理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

普遍定理综合应用

普遍定理综合应用

- **动量定理**
  - **动量定理、质心运动定理、动量守恒定理**

求加速度、　约束力　求速度

- **动量矩定理**　取矩轴约束力不出现，可求加速度
  - 对固定点、质心的动量矩定理

- **动能定理**　只出现做功的力，可求速度加速度
  - 动能定理（微分和积分形式）、机械能守恒定理

方便解决只有一个运动未知量(一个自由度)的问题

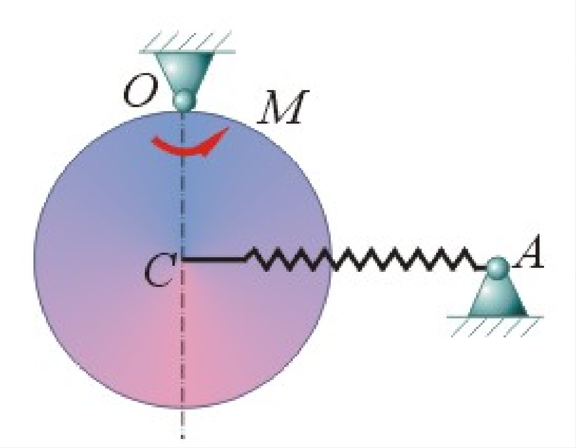
解题思路

- 分析受力和运动
- 从问题类型和所求的未知量出发选择定理
- 列公式求解

刚体系问题类型

- 求速度、加速度、未知内力、约束力
- 运动未知量只有一个
- 运动未知量多个

例： 匀质圆盘质量为 m，半径为 R，弹簧刚度为 k，$CA=2R$ 为弹簧原长，在常力矩M作用下，由最低位置无初速度地在铅垂平面内绕轴O向上转。试求达到最高位置时，轴承O的约束力。



解： 可用质心运动定理求约束力。因此，需求出质心的加速度。质心作圆周运动，故有切向与法向加速度，先求ω、α。

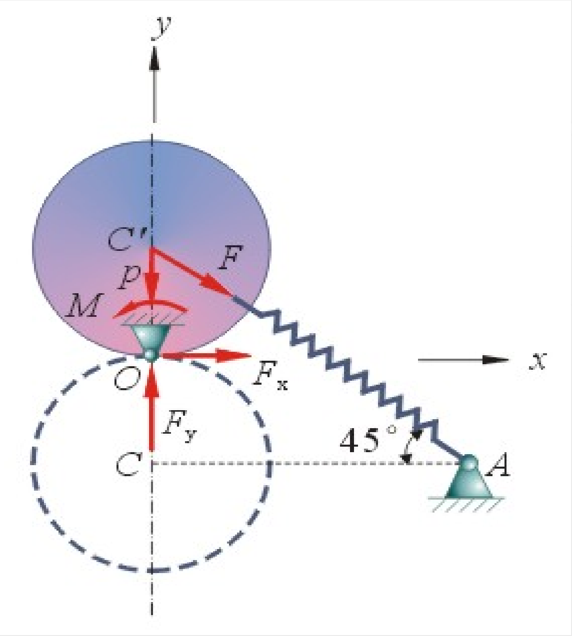
（1）求ω　　由动能定理　　$T_1=0$

$$T_2=\frac{1}{2}J_0\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2+mR^2\right)\omega^2=\frac{3}{4}mR^2\omega^2$$

$$W=M\varphi-P\cdot 2R+\frac{k}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)$$

$$=M\pi-P\cdot 2R+\frac{k}{2}[0-(2\sqrt{2}R-2R)^2]$$

$$=M\pi-2Rmg-2.343kR^2$$



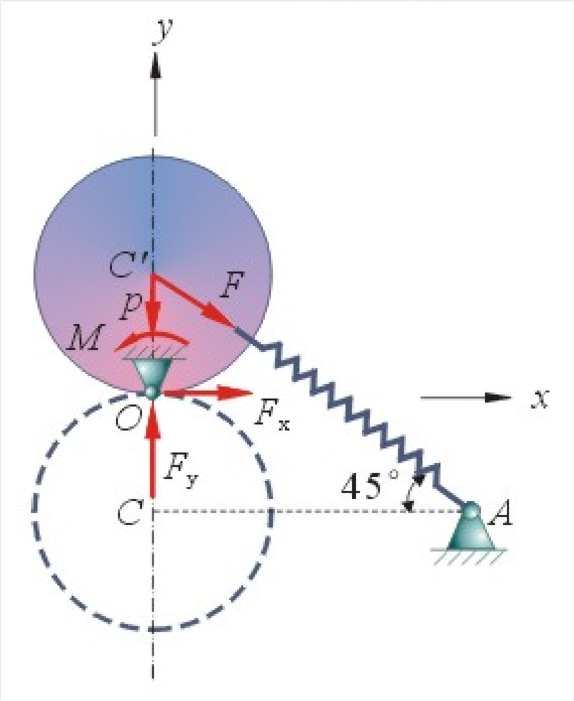
$$\omega^2=\frac{4}{3mR^2}(M\pi-2Rmg-0.343kR^2)$$

（2）求α　由转动微分方程

$$J_0\alpha=M-FR\cos 45^\circ$$

$$\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\alpha=M-k(2\sqrt{2}R-2R)R\frac{1}{\sqrt{2}}$$

解得　$\alpha=2(M-0.586kR^2)/3mR^2$



（3）由质心运动定理求F_x、F_y

质心加速度　$a_{cx}=-R\alpha=-\dfrac{2(M-0.586kR^2)}{3mR}$

$$a_{cy}=-R\omega^2=-\frac{4}{3mR}(M\pi-2Rmg-0.343kR^2)$$

应用质心运动定理

$$ma_{cx}=F_x+F\cos 45^\circ$$

$$ma_{cy}=F_y-P-F\cos 45^\circ$$

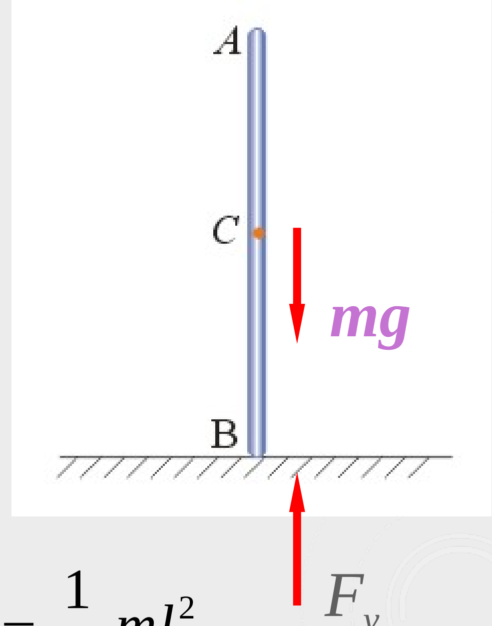
将质心加速度代入

$$F_x=-\frac{2}{3R}M-0.196kR$$

$$F_y=3.667mg+1.043kR-4.189\frac{M}{R}$$

1. 若需计算反力，最终仍需回到刚体运动微分方程（动量、动量矩定理）。
2. 若加速度与速度有关，则需要先求速度，才能列刚体运动方程。

例：已知$AB=l$、质量为m，B端放在光滑水平面上，开始时杆静立于铅直位置，受扰动后，杆倒下。试求：杆运动到与铅直位置线成φ角时，杆的角速度、角加速度和地面约束力。



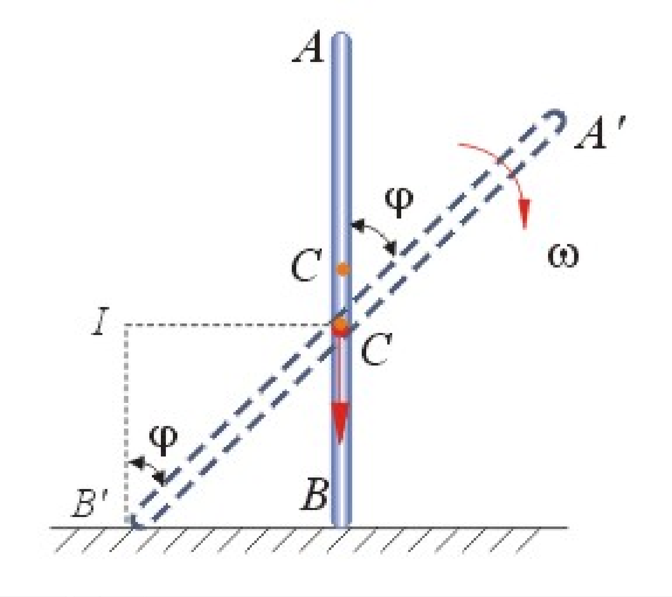
解：受力分析

由受力图可知：$\Sigma F_x=0$　$v_{cx}=$常数$=0$，

因此，$x_c=$常数，且　$v_C=v_{Cy}$

（1）求ω、α：　由动能定理

$$\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2-0=mg\frac{1}{2}(l-l\cos\varphi)$$



I为瞬心，则

$$v_C=\omega\frac{l}{2}\sin\varphi \qquad J_c=\frac{1}{12}ml^2$$

代入方程：

$$l(3\sin^2\varphi+1)\omega^2=12g(1-\cos\varphi) \tag{1}$$

$$\omega^2=\frac{12g}{l}\frac{(1-\cos\varphi)}{3\sin^2\varphi+1}$$

$$l(3\sin^2\varphi+1)\omega^2=12g(1-\cos\varphi) \qquad (1)$$

对(1)式求导：

$$2l(3\sin^2\varphi+1)\dot{\omega}+l\omega^2 6\sin\varphi\cos\varphi=12g\sin\varphi$$

$$\dot{\omega}=\alpha=\frac{12g\sin\varphi-3l\omega^2\sin 2\varphi}{2l(3\sin^2\varphi+1)}$$

（2）求约束力 F_y

由质心运动定理 $\quad ma_{cy}=\Sigma F_y$

杆作平面运动，求质心的加速度：

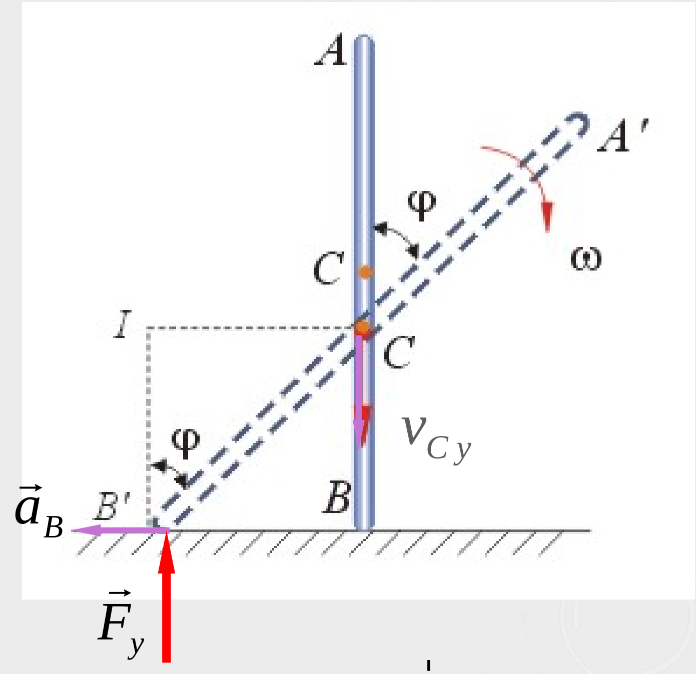
$$\vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{CB}^{n}+\vec{a}_{CB}^{\tau}$$

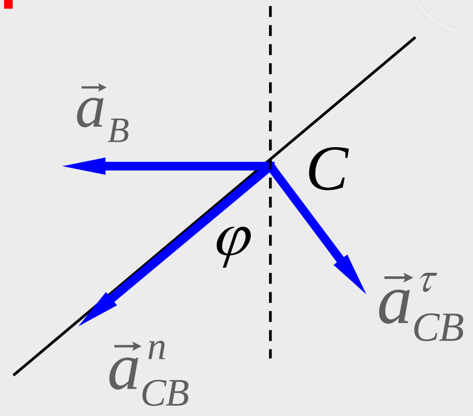
$$a_{cy}=a_{cB}^{n}\cos\varphi+a_{cB}^{\tau}\sin\varphi$$

$$=\frac{l}{2}\omega^2\cos\varphi+\frac{l}{2}\alpha\sin\varphi$$

$$ma_{cy}=mg-F_y$$

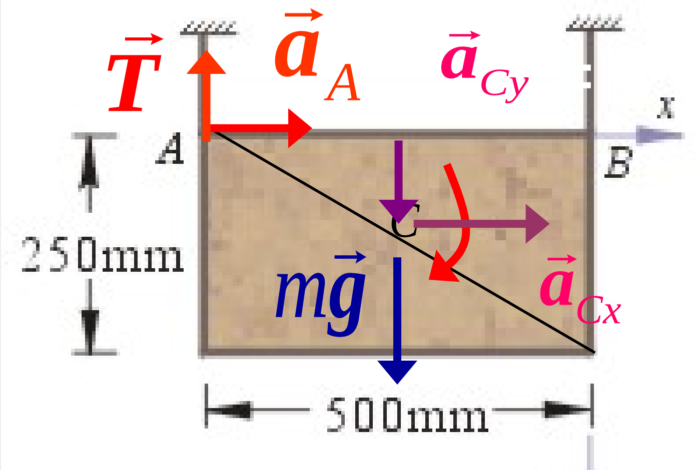
$$F_y=mg-ma_{cy}=mg-m\left(\frac{l}{2}\omega^2\cos\varphi+\frac{l}{2}\alpha\sin\varphi\right)$$





1、直接从运动入手、避开约束反力的方法通常是更高等的方法。
2、若能直接求出积分形式（动量、动量矩或能量守恒），则一般可不必从列微分方程入手。
3、多个自由度问题可以从首先尝试从寻找两个积分形式的定理入手。

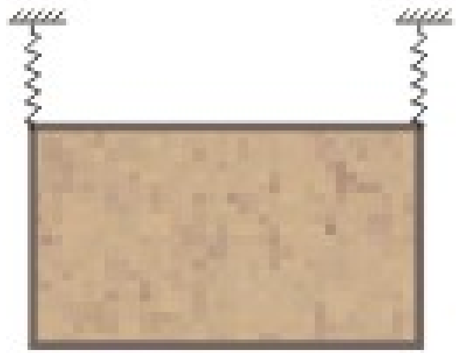
例 4kg的均质板静止悬挂。求：*B*点的绳被剪断的瞬时，质心加速度和*A*点约束反力。



受力分析：1个未知

运动分析：2个自由度，选a_A、α为运动未知量

解： [板] 对质心的动量矩定理：



$$J_C\alpha = T\times 0.25 \qquad (1)$$

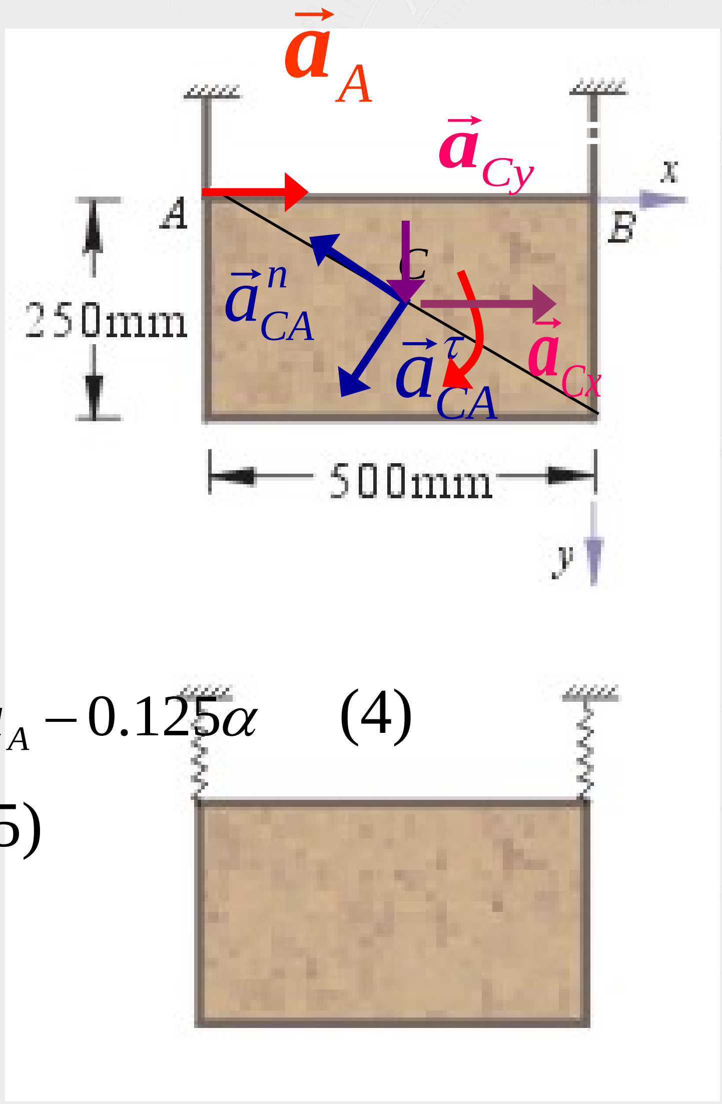
质心运动定理：

$$"x":\quad ma_{Cx} = 0 \qquad (2)$$

$$"y":\quad ma_{Cy} = mg - T \qquad (3)$$

质心运动可用a_A、α表示

$$
\begin{cases}
J_C\alpha = T \times 0.25 & (1) \\
ma_{Cx} = 0 & (2) \\
ma_{Cy} = mg - T & (3)
\end{cases}
$$



因 $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{CA} + \vec{a}^t_{CA}$

初瞬时ω=0　　则有 $a^n_{CA} = 0$

所以

$$"x":\ a_{Cx} = a_A - a^t_{CA}\sin\theta = a_A - \alpha|AC|\sin\theta = a_A - 0.125\alpha \quad (4)$$

$$"y":\ a_{Cy} = a^\tau_{CA}\cos\theta = |AC|\cdot\alpha\cos\theta = 0.25\alpha \quad (5)$$

联立解(1)～(5)式

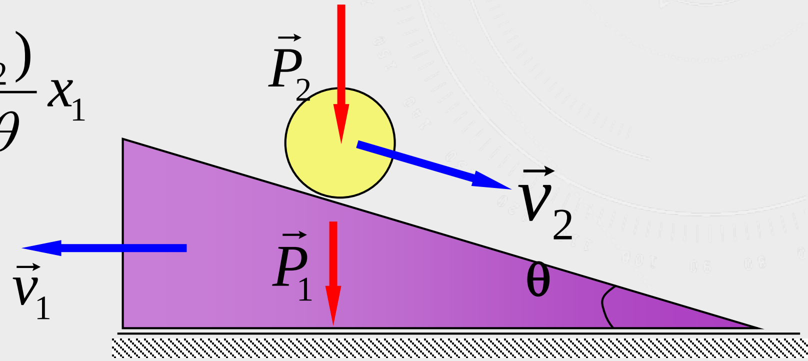
$$\alpha = \frac{12}{17}\cdot\frac{g}{0.25}, \qquad a_C = \frac{12}{17}g = 6.92\ \text{m/s}^2$$

方向竖直向下

例： 重为P_1的三角块放置光滑平面上，有一重量为P_2的小球从斜面上滚下。试求：三角块滑动的加速度。

解： **动量守恒：** $m_2(v_2\cos\theta - v_1) - m_1 v_1 = 0$

$$v_2 = \frac{(m_2+m_1)}{m_2\cos\theta}v_1 \qquad \therefore x_2 = \frac{(m_1+m_2)}{m_2\cos\theta}x_1$$



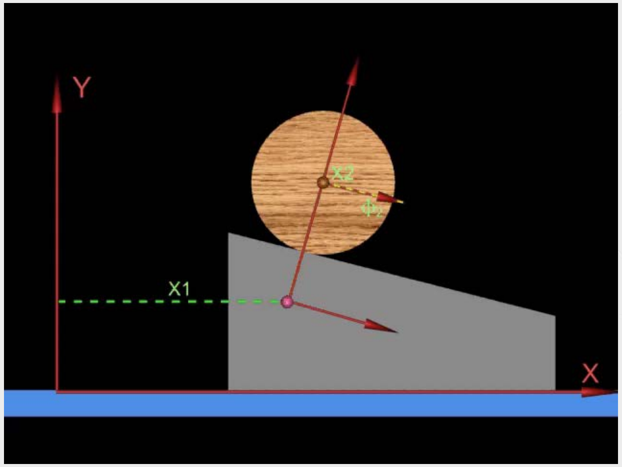
动能定理： 球：$J_z = \frac{2}{5}m_2 r^2 \qquad T_1 = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left[(v_2\cos\theta - v_1)^2 + (v_2\sin\theta)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

$$w = x_2\sin\theta m_2 g = x_1\frac{(m_1+m_2)}{\cos\theta}g\sin\theta$$

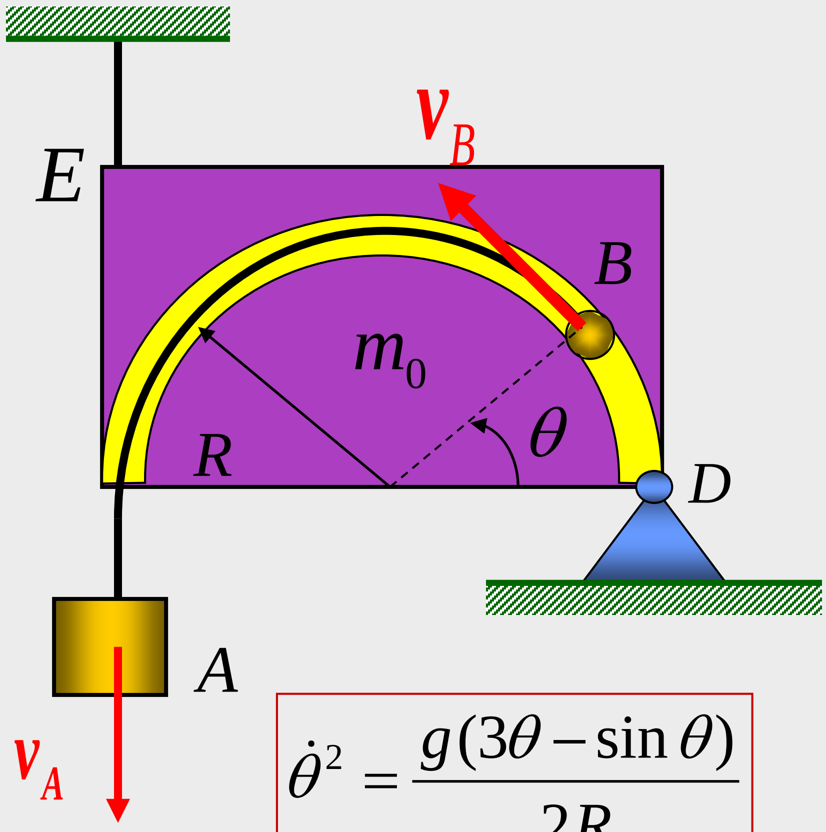
$$T_2 - T_1 = w$$

$$a_1 = \frac{m_2 g\sin\theta\cos\theta}{\frac{7}{5}(m_1+m_2) - m_2\cos^2\alpha}$$



二个自由度要二个动力学方程

例： 系统如图所示，已知：$m_0, m_A = 3m, m_B = m, R$，初始时系统静止，$\theta = 0$，求运动时板E、D的约束力（不计摩擦）。



解： 取小球B和物块A为研究对象，应用动能定理求运动。

$$T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$\because v_A = v_B = R\dot{\theta} \qquad T_2 = 2m(R\dot{\theta})^2$$

$$W_{12} = m_A g R\theta - m_B g R \sin\theta$$

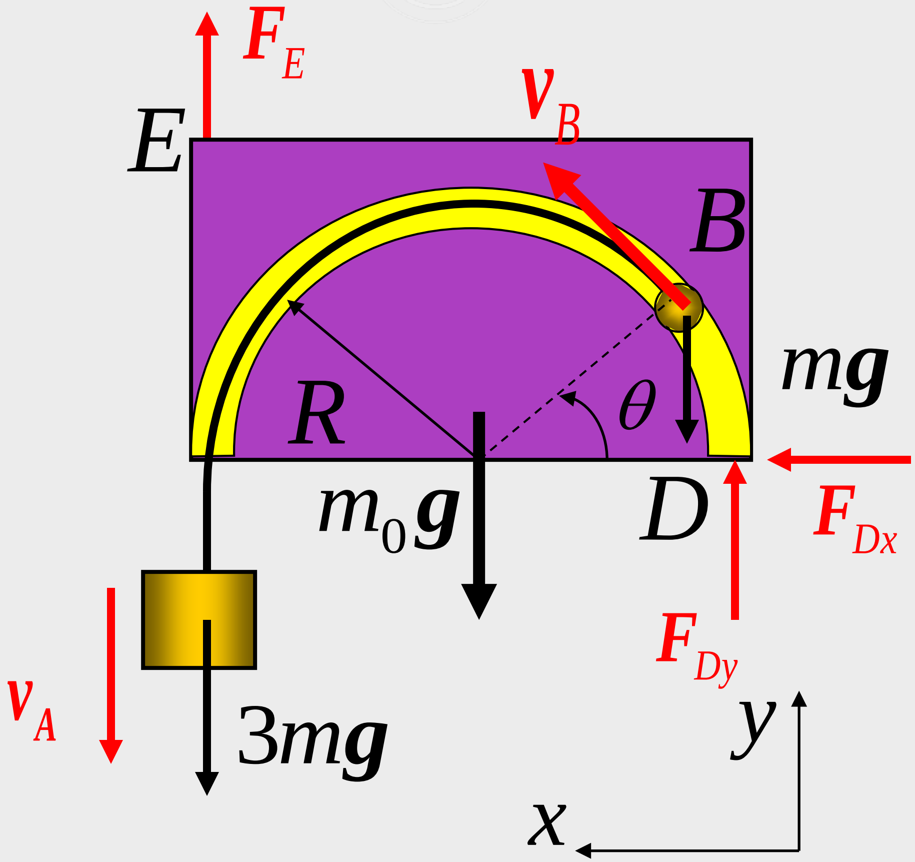
$$= 3mgR\theta - mgR\sin\theta$$

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

$$2R\dot{\theta}^2 = 3g\theta - g\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g(3\theta - \sin\theta)}{2R}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g(3 - \cos\theta)}{4R}$$



取板、物块A和小球B为研究对象

应用质点系的动量定理和动量矩定理求约束力

系统对D点的动量矩：

$$L_D = m_A v_A 2R + m_B v_{Bx} R\sin\theta - m_B v_{By} R(1-\cos\theta)$$

$$L_D = mR^2\dot{\theta}(7-\cos\theta)$$

利用系统对D点的动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}L_D}{\mathrm{d}t} = \sum M_D(\boldsymbol{F}^{(e)}) \Rightarrow F_E$$

系统的动量在 x 轴上的投影：

$$p_x = m_B v_{Bx} = mR\dot{\theta}\sin\theta$$

利用动量定理： $$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \sum F_x^{(e)} \Rightarrow F_{Dx}$$

同理： $$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = \sum F_y^{(e)} \Rightarrow F_{Dy}$$

$$0 \le \theta \le \pi$$