm{R}z}^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathrm{R}x} &= \sum F_x = 0 \\ F_{\mathrm{R}y} &= \sum F_y = 0 \\ F_{\mathrm{R}z} &= \sum F_z = 0 \end{aligned}\right\}$$

例：结构如图所示，杆重不计，已知力P，求两杆的内力和绳BD的拉力。



解：[铰链B]



$$\sum F_z = 0$$

$$F_3 \sin\varphi - P = 0$$

$$F_3 = \frac{P}{\sin\varphi}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_3 \cos\varphi \sin\theta - F_2 = 0$$

$$F_2 = -F_3 \cos\varphi \sin\theta$$

$$= -\frac{P}{\sin\varphi}\cos\varphi\sin\theta$$

空间力系

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_3 \sin\varphi - P = 0$$

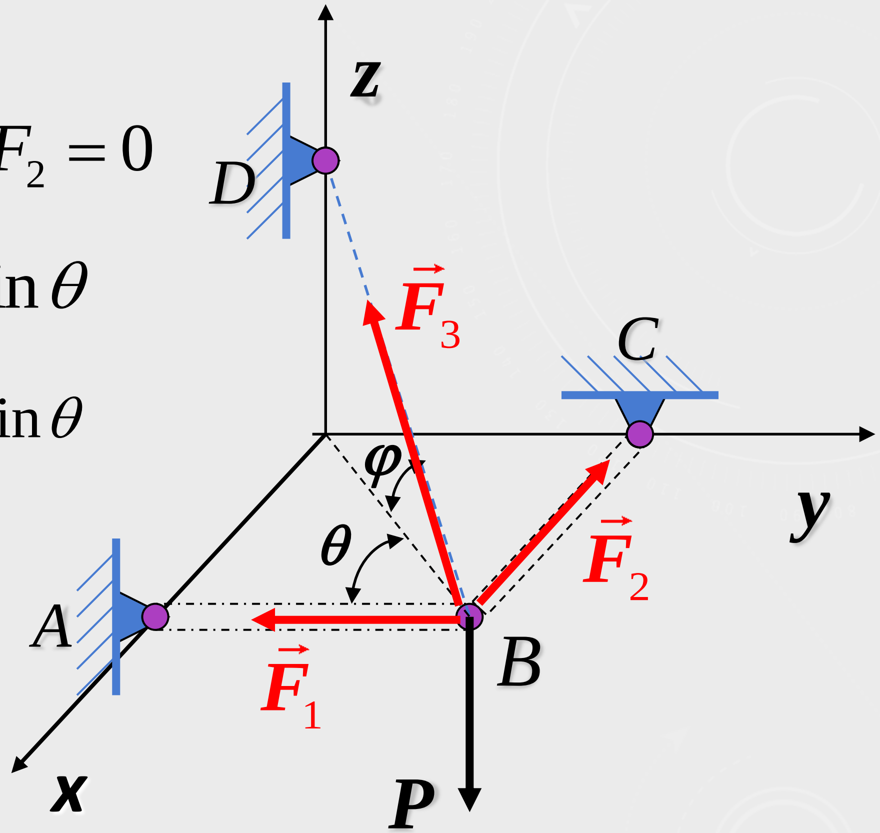
$$F_3 = \frac{P}{\sin\varphi}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_3 \cos\varphi \sin\theta - F_2 = 0$$

$$F_2 = -F_3 \cos\varphi \sin\theta$$

$$= -\frac{P}{\sin\varphi} \cos\varphi \sin\theta$$



$$\sum F_y = 0$$

$$-F_3 \cos\varphi \cos\theta - F_1 = 0$$

$$F_2 = -F_3 \cos\varphi \cos\theta$$

$$= -\frac{P}{\sin\varphi} \cos\varphi \cos\theta$$

2 力偶系的平衡条件

力偶系：$\{\vec{\boldsymbol{M}}_1,\vec{\boldsymbol{M}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{M}}_n\}=\{\vec{\boldsymbol{M}}_R\}=\{0\}$

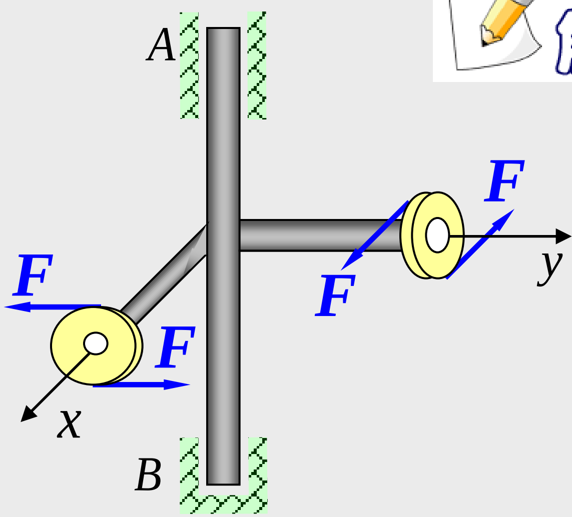
$$\vec{\boldsymbol{M}}_R=\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{i}}=\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}M_{ix}\vec{\boldsymbol{i}}+\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}M_{iy}\vec{\boldsymbol{j}}+\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}M_{iz}\vec{\boldsymbol{k}}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\sum M_x&=0\\ \sum M_y&=0\\ \sum M_z&=0\end{aligned}\right\}$$

有3个独立的平衡方程

例题

支架由三根互相垂直杆刚结而成，两圆盘直径*d*，固定于两水平杆杆端，盘面与杆垂直。竖直杆*AB*长为*l*，试确定轴承*A*，*B*的约束力。



(a)

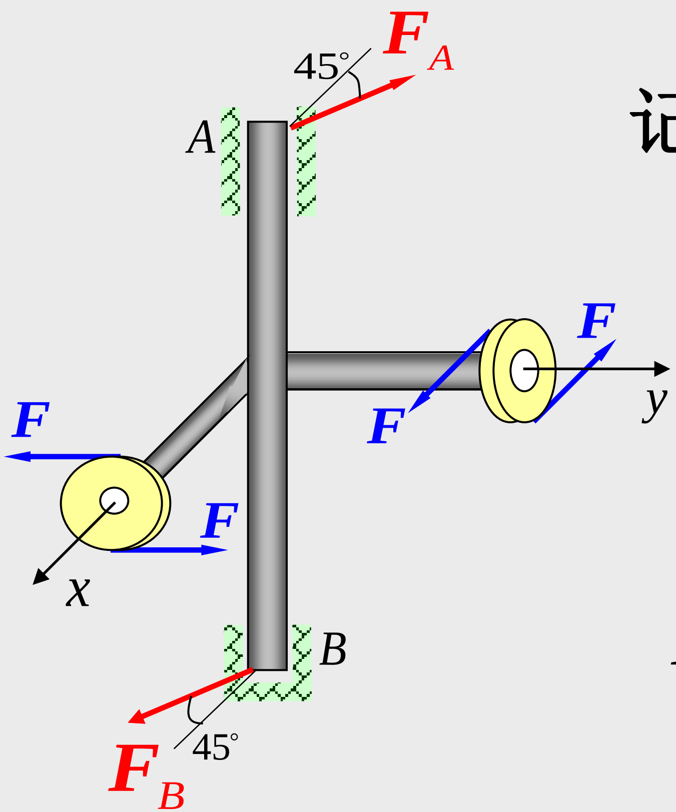
解： 对[整体]，

主动力：

两力偶（大小 $M = Fd$ ）

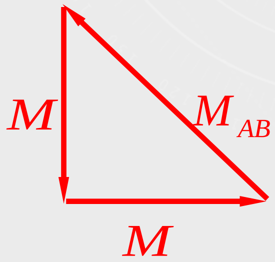
约束力：

A、*B* 两处约束力必构成力偶



记约束力偶$\{\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{F}_B\}$矩的大小为$\boldsymbol{M}_{AB}$

$$M_{AB} = \sqrt{2}Fd$$



$$F_A = F_B = \frac{M_{AB}}{l} = \frac{\sqrt{2}\,Fd}{l}$$

方向如图所示

3 空间任意力系的平衡条件

平衡原理： 设任意力系 $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n\} \Leftrightarrow \{\vec{F}_R, \vec{M}_O\}$

其平衡的充分必要条件是 $\vec{F}_R = 0, \vec{M}_O = 0$

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \cdot \vec{i} + \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \cdot \vec{j} + \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} M_{iOx} \cdot \vec{i} + \sum_{i=1}^{n} M_{iOy} \cdot \vec{j} + \sum_{i=1}^{n} M_{iOz} \cdot \vec{k} = 0$$

空间任意力系平衡的充分必要条件：

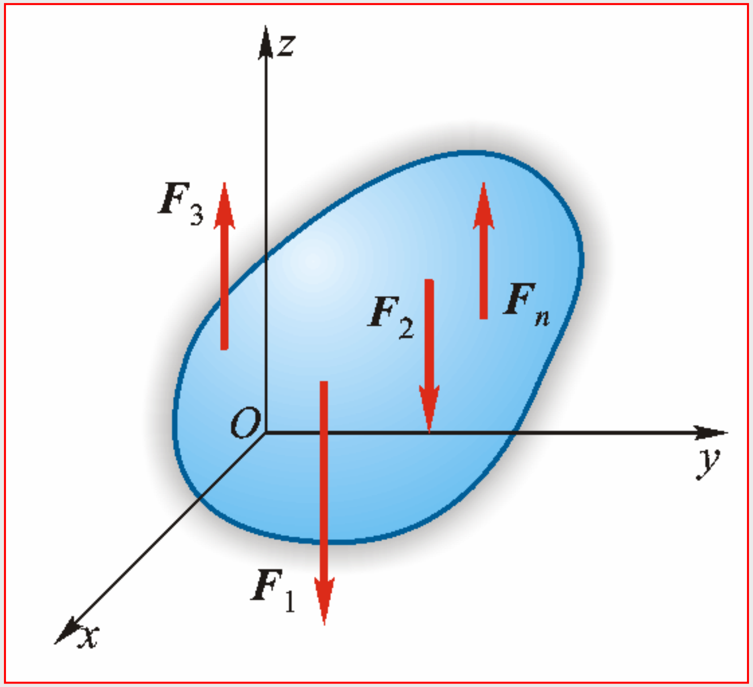
$$\vec{F}_R = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum M_{Ox}(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_{Oy}(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_{Oz}(\vec{F}) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum M_x(\vec{F}) = 0 \\ \sum M_y(\vec{F}) = 0, \\ \sum M_z(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

基本形式

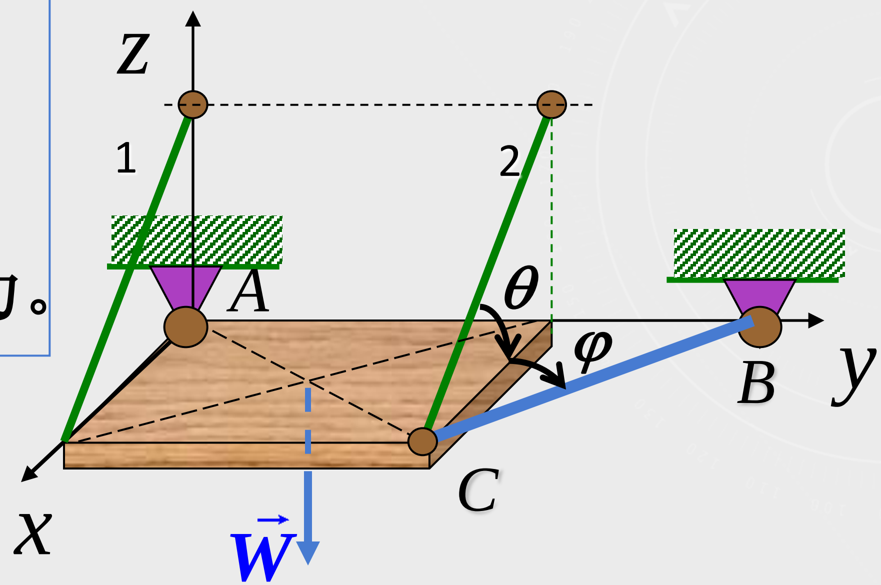
独立平衡方程数6个，可解6个未知量。

空间平行力系



$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$

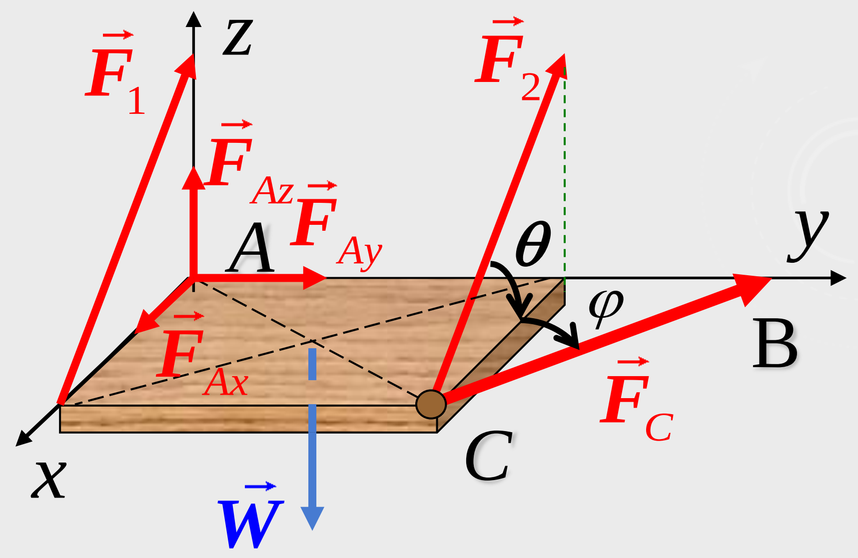
例：重为*W*的水平均质正方形板(边长*a*)，求绳1、2的拉力，BC杆的内力和球铰链A的约束力。



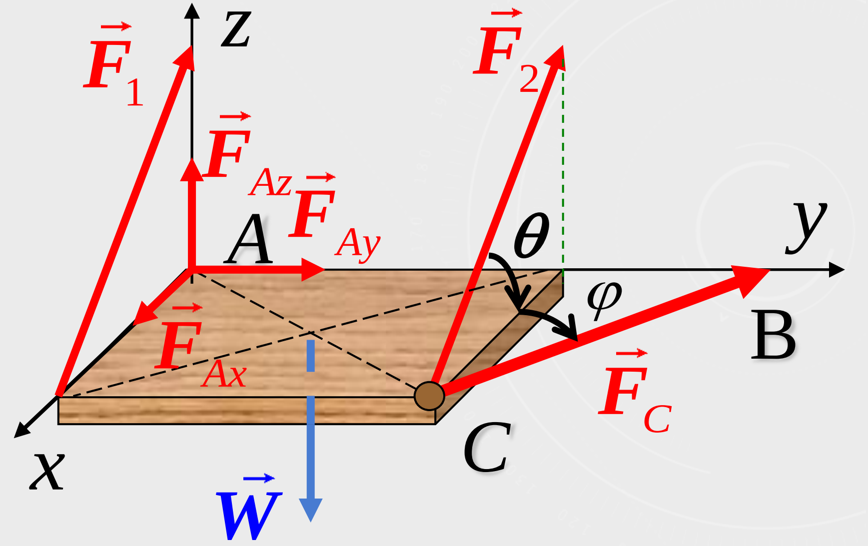
解：对[平板]

基本形式

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum M_x(\vec{F})=0\\ \sum M_y(\vec{F})=0,\\ \sum M_z(\vec{F})=0\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sum F_x = 0\\ \sum F_y = 0\\ \sum F_z = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum M_x(\vec{F}) = 0\\ \sum M_y(\vec{F}) = 0,\\ \sum M_z(\vec{F}) = 0\end{cases}$$



$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} - (F_1 + F_2)\cos\theta - F_C \cos\varphi = 0 \Longrightarrow F_{Ax}$

$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_C \sin\varphi = 0 \Longrightarrow F_{Ay}$

$\sum F_z = 0 \qquad F_{Az} + (F_1 + F_2)\sin\theta - W = 0 \Longrightarrow F_{Az}$

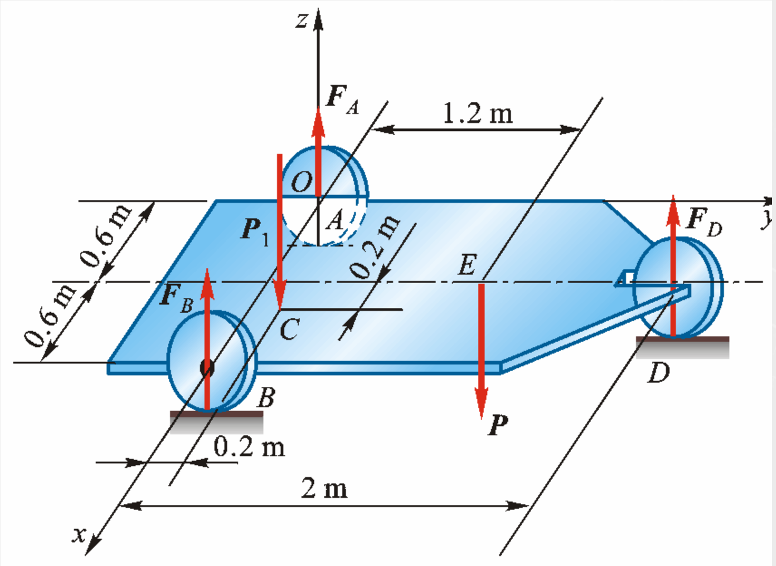
$\sum M_x(\vec{F}) = 0 \qquad F_2 \sin\theta \cdot a - W \cdot \frac{a}{2} = 0 \Longrightarrow F_2$

$\sum M_y(\vec{F}) = 0 \qquad -(F_1 + F_2)\sin\theta \cdot a + W \cdot \frac{a}{2} = 0 \Longrightarrow F_1$

$\sum M_z(\vec{F}) = 0 \qquad F_2 \cos\theta \cdot a + F_C \sin\varphi \cdot a + F_C \cos\varphi \cdot a = 0 \Longrightarrow F_C$

例 已知： $P = 8\text{kN}, P_1=10\text{kN}$；求 A、B、D 处约束力

解： 研究对象：小车



平衡方程：

$$\sum F_z = 0 \qquad -P - P_1 + F_A + F_B + F_D = 0$$

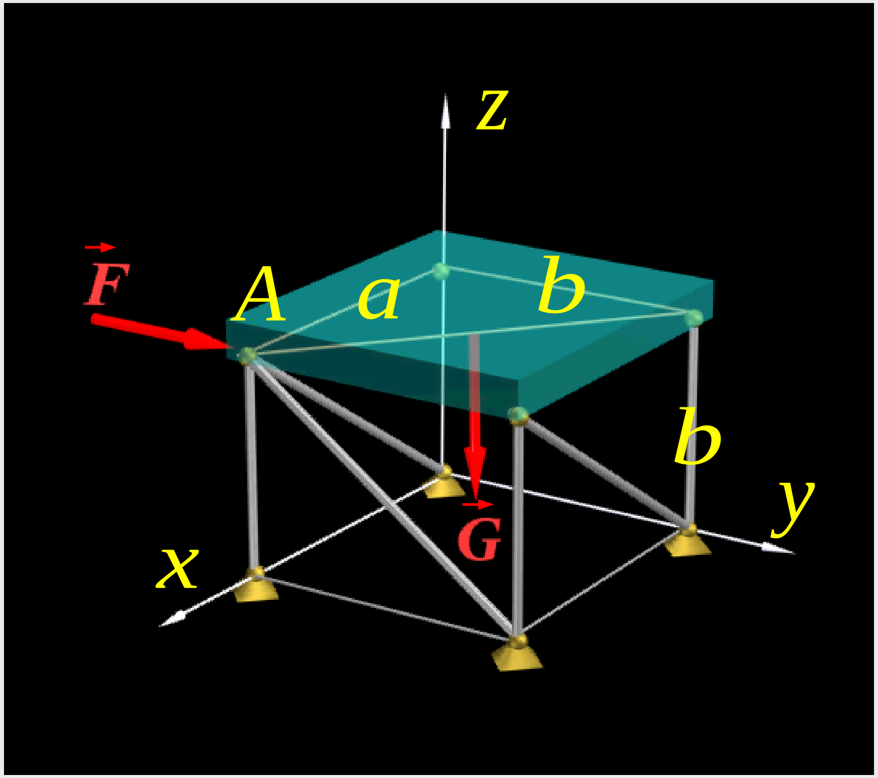
$$\sum M_x(F) = 0 \qquad -0.2P_1 - 1.2P + 2F_D = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad 0.8P_1 + 0.6P - 1.2F_B - 0.6F_D = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_D = 5.8\text{kN}, F_B = 7.777\text{kN}, F_A = 4.423\text{kN}$$

其他形式的平衡方程？ Yes！

- ✓ 可用力对某轴之矩形式的平衡方程来替代力投影形式的平衡方程。
- ✓ 可列3－6个力矩投影式，力矩投影式不少于3个，至多6个。



例 水平匀质长方板由六根直杆支持，直杆两端均为球铰链。板重G，A处作用$F = 2G$。求各杆的内力。

解：对 [平板]

平衡方程：

$$\sum M_{AB}\left(\vec{F}\right)=0,\quad -F_6 a-G\frac{a}{2}=0\quad F_6=-\frac{G}{2}$$

$$\sum M_{AE}\left(\vec{F}\right)=0,\quad F_5=0$$

$$\sum M_{AC}\left(\vec{F}\right)=0,\quad F_4=0$$

$$\sum M_{EF}\left(\vec{F}\right)=0,\quad -G\frac{a}{2}-F_6 a-F_1\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}b=0$$

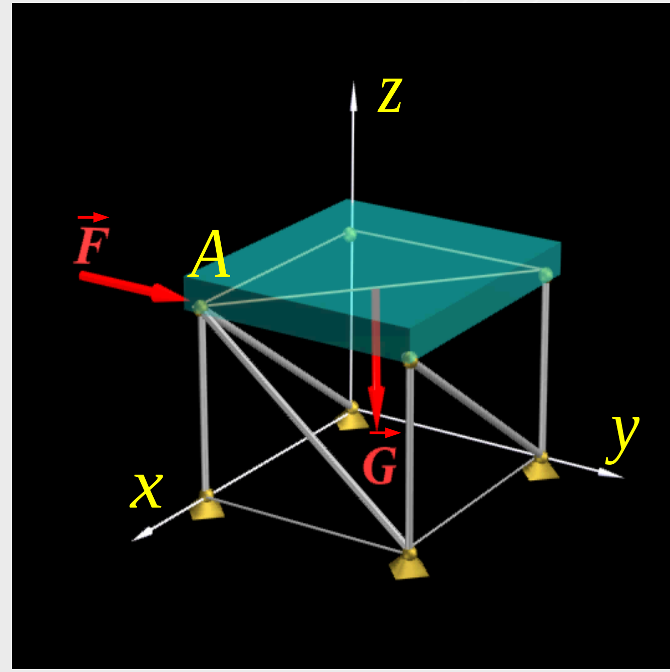
$$F_1=0$$

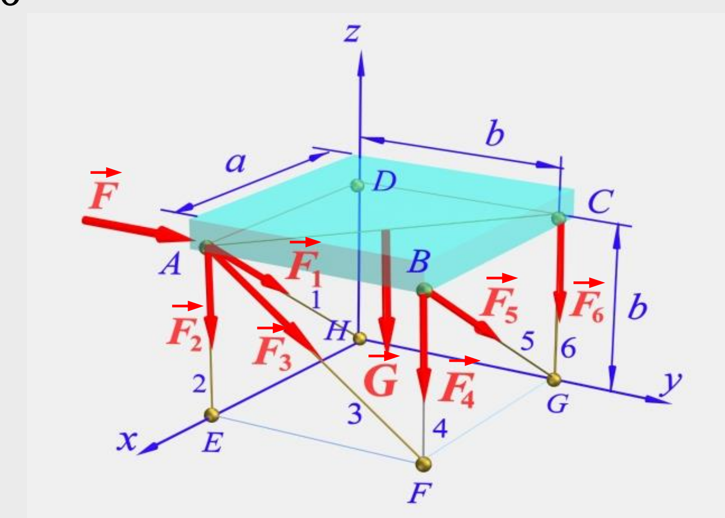
$$\sum M_{FG}\left(\vec{F}\right)=0,\quad -G\frac{b}{2}+F\,b-F_2 b=0$$

$$F_2=1.5G$$

$$\sum M_{BC}\left(\vec{F}\right)=0,\quad -G\frac{b}{2}-F_2 b-F_3\cos 45^\circ\times b=0$$

$$F_3=-2\sqrt{2}G$$





（1）可用力对某轴之矩形式的平衡方程来替代力投影形式的平衡方程。即有3－6个力矩投影式，力矩投影式不少于3个，至多6个。

（2）力的投影轴与矩轴不一定重合，但投影轴及矩轴必须受到如下限制：①不全相平行；②不全在同一平面内。

（3）六力矩形式的矩轴不交于同一点。

可选择合适的力投影轴和矩轴，使每个方程所包含的未知量为最少，从而简化计算。