理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

运 动 学

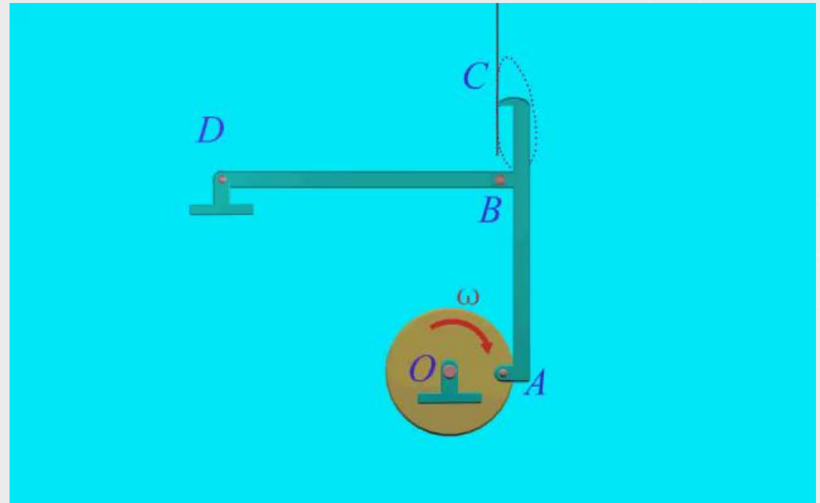
刚体的平面运动

（1）刚体在任一瞬时的位置描述

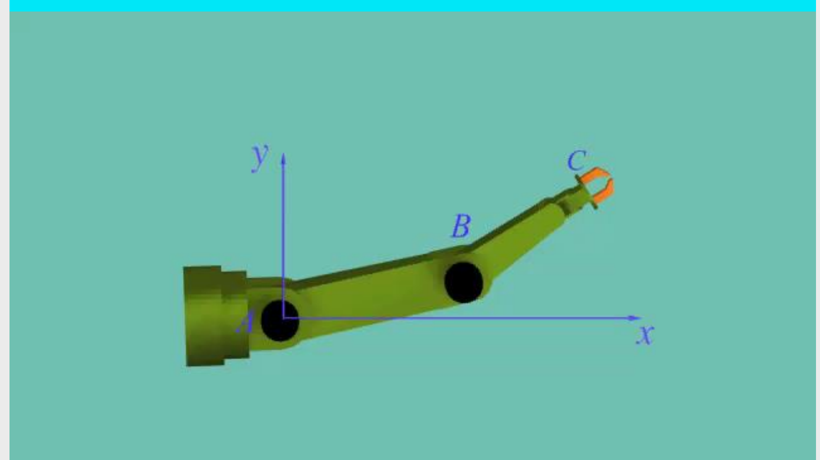
（2）刚体上各点在任一瞬时的速度和加速度

一、平面运动的基本概念

平面运动实例



电影放映机中的四连杆机构



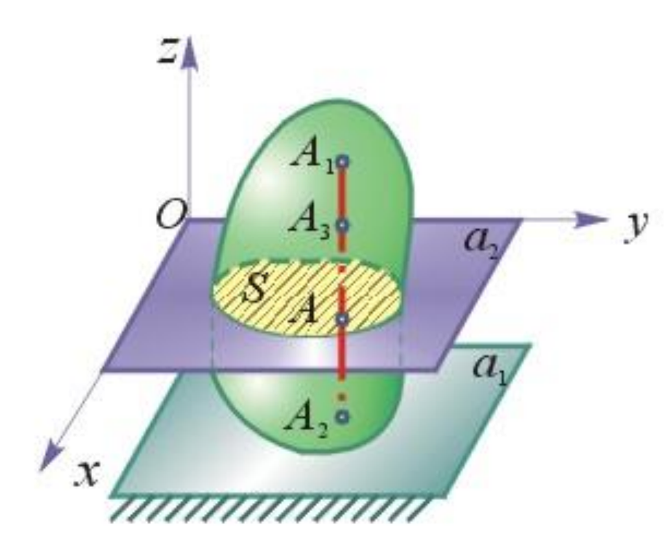
机器人的机械 手的两种运动分解

平面运动：刚体运动时，其上各点到某固定平面的距离始终保持不变。

平面运动的简化

1、平面图形S始终在平面内

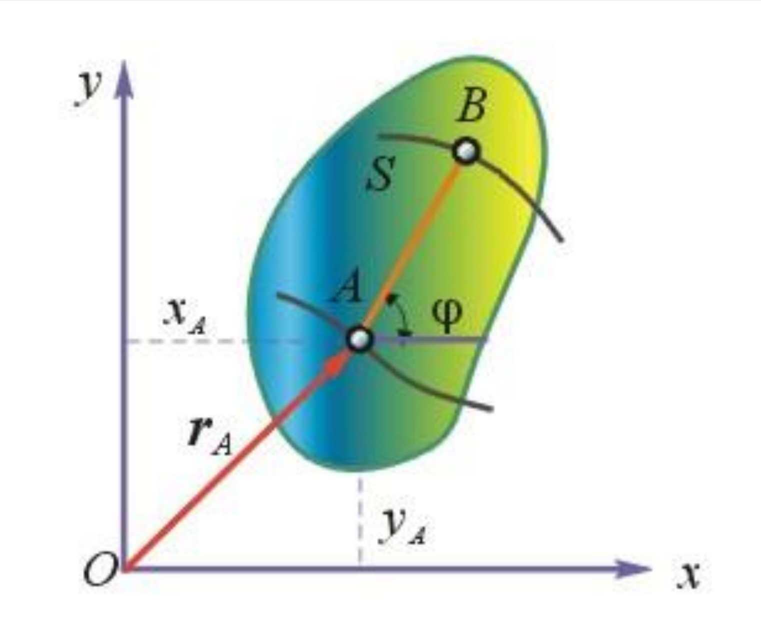
2、作垂线A_1A_2，且始终作平动



结论：刚体的平面运动可以简化为**平面图形在其自身平面内的运动**

运动描述

如何描述平面图形的位置？

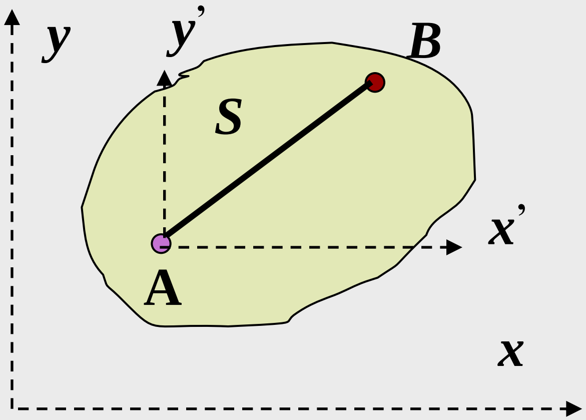


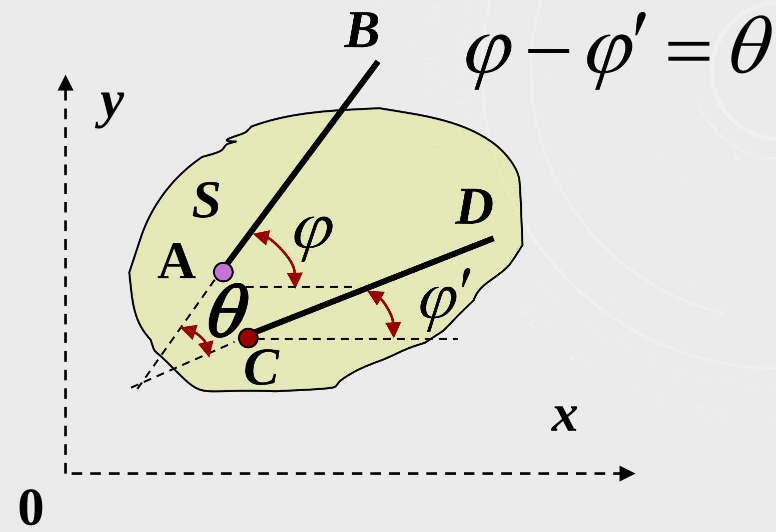
- 只需确定直线 ***AB*** 的位置
- 可选取 ***A*** 为基点

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$ ——运动方程

讨论：1. $\varphi = C$ $x_A = x_A(t),\ \ y_A = y_A(t)$ 平行移动

2. $\varphi = \varphi(t)$ $x_A = C_1,\ \ y_A = C_2$ 定轴转动





$$v_{Ax} = \frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t}$$

$$v_{Ay} = \frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}$$

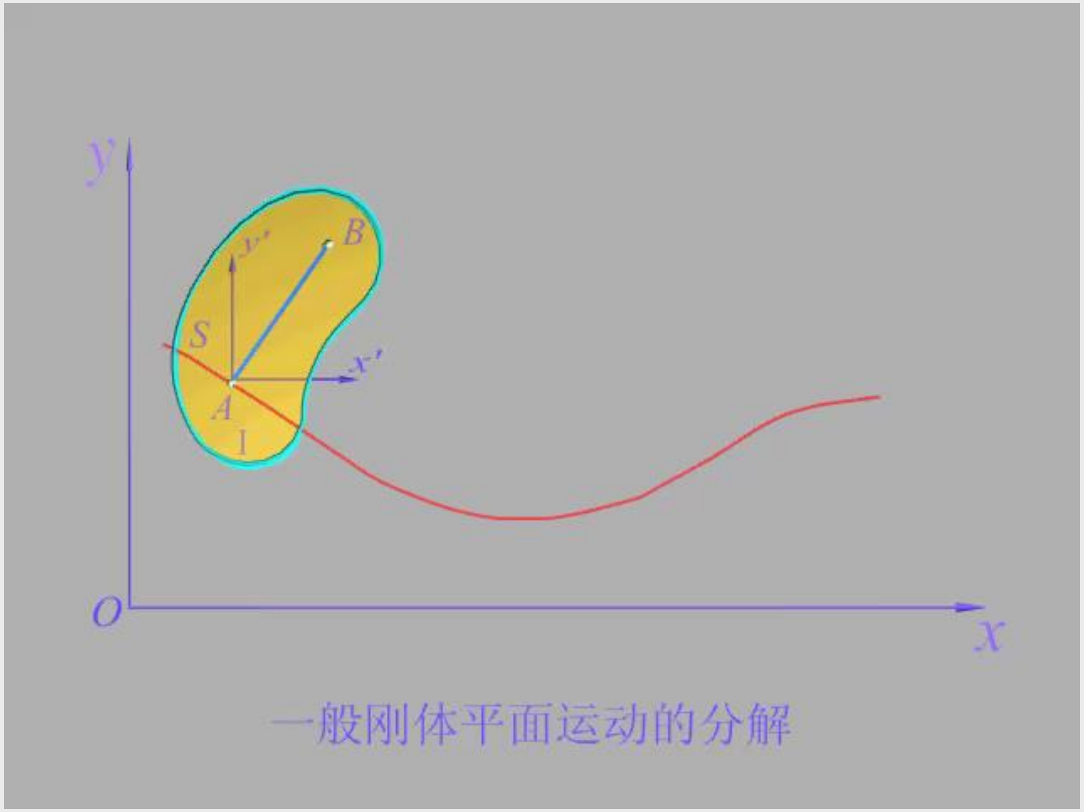
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi'}{\mathrm{d}t^2}$$

***v*与基点有关**

***ω,α* 与基点无关**

平面运动的分解



1： 平面图形 *S* 的运动可以分解为：随基点的平动和绕基点的转动。

2： 平动与基点的选择有关，转动与基点的选择无关

二、刚体平面运动的速度分析

问题：如何由基点的运动和刚体转动描述刚体上其他点的运动？

运动方程

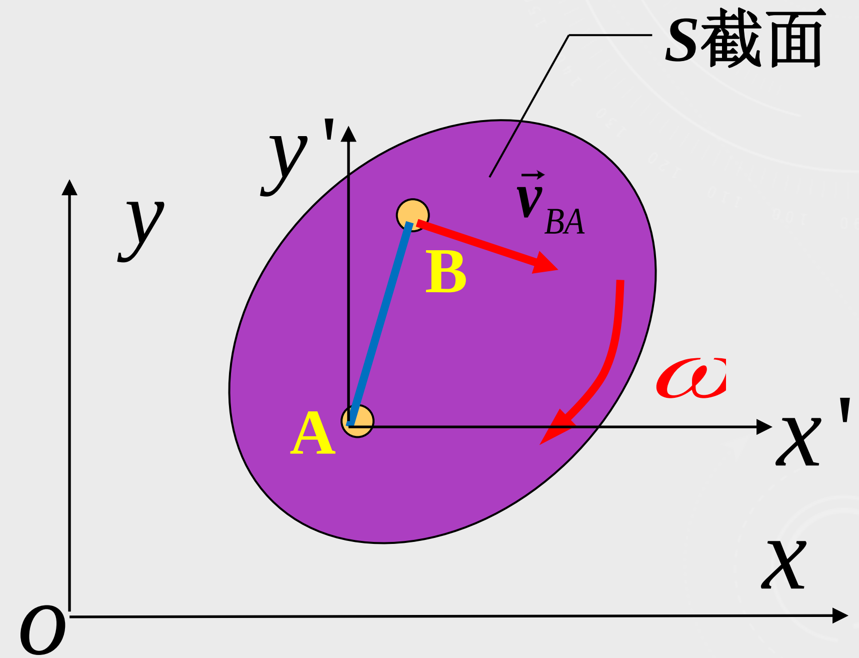
$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \theta = f(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ v_{Ax}, v_{Ay}, a_{Ax}, a_{Ay} $\xrightarrow{?}$ $\vec{\boldsymbol{v}}_B$, $\vec{\boldsymbol{a}}_B$

$\Rightarrow$ ω, α

SOLUTION:

以*A*为基点，建立平移坐标系*Ax'y'*，利用点的运动合成定理求解。



速度

$$\vec{v}_B = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A, \quad \vec{v}_r = \vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

加速度

$$\vec{a}_B = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_A, \quad \vec{a}_r = \vec{a}_{BA} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}}$$

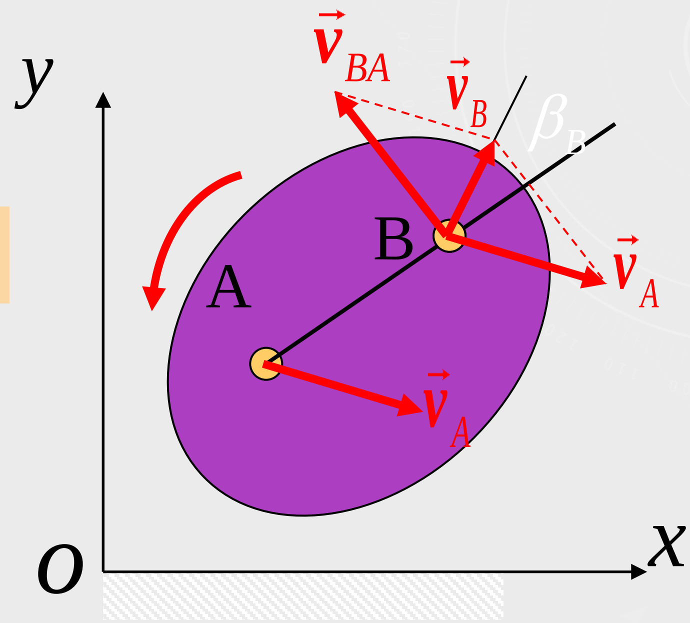
平面运动刚体的速度分析

1、基点法

平面运动刚体内任意两点速度关系：

$$\boxed{\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}}$$

$$v_{BA} = \left|AB\right| \cdot \omega$$



A为基点，***B***为同一刚体上的任意点。

- 可求解有两个速度未知量(大小、方向)的问题

2、速度投影法

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

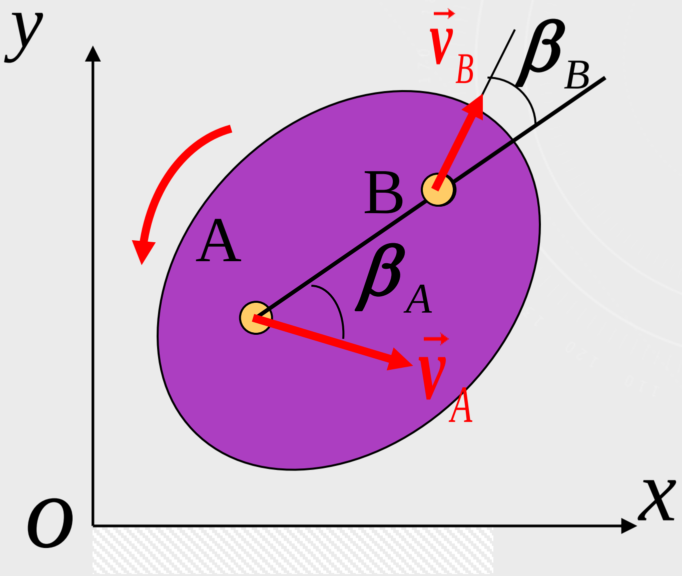
上式两边分别投影到**AB**连线上：

$$\boxed{[\vec{v}_B]_{AB} = [\vec{v}_A]_{AB}}$$

若**A**、**B**两点速度方向已知，则有：

$$v_B \cos\beta_B = v_A \cos\beta_A$$

➢ 可求解有一个速度未知量的问题



例： 已知OA杆的角速度ω，求图示瞬时滑块B的速度和AB杆的角速度。$OA=R,\quad \theta=60^0,\quad AB\perp OA$

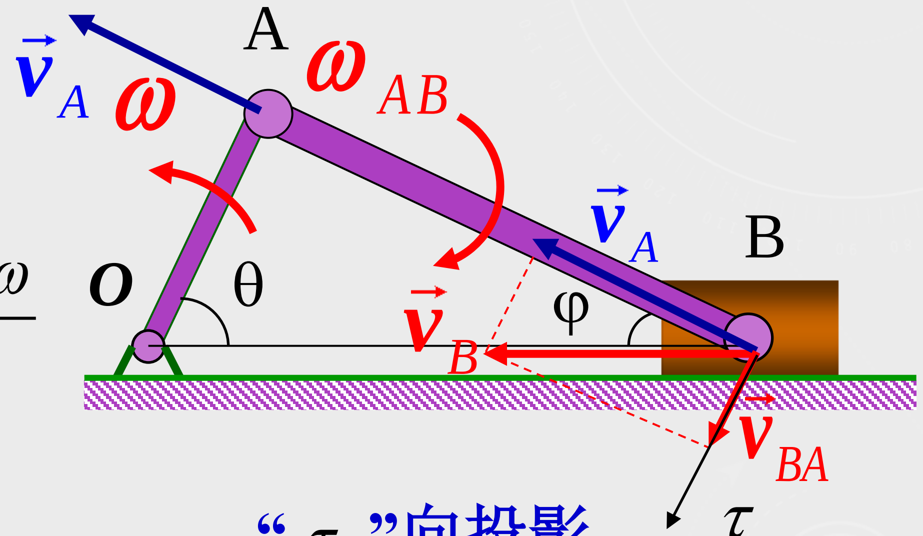
解：[AB]，取A为基点

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{BA}$$

$$v_B=\frac{v_A}{\cos\varphi}=\frac{R\omega}{\cos\varphi}=\frac{2\sqrt{3}R\omega}{3}$$

$$v_{BA}=v_A\cdot\tan\varphi$$

$$\omega=\frac{v_{BA}}{|AB|}=\frac{R\omega\tan\varphi}{R\cot\varphi}=\frac{1}{3}\omega$$



"τ"向投影

$$v_B\sin\varphi=v_{BA}$$

$$\Rightarrow v_{BA}=\frac{\sqrt{3}R\omega}{3}$$

$$\Rightarrow \omega_{AB}=\frac{v_{BA}}{AB}=\frac{1}{3}\omega$$

法2

由投影法 $v_B\cos\varphi=v_A=R\omega$

$$\Rightarrow v_B=\frac{R\omega}{\cos\varphi}=\frac{2\sqrt{3}R\omega}{3}$$

例： 在图示机构中，已知：r，ω_O，$\theta=30^0$，$AB=R$，$BC=l$。试求当 $\varphi=60°$ 时，杆 AB 的角速度和点D的速度。

解：（1）求杆AB的角速度

以点C为基点，

$$\vec{v}_B=\vec{v}_C+\vec{v}_{BC}$$

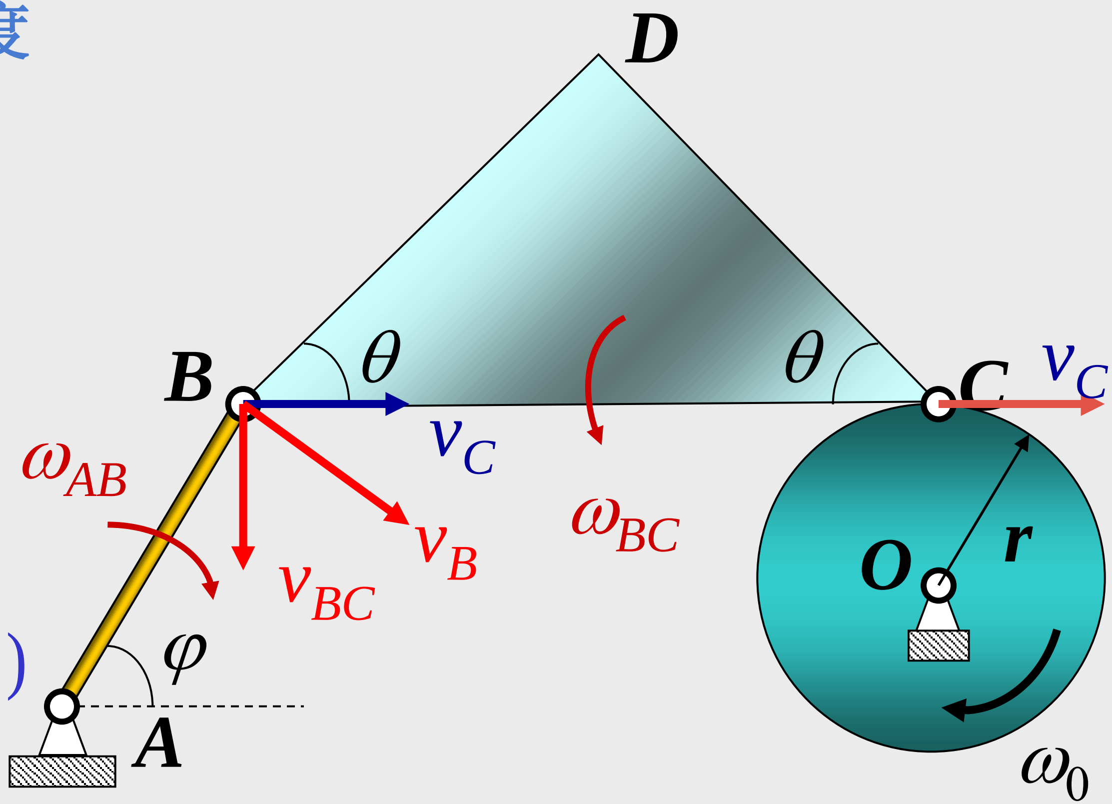
$$v_C=\omega_O r$$

$$v_C=v_B\sin\varphi$$

$$\omega_{AB}=\frac{v_B}{AB}=2r\omega_O/(\sqrt{3}R)$$

$$v_{BC}=v_B\cos\varphi$$

$$\omega_{BC}=r\omega_O/(\sqrt{3}l)$$



（2）求点*D*的速度

以点*C*为基点

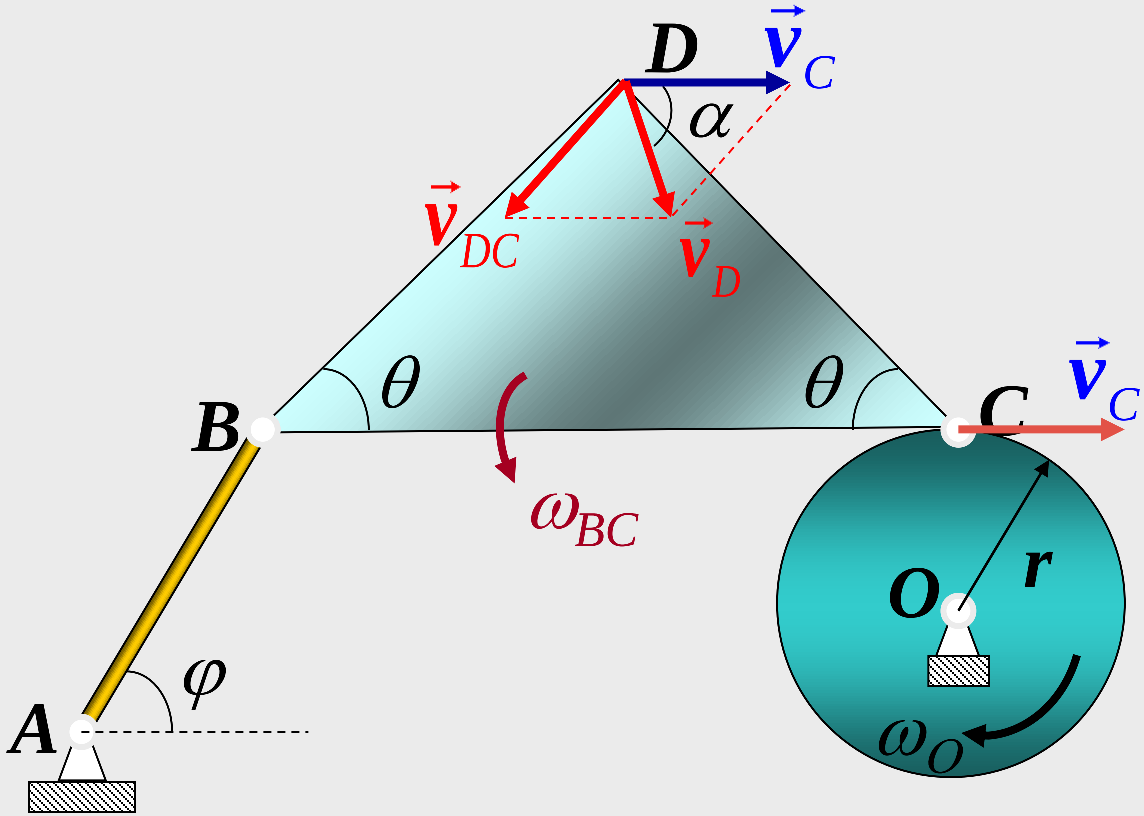
$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC}$$

$$v_{DC} = \overline{DC} \cdot \omega_{BC}$$

$$= r\omega_O / 3$$

$$v_D^2 = v_C^2 + v_{DC}^2 - 2 v_C v_{DC} \cos(90° - \theta)$$

$$v_D = \sqrt{7}\omega_O r / 3$$



与水平线的夹角为 α： $\dfrac{v_{DC}}{\sin\alpha} = \dfrac{v_D}{\cos\theta} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$

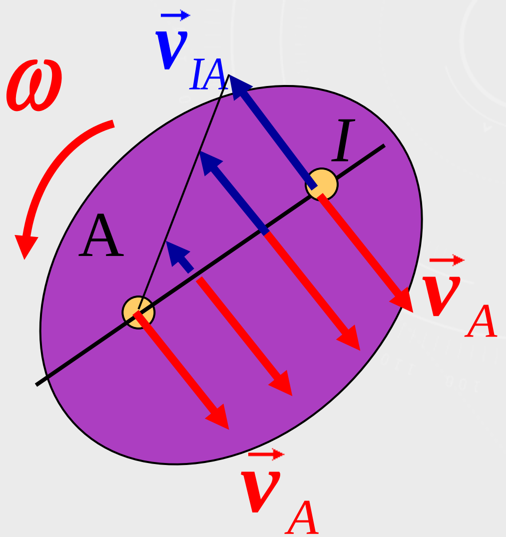
问题：某瞬时，刚性截面 (或延伸面)内是否存在一个速度为零的I点？

由 $\vec{v}_I = \vec{v}_A + \vec{v}_{IA}$

欲使 $\vec{v}_I = 0$

只需 $\vec{v}_{IA} = -\vec{v}_A$

即I相对A点的矢径 r_{AI}满足 $\vec{\omega} \times \vec{r}_{AI} = -\vec{v}_A$



瞬时速度中心(instant center for velocities)

某瞬时，刚性截面或延伸平面内必存在一点，其速度在该瞬时为零，该点称为 $\boxed{\text{瞬时速度中心}(I)}$

⇩

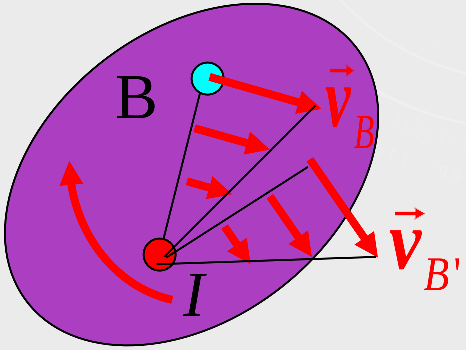
速度瞬心

- 速度瞬心可能在刚性截面内部或延伸平面内；
- 不同瞬时，有不同速度瞬心。 **瞬时性**

三、速度瞬心法

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_I + \vec{v}_{BI}}$$

问题：若选速度瞬心为基点，情况将如何呢？



取瞬心I为基点，刚性截面上**B**点的速度：

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BI} \quad , \quad v_B = |BI| \cdot \omega$$

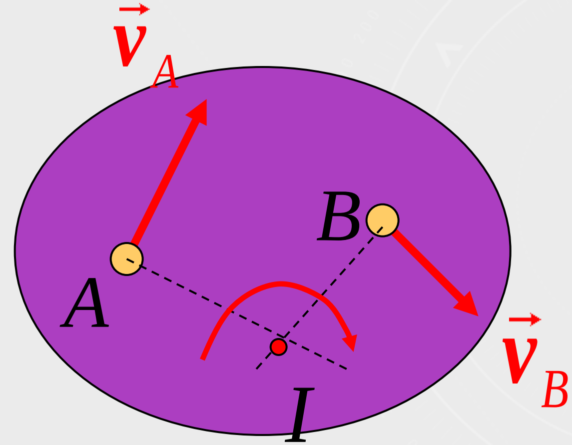
➤ 相当于在该瞬时，刚性截面绕瞬心以 ω 定轴转动

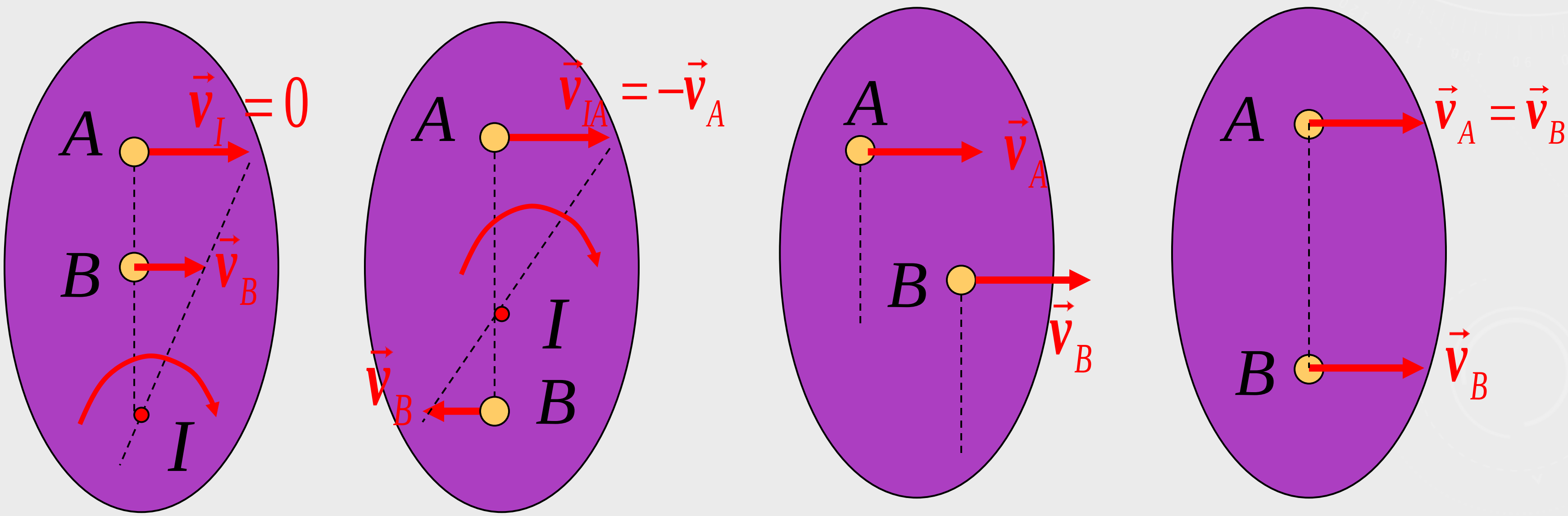
问题：如何找速度瞬心？

车轮在地面上纯滚动

确定速度瞬心位置的方法

已知A、B两点的速度方向，
试确定速度瞬心的位置。

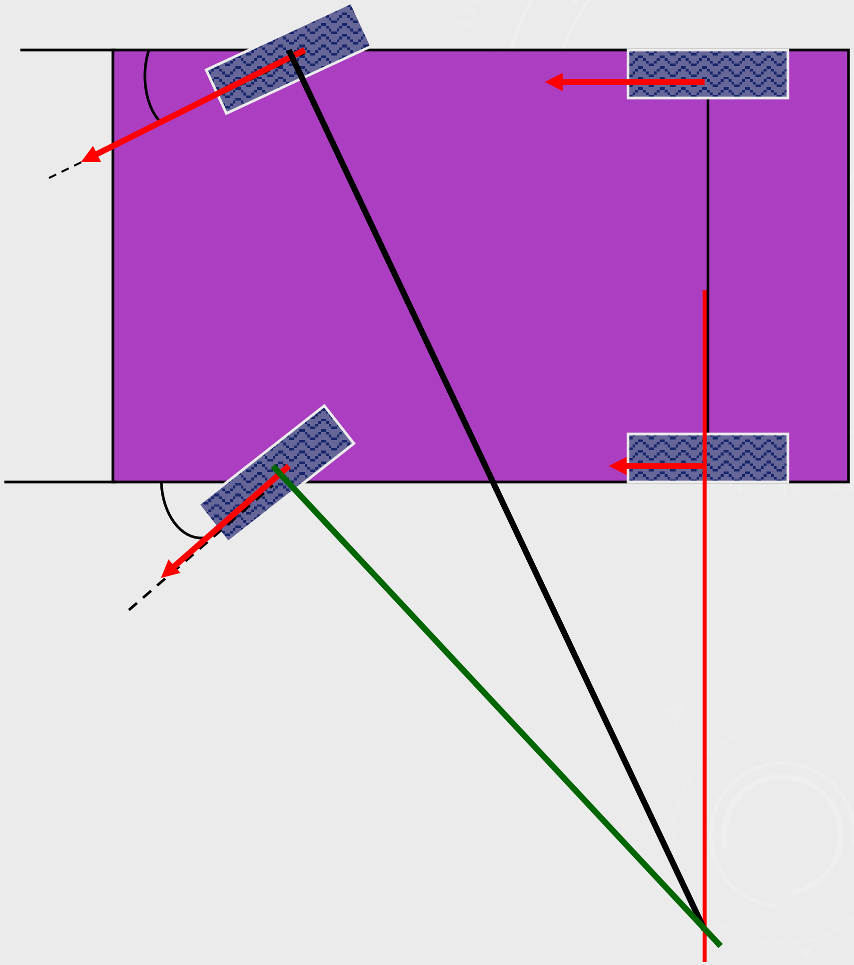




（a）　（b）　（c）　（d）

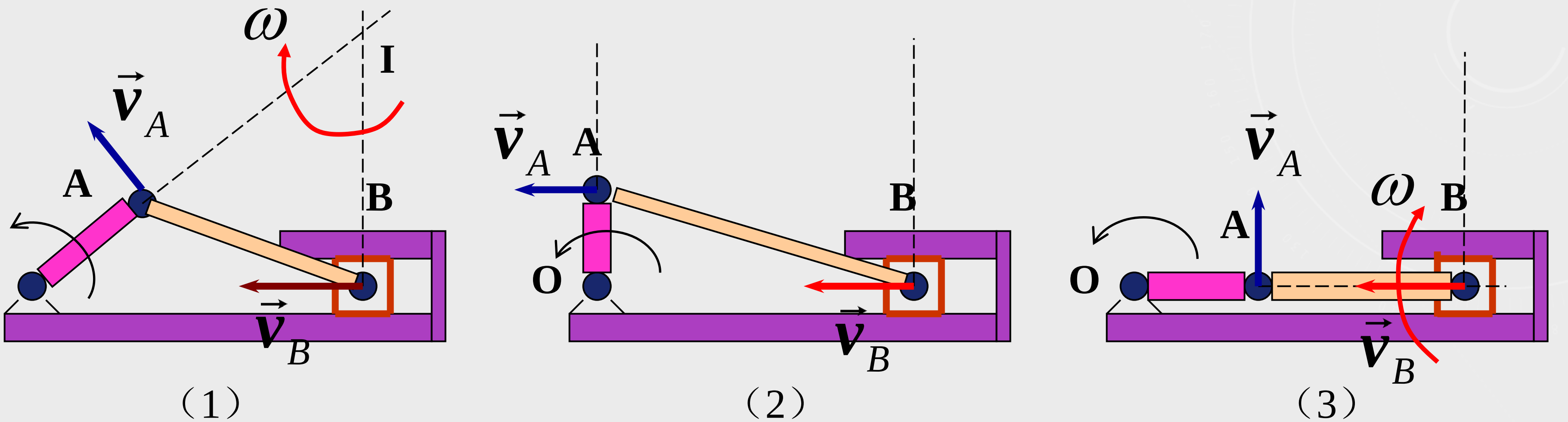
问题：某瞬时瞬心是否唯一？

瞬时平动——平面图形在该瞬时的角速度为零 。



问题：拐弯时两个前轮的转角是否相同?

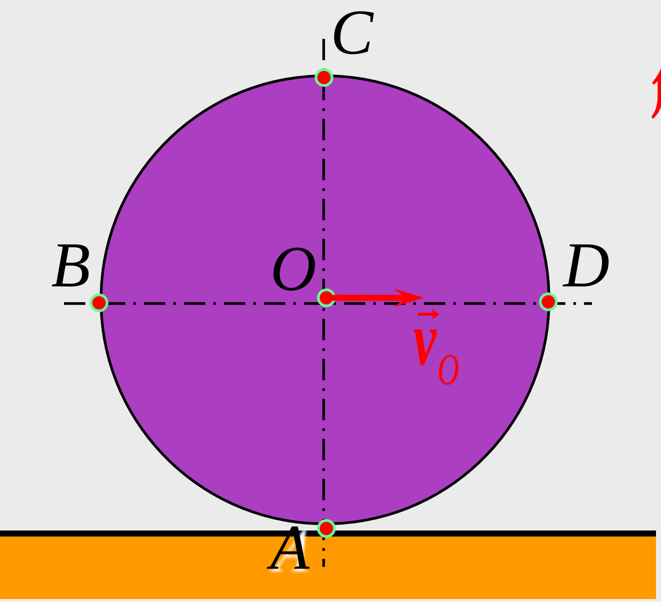
确定图示机构中AB杆在该瞬时的瞬心



速度瞬心的特点　速度瞬心是刚性截面(或其延伸平面)中的一点

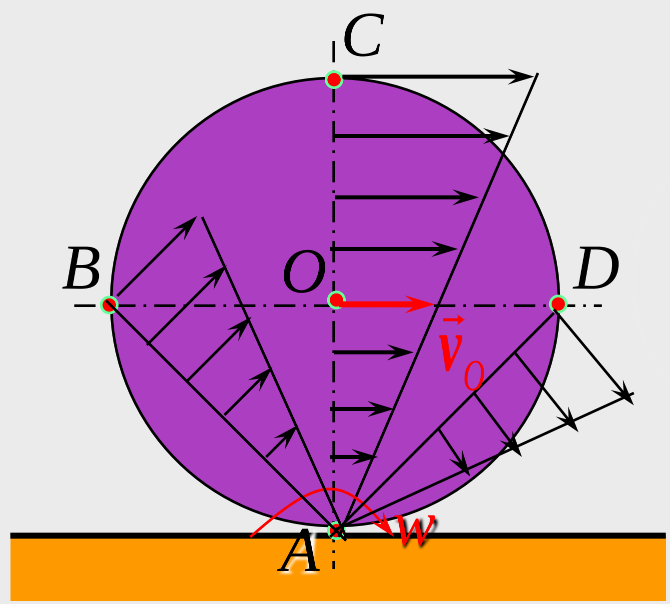
- **1、瞬时性**——不同的瞬时，有不同的速度瞬心；
- **2、唯一性**——某一瞬时只有一个速度瞬心；
- **3、瞬时转动特性**——平面图形在某一瞬时的运动可以视为绕瞬心作瞬时转动。

例： 已知半径为R的圆轮在直线轨道上作纯滚动。轮心速度为$\boldsymbol{v}_O$ 。求轮缘上A、B、C、D四点的速度。



解：接触点A为速度瞬心，则 $\omega = \dfrac{v_O}{R}$

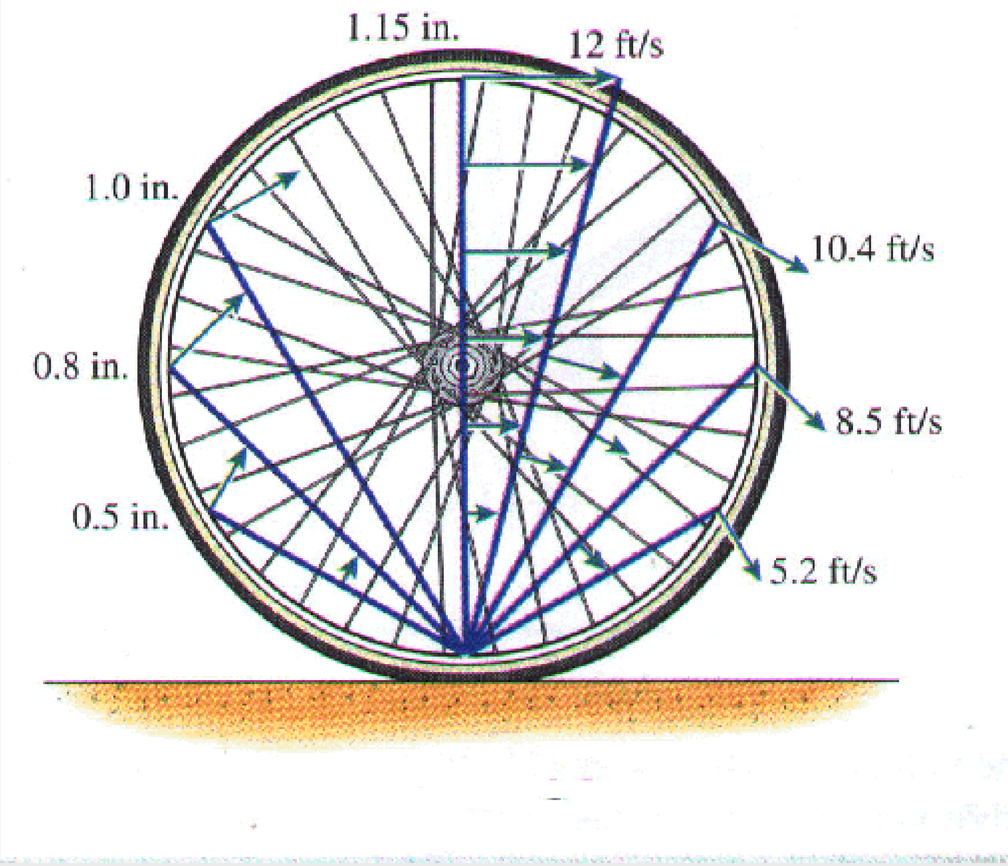
$$v_A = 0, \qquad v_B = BA \cdot \omega = \sqrt{2} v_0$$

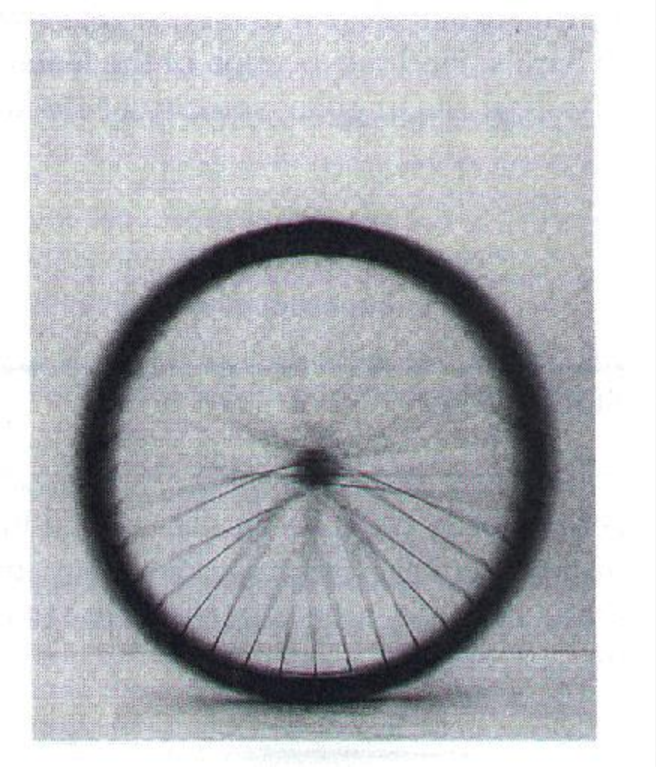


$$v_C = CA \cdot \omega = 2v_0$$

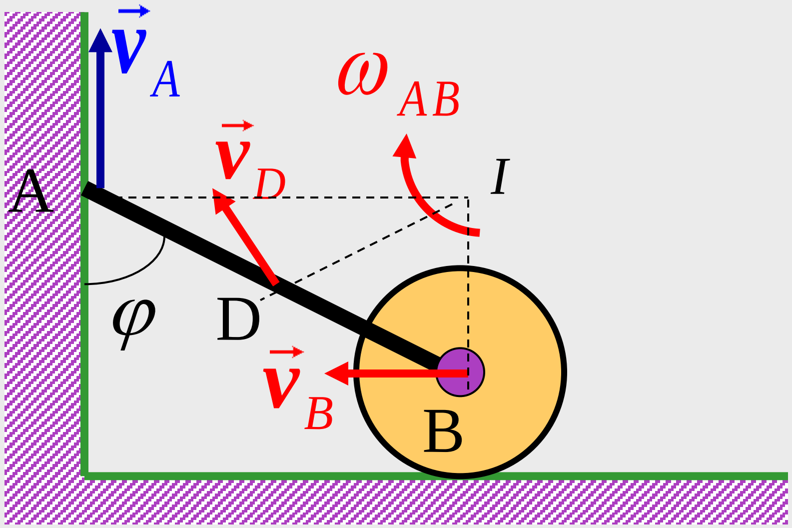
, $$v_D = DA \cdot \omega = \sqrt{2} v_0$$

方向如图所示。


1.15 in.
12 ft/s
1.0 in.
10.4 ft/s
0.8 in.
8.5 ft/s
0.5 in.
5.2 ft/s



例： 已知 AB 杆A点的速度，求杆B端的速度、杆的角速度、杆中点D的速度和圆盘的角速度。圆盘纯滚动，半径为R。$AB=L$。



解：[AB杆]，

I为AB杆的速度瞬心

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AI} = \frac{v_A}{L\sin\varphi}$$

$$v_D = DI \cdot \omega_{AB} = \frac{v_A}{2\sin\varphi}$$

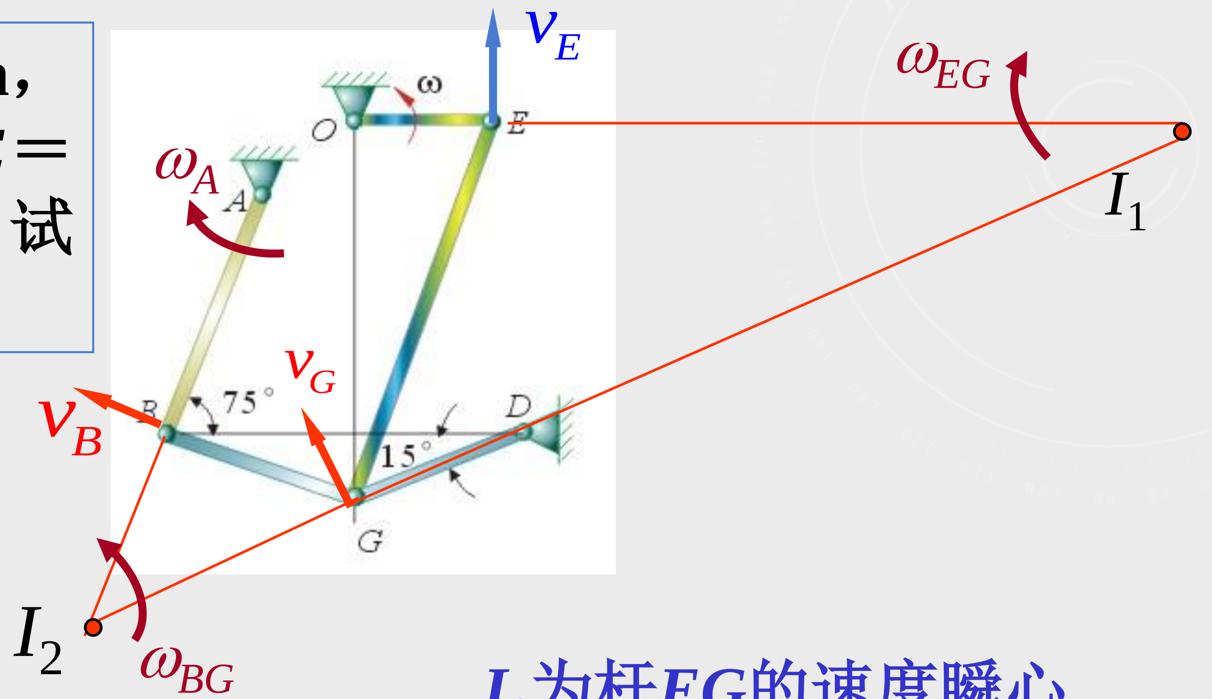
$$v_B = BI \cdot \omega_{AB} = v_A \cot\varphi$$

[轮B]，

接触点为瞬心

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{v_A}{R}\cot\varphi$$

例： 已知：AB＝60 cm，BG＝GD＝50cm，OE＝10cm，ω＝ 10 rad/s 。试求：图示位置时 ω_{AB} 。



解： 瞬心法：

I_1为杆EG的速度瞬心

I_2为杆GB的速度瞬心

[OE] $\quad v_E = \omega \overline{OE}$

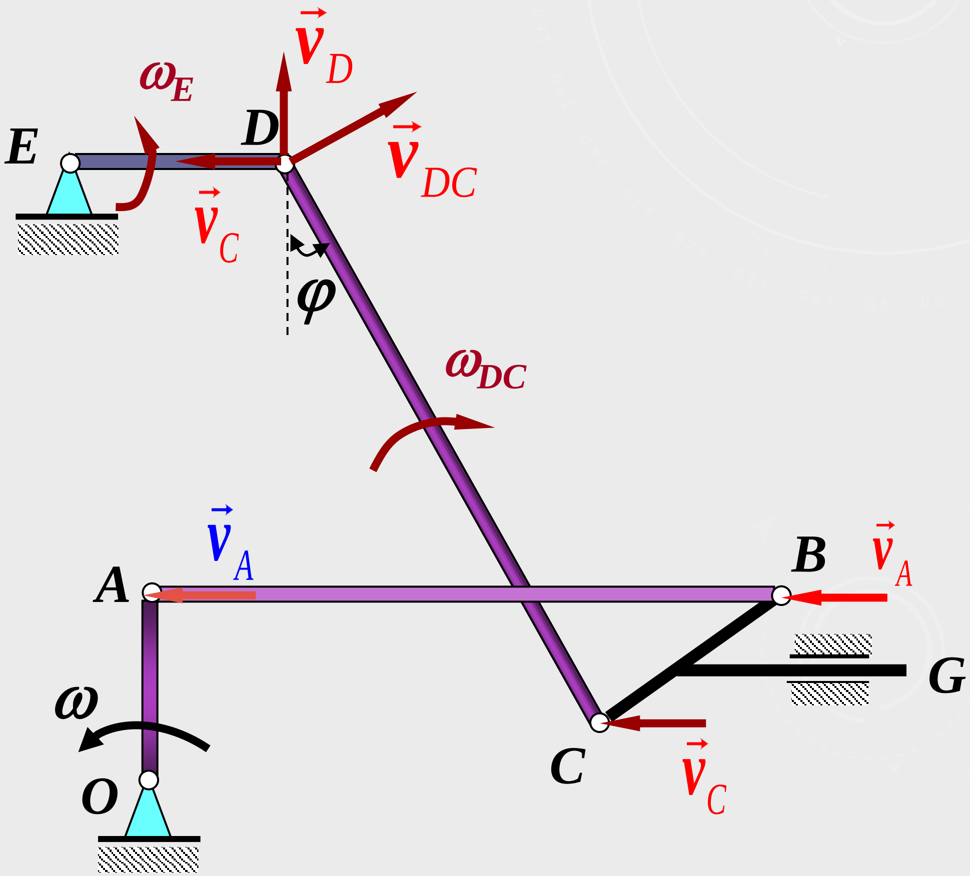
[EG] $\quad \omega_{EG} = \dfrac{v_E}{EI_1} \qquad v_G = \omega_{EI_1} \cdot \overline{I_1G}$

[BG] $\quad \omega_{BG} = \dfrac{v_G}{GI_2} \qquad v_B = \omega_{BG} \cdot \overline{BI_2}$

[AB] $\quad \omega_A = \dfrac{v_B}{AB}$

例：机构如图，杆OA绕O作匀角速度ω转动， 已知：$DC=6r$，$OA=ED=r$, 试求图示位置($\varphi=30°$)滑杆G的速度和杆ED的角速度。

解： AB作瞬时平动: $v_A=v_B$;



BC作平动: $v_G= v_B=v_C= \omega r$

以C为基点 $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{DC}$

"CD"： $v_C \sin\varphi = v_D \cos\varphi$

$$v_D = r\omega / \sqrt{3}$$

$$\omega_E = v_D / r = \omega / \sqrt{3}$$

x: $0 = v_{DC} \cos\varphi - v_C$

$$v_{DC} = 2\frac{\sqrt{3}}{3} r\omega \qquad \omega_{DC} = \frac{v_{DC}}{6r} = \frac{\sqrt{3}}{9}\omega$$

解：

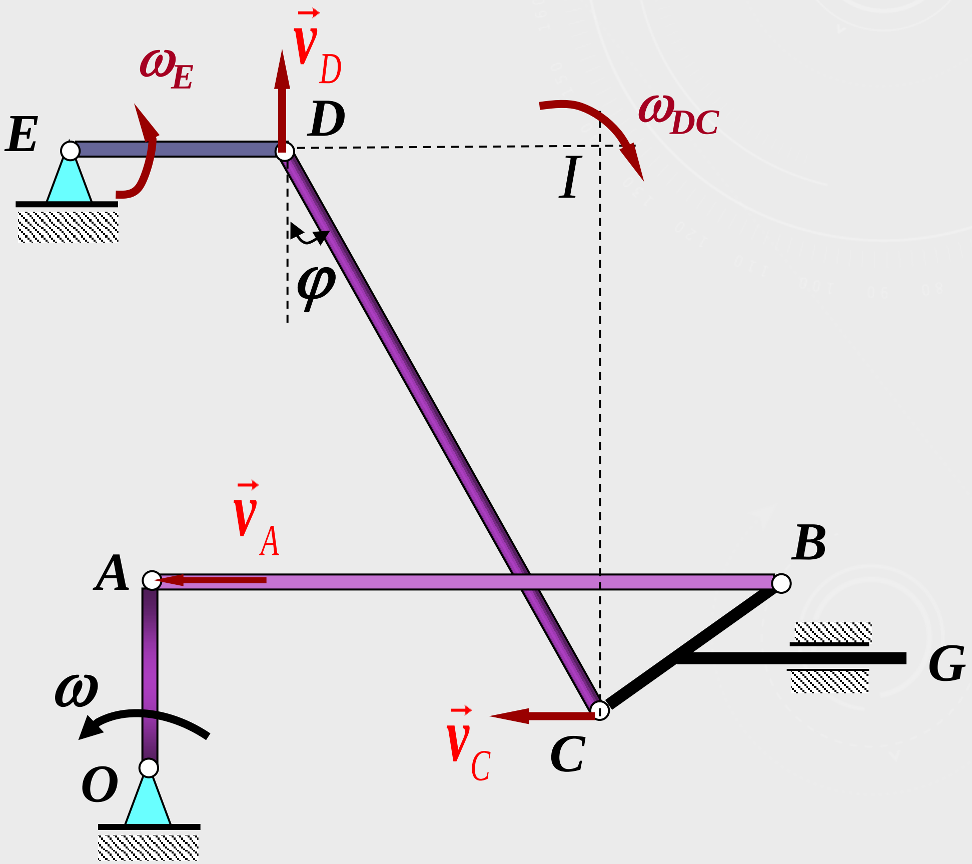
$$v_A = \omega r$$

$$\omega_{DC} = v_A / IC$$

$$v_D = \omega_{DC}\, ID$$

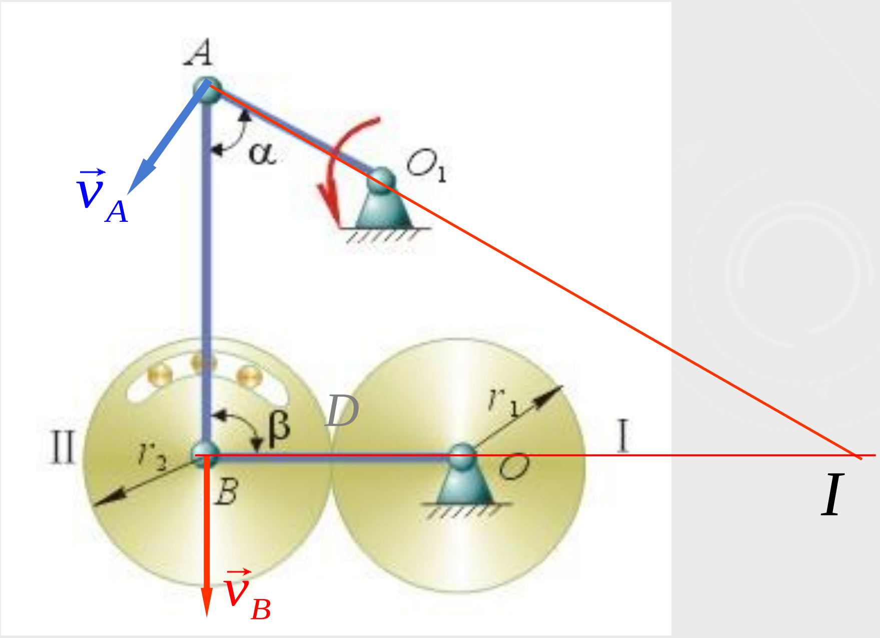
$$\omega_E = v_D / DE$$

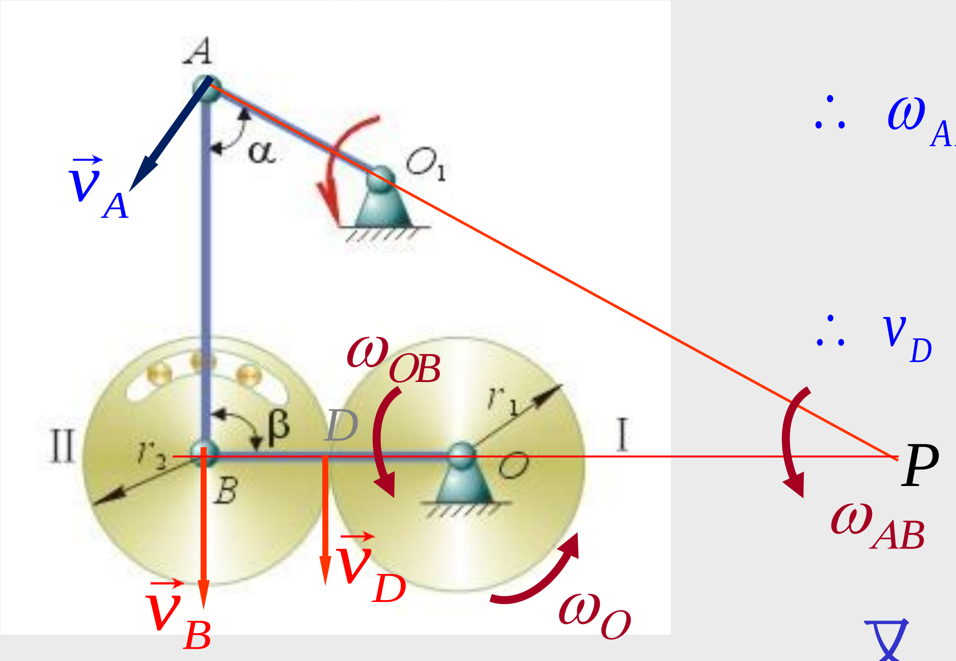
从运动已知的构件开始分析，通过公共点，将运动传递至运动未知构件。



例：在瓦特行星传动机构中，平衡杆O_1A绕O_1轴转动，借连杆AB带动曲柄OB；而曲柄OB活动的装置在O 轴上。在O 轴上装有齿轮Ⅰ，齿轮Ⅱ的轴安装在连杆AB的另一端。已知：$r_1=r_2=30\text{cm}$，$O_1A=75\text{cm}$，$AB=150\text{cm}$；又平衡杆的角速度$\omega_{O1}=6\text{rad/s}$。试求当$\alpha=60°$和$\beta=90°$时，曲柄$OB$和齿轮Ⅰ的角速度。

解：轮Ⅱ与固连的连杆AB一起作平面运动，由A、B两点速度方向可找出其速度瞬心I





$$\therefore\ \omega_{AB}=\frac{v_A}{\overline{AI}}=\frac{\omega_{O1}\cdot\overline{O_1A}}{\overline{AI}}=\frac{\overline{O_1A}}{2\overline{AB}}\omega_{O1}$$

$$\therefore\ v_D=\omega_{AB}\cdot\overline{ID}=\frac{\overline{O_1A}}{2\overline{AB}}\omega_{O1}\times(\sqrt{3}\,\overline{AB}-r_2)$$

又 $v_D=\omega_O r_1$

D为Ⅰ、Ⅱ轮啮合点

$$\therefore\ \omega_O=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\overline{O_1A}}{r_1}\omega_{O1}-\frac{\overline{O_1A}}{2\overline{AB}}\omega_{O1}=6\ \text{rad/s}$$

$$v_B=\omega_{AB}\cdot\overline{BP}$$

$$\therefore\ \omega_{OB}=\frac{v_B}{\overline{OB}}=\mathbf{3.75\ rad/s}$$

◎平面刚体内各点速度、加速度求解；

◎平面运动刚体的角速度和角加速度求解

针对刚体系问题——通过公共点连接的刚体系

平面运动问题：

1、选取研究对象；

2、给出基点法公式；

3、画矢量图；

4、分析已知、未知量（一个矢量投影式可解决两个未知量）；

5、选取投影方向；

6、代入已知计算。