

理论力学

吴佰建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

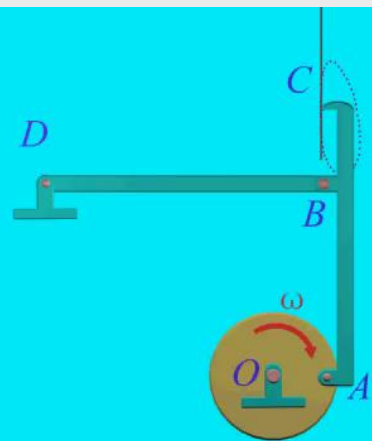
运动学

刚体的平面运动

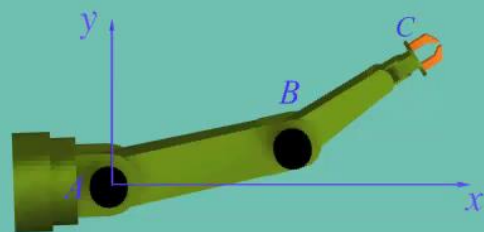
- (1) 刚体在任一瞬时的位置描述
- (2) 刚体上各点在任一瞬时的速度和加速度

一、平面运动的基本概念

平面运动实例



电影放映机中的四连杆机构

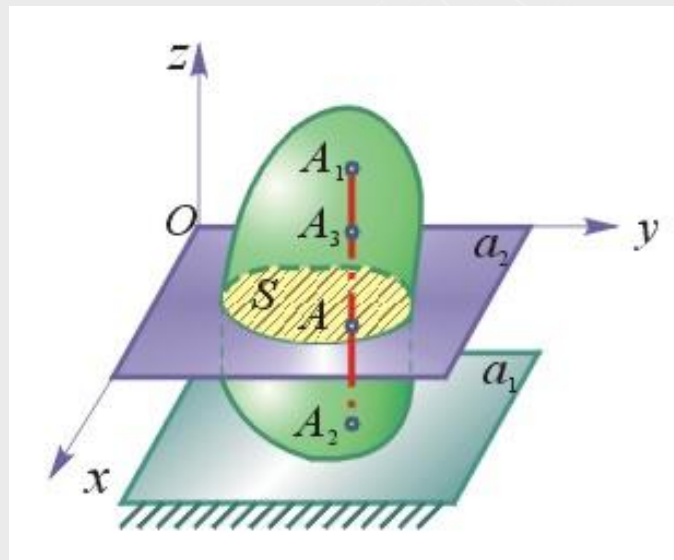


机器人的机械手的两种运动分解

平面运动：刚体运动时，其上各点到某固定平面的距离始终保持不变。

平面运动的简化

- 1、平面图形 S 始终在平面内
- 2、作垂线 A_1A_2 ，且始终作平动



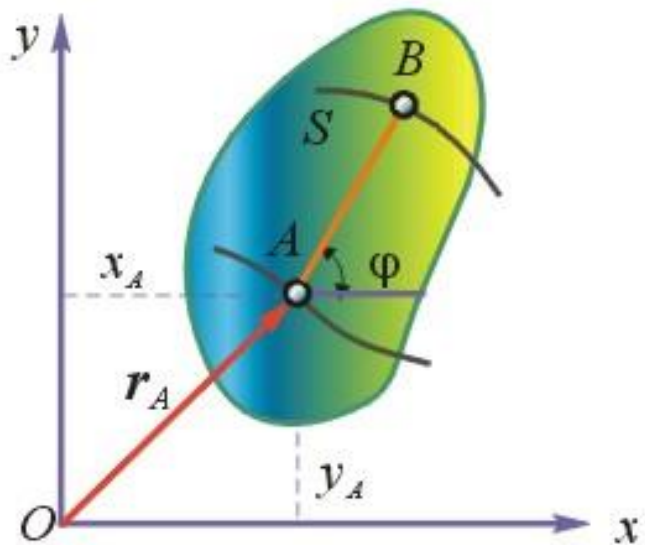
结论：刚体的平面运动可以简化为平面图形在其自身平面内的运动

运动描述

如何描述平面图形的位置？

- 只需确定直线 AB 的位置
- 可选取 A 为基点

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad \text{——运动方程}$$

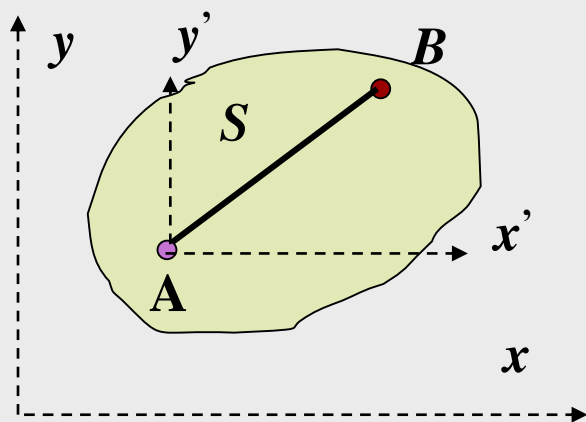


讨论：1. $\varphi = C$ $x_A = x_A(t), y_A = y_A(t)$

平行移动

2. $\varphi = \varphi(t)$ $x_A = C_1, y_A = C_2$

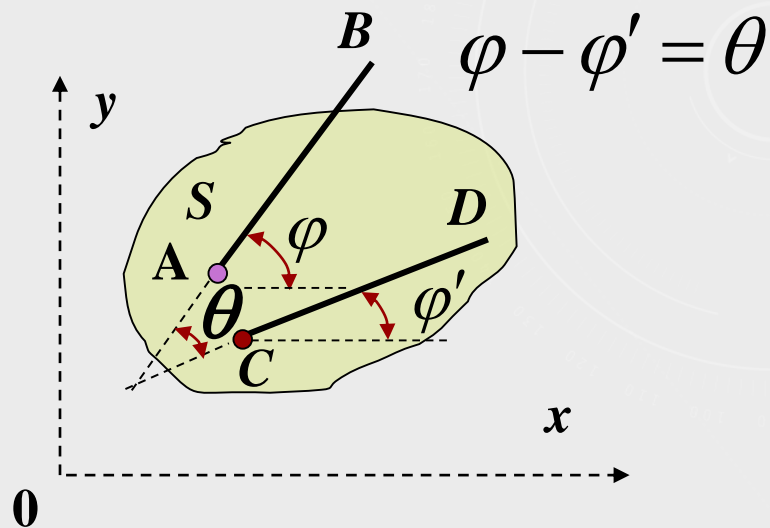
定轴转动



$$v_{Ax} = \frac{dx_A}{dt}$$

$$v_{Ay} = \frac{dy_A}{dt}$$

v 与基点有关

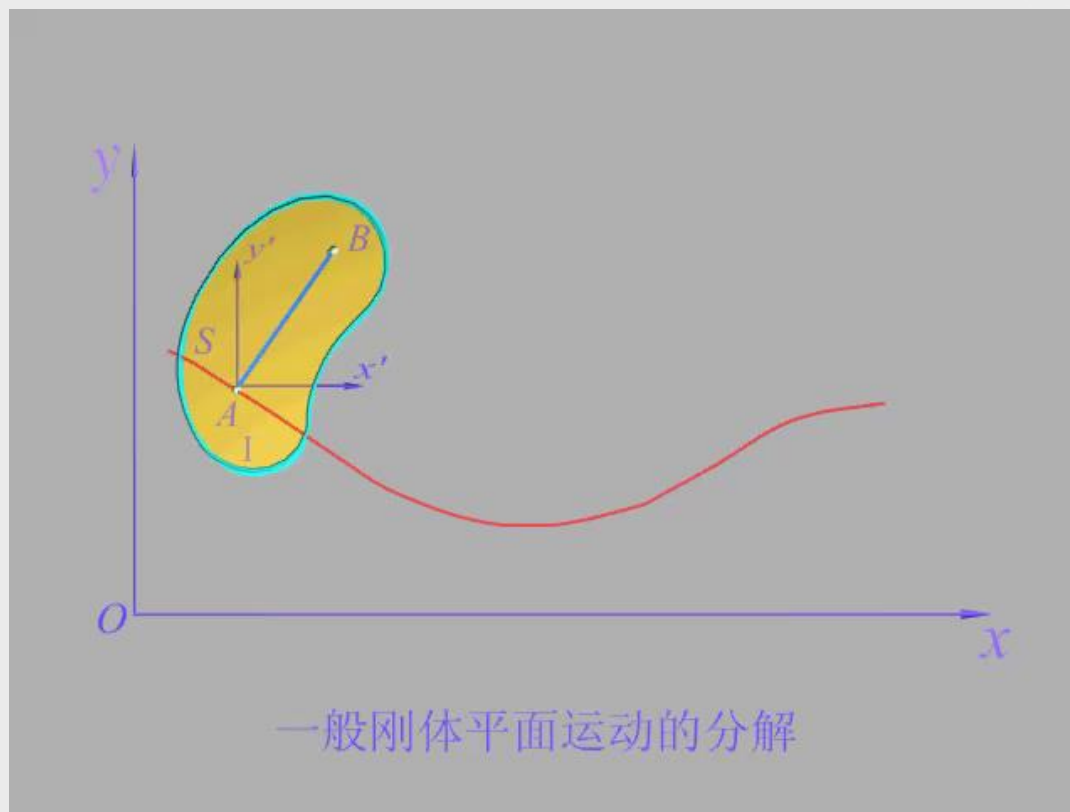


$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi'}{dt^2}$$

ω, α 与基点无关

平面运动的分解

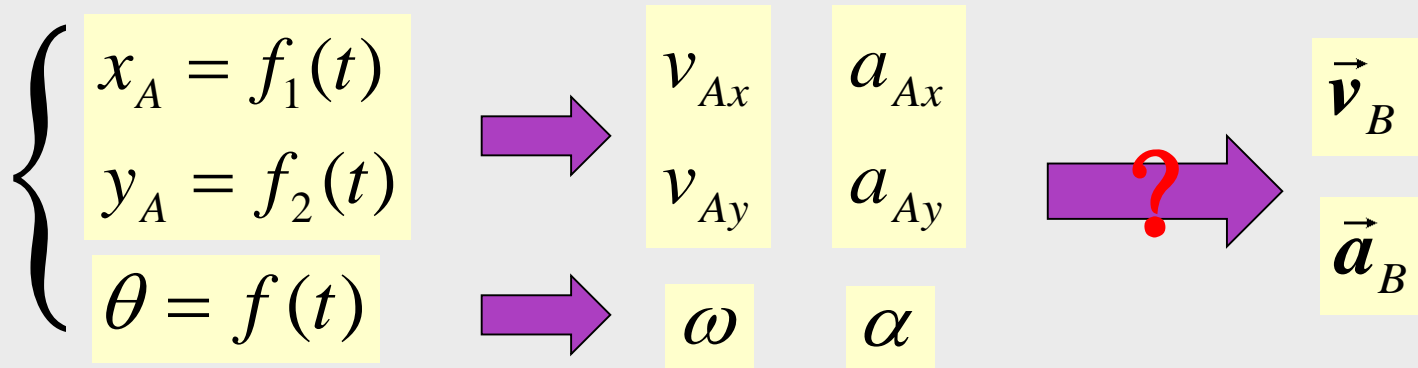


- 1:** 平面图形 S 的运动可以分解为：随基点的平动和绕基点的转动。
- 2:** 平动与基点的选择有关，转动与基点的选择无关

二、刚体平面运动的速度分析

问题：如何由基点的运动和刚体转动描述刚体上其他点的运动？

运动方程



SOLUTION:

以A为基点，建立平移坐标系 $Ax'y'$ ，利用点的运动合成定理求解。

速度

$$\vec{v}_B = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A, \quad \vec{v}_r = \vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

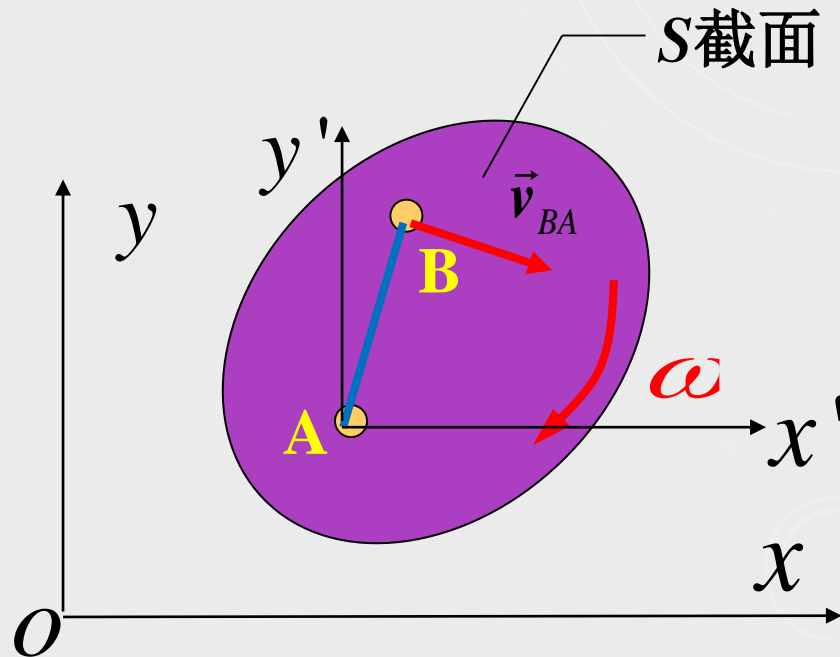
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

加速度

$$\vec{a}_B = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_A, \quad \vec{a}_r = \vec{a}_{BA} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$



平面运动刚体的速度分析

1、基点法

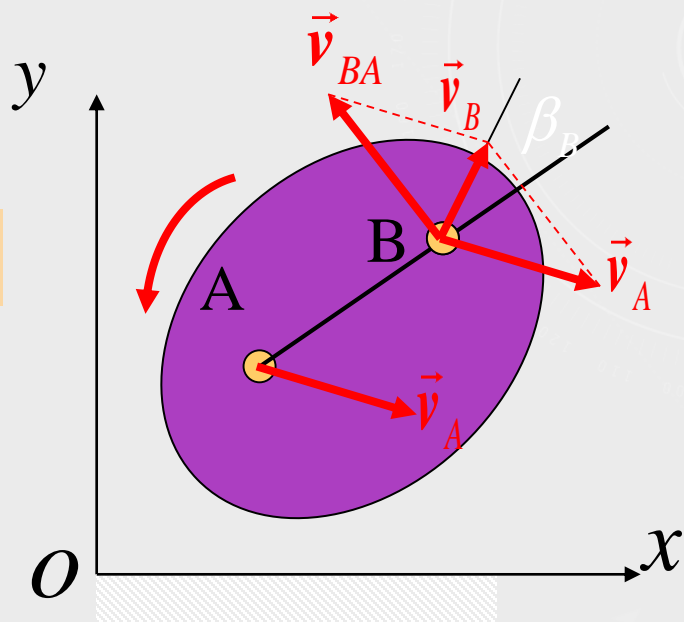
平面运动刚体内任意两点速度关系：

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

$$v_{BA} = |AB| \cdot \omega$$

A为基点，B为同一刚体上的任意点。

➤ 可求解有两个速度未知量(大小、方向)的问题



2、速度投影法

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

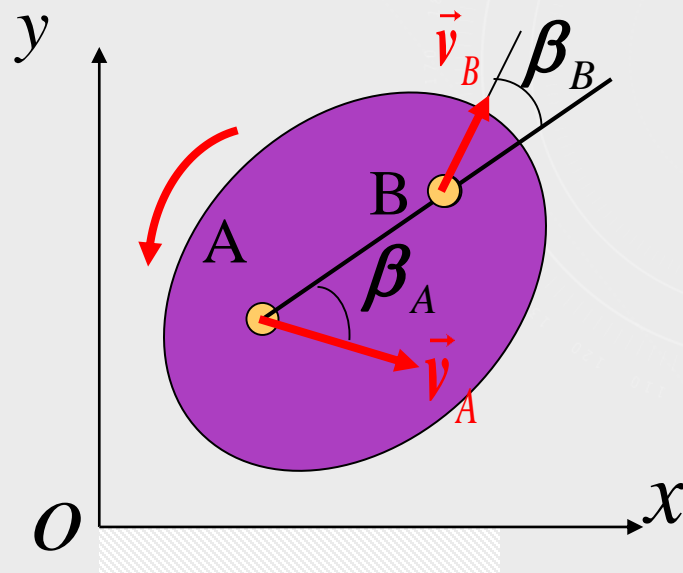
上式两边分别投影到 AB 连线上:

$$[\vec{v}_B]_{AB} = [\vec{v}_A]_{AB}$$

若 A 、 B 两点速度方向已知, 则有:

$$v_B \cos \beta_B = v_A \cos \beta_A$$

➤ 可求解有一个速度未知量的问题



例：已知OA杆的角速度 ω ，求图示瞬时滑块B的
速度和 AB杆的角速度。 $OA = R$, $\theta = 60^\circ$, $AB \perp OA$

解：[AB]，取A为基点

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$v_B = \frac{v_A}{\cos \varphi} = \frac{R\omega}{\cos \varphi} = \frac{2\sqrt{3}R\omega}{3}$$

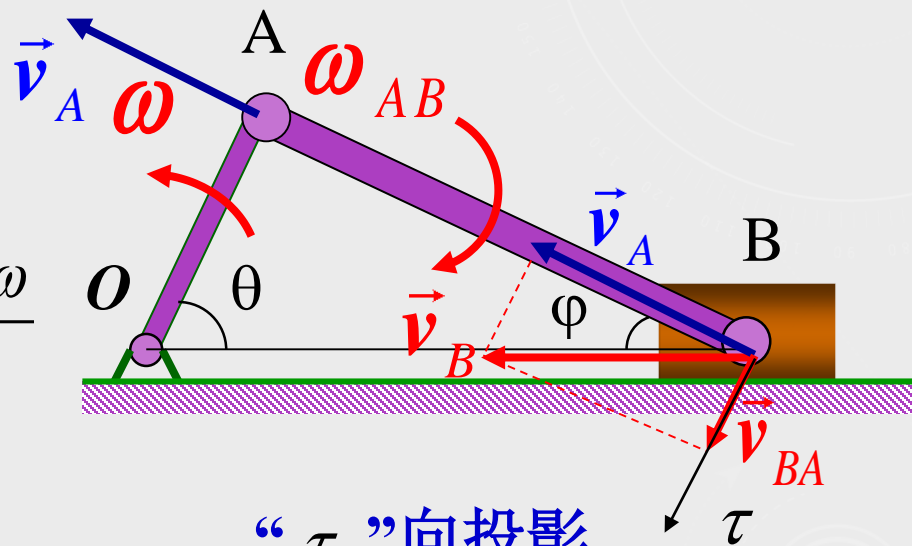
$$v_{BA} = v_A \cdot \tan \varphi$$

$$\omega = \frac{v_{BA}}{|AB|} = \frac{R\omega \tan \varphi}{R \cot \varphi} = \frac{1}{3}\omega$$

法2

由投影法 $v_B \cos \varphi = v_A = R\omega$

$$\Rightarrow v_B = \frac{R\omega}{\cos \varphi} = \frac{2\sqrt{3}R\omega}{3}$$



“ τ ”向投影

$$v_B \sin \varphi = v_{BA}$$

$$\Rightarrow v_{BA} = \frac{\sqrt{3}R\omega}{3}$$

$$\Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{1}{3}\omega$$

例：在图示机构中，已知： r ， ω_o ， $\theta=30^\circ$ ， $AB=R$ ， $BC=l$ 。试求当 $\varphi=60^\circ$ 时，杆 AB 的角速度和点 D 的速度。

解：（1）求杆 AB 的角速度

以点 C 为基点，

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$$

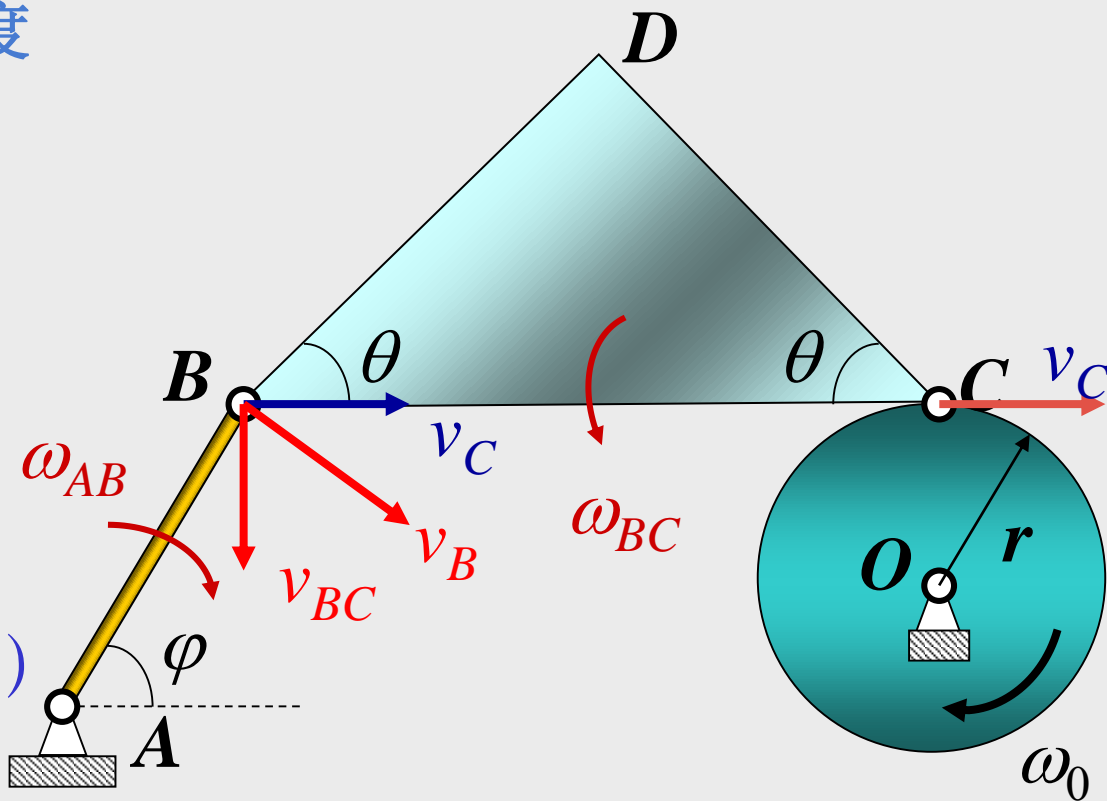
$$v_C = \omega_o r$$

$$v_C = v_B \sin \varphi$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = 2r\omega_o / (\sqrt{3}R)$$

$$v_{BC} = v_B \cos \varphi$$

$$\omega_{BC} = r\omega_o / (\sqrt{3}l)$$



以点C为基点

$$\vec{\mathbf{v}}_D = \vec{\mathbf{v}}_C + \vec{\mathbf{v}}_{DC}$$

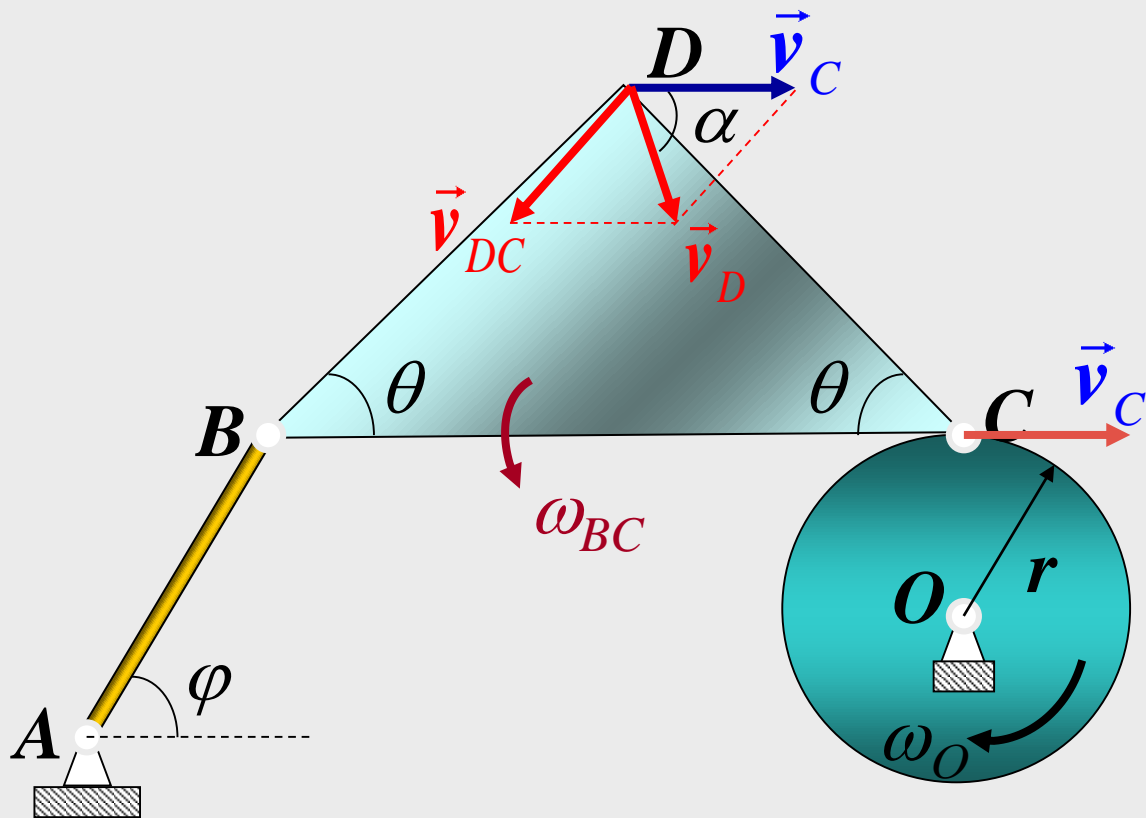
$$v_{DC} = \overline{DC} \cdot \omega_{BC}$$

$$= r \omega_0 / 3$$

$$v_D^2 = v_C^2 + v_{DC}^2 - 2v_C v_{DC} \cos(90^\circ - \theta)$$

$$v_D = \sqrt{7} \omega_o r / 3$$

与水平线的夹角为 α :



$$\frac{v_{DC}}{\sin \alpha} = \frac{v_D}{\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

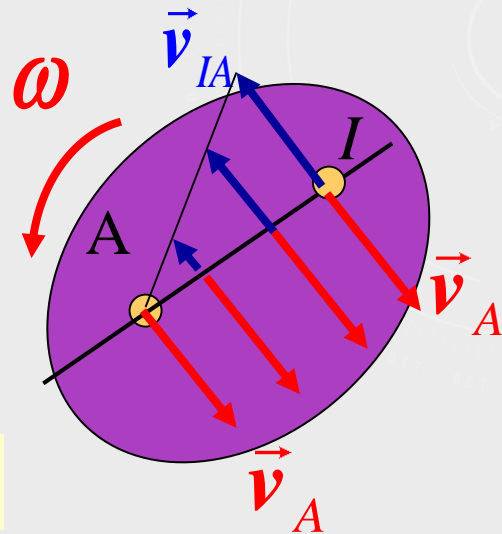
问题：某瞬时，刚性截面 (或延伸面)内是否存在一个速度为零的***I***点？

由 $\vec{v}_I = \vec{v}_A + \vec{v}_{IA}$

欲使 $\vec{v}_I = 0$

只需 $\vec{v}_{IA} = -\vec{v}_A$

即***I***相对**A**点的矢径 \vec{r}_{AI} 满足 $\vec{\omega} \times \vec{r}_{AI} = -\vec{v}_A$



瞬时速度中心(instant center for velocities)

某瞬时，刚性截面或延伸平面内必存在一点，其速度在该瞬时为零，该点称为**瞬时速度中心 (*I*)**

速度瞬心

- 速度瞬心可能在刚性截面内部或延伸平面内；
- 不同瞬时，有不同速度瞬心。

瞬时性

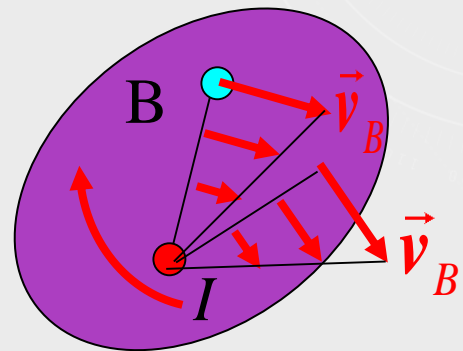
三、速度瞬心法

$$\vec{v}_B = \vec{v}_I + \vec{v}_{BI}$$

问题：若选速度瞬心为基点，情况将如何呢？

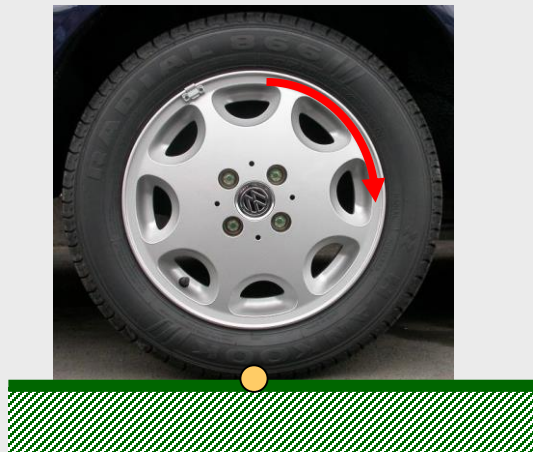
取瞬心 I 为基点，刚性截面上 B 点的速度：

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BI} \quad , \quad v_B = |BI| \cdot \omega$$



➤ 相当于在该瞬时，刚性截面绕瞬心以 ω 定轴转动

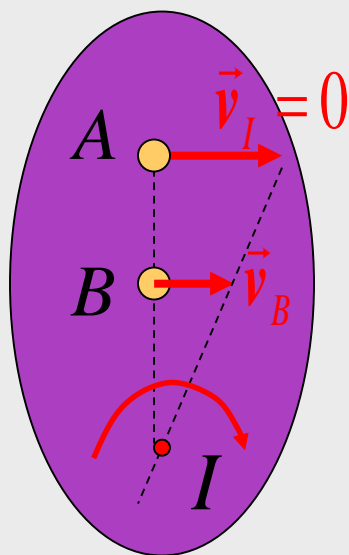
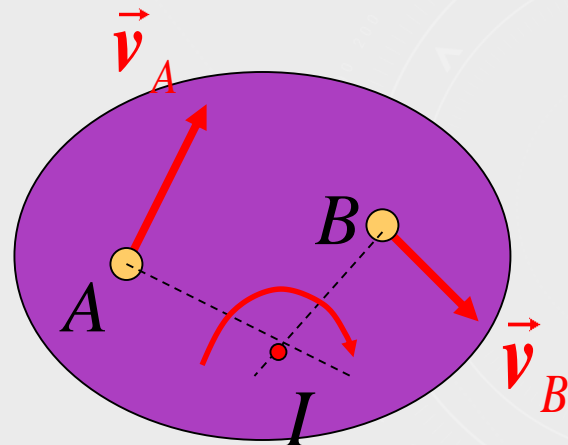
问题：如何找速度瞬心？



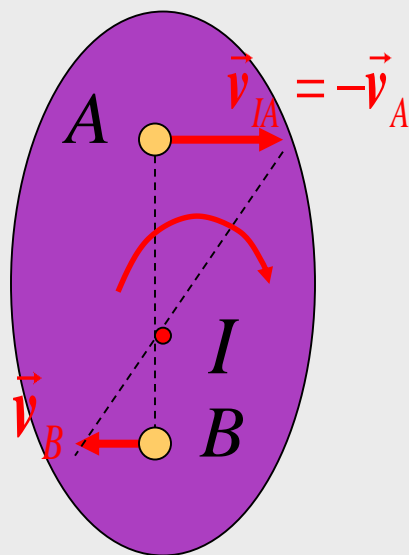
车轮在地面上纯滚动

确定速度瞬心位置的方法

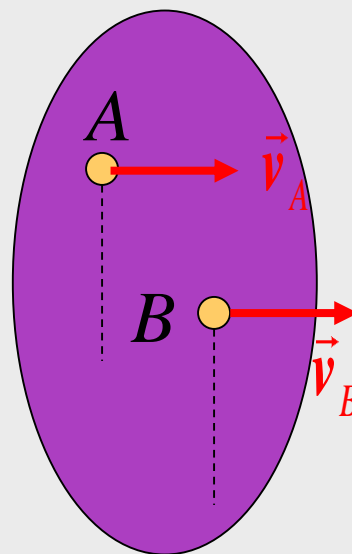
已知A、B两点的速度方向，
试确定速度瞬心的位置。



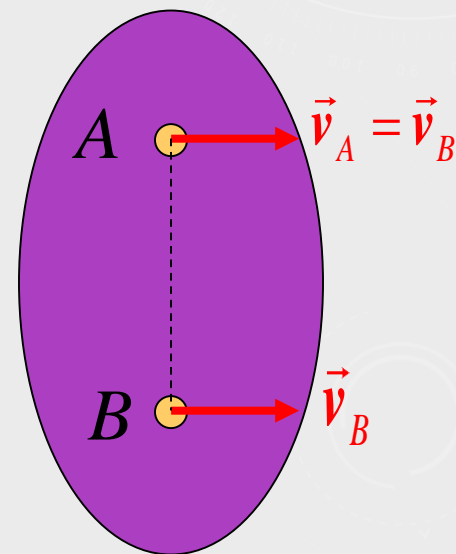
(a)



(b)



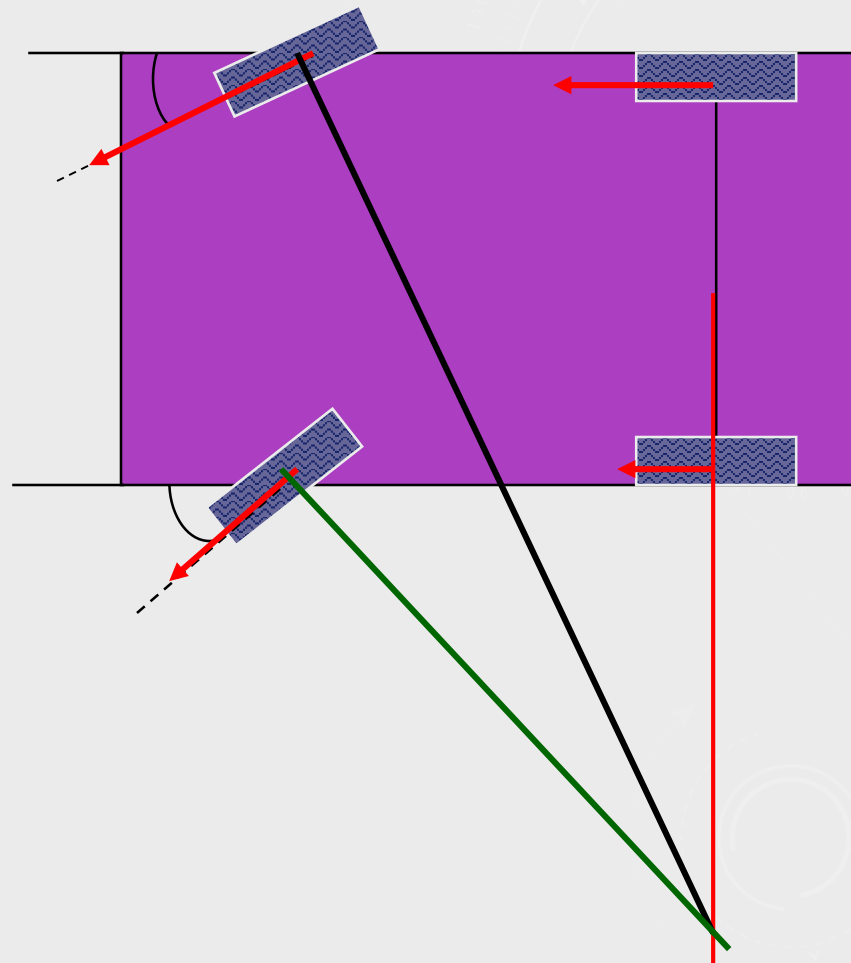
(c)



(d)

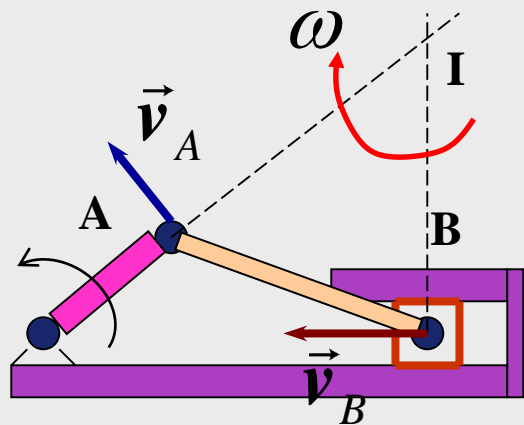
问题：某瞬时瞬心是否唯一？

瞬时平动——平面图形在该瞬时的角速度为零。

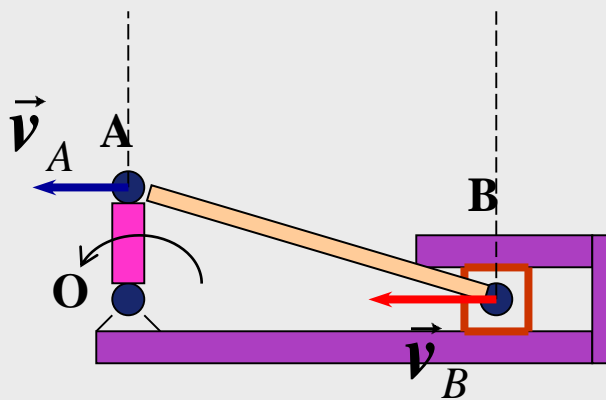


问题： 拐弯时两个前轮的转角是否相同？

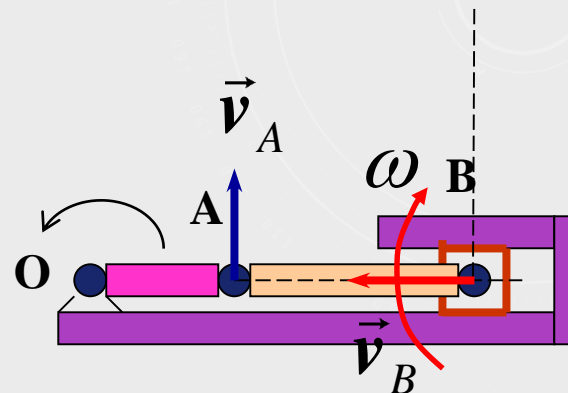
确定图示机构中AB杆在该瞬时的瞬心



(1)



(2)



(3)

速度瞬心的特点

速度瞬心是刚性截面(或其延伸平面)中的一点

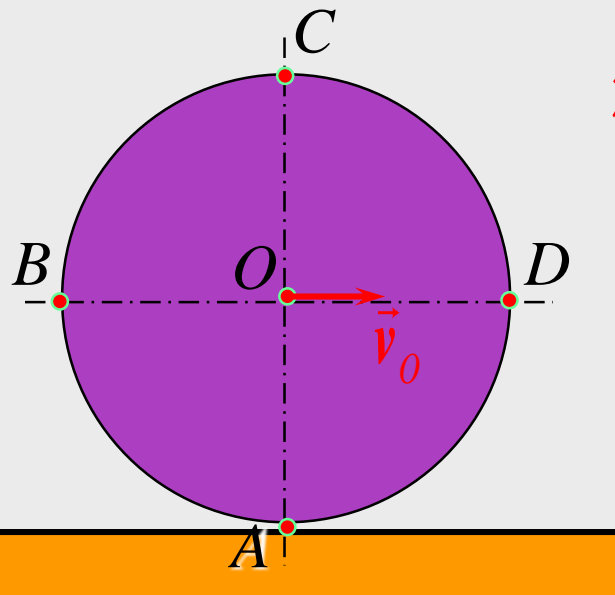
- 1、**瞬时性**——不同的瞬时，有不同的速度瞬心；
- 2、**唯一性**——某一瞬时只有一个速度瞬心；
- 3、**瞬时转动特性**——平面图形在某一瞬时的运动可以视为绕瞬心作瞬时转动。

例： 已知半径为 R 的圆轮在直线轨道上作纯滚动。轮心速度为 v_O 。求轮缘上 A 、 B 、 C 、 D 四点的速度。

解： 接触点 A 为速度瞬心，则

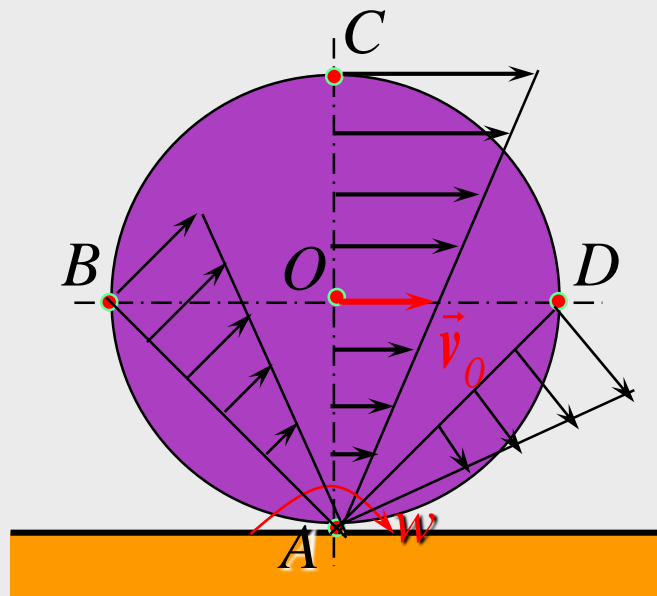
$$\omega = \frac{v_O}{R}$$

$$v_A = 0, \quad v_B = BA \cdot \omega = \sqrt{2}v_0$$

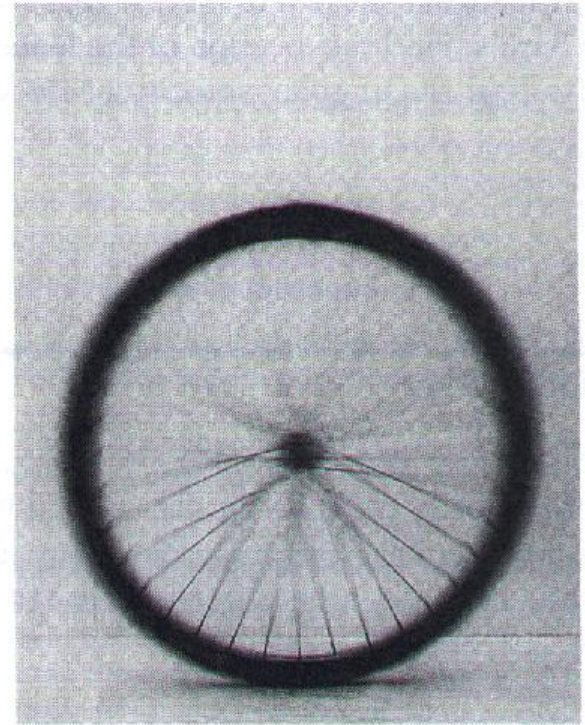
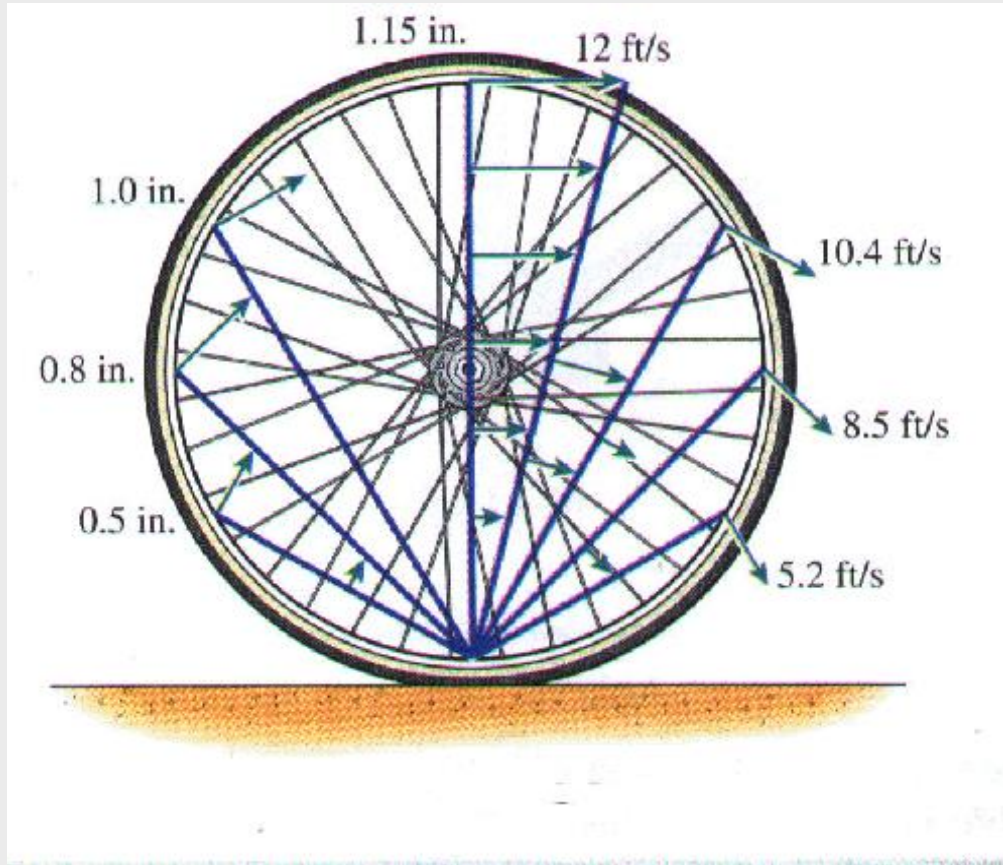


$$v_C = CA \cdot \omega = 2v_0$$

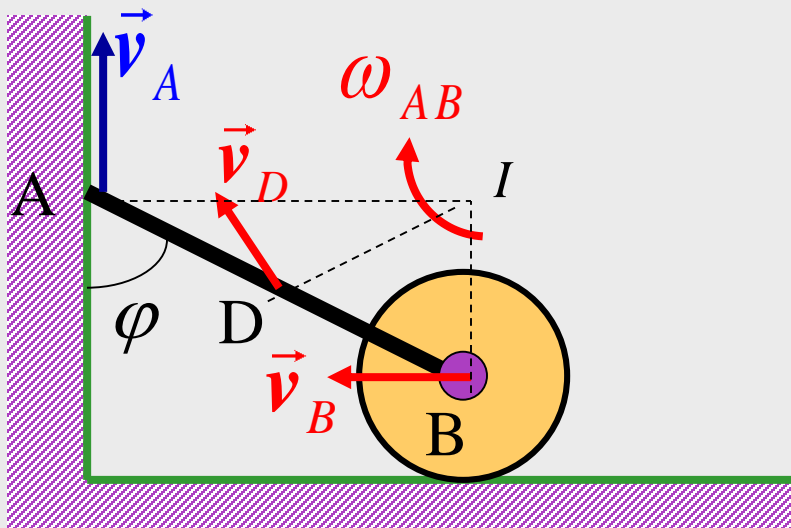
$$, \quad v_D = DA \cdot \omega = \sqrt{2}v_0$$



方向如图所示。



例：已知 AB 杆 A 点的速度，求杆 B 端的速度、杆的角速度、杆中点 D 的速度和圆盘的角速度。圆盘纯滚动，半径为 R 。
 $AB=L$ 。



解： $[AB\text{杆}]$ ，

I 为 AB 杆的速度瞬心

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AI} = \frac{v_A}{L \sin \varphi}$$

$$v_D = DI \cdot \omega_{AB} = \frac{v_A}{2 \sin \varphi}$$

$$v_B = BI \cdot \omega_{AB} = v_A \cot \varphi$$

$[轮B]$ ，
接触点为瞬心

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{v_A}{R} \cot \varphi$$

例： 已知： $AB=60\text{ cm}$ ， $BG=GD=50\text{cm}$ ， $OE=10\text{cm}$ ， $\omega=10\text{ rad/s}$ 。试求：图示位置时 ω_{AB} 。

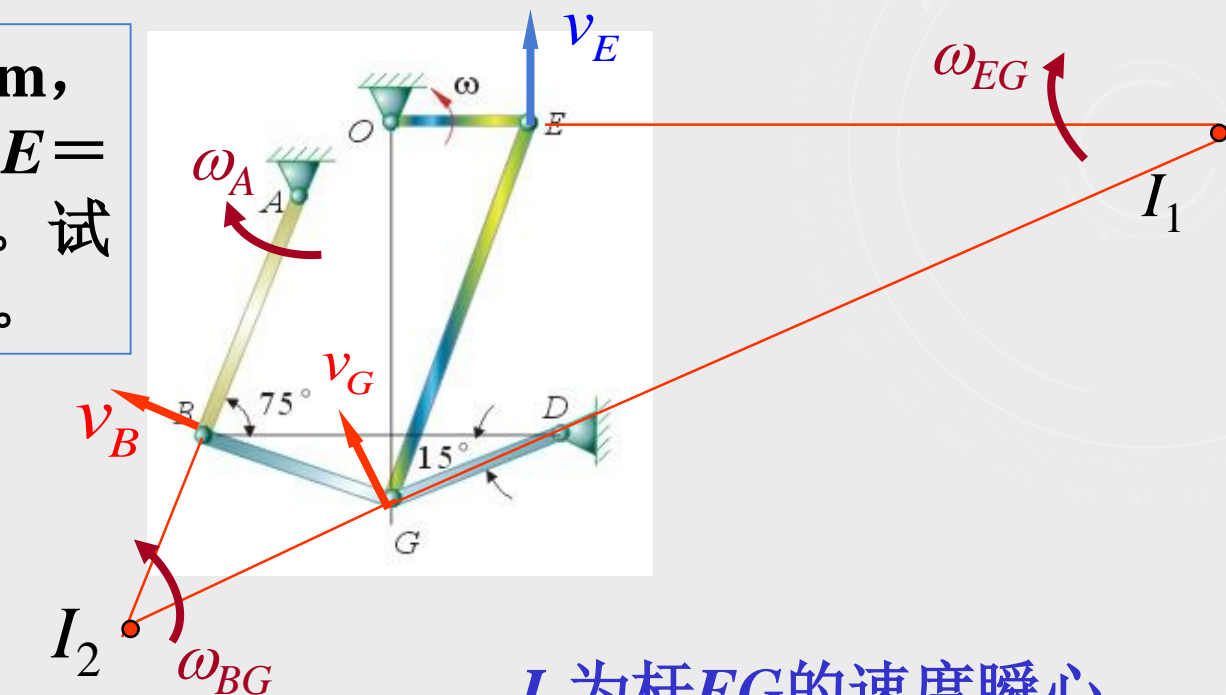
解： 瞬心法：

$$[OE] \quad v_E = \omega \overline{OE}$$

$$[EG] \quad \omega_{EG} = \frac{v_E}{EI_1}$$

$$[BG] \quad \omega_{BG} = \frac{v_G}{GI_2}$$

$$[AB] \quad \omega_A = \frac{v_B}{AB}$$



I_1 为杆 EG 的速度瞬心

I_2 为杆 BG 的速度瞬心

$$v_G = \omega_{EI_1} \cdot \overline{I_1G}$$

$$v_B = \omega_{BG} \cdot \overline{BI_2}$$

例：机构如图，杆 OA 绕 O 作匀角速度 ω 转动， 已知： $DC=6r$ ， $OA=ED=r$ ，试求图示位置($\varphi=30^\circ$)滑杆 G 的速度和杆 ED 的角速度。

解： AB 作瞬时平动： $v_A=v_B$ ；

BC 作平动： $v_G=v_B=v_C= \omega r$

以 C 为基点 $v_D = v_C + v_{DC}$

“ CD ”： $v_C \sin \varphi = v_D \cos \varphi$

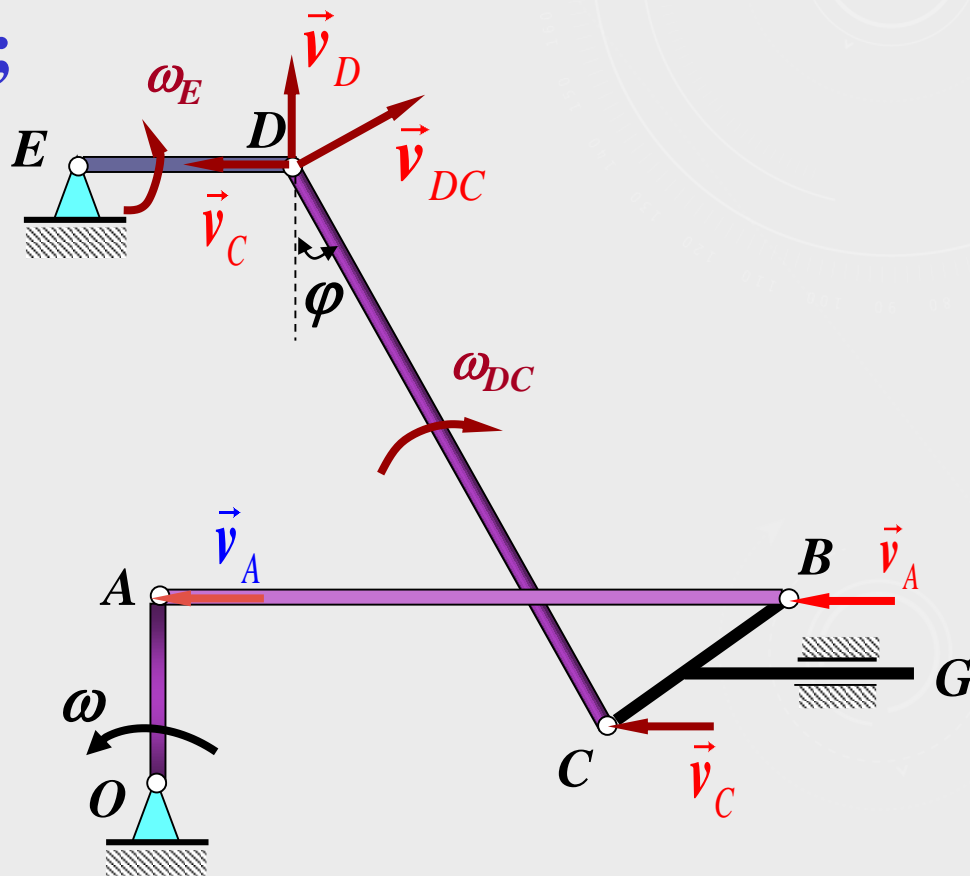
$$v_D = r\omega / \sqrt{3}$$

$$\omega_E = v_D / r = \omega / \sqrt{3}$$

$$x: 0 = v_{DC} \cos \varphi - v_C$$

$$v_{DC} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} r \omega$$

$$\omega_{DC} = \frac{v_{DC}}{6r} = \frac{\sqrt{3}}{9} \omega$$



解：

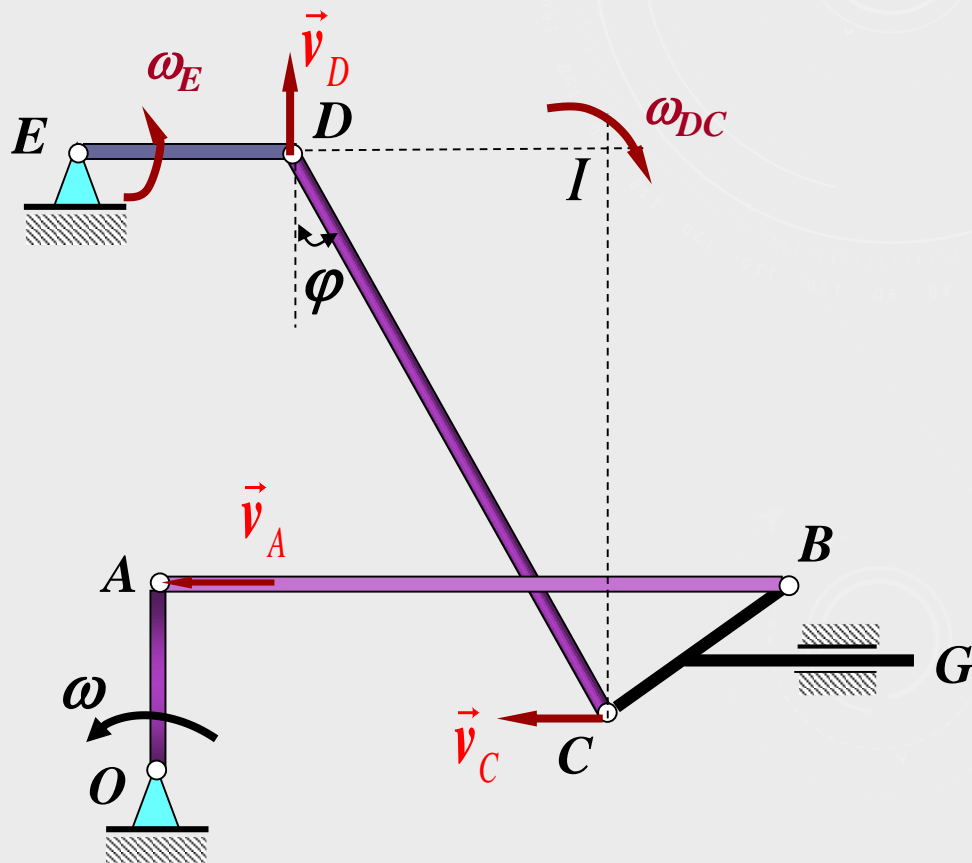
$$v_A = \omega r$$

$$\omega_{DC} = v_A / IC$$

$$v_D = \omega_{DC} ID$$

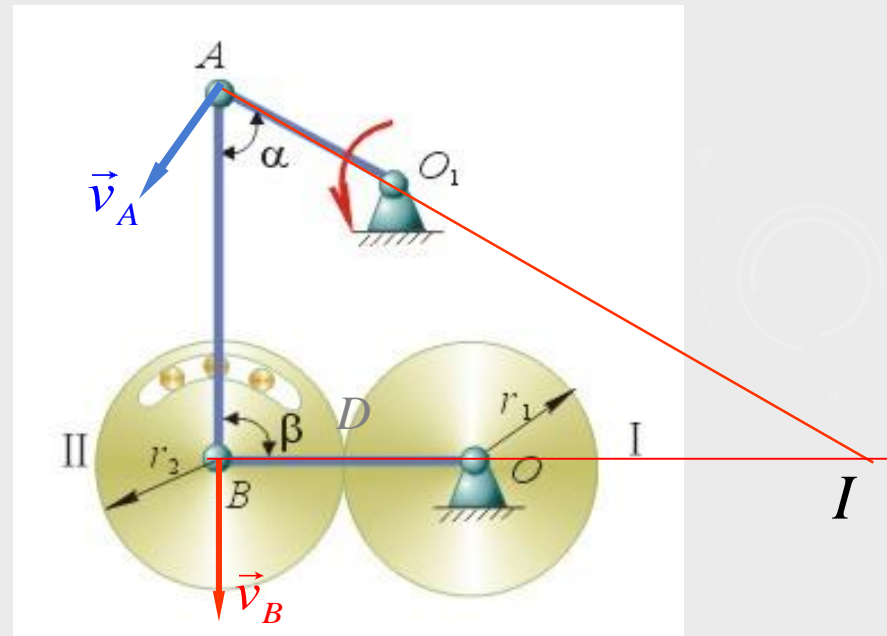
$$\omega_E = v_D / DE$$

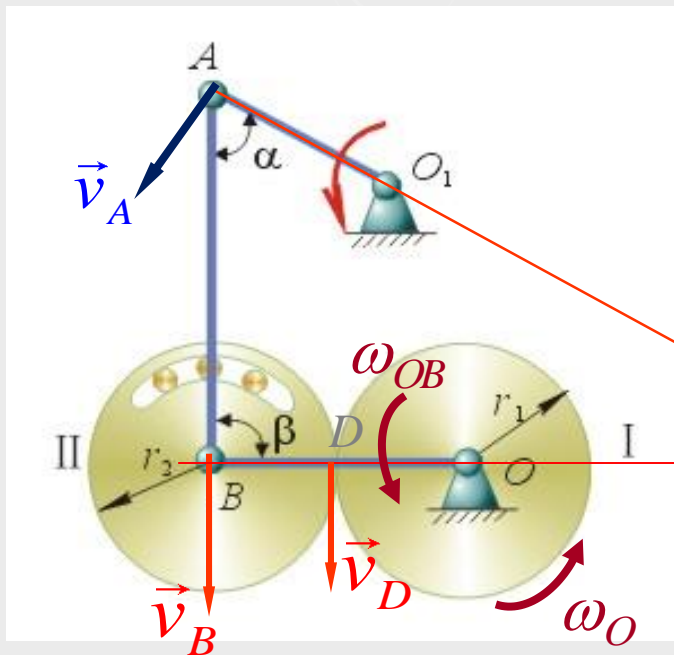
从运动已知的构件开始分析，
通过公共点，将运动传递至
运动未知构件。



例：在瓦特行星传动机构中，平衡杆 O_1A 绕 O_1 轴转动，借连杆 AB 带动曲柄 OB ；而曲柄 OB 活动的装置在 O 轴上。在 O 轴上装有齿轮I，齿轮II的轴安装在连杆 AB 的另一端。已知： $r_1=r_2=30\text{cm}$ ， $O_1A=75\text{cm}$ ， $AB=150\text{cm}$ ；又平衡杆的角速度 $\omega_{O_1}=6\text{rad/s}$ 。试求当 $\alpha=60^\circ$ 和 $\beta=90^\circ$ 时，曲柄 OB 和齿轮I的角速度。

解：轮II与固连的连杆 AB 一起作平面运动，由 A 、 B 两点速度方向可找出其速度瞬心 I





D 为 I、II 轮啮合点

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AI} = \frac{\omega_{O1} \cdot \overline{O_1A}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{O_1A}}{2AB} \omega_{O1}$$

$$\therefore v_D = \omega_{AB} \cdot \overline{ID} = \frac{\overline{O_1A}}{2AB} \omega_{O1} \times (\sqrt{3}AB - r_2)$$

$$\omega_{AB}$$

$$\text{又 } v_D = \omega_O r_1$$

$$\therefore \omega_O = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\overline{O_1A}}{r_1} \omega_{O1} - \frac{\overline{O_1A}}{2AB} \omega_{O1} = 6 \text{ rad/s}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot \overline{BP}$$

$$\therefore \omega_{OB} = \frac{v_B}{OB} = 3.75 \text{ rad/s}$$

◎平面刚体内各点速度、加速度求解；

◎平面运动刚体的角速度和角加速度求解

针对刚体系问题——通过公共点连接的刚体系

平面运动问题：

- 1、选取研究对象；
- 2、给出基点法公式；
- 3、画矢量图；
- 4、分析已知、未知量（一个矢量投影式可解决两个未知量）；
- 5、选取投影方向；
- 6、代入已知计算。