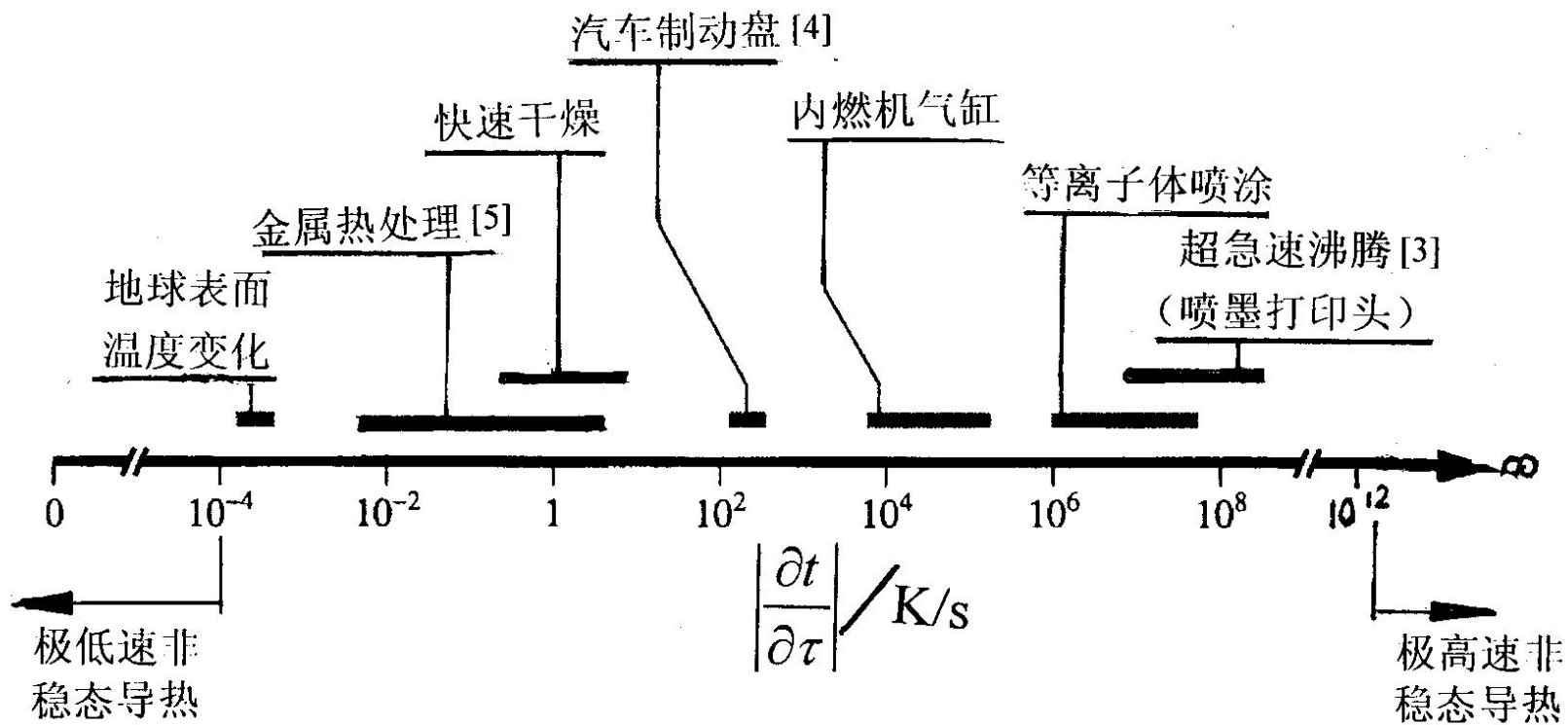


第三章 非稳态导热

——温度场随时间变化的导热问题

一、应用背景

1. 加热冷却过程
2. 动力机械中的制动过程
3. 地球的气候变化
4. 医疗中激光技术(控制温度范围)



二、研究内容

非稳态导热主要研究两方面的内容：

1. 确定物体在加热或冷却过程中, 其内部温度随时间和空间位置的变化规律。

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

2. 计算物体在加热或冷却过程中, 吸收或放出的热量。

$$\Phi = f(\tau)$$

§ 3-1 非稳态导热的基本概念

一、非稳态导热的分类

非稳态导热 {

- 周期性：物体中各点温度及热流密度随时间作周期性变化(不是研究重点)
- 非周期性：物体的温度随时间推移逐渐趋向于一个恒定温度

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

二、大平壁一侧突然受热时的导热

图中直线AD: 初始时刻, 大平壁内部各处温度均匀, 为 t_0 。

曲线HBD: 突然使大平壁左侧表面温度升高到 t_1 并保持不变, 右侧仍与温度为 t_0 的空气接触 \Rightarrow 紧挨高温表面那部分的温度很快上升, 其余部分仍保持初始温度 t_0

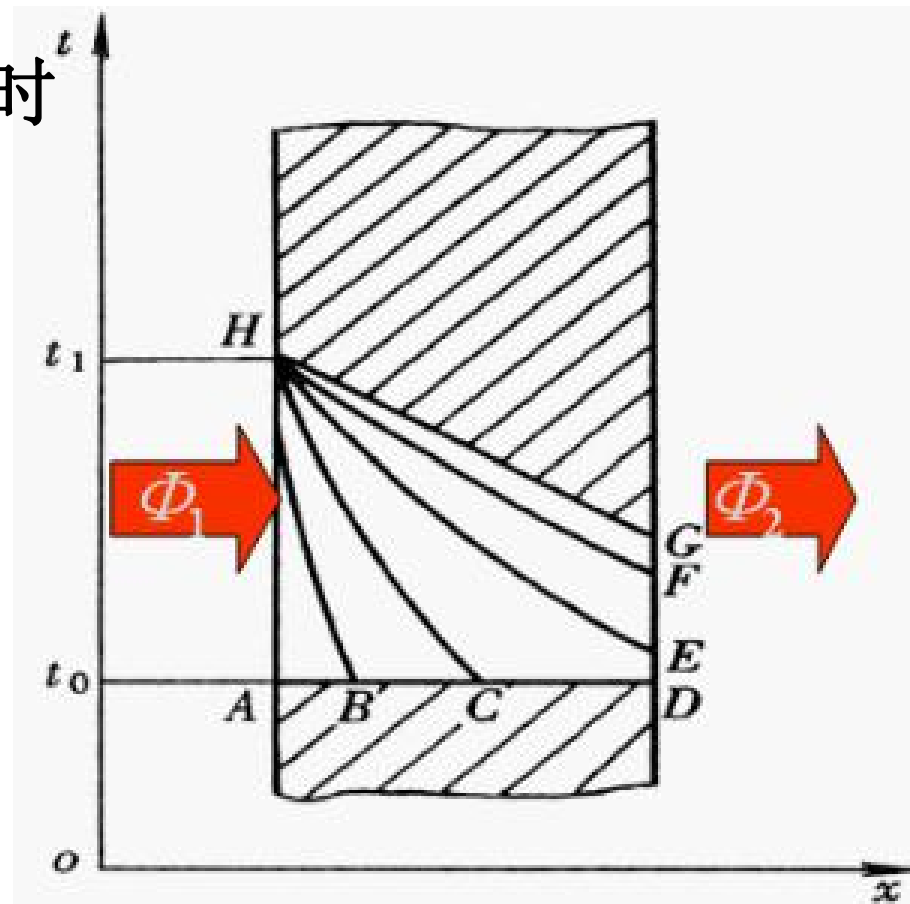


图 3-1 非稳态导热过程中的温度分布

界面上所发生的热扰动传递到内部一定深度需要一定时间

随着时间的推移，平壁从左到右各部分的温度依次升高 \Rightarrow 从某一时刻开始平壁右侧表面温度逐渐升高，图中曲线HCD、HE、HF示意性地表示了这种变化过程。

直线HG：经过相当长的时间 τ_{∞} 后达到新的稳态，温度分布保持恒定。

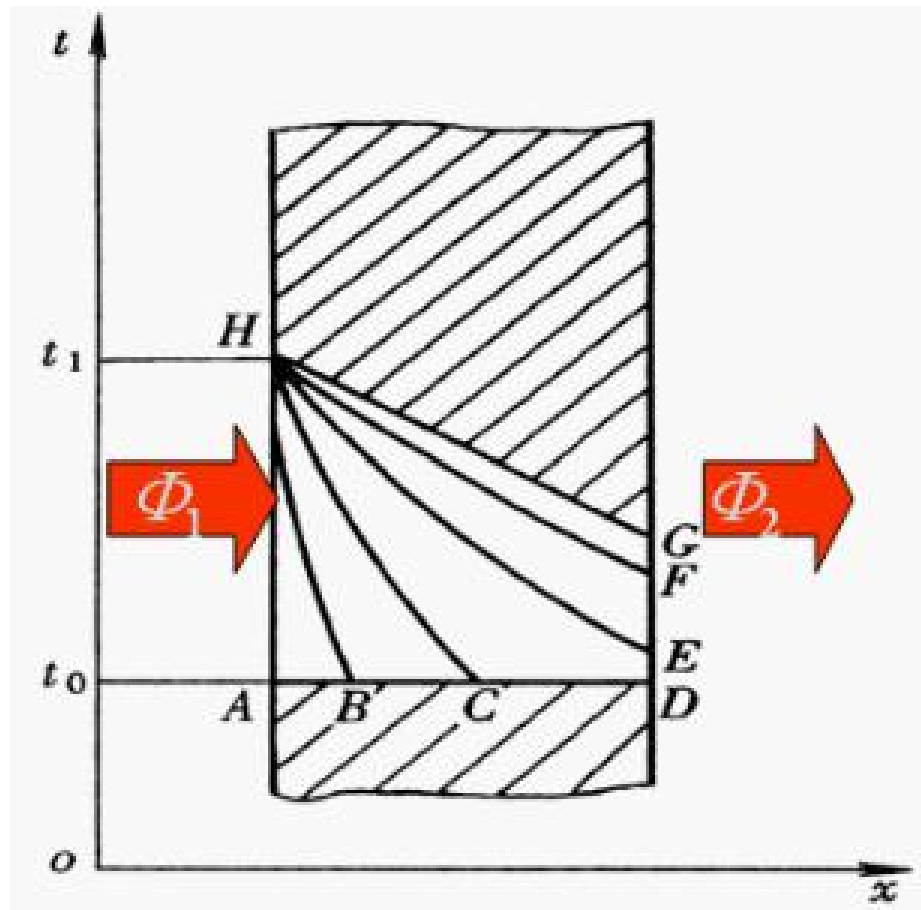
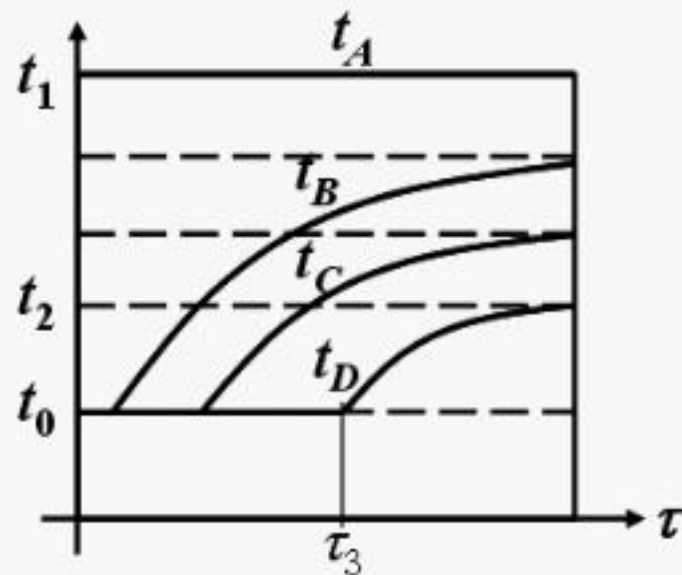
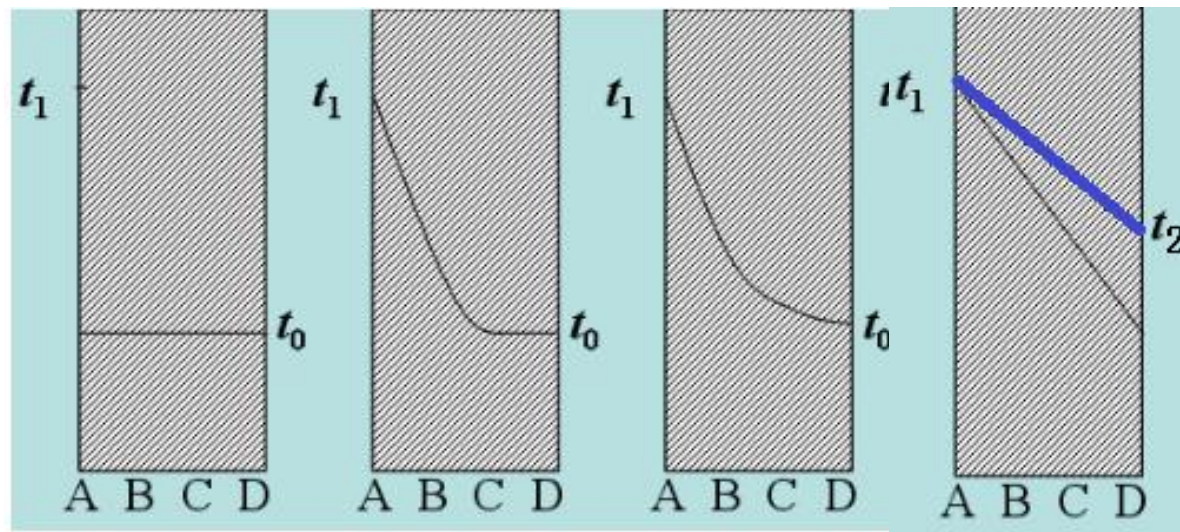


图 3-1 非稳态导热过程中的温度分布



(a) $\tau = \tau_1$ (b) $\tau = \tau_2$ (c) $\tau = \tau_3$ (d) $\tau = \tau_4$

非稳态导热的不同时刻物体的温度分布

首先，物体紧挨高温表面的部分温度上升很快，经过一定时间后内部区域温度依次变化，最终整体温度分布保持恒定，**当 λ 为常数时**，最终温度分布为直线。

三、基本特点

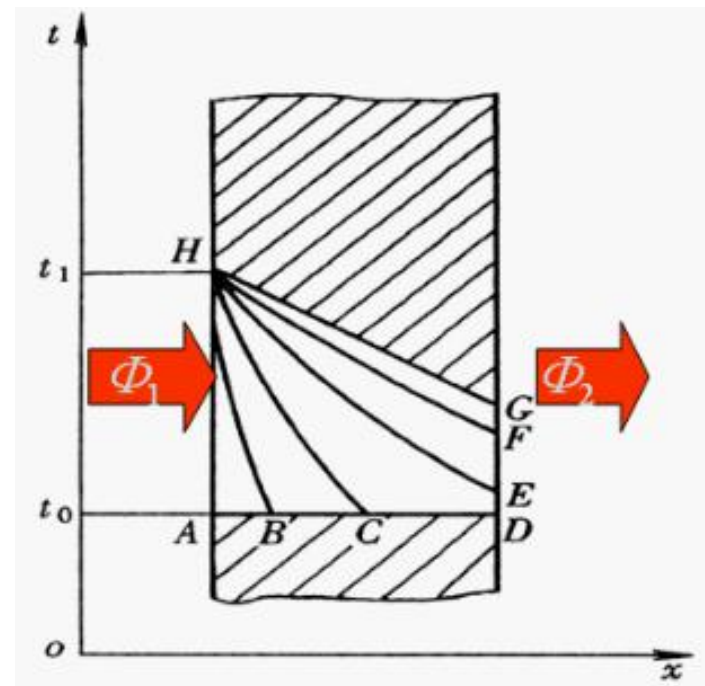
1. $\frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0$

2. 物体中的温度分布存在着两个不同阶段(非周期性导热)

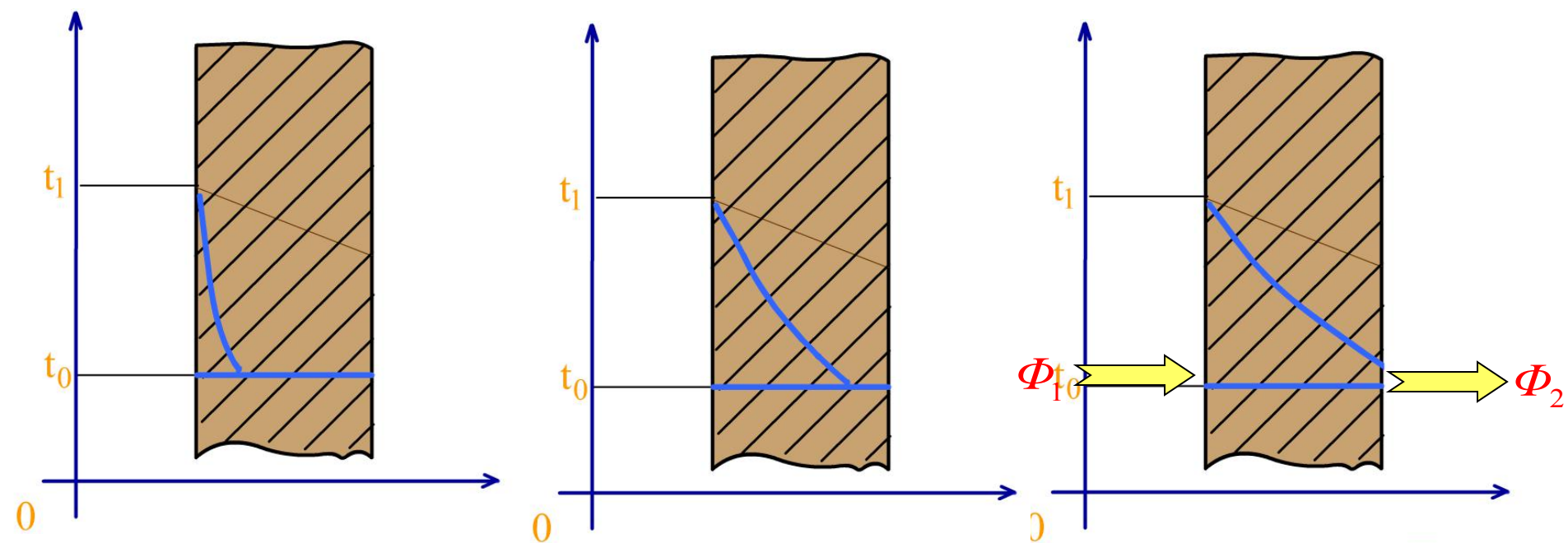
①非正规状况：物体中的温度分布受初始温度分布影响。

②正规状况：初始温度分布影响逐渐消失，物体中不同时刻温度分布主要取决于边界条件及物性，**各处温度变化具有一定规律。**

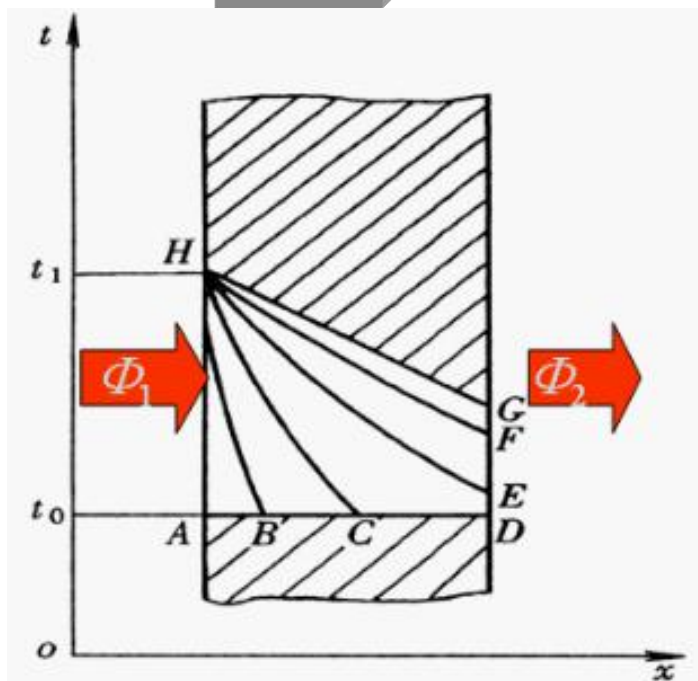
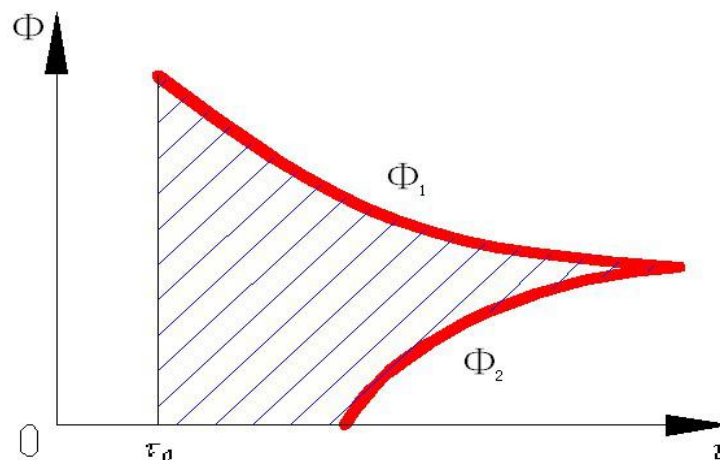
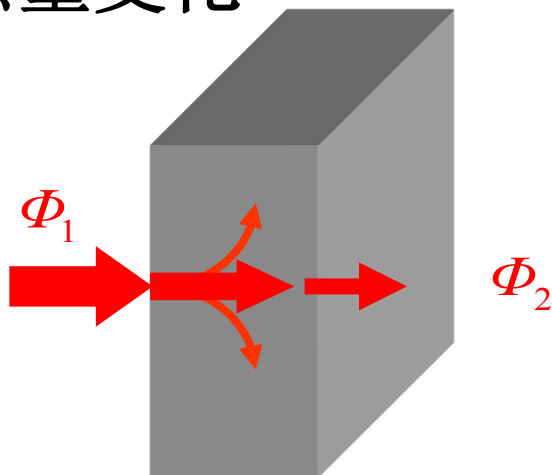
3. 在垂直于热量传递方向的每一个截面上，导热热量处处不同



判断以下三图处于非稳态导热的何种阶段？



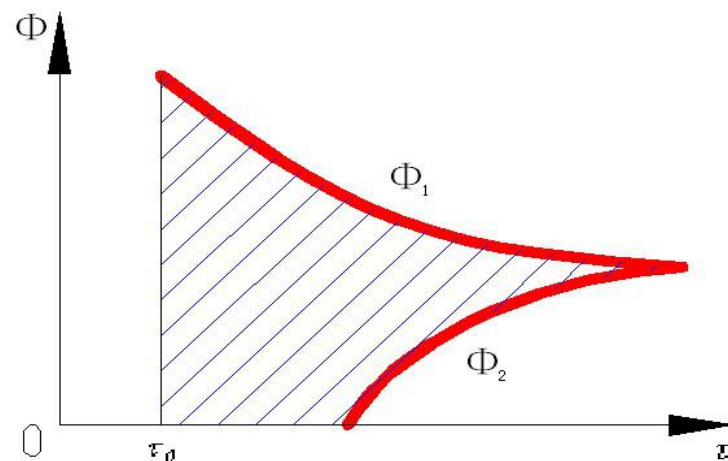
3. 热量变化



在平壁右侧表面温度开始升高以前，平壁右侧与周围环境并无换热 \Rightarrow 从平壁左侧得到的热量 Φ_1 完全储蓄于平壁之中，用以提高自身的温度。

3. 热量变化

从某一时刻开始平壁右侧才向外散热。随着平壁内的温度逐渐升高 \Rightarrow 左侧表面吸热量 $\Phi_1 \downarrow$ ，右侧表面散热量 $\Phi_2 \uparrow$ 。



当 $\Phi_1 = \Phi_2$ 时，进入新的稳态导热阶段。

两条曲线间的面积（阴影部分）则为平壁在瞬态导热过程中所获得的热量，以热力学能的形式储存于平壁之中。

4. 直角坐标下的控制方程 (λ 为常数)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 t + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

初始条件: $t = f(x, y, z, \tau = 0) = f(x, y, z)$ 给定

● 初始温度均匀: $t(x, y, z, 0) = t_0$

BC (边界条件): I, II, III类边界条件

● 第三类边界条件: $-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = h(t_w - t_f)$

四、热扩散率

1. 定义 $a = \frac{\lambda}{\rho c}, m^2/s$ 物性参数

λ 越大，一定时间内可传递更多热量，
 ρc 越小，温度上升1度所需热量越少

2. 物理意义：表征物体内部温度趋于均匀化的能力，或者说传递温度变化的能力

3. 举例

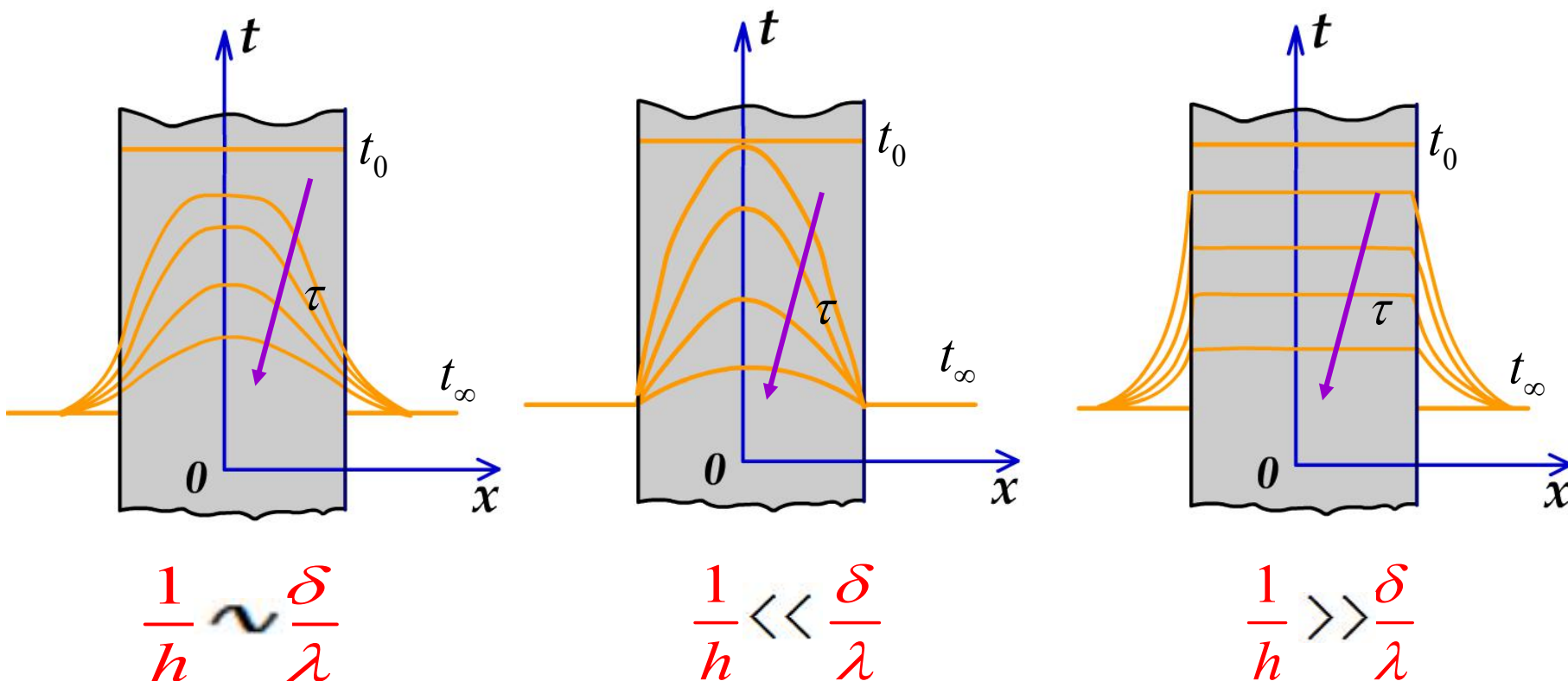
①可以用手握木棒在火炉上加热，而不敢用手握铁棒

4. a 与 λ

- ① 稳态导热温度分布，一般最多仅与 λ 有关
- ② 非稳态导热温度分布，一般与 λ 及 a 均有关

五、第三类边界下非稳态导热的定性分析

第三类边界下非稳态导热是最常见的一种情况，根据导热体材料性质和表面换热条件分三种情况。



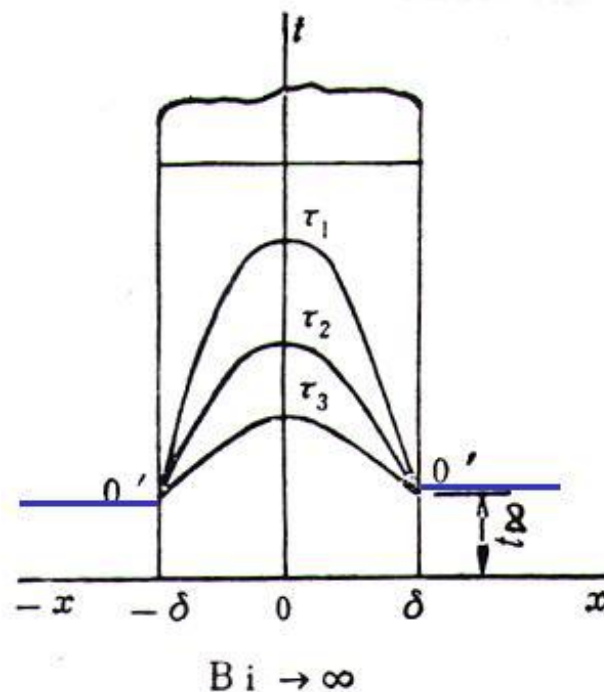
毕渥准则数 $Bi = \frac{hl}{\lambda}$ 式中 l 为特征尺度

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{\delta/\lambda}{1/h}$$

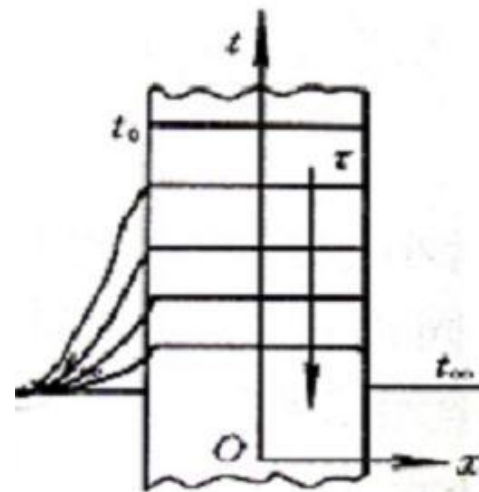
物体内部导热热阻
物体表面对流换热热阻

(1) $Bi \rightarrow \infty$, 表示表面传热系数 $h \rightarrow \infty$ ($Bi = h\delta/\lambda$), 对流换热热阻 $\rightarrow 0$ 。平壁的表面温度几乎从冷却过程一开始, 就立刻降到流体温度 t_∞ 。

III BC \rightarrow I BC

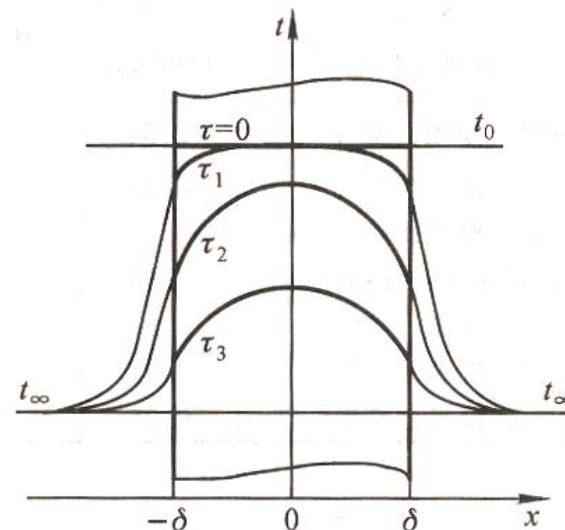


(2) $Bi \rightarrow 0$, 表示物体的导热系数很大、导热热阻 $\rightarrow 0$ ($Bi = h\delta/\lambda$)。任何时间物体内的温度分布都趋于均匀一致。



(b) $Bi \rightarrow 0$

(3) $0 < Bi < \infty$, 情况介于 (1) 和 (2) 之间。



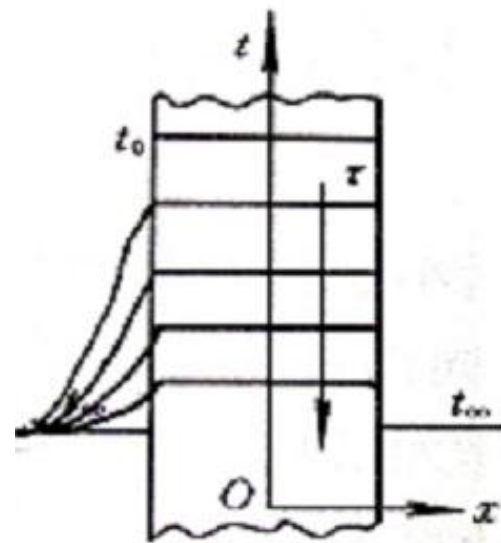
(c) Bi 为有限大小

§ 3-2 集总参数的简化分析法

一、集总体的概念(lumped parameter method)

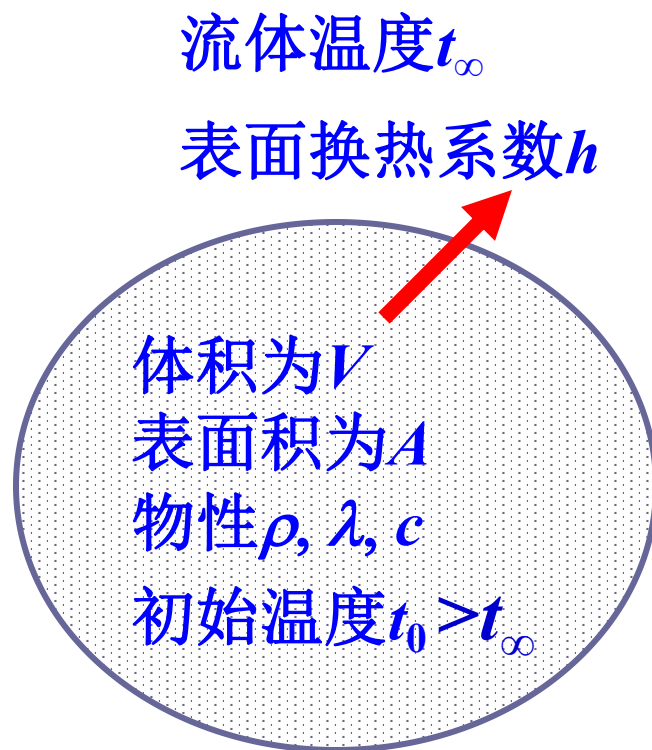
1. $Bi \rightarrow 0$

内部导热热阻远小于表面换热热阻的非稳态导热体称为集总体，任意时刻导热体内部各点温度接近均匀，这样导热体的温度只随时间变化，而不随空间变化，故又称之为**零维**问题。



(b) $Bi \rightarrow 0$

2. 优点：可以处理任意形状的物体



3. 数学描写

①控制方程（物体内部无温差）

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

②确定广义热源项

与分析肋片导热问题类似，发生热量交换的边界不是计算边界，因此界面上交换的热量折算成整个物体的体积热源

控制方程 $\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$

$$Ah(t - t_{\infty}) = -V\dot{\Phi}$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{Ah(t - t_{\infty})}{V}$$

内热源法：不推荐

直接由能量平衡（推荐）：

能量守恒方程
直接获得

$$\rho V c \frac{dt}{d\tau} = -hA(t - t_{\infty})$$

热力学能增量

表面对流换热热量

③没有BC，只有IC $\tau = 0, t = t_0$

④求解

令： $\theta = t - t_{\infty}$ — 过余温度

方程式及边界条件可改写为

$$\rho V c \frac{dt}{d\tau} = -hA(t - t_{\infty})$$

$$\rho V c \frac{d\theta}{d\tau} = -hA\theta \quad \tau = 0, \theta_0 = t_0 - t_{\infty}$$

分离变量得

$$\frac{1}{\theta} d\theta = -\frac{hA}{\rho V c} d\tau$$

对 τ 从 0 到任意时刻 τ 积分

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\theta} d\theta = -\frac{hA}{\rho V c} \int_0^{\tau} d\tau$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{\rho V c} \tau}$$

⑤解的分析

(1) θ 与几何位置无关, $\theta = \theta(\tau)$

(2) θ 与 λ 以及 a 有关

(3) 上述思想可用于物体被加热或冷却

⑥两个无量纲数

上式中右端的指数可作如下变化

$$\frac{hA}{\rho V c} \tau = \frac{h(V/A)}{\lambda} \frac{a \tau}{(V/A)^2} = Bi_V Fo_V$$

式中 Bi_V 是特征尺度 l 用 V/A 表示的毕渥数。

$$Bi = \frac{hl}{\lambda} = \frac{l/\lambda}{1/h} = \frac{\text{物体内部导热热阻}}{\text{物体表面对流换热热阻}}$$

无量纲
热阻

Fo_V 是特征尺度 l 用 V/A 表示的傅里叶数，无量纲时间

$$Fo = \frac{\tau}{l^2/a} = \frac{\text{换热时间}}{\text{边界热扰动扩散到 } l^2 \text{ 面积上所需的时间}}$$

无量纲
时间

$$Bi = \frac{hl}{\lambda} = \frac{l/\lambda}{1/h} = \frac{\text{物体内部导热热阻}}{\text{物体表面对流换热热阻}}$$

$$Fo = \frac{\tau}{l^2/a} = \frac{\text{换热时间}}{\text{边界热扰动扩散到} l^2 \text{面积上所需的时间}}$$

Bi 越小，表示内部热阻小或外部热阻大，则内部温度就越均匀，集总参数法的误差就越小。

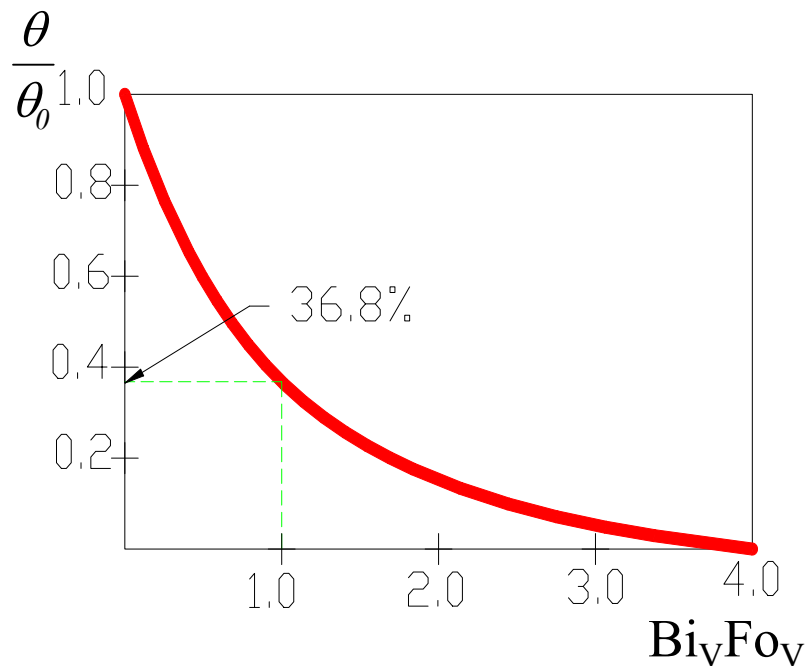
Fo 越大，热扰动就能越深入传播到物体内部，物体各点的温度就越接近周围介质的温度。

Bi 与 Fo 一起决定瞬态导热过程中物体的温度分布



二、分析解的应用

1. 时间常数



①定义

令使 $\frac{hA}{\rho V c} \tau = 1$ 的时间为 τ_c ，时间常数。反映了物

体对温度变化动态响应的快慢， $\tau_c \downarrow$ ，响应越快

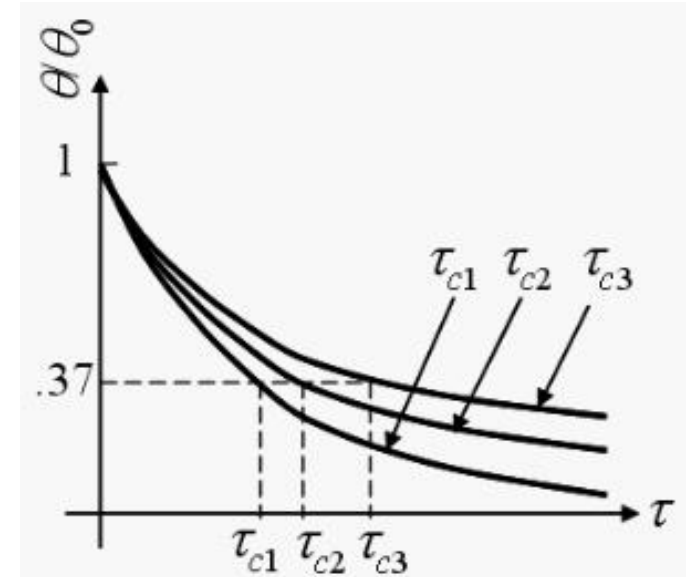
$$\tau_c = \frac{\rho V c}{hA}$$

②测量体温时，需保持5min以上时间

$$\frac{hA}{\rho Vc} \tau \rightarrow \infty, \theta = t - t_{\infty} \rightarrow 0$$

③影响因素(热容量，换热条件)

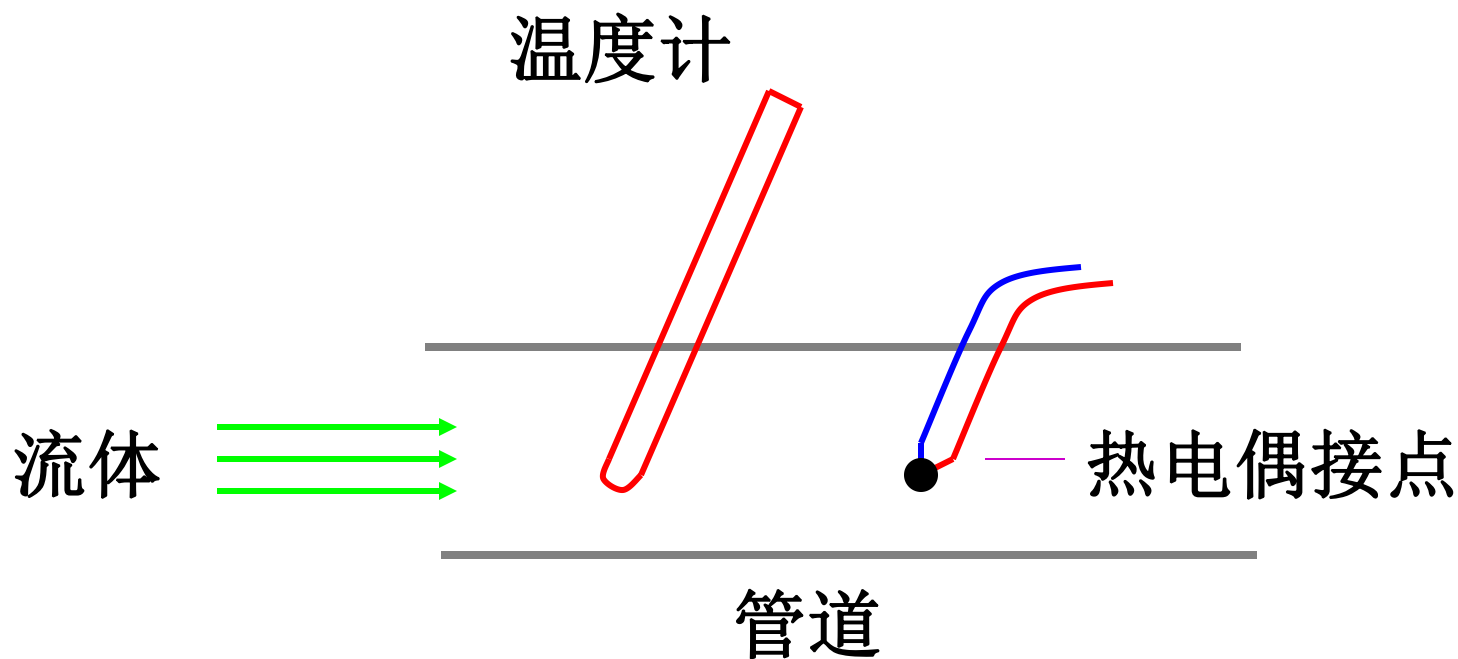
$$\rho Vc \downarrow \quad hA \uparrow \quad \frac{V}{A} \downarrow$$



- 体面比的降低以及 h 的升高还要考虑满足集总参数法的条件

$$\text{Bi} = \frac{h(V/A)}{\lambda} \rightarrow 0$$

④动态测量时，时间常数越小，越能正确反映被测温度



热电偶丝很细，直径小(0.05-0.02mm)

2. 非稳态导热计算

导热体在时间 $0 \sim \tau$ 内传给流体的总热量可以从两种角度分析：**Fourier**导热定律以及热力学第一定律

Fourier导热定律: $\Phi(\tau) = -\rho c V \frac{dt}{d\tau} = (t_0 - t_\infty) hA \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right)$

$$Q_{0-\tau} = \int_0^\tau \Phi(\tau) d\tau$$

热力学第一定律:

$$Q_{0-\tau} = \rho V c (t_0 - t)$$

$$= \rho V c (t_0 - t_\infty + t_\infty - t)$$

$$Q_{0-\tau} = \theta_0 \rho V c \frac{(t_0 - t_\infty) - (t - t_\infty)}{t_0 - t_\infty} = \theta_0 \rho V c (1 - e^{-\frac{hA}{\rho V c} \tau}) \quad [\text{J}]$$

3. 符合集总体的判别条件

① $Bi_V = \frac{hl}{\lambda} < 0.1$ M 过余温度最大偏差小于5%

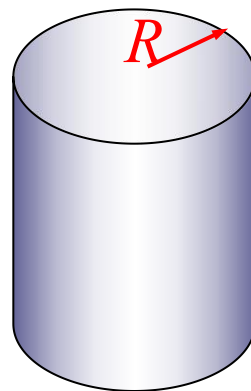
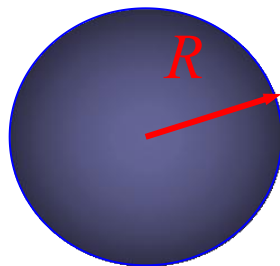
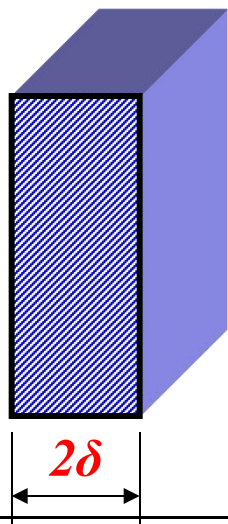
□ h 为表面传热系数 □ λ 为导热物体的导热系数

□ l 为特征长度

对于厚为 2δ 的平板: $M=1$ $V/A=\delta$

半径为 R 的圆柱: $M=1/2$ $V/A=\frac{1}{2}R$

半径为 R 的球: $M=1/3$ $V/A=\frac{1}{3}R$



常见的计算问题

若已知物体的初始温度 t_0 ，环境温度 t_∞ ，物体与环境间的对流传热系数 h ，求物体温度为 t 时所需要的时间。

1. 确定特征尺寸；

2. 估计毕奥数 $Bi = \frac{h\delta}{\lambda}$ ；

3. 计算 $\frac{hA}{\rho cV}$

4. 根据 $\theta = \theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho cV}\tau}$ ，整理出 $\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho cV}\tau}$

计算出所需时间 τ 。



例题3-2 一温度为 20°C 的圆钢，长 0.3m ，直径为 0.06m ，导热系数为 $35\text{W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$ ，密度为 $7800\text{kg}/\text{m}^3$ ，比热容为 $460\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。通过长 6m ，温度为 1250°C 的加热炉时表面传热系数为 $100\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ ，欲将圆钢加热到 850°C ，试求圆钢通过加热炉的速度。

解 (1) 特征尺寸

$$l_e = \frac{V}{A} = \frac{l\pi d^2/4}{\pi dl + 2\pi d^2/4} = \frac{ld}{4l + 2d} = \frac{0.3 \times 0.06}{4 \times 0.3 + 2 \times 0.06} = 0.0136\text{m}$$

(2) 用比渥数判断

$$Bi_V = \frac{hl_e}{\lambda} = \frac{100 \times 0.0136}{35} = 0.039 < 0.1 \times 0.5 = 0.05$$

可用集总参数法分析。



(3) 通过加热炉所需的时间

因
$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = 0.342 e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau}$$

将各已知数据代入上式

$$\frac{850 - 1250}{20 - 1250} = \exp\left(-\frac{100}{780 \times 460 \times 0.013} \tau\right)$$

解得 $\tau = 548.14 \text{ s}$

(4) 圆钢通过加热炉的速度

$$u = \frac{\text{距离}}{\text{时间}} = \frac{6}{548.14} = 0.0109 \text{ m/s}$$



例题1 一直径为**5cm**的钢球，初始温度为**450℃**，突然被置于**30℃**的空气中。设钢球表面与环境间的表面传热系数为**24** W/(m²·K) ,试计算钢球冷却到**300℃**时所需要的时间。已知钢球的比热容 $c=0.48\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, $\rho = 7753\text{kg}/\text{m}^3$, $\lambda = 33\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$

解 (1) 用毕奥数判断

$$\begin{aligned} Bi_V &= \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{hR}{3\lambda} \\ &= \frac{24 \times 0.025}{3 \times 33} = 0.00606 < 0.1/3 = 0.0333 \end{aligned}$$

可以采用集总参数法。



(2) 计算所需要的时间

$$\begin{aligned}\frac{hA}{\rho cV} &= \frac{h \times 4\pi R^2}{\rho c \times \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3h}{\rho cR} \\ &= \frac{3 \times 24}{7753 \times 480 \times 0.0025} = 7.74 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

根据 $\theta = \theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho cV}\tau}$, 有

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{300 - 30}{450 - 30} = e^{-7.74 \times 10^{-4} \tau}$$

解后, 得 $\tau = 570 \text{ s} = 0.158 \text{ h}$



例题 一直径为5cm、长为30cm的钢圆柱体，初始温度为30℃，将其放入炉温为1200℃的加热炉中加热，升温到800℃方可取出。设钢圆柱体与烟气间的复合表面传热系数为140 W/(m².K)，钢的物性参数：比热容 $c = 0.48 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ，密度 $\rho = 7753 \text{ kg}/\text{m}^3$ ，热导率 $\lambda = 33 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{°C})$ 。问需多长时间才能达到要求。

解 (1) 用比渥数判断

$$Bi_V = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{h \left[(\pi d^2/4) / (\pi dl + 2\pi d^2/4) \right]}{\lambda}$$

$$= \frac{h}{\lambda} \frac{dl/4}{l + d/2} = \frac{140}{33} \times \frac{0.50 \times 0.3/4}{0.3 + 0.025} = 0.049 < 0.1 \times 0.5 = 0.05$$

结论：可以采用集总参数法。



(2) 计算所需要的时间

$$\begin{aligned} \text{因 } \frac{hA}{\rho cV} &= \frac{h}{\rho c} \left(\frac{V}{A} \right)^{-1} = \frac{h}{\rho c} \frac{4(l+d/2)}{dl} \\ &= \frac{140 \times 4 \times 0.325}{7753 \times 0.48 \times 10^3 \times 0.05 \times 0.3} = 0.326 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{且 } \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{800 - 1200}{30 - 1200} = 0.342$$

$$\text{而 } \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho cV} \tau}, \text{ 将所求各数值代入此式后有}$$

$$0.342 = \exp(-0.326 \times 10^{-2} \tau)$$

$$\text{解得 } \tau = 329 \text{ s} = 5.48 \text{ min}$$



§ 3-3 一维非稳态导热的分析解

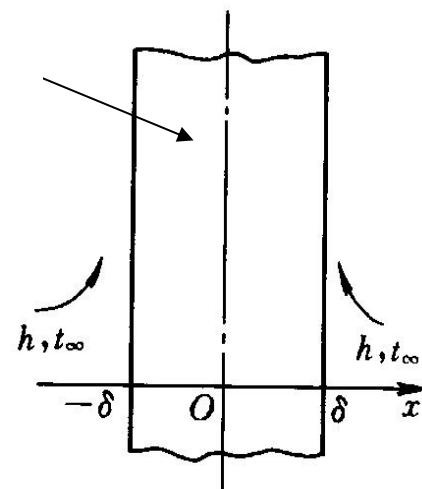
当所遇到的非稳态导热问题 $Bi > 0.1$ ，或者研究目的就是要确定物体内部温度的差异，此时，就不能将问题简化为集总体来处理了。

本节主要介绍一维非稳态导热分析解的结果，及由解的结果给出的实际计算方法。

一、无限大平板的分析解

1. 物理问题描述

厚度 2δ 的无限大平壁， λ 、 a 为已知常数， $\tau=0$ 时温度为 t_0 ，突然将其放置于侧介质温度为 t_∞ 并保持不变的流体中，两侧表面与介质之间的表面传热系数为 h 。



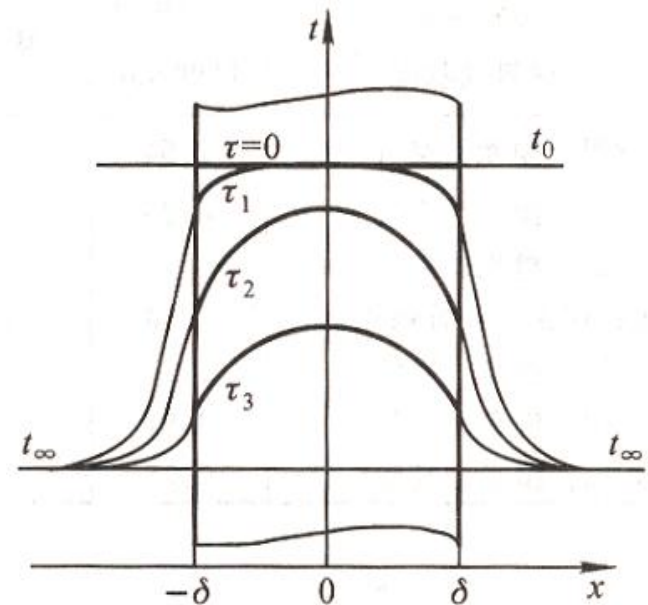
无限大平壁的两层含义：

- (1) 平板的长度和宽度远大于其厚度
- (2) 几何尺度相当，但厚度四周绝热良好

2、数学描述

由于平板对称，因此只取平板的一半进行研究，以平板的中心为坐标原点建立坐标系，如图所示。

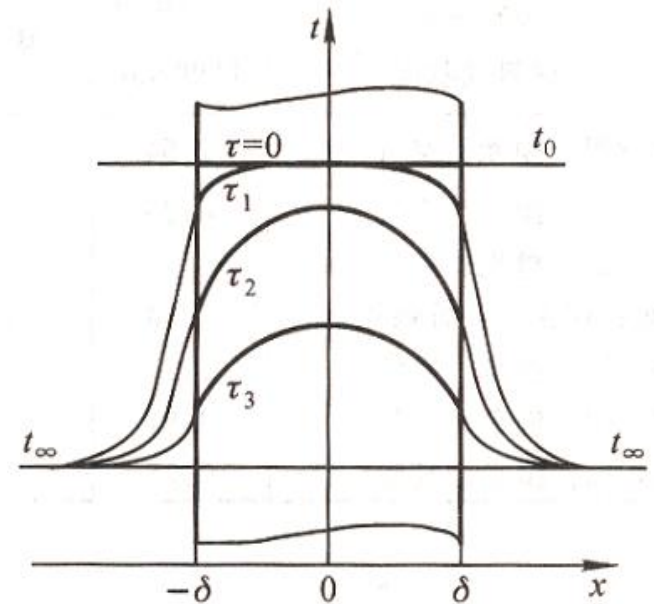
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \quad t = t_0 \\ x = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ x = \delta, \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = h(t|_{x=\delta} - t_\infty) \end{array} \right.$$



为了求解上的方便，引入过余温度

$$\theta = t(x, \tau) - t_{\infty} \quad \text{— 过余温度}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \quad \theta = t_0 - t_{\infty} = \theta_0 \\ x = 0, \quad \partial \theta / \partial x = 0 \\ x = \delta, \quad -\lambda \partial \theta / \partial x = h \theta \Big|_{x=\delta} \end{array} \right.$$



采用分离变量法求解：取 $\theta = X(x) \cdot \phi(\tau)$

$$\boxed{\text{只为 } \tau \text{ 的函数}} \frac{1}{a\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \boxed{\text{只为 } x \text{ 的函数}}$$

只能为常数：

$$\frac{1}{a\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{const}$$

3. 解的结果

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n \delta)^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \frac{\sin(\beta_n \delta) \cos[(\beta_n \delta) \frac{x}{\delta}]}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)}$$

$$\theta = t - t_{\infty}$$

$$\operatorname{tg}(\beta_n \delta) = \frac{Bi}{\beta_n \delta} \quad \tan(\mu_n) = \frac{Bi}{\mu_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

温度分布影响因素

(1) $Bi = h\delta/\lambda$

热阻对比，边界条件

(2) $Fo = a\tau/\delta^2$

傅里叶数—表示过程进行的深度

(3) $\eta = \frac{x}{\delta}$

无量纲距离

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n \delta)^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \frac{\sin(\beta_n \delta) \cos[(\beta_n \delta) \frac{x}{\delta}]}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta_n \delta) = \frac{Bi}{\beta_n \delta} \quad \tan(\mu_n) = \frac{Bi}{\mu_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a, \tau, \delta, \lambda, h, x \quad \longrightarrow \quad \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = f(Bi, \quad Fo, \quad \frac{x}{\delta})$$

$$Fo \uparrow, \quad \frac{\theta}{\theta_0} \downarrow, \quad t(x, \tau) \rightarrow t_{\infty}$$

另一种方法

变量替换和无因次化

分别引入引入过余温度、无因次过余温度和无因次坐标

$$\theta = t(x, \tau) - t_{\infty}, \quad \bar{\theta} = \frac{t(x, \tau) - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\delta}, \quad \text{定义 } Bi = \frac{h\delta}{\lambda}, \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$$

上面的式子变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \quad t = t_0 \\ x = 0, \quad \partial t / \partial x = 0 \\ x = \delta, \quad -\lambda \partial t / \partial x = h(t|_{x=\delta} - t_{\infty}) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} \quad 0 < \bar{x} < 1, \tau > 0 \\ Fo = 0, \quad \bar{\theta}(\bar{x}, 0) = 1 \\ \bar{x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \bar{x} = 1, \quad \frac{\partial \bar{\theta}(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}} = Bi \bar{\theta}(\bar{x}, Fo) \end{array} \right.$$

问题的解析解

由于 $\bar{\theta}$, $Bi = \frac{h\delta}{\lambda}$, $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$ 都是无因次量, 边界条件要么是

常数, 要么是无因次量之间的关系式, 所以该问题的解一定
是无因次量间的关系, 即

$$\bar{\theta} = f_1(\bar{x}, Fo, Bi)$$

通过分离变量的方法可以获得级数形式的解

$$\bar{\theta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n)}{\sin(\mu_n) \cos(\mu_n) + \mu_n} \cos(\mu_n \bar{x}) e^{-\mu_n^2 Fo}$$

特征值 μ_n 从下式求出 $\tan \mu_n = \frac{h\delta}{\lambda \mu_n} = \frac{Bi}{\mu_n}$



二、非稳态导热的正规状况阶段

$$\bar{\theta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n)}{\sin(\mu_n) \cos(\mu_n) + \mu_n} \cos(\mu_n \bar{x}) e^{-\mu_n^2 Fo}$$

- 当 $Fo > 0.2$ 后，对于上式，只取级数的第一项计算和完整级数计算误差很小($< 1\%$)。并且平板中任一点的过余温度与平板中心的过余温度之比只与几何位置和边界条件有关，而与时间无关。
- 这表明：初始条件的影响已消失，通常将这一阶段定义为非稳态导热过程的正规状况阶段(工程技术关心的非稳态导热常处于正规状况)。

Regular regime/fully developed

1. 正规状况阶段的数学含义

级数形式的解
$$\bar{\theta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n)}{\sin(\mu_n)\cos(\mu_n) + \mu_n} \cos(\mu_n \bar{x}) e^{-\mu_n^2 Fo}$$

当 $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \geq 0.2$ 时，级数除第一项外可以忽略，此时

$$\bar{\theta} = 2 \exp(-\mu_1^2 Fo) \frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1)\cos(\mu_1) + \mu_1} \cos(\mu_1 \bar{x})$$

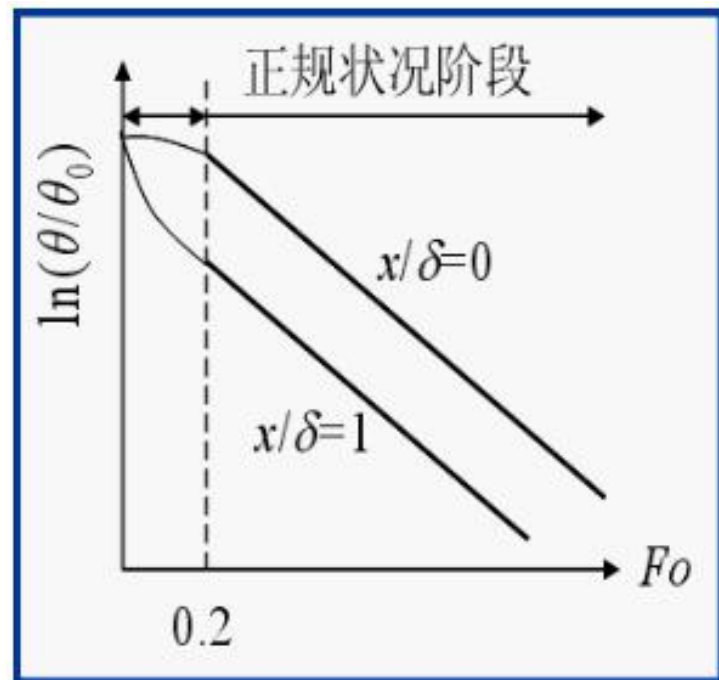
在平壁内任意一点上，

$$\ln \bar{\theta} \propto -\mu_1^2 Fo$$

此时称为导热的正规状况阶段，这一特点可用来测量热扩散率 a 。

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos \left[(\beta_1 \delta) \frac{x}{\delta} \right]$$

不同无量纲位置处过余温度的对数以同样速率变化（衰减）



这时比值与 τ 无关，仅与几何位置 (x/δ) 及边界条件 (Bi 数) 有关。即初始条件的影响已经消失。无论初始分布如何，无量纲温度都是一样的。

这是非稳态导热的正规状态或充分发展阶段。

$Fo < 0.2$ 则是瞬态温度变化的初始阶段或非正规状况阶段。

正规状况阶段

在对称面上, $\bar{x} = 0$

$$\bar{\theta}_m = 2 \exp(-\mu_1^2 Fo) \frac{\sin(\mu_1)}{\sin(\mu_1) \cos(\mu_1) + \mu_1} = f_2(Fo, Bi)$$

对于任何位置与对称面过余温度的比值, 有

$$\frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_m} = \cos(\mu_1 \bar{x}) = f_3(Bi, \bar{x})$$

在任意位置,

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_m} \bar{\theta}_m = f_2(Fo, Bi) f_3(Bi, \bar{x})$$



2. 采用Heisler图等计算图线

对于无限大平板按如下公式和图3-6、3-7和3-8计算。

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}$$

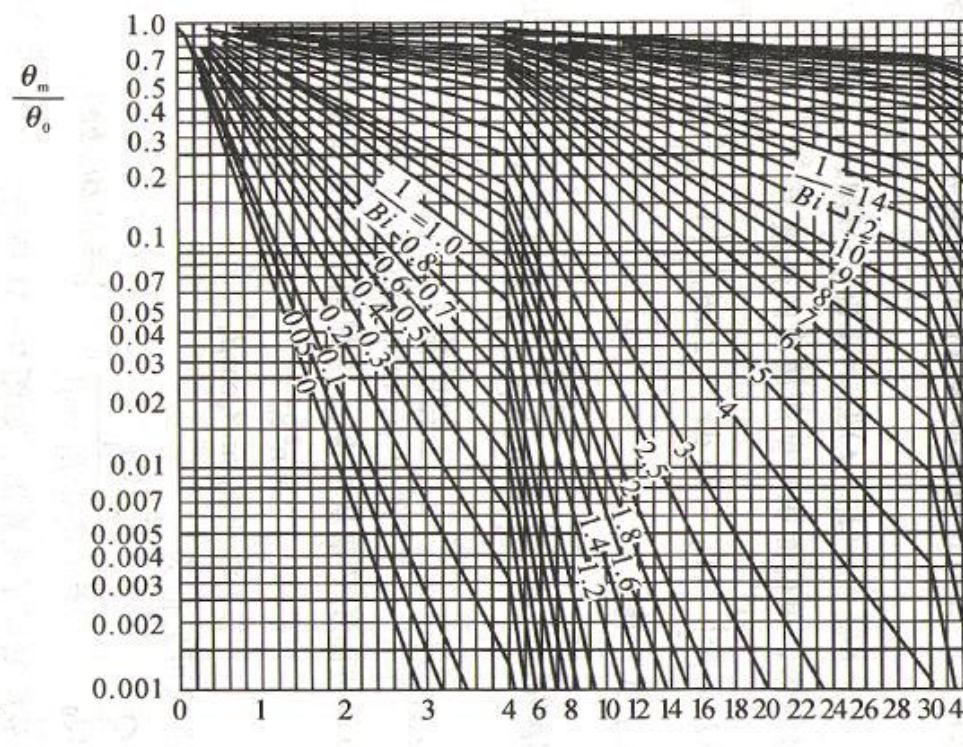
$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad f(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}) \quad f(\text{Bi}, \text{Fo})$$

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta(0, \tau)} = \cos(\mu_1 \eta)$$

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = A \exp(-\mu_1^2 \text{Fo}) f(\mu_1 \eta) \quad \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(0, \tau)}{\theta_0} = A \exp(-\mu_1^2 \text{Fo})$$

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}; \quad \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(\tau)}{\theta_0}$$



- 当 Bi 数一定时, θ 随 Fo 的增加而减小, 即随着时间的增加 (Fo 增加), 物体温度越来越接近流体温度。
- 当 Fo 数一定时, Bi 越大 ($1/Bi$ 越小), θ_m / θ_0 就越小, 这是因为 $Bi = h\delta / \lambda$ 越大, 表面换热越强, 中心温度就越快地接近周围液体温度。

无限大平壁中心温度的诺谟图 (θ_m / θ_0)

厚度为 2δ 的无限大平壁的中心平面温度 $\theta_m / \theta_0 = f(Bi, Fo)$

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$$

P68图3-6

直角坐标—对数坐标 (正规状况 $Fo > 0.2$)

(1) Fo数和Bi数的物理意义及对温度分布的影响

$$Bi = \frac{hl}{\lambda} = \frac{l/\lambda}{1/h} = \frac{\text{物体内部导热热阻}}{\text{物体表面对流换热热阻}}$$

$$Fo = \frac{\tau}{l^2/a} = \frac{\text{换热时间}}{\text{边界热扰动扩散到} l^2 \text{面积上所需的时间}}$$

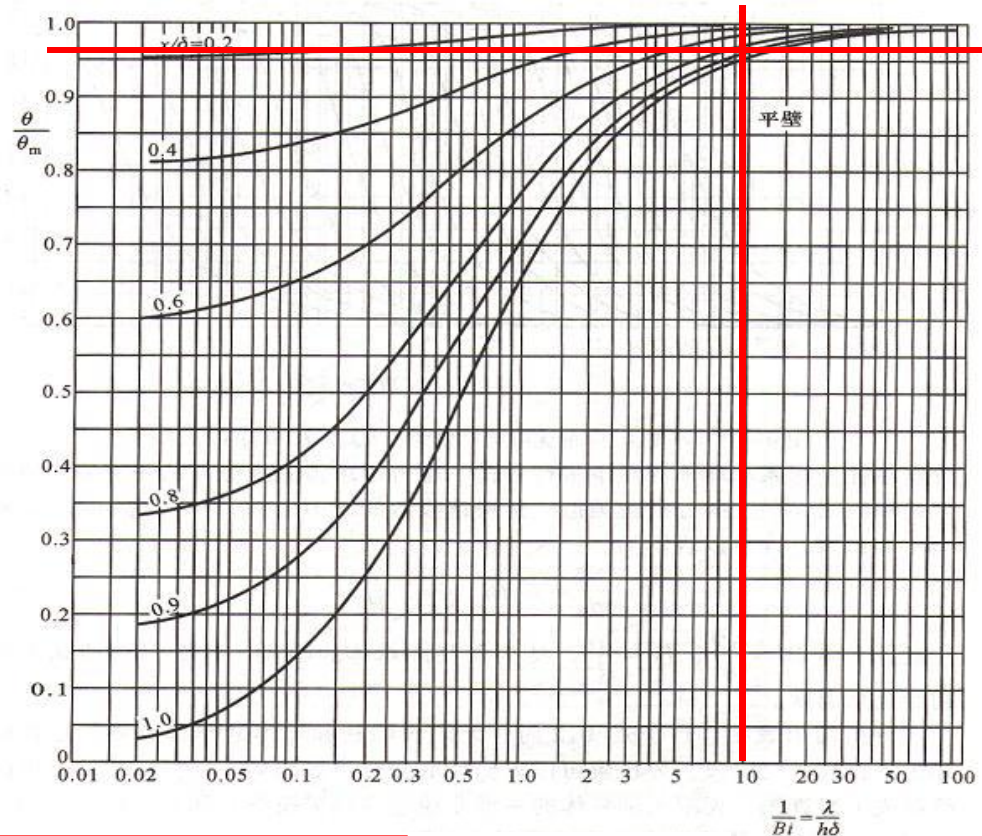
Bi_v 越小，表示内部热阻小或外部热阻大，则内部温度就越均匀。

Fo 越大，热扰动就能越深入传播到物体内部，物体各点地温度就越接近周围介质的温度。



$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}; \quad \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = f\left(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}\right) \quad \left(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}\right) \Rightarrow \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)}$$

- 当 $1/\text{Bi}$ 数接近0时，即 Bi 数很大时，表面过余温度很小，中心处很大。
- 当 $1/\text{Bi}$ 数大于10时，即 Bi 小于0.1，所有位置处的过余温度差值小于5%，可采用**集总参数法**

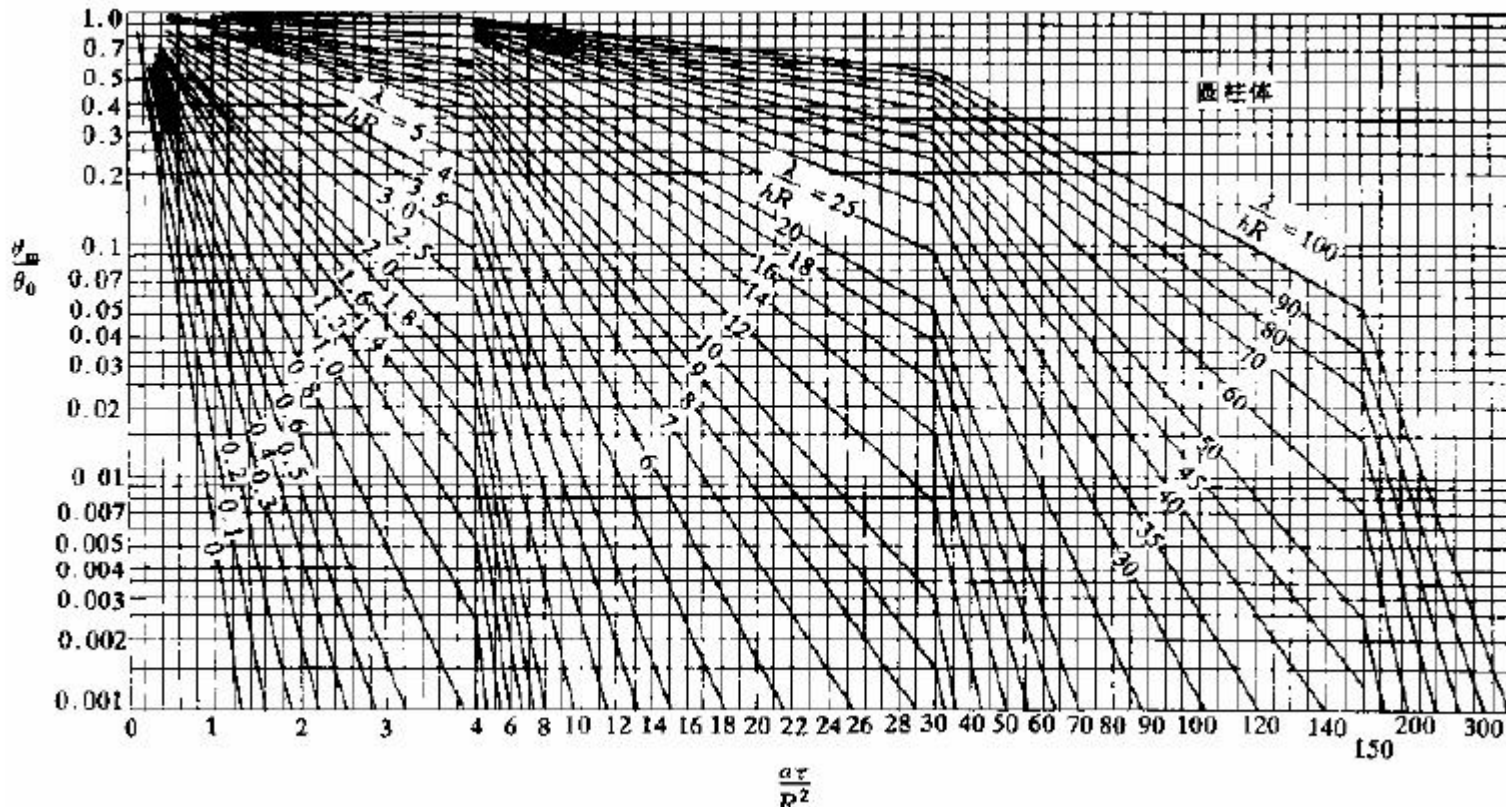


无限大平壁中心温度的 θ/θ_m 曲线

P69图3-7

辅图特点：横坐标一对数坐标 纵坐标一直角坐标

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}; \quad \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0} = f(\text{Bi}, \text{Fo}) \quad (\text{Bi}, \text{Fo}) \Rightarrow \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}$$



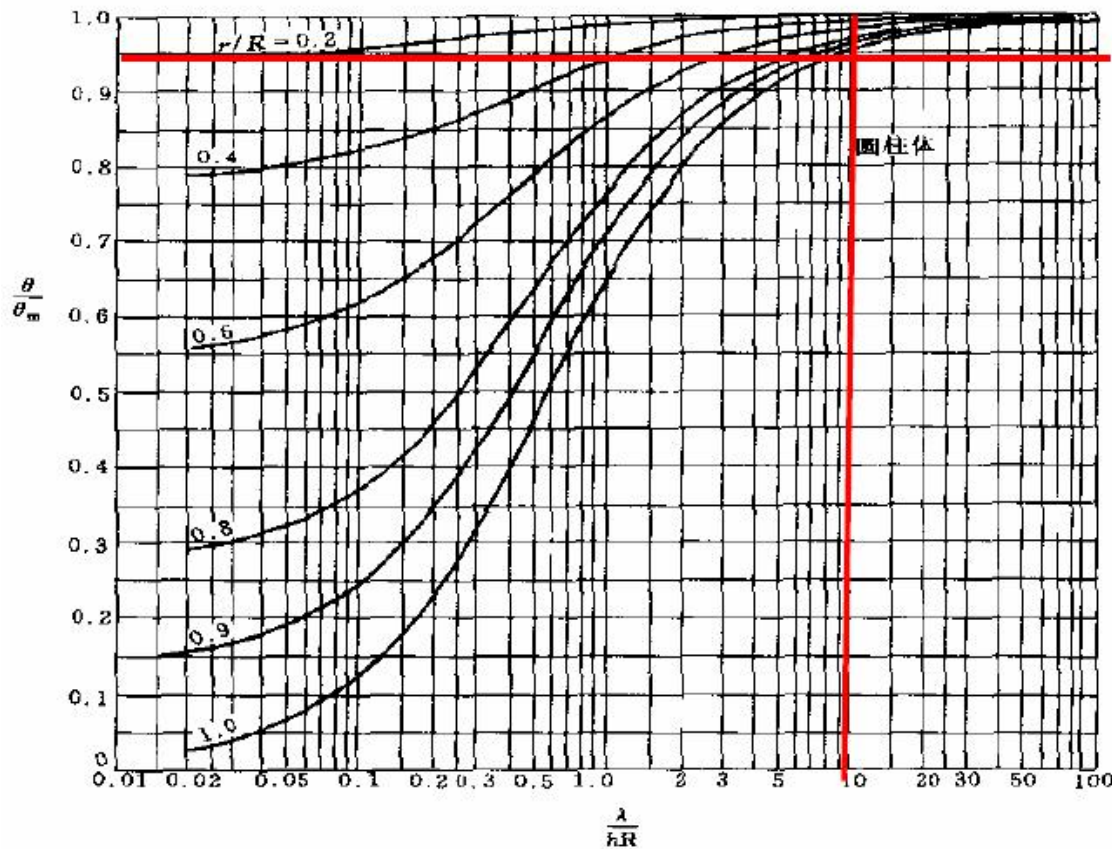
无限长圆柱中心温度的诺谟图 (θ_m/θ_0)

P71图3-9

主图特点：横坐标一直角坐标 纵坐标一对数坐标



$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}; \quad \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = f\left(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}\right) \quad \left(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}\right) \Rightarrow \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)}$$



P72图3-10

无限长圆柱中心温度的 θ/θ_m 曲线

4. 如何利用线算图？

(1) 已知时间求温度：计算Bi数、Fo数和 x/δ ，从主图中查找 θ_m / θ_0 和从辅图中查找 θ / θ_m ，计算出 $\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty}$ ，最后求出温度 t

(2) 已知温度求时间：计算Bi数、 x/δ 和 θ / θ_0 ，从辅图中查找 θ / θ_m ，计算 θ_m / θ_0 然后从主图中查找 Fo ，再求出时间 τ

5. 适用范围

- (1) $Fo > 0.2$, 即要求正规状况阶段级数解只需取第一项
- (2) 边界条件为第三类或者第一类 ($Bi \rightarrow \infty$)
- (3) 边界条件一侧绝热, 另一侧为第三类
- (4) 初始温度均匀
- (5) 加热或冷却均可

四、求解非稳态导热问题的一般步骤

(1) 先校核Bi数是否满足集总参数法条件，若满足，则优先考虑集总参数法

(2) 如不能用集总参数法，则尝试用Campo拟合公式或Heisler图

(3) 若上述方法都不行则采用数值解

例题 一块初温为 20°C ，厚度为 10cm 的钢板，密度为 $7800\text{kg}/\text{m}^3$ ，比热容为 $460.5\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ，导热系数为 $53.5\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ，放入 1200°C 的加热炉中加热，表面传热系数为 $407\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。问单面加热 30min 时中心温度为多少？如两面加热要达到相同的中心温度需要多少时间？

解

(1) 单面加热

单面加热相应于一侧面吸热，另一面绝热。而两面加热的平板在中心面上是绝热的，这样可以假定：一块厚度为 $2\delta = 20\text{cm}$ 的钢板两面对称加热， $\delta = 10\text{cm} = 0.1\text{m}$ ，

钢板的中心处,相当于 $\frac{x}{\delta} = \frac{5}{10} = 0.5$



热扩散率

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{535}{460.5 \times 7800} = 1.489 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

傅里叶数

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{1.489 \times 10^{-5} \times 30 \times 60}{0.12} = 2.68$$

$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha\delta} = \frac{53.5}{407 \times 0.1} = 1.31$$

查图2得

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = 0.21$$

又由 $\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{h\delta} = 1.31$ 和 $\frac{x}{\delta} = \frac{5}{10} = 0.5$, 查图得 $\frac{\bar{\theta}}{\theta_m} = 0.93$

则钢板中心的相对过余温度为

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{\theta}}{\theta_m} \theta_m = 0.93 \times 0.21 = 0.195$$



钢板中心的温度为

$$t = t_m = t_\infty + 0.195(t_0 - t_\infty) = 1200 + 0.195(20 - 1200) = 970^\circ\text{C}$$

(2) 两侧加热

此时, 尺寸 $\delta = 0.05\text{m}$

$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{h\delta} = \frac{53.5}{407 \times 0.05} = 2.62$$

中心处的相对过余温度 $\overline{\theta}_m = \frac{t_m - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{970 - 1200}{20 - 1200} = 0.195$

由 $\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{h\delta} = 2.62$ 和 $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = 4.8$ 查图2-3得 $\overline{\theta}_m = 0.195$

两边加热时, 中心处达 970°C 所需时间为

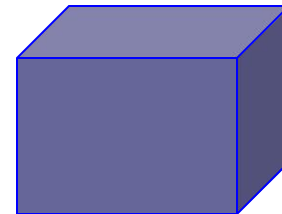
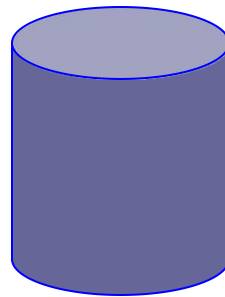
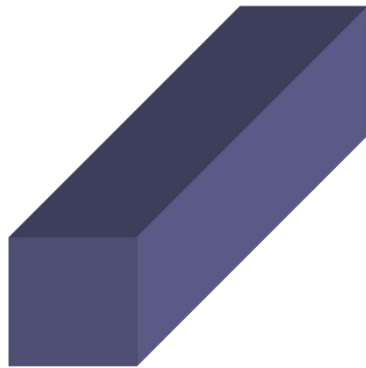
$$\tau = \frac{Fo\delta^2}{a} = \frac{4.8 \times 0.05^2}{1.489 \times 10^{-5}} = 806\text{s} = 13.4\text{min}$$

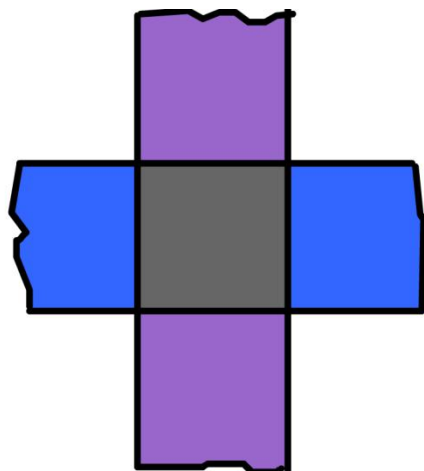


§ 3-4 二维及三维非稳态导热的求解

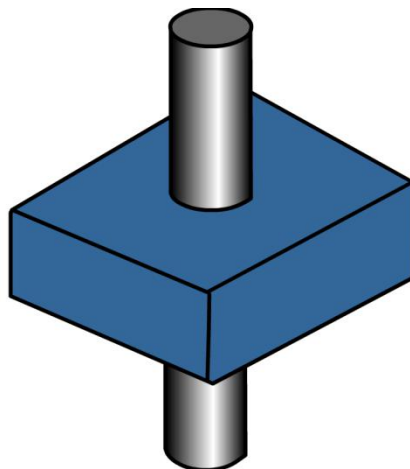
一、可以用乘积解法求解的几个典型问题

在二维和三维非稳态导热问题中，几种典型几何形状物体的非稳态导热问题可以利用一维非稳态导热分析解的组合求得。**无限长方柱体、短圆柱体及短方柱体**就是这类典型几何形状的例子。

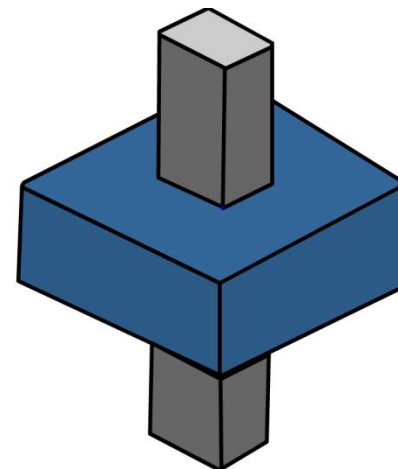




无限长方柱



短圆柱

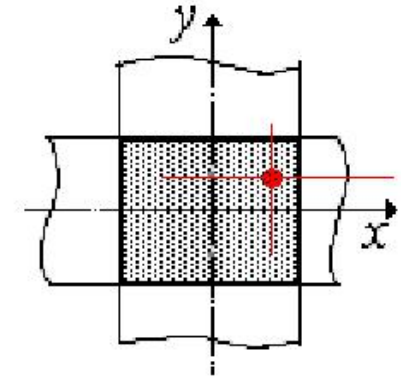


短方柱

矩形截面的无限长方柱体是由两个无限大平壁垂直相交而成；短圆柱是由一个无限长圆柱和一个无限大平壁垂直相交而成；短方柱体（或称垂直六面体）是由三个无限大平壁垂直相交而成；

对于无限长方柱体

$$\frac{\theta(x, y, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} \cdot \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_0}$$



(a) 无限长方柱

对于短圆柱体

$$\frac{\theta(x, r, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} \cdot \frac{\theta(r, \tau)}{\theta_0}$$

对于短方柱体

$$\frac{\theta(x, y, z, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} \cdot \frac{\theta(y, \tau)}{\theta_0} \cdot \frac{\theta(z, \tau)}{\theta_0}$$

对乘积法的理论解释

以无限长矩形截面柱体为例

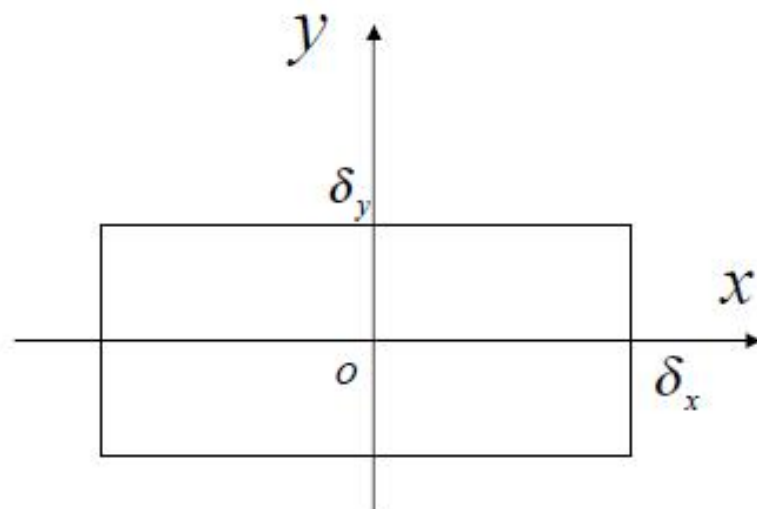
$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)$$

$$(0 < x < \delta_x, 0 < y < \delta_y, \tau > 0)$$

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad h\theta = -\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\delta_x}$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad h\theta = -\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=\delta_y}$$



定义无因次过余温度 $\bar{\theta} = \theta / \theta_0$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right)$$

$$\bar{\theta}(x, y, 0) = 1$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad h\bar{\theta} = -\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=\delta_x}$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad h\bar{\theta} = -\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right|_{y=\delta_y}$$

观察以下两个问题

$$\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x}{\partial x^2}$$

$$\bar{\theta}_x(x, 0) = 1$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}_x(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad h \bar{\theta}_x(\delta_x, \tau) = -\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}_x(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta_x}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \bar{\theta}_y}{\partial y^2}$$

$$\bar{\theta}_y(y, 0) = 1$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}_y(y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad h \bar{\theta}_y(\delta_y, \tau) = -\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}_y(y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=\delta_y}$$



考察一下 $\bar{\theta} = \bar{\theta}_x \bar{\theta}_y$ 是否满足原来的方程和定解条件

$$\frac{\partial(\bar{\theta}_x \bar{\theta}_y)}{\partial \tau} = \bar{\theta}_y \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial \tau} + \bar{\theta}_x \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial \tau}$$

$$a \left(\frac{\partial^2(\bar{\theta}_x \bar{\theta}_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{\theta}_x \bar{\theta}_y)}{\partial y^2} \right) = a \left(\bar{\theta}_y \frac{\partial^2(\bar{\theta}_x)}{\partial x^2} + \bar{\theta}_x \frac{\partial^2(\bar{\theta}_y)}{\partial y^2} \right)$$

$$\bar{\theta}(x, y, 0) = \bar{\theta}_x(x, 0) \bar{\theta}_y(y, 0) = 1$$

$$\left. \frac{\partial(\bar{\theta}_x \bar{\theta}_y)}{\partial x} \right|_{x=0} = \bar{\theta}_y \left. \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad h \bar{\theta}_x \bar{\theta}_y = -\lambda \left. \frac{\partial(\bar{\theta}_x \bar{\theta}_y)}{\partial x} \right|_{x=\delta_x}$$

$$\left. \frac{\partial(\bar{\theta}_x \bar{\theta}_y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \bar{\theta}_x \left. \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad h \bar{\theta}_x \bar{\theta}_y = -\lambda \left. \frac{\partial(\bar{\theta}_x \bar{\theta}_y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_y}$$



结论是什么？

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)_{p1} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)_{p2}$$

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_{p1} \bar{\theta}_{p2}$$

周期性边界条件下半无限区域的温度场

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial X^2} \quad 0 < X < \infty$$

$$X = 0 \quad t = t_0 \cos(\omega\tau - \varphi)$$

$$X \rightarrow \infty \quad t = 0$$

$$\tau = 0 \quad t = 0$$

问题的解析解

$$\frac{t(x, \tau)}{t_0} = \cos \left[\omega \tau - x \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} - \varphi \right] \exp \left[-x \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} \cos \left[\omega \left(\tau - \frac{x^2}{4a\eta^2} \right) - \varphi \right] \exp(-\eta^2) d\eta$$

在时间较长的情况下，后面的积分趋向于零，所以最终得到在周期性边界条件的情况下半无限介质中的温度变化规律

$$\frac{t(x, \tau)}{t_0} = \cos \left[\omega \tau - x \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} - \varphi \right] \exp \left[-x \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

对结果的讨论



小结

- (1) 介绍了非稳态导热的基本概念及特点;
- (2) 阐述了集总参数法的基本原理及应用;
- (3) 介绍了一维非稳态导热问题的图解法;

对于工程中遇到的具体非稳态导热问题, 应根据不同情况采用不同的求解方法, 确定求解方法的关键是计算毕渥数, 当满足 $Bi < 0.1$ 时可采用集总参数法, 否则应采用图解法或用分析解的公式计算。