第4章 计算机控制系统的基本控制策略

4.1 计算机控制系统数学基础

4.2 离散系统的模拟化设计方法

4.3 数字PID控制算法

4.4 直接数字设计方法-解析设计方法

4.5 复杂计算机控制系统设计方法

4.6 先进PID控制系统设计方法

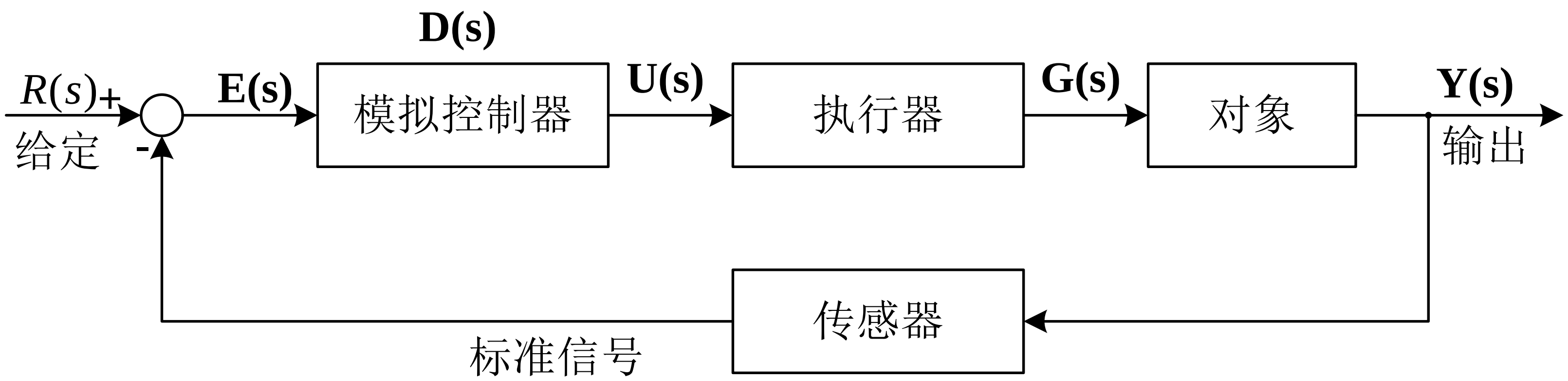
本次课程内容

第4章 计算机控制系统的基本控制策略

- 计算机控制系统数学基础
  - 信号与系统
  - z变换与脉冲传递函数
- 离散系统的模拟化设计方法
  - 数字控制器的模拟化设计
  - 连续系统的离散化方法

计算机控制系统数学基础

➢ 信号与系统

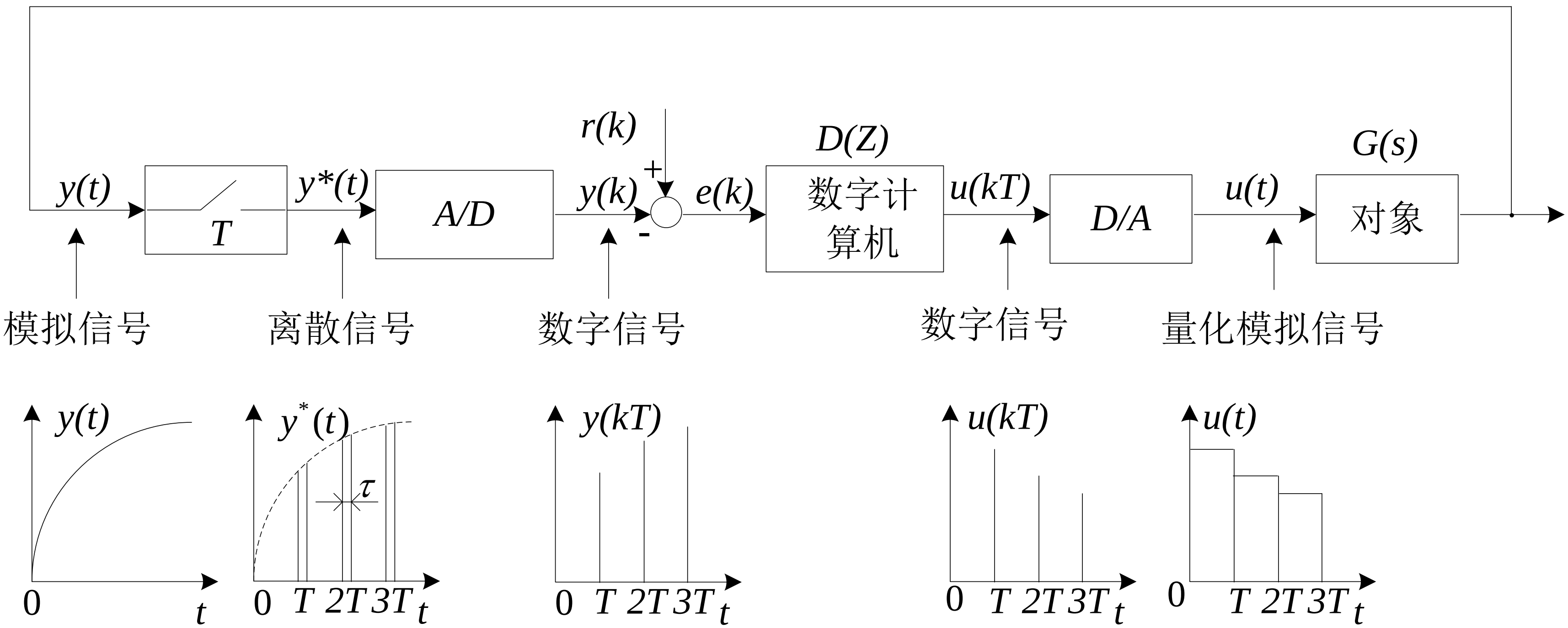


连续控制系统框图

- 连续控制系统中，控制器的输入、输出皆为**连续的信号量**。

计算机控制系统数学基础

➢ 信号与系统



数字控制系统框图

- **DDC：用数字控制器代替模拟控制器，对对象直接进行控制。**

计算机控制系统数学基础

➢ 计算机控制系统理论

1. **离散系统理论**——离散系统的设计和分析方法：

a.**差分方程和z变换理论**，利用脉冲传递函数来分析离散系统。

b.**常规控制设计方法**，包括模拟设计方法和直接数字设计方法；

c.按极点配置设计法　d.最优设计方法　e.智能控制及其它先进控制方法

2. **采样系统理论（包括离散系统理论）**

a.**采样理论、采样信号的恢复**　b.连续模型以及性能指标的离散化

c.性能指标函数的计算　d.采样控制系统的仿真

e.**采样周期的选择**

3. **数字系统理论（包括离散系统理论和采样系统理论）**

数字量化效应等，如量化误差、非线性特性的影响、**数字控制器的实现**等。

* 计算机控制系统中，对象是连续的，控制器是离散的，如何将连续环节离散化，或将离散环节与连续环节连接，是要重点解决的问题。

计算机控制系统数学基础

➢ 信号与系统

- **香农（Shannon）定理**：如果连续信号$f(t)$由不同频率的谐成，各次谐波中最高频率为ω_c，则当它被采样为脉冲系列$f^*(t)$时，只要选择采样频率$\omega_s \geq 2\omega_c$，就可以从 $f^*(t)$完全复现$f(t)$。

- 当计算机控制系统的采样频率ω_s与系统瞬态响应主要振荡频率ω_m 相比足够高（ $\omega_s \geq 20\omega_c$ ），且每次采样时间Δt远小于采样周期T_s时，可以应用连续域的离散等效设计方法进行系统分析和整定。-**模拟设计方法**

- 在计算机控制系统，如果采样周期较大，**量化效应**不可忽视时，必须依据采样控制理论设计控制器（按某些约束条件直接设计控制器） - **直接数字设计方法**。

计算机控制系统数学基础

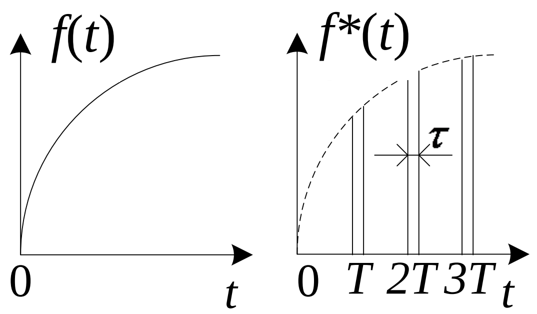
➢ 信号与系统

	输入、输出关系描述	经典理论应用主要数学方法	现代控制理论描述
连续时间系统	微分方程	拉氏变换、传递函数	状态方程
数字离散系统	差分方程	z变换、脉冲传递函数	离散时间状态方程

连续系统与数字离散系统的对应表

计算机控制系统数学基础

➢ 拉普拉斯变换和z变换



模拟信号： $f(t)$

采样信号： $f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$

拉普拉斯变换： $F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}$$

z变换： $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$

$$z = e^{Ts}$$

$$F(z) \neq F(s)\big| s = z$$

➢ z变换和脉冲传递函数

- **单位阶跃信号：** $f(t)=1$

$$F(z)=Z[1]=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots \qquad (1)$$

$$z^{-1}F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}=z^{-1}+z^{-2}+\ldots \qquad (2)$$

(1)-(2)

$$F(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

- **速度信号：** $f(t)=t$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nTz^{-n}=Tz^{-1}+2Tz^{-2}+\ldots+nTz^{-n}+\ldots \qquad (1)$$

$$z^{-1}F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nTz^{-n-1}=Tz^{-2}+2Tz^{-3}+\ldots+nTz^{-n-1}+\ldots \qquad (2)$$

(1)-(2)

$$(1-z^{-1})F(z)=Tz^{-1}+Tz^{-2}+\ldots+Tz^{-n}=T(\frac{1}{1-z^{-1}}-1)=\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \Rightarrow F(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

计算机控制系统数学基础

➢ z变换

- **加速度信号：** $f(t)=\dfrac{t^2}{2}$

$$F(z)=Z[\frac{t^2}{2}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nT)^2}{2}z^{-n}=\frac{T^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}n^2z^{-n}$$

$$=\frac{T^2}{2}(1z^{-1}+2^2z^{-2}+3^2z^{-3}+\ldots+n^2z^{-n}+\ldots) \qquad (1)$$

$$z^{-1}F(z)=\frac{T^2}{2}(1z^{-2}+2^2z^{-3}+3^2z^{-4}+\ldots+n^2z^{-n-1}+\ldots) \qquad (2)$$

(1)-(2)

$$(1-z^{-1})F(z)=\frac{T^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[n^2-(n-1)^2]z^{-n}=\frac{T^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2nz^{-n}-z^{-n})$$

$$=\frac{T^2}{2}[2\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-(\frac{1}{1-z^{-1}}-1)]=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow F(z)=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

计算机控制系统数学基础

➢ 拉氏变换和z变换对照表

$x(t)$	$x(kT)/x(k)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	$\delta(k)$	1	1
$1(t)$	$x(k)=1, k=0,1,2,\cdots$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
	a^k		$\frac{z}{z-a}$
	ka^k		$\frac{az}{(z-a)^2}$
e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin\omega t$	$\sin\omega kT$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$e^{-akT}\sin\omega kT$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

➢ z反变换

- **由函数$F(z)$求离散序列$f(k)$的过程：**

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

$$f(k)=z^{-1}\left[F(z)\right]$$

例题 **已知：** $F(z)=\dfrac{10z}{z^2-5z+4}$ **，求$f(k)$。**

1、长除法：

$$\begin{array}{r}
10z^{-1}+50z^{-2}+210z^{-3}+\ldots \\
z^2-5z+4 \overline{\big) 10z \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{10z-50+40z^{-1}} \\
50-40z^{-1} \\
\underline{50-250z^{-1}+200z^{-2}} \\
210z^{-1}-200z^{-2} \\
\underline{210z^{-1}-1050z^{-2}+840z^{-3}} \\
850z^{-2}-840z^{-3}
\end{array}$$

$$F(z)=10z^{-1}+50z^{-2}+210z^{-3}+\ldots$$

$$f(0)=0,\ f(1)=10,\ f(2)=50,\ f(3)=210,\ldots$$

$$f^*(t)=10\delta(t-T)+50\delta(t-2T)+210\delta(t-3T)+\ldots$$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

$$f(k)=z^{-1}\left[F(z)\right]$$

➢ z反变换

- 由函数$F(z)$求离散序列$f(k)$的过程：

例题 已知：$F(z)=\dfrac{10z}{z^2-5z+4}$ ，求$f(k)$。

2、部分分式展开法：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{10}{z^2-5z+4}=\frac{10}{(z-1)(z-4)}=-\frac{10}{3(z-1)}+\frac{10}{3(z-4)}$$

$$F(z)=-\frac{10z}{3(z-1)}+\frac{10z}{3(z-4)}$$

查z变换表：

$$f(k)=-\frac{10}{3}\cdot 1(k)+\frac{10}{3}4^k=\frac{10}{3}(4^k-1)$$

计算机控制系统数学基础

➢ z变换和脉冲传递函数

线性性质： $$Z\left[af_1(t)+bf_2(t)\right]=aF_1(z)+bF_2(z)$$

平移定理： $$Z\left[f(t-nT)\right]=z^{-n}F(z)$$

初值定理： $$f(t)\big|_{t=0}=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

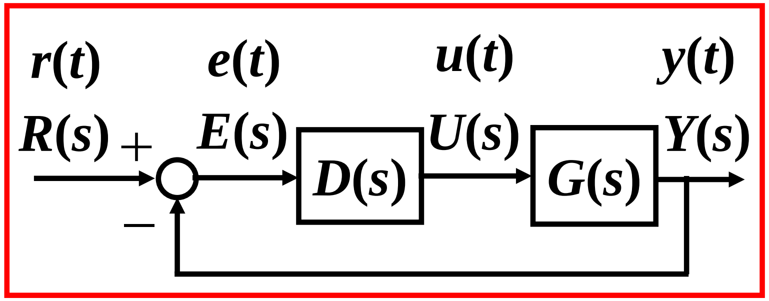
终值定理： $$f(t)\big|_{t\to\infty}=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)F(z)=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)F(z)$$

脉冲传递函数：在初始条件为零时，系统输出量z变换与输入量z变换之比。

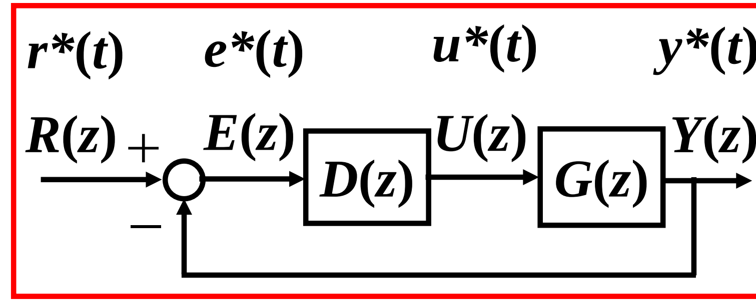
$$W(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{m=0}^{\infty}\omega(mT)z^{-m}=\omega(0)+\omega(T)z^{-1}+\omega(2T)z^{-2}+\cdots$$

计算机控制系统数学基础

➢ 传递函数和脉冲传递函数



连续系统



离散系统

控制器：

$$D(s)=\frac{U(s)}{E(s)} \qquad D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}$$

对象：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \qquad G(s)=\frac{Y(z)}{U(z)}$$

闭环：

$$\phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} \qquad \phi(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

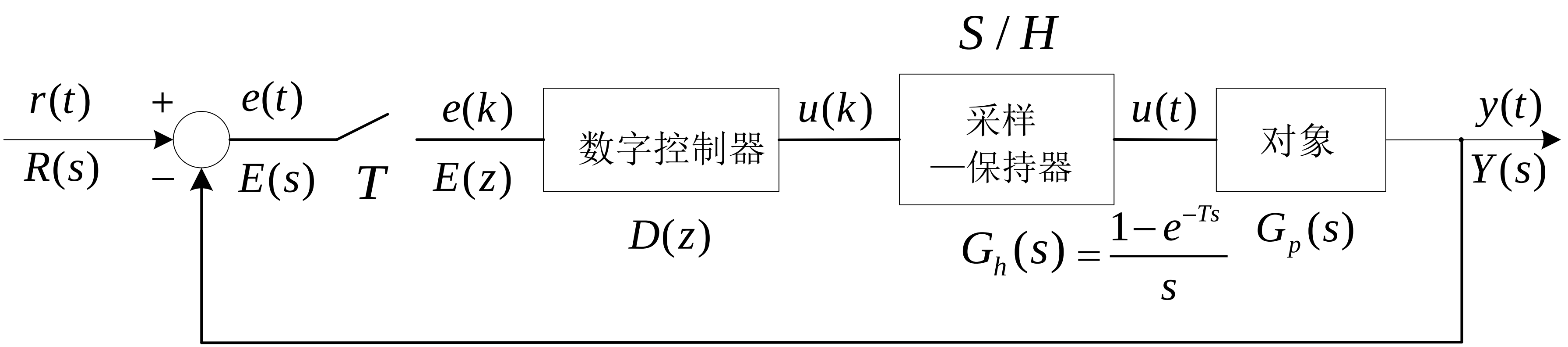
本次课程内容

第4章 计算机控制系统的基本控制策略

- ◆计算机控制系统数学基础
  - ➢信号与系统
  - ➢Z变换与脉冲传递函数
- ◆离散系统的模拟化设计方法
  - ➢数字控制器的模拟化设计思路
  - ➢连续系统的离散化方法

数字控制器的模拟化设计思路

- 数字控制器的模拟化**设计思路**：**将连续域设计好的模拟控制器$D(s)$，按离散等效的方法离散获得数字控制器。**
- 数字控制系统中**保持电路**产生**时间迟延**，这附加迟延会引起相位滞后并降低闭环系统的稳定裕量。
- 设计模拟控制器，要考虑构成数字控制系统时必然存在的**零阶保持器**。



数字控制系统

数字控制器的模拟化设计思路

➢设计步骤

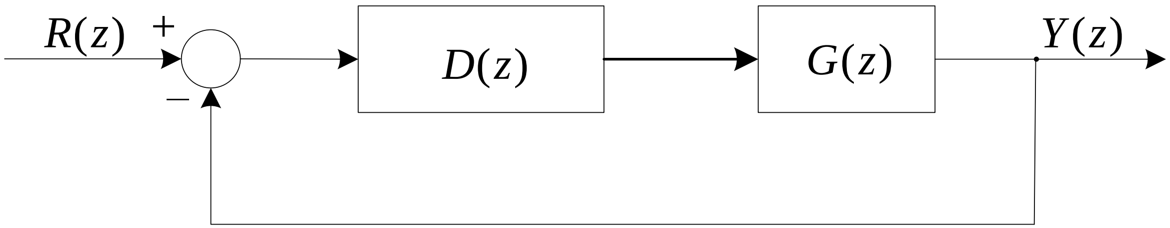
（1） 根据广义对象$G(s)=G_h(s)G_p(s)$，设计模拟控制器$D(s)$。

（2） $D(s)$离散化获得$D(z)$

- 采用离散化方法。正确选择T，每个震荡周期至少采样6-10个点。

（3）检验闭环系统性能，闭环仿真

- 将含有保持器的广义对象G(s)离散化得出差分方程，构成离散系统，检验数字控制系统对各种输入信号之响应，进行闭环仿真。



离散化带保持器的模拟控制系统求得的数字控制系统

- 如果设计不达标，需重新设计（重选合适的离散化方法、提高采样频率、修正$D(s)$）。

（4）编制程序在计算机上实现$D(z)$

本次课程内容

第4章 计算机控制系统的基本控制策略

- 计算机控制系统数学基础
  - 信号与系统
  - Z变换与脉冲传递函数
- 离散系统的模拟化设计方法
  - 数字控制器的模拟化设计
  - 连续系统的离散化方法

连续系统的离散化方法

■模拟化设计数字控制器的重要步骤，是将**连续系统离散化**。
即将连续时间传递函数F(S) ->离散传递函数F(Z)、差分方程。

■对模型离散化时，要考虑**离散等效性问题，**可考察一下特性：

（1） 脉冲响应特性

（2） 阶跃响应特性，如超调量、振荡次数、上升时间、过渡时间等。

（3） 频率特性，如通频带、增益裕量、相位裕量、以及闭环频率响应峰值等。

（4） 稳态增益

（5） 零极点分布

连续系统的离散化方法

典型的离散化方法有如下几种：

一、差分变换法

二、双线性变换法

三、脉冲响应不变法

四、阶跃响应不变法

五、零极点匹配法

一、差分变换法

特点：用一阶差分代替微分。

设连续系统传递函数： $$D(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{s}$$

该系统的微分方程： $$\frac{du(t)}{dt}=e(t)$$

在$t=kT$时刻的一阶差分：

后向

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=KT}=e(kT)\approx\frac{u(kT)-u[(k-1)T]}{T}$$

整理后： $$u(kT)=u[(k-1)T]+Te(kT)$$

前向

$$e(kT)\approx\frac{u[(k+1)T)]-u(kT)}{T}$$

$$u(kT)=u[(k+1)T]-Te(kT)$$

$$u(kT)=u[(k-1)T]+Te[(k-1)T]$$

一、差分变换法

后向

$$u(kT)=u[(k-1)T]+Te(kT)$$

z变换：

$$U(z)=z^{-1}U(z)+TE(z)$$

脉冲传递函数：

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{T}{1-z^{-1}}$$

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T}$$

前向

$$u[(k+1)T]=u(kT)+Te(kT)$$

$$zU(z)=U(z)+TE(z)$$

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{T}{z-1}$$

$$s=\frac{z-1}{T}$$

$$D(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{s}$$

一、差分变换法

后向 $s=\dfrac{1-z^{-1}}{T}$

前向 $s=\dfrac{z-1}{T}$

差分变换公式：

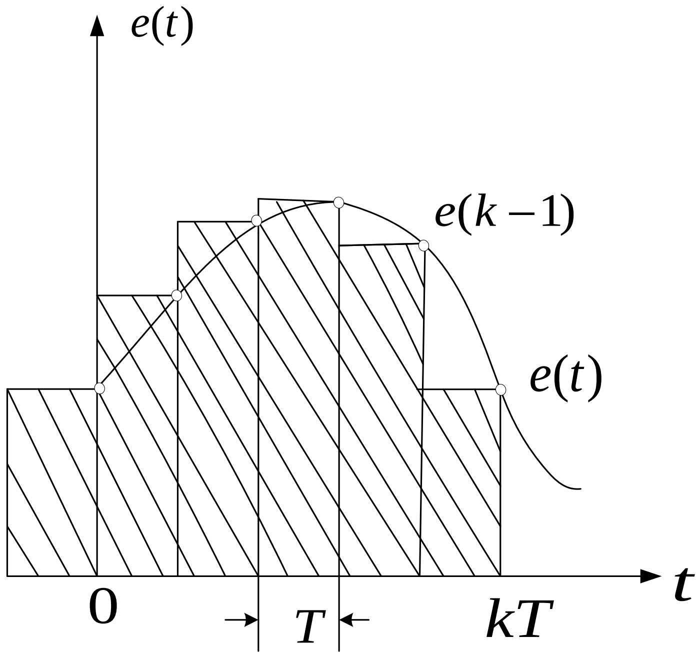
$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

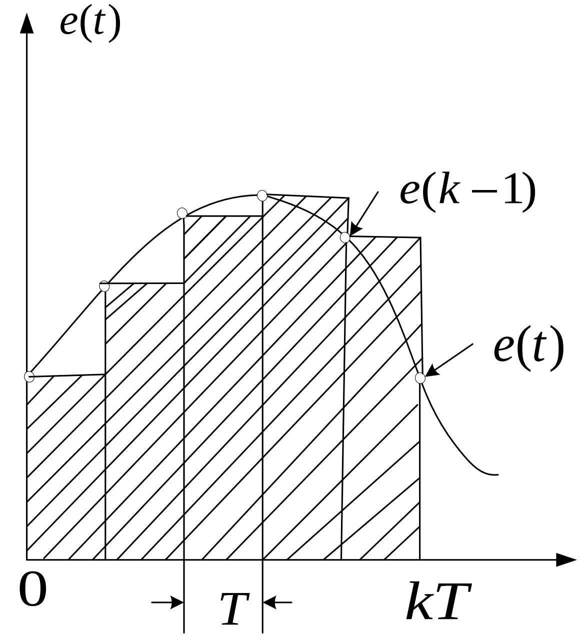
$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

区别：

$$u(kT)=u[(k-1)T]+Te(kT)$$

$$u(kT)=u[(k-1)T]+Te[(k-1)T]$$





一、差分变换法

举例：采用差分法对以下传递函数其进行离散化。

$$D(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

解：

1、后向差分：

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}=\frac{1}{(\frac{1-z^{-1}}{T}+2)(\frac{1-z^{-1}}{T}+3)}=\frac{T^{2}}{(1+2T-z^{-1})(1+3T-z^{-1})}$$

2、前向差分：

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}=\frac{1}{(\frac{z-1}{T}+2)(\frac{z-1}{T}+3)}=\frac{T^{2}}{(z+2T-1)(z+3T-1)}$$

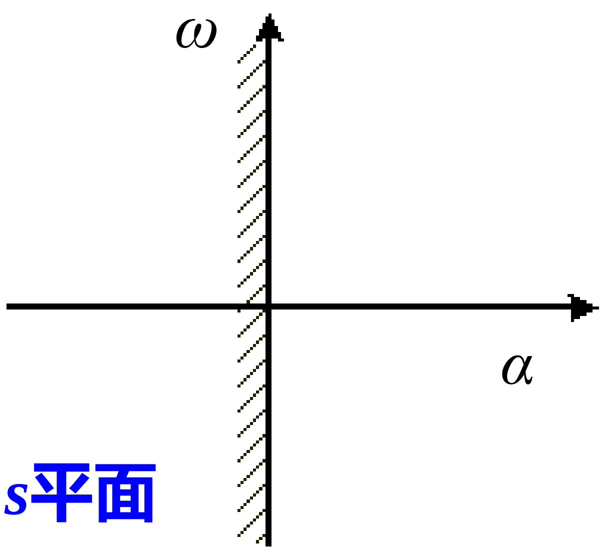
一、差分变换法-稳定性分析

- **Z变换：** $z = e^{Ts}$ ，$s = \alpha + j\omega$ ，T是采样周期，α实部，ω虚部

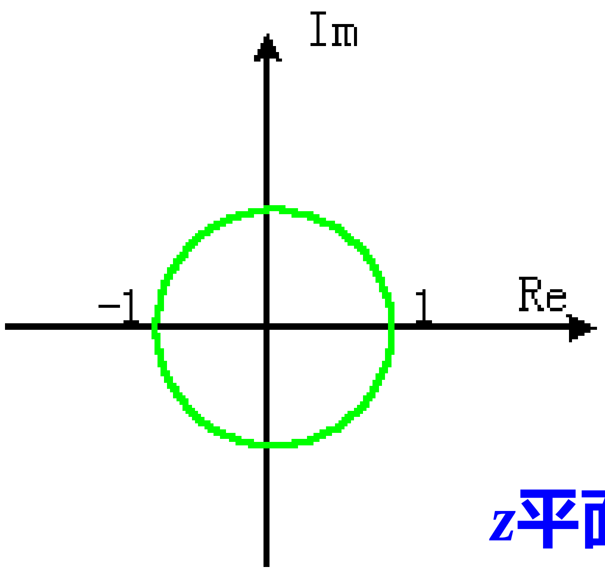
$$z = e^{Ts} = e^{T\alpha} * e^{jT\omega} \Rightarrow |z| = e^{T\alpha}$$

- **系统稳定的充分与必要条件：**

- 它的所有**极点均落在s平面的左半部**。
- s平面的稳定区（左半平面），在**z平面上是一个单位园**。



s平面



z平面

一、差分变换法-稳定性分析

s平面稳定区：Re(s) <0

一阶后向差分稳定性分析

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T}\qquad(z=\sigma+j\omega)$$

$$\mathrm{Re}(s)=\frac{\sigma^2-\sigma+\omega^2}{T(\sigma^2+\omega^2)}<0$$

$$\sigma^2-\sigma+\omega^2<0$$

$$(\sigma-\frac{1}{2})^2+\omega^2<(\frac{1}{2})^2$$

- z平面上圆心为（1/2， 0），半径为1/2的圆，是稳定区域。

一阶前向差分稳定性分析

$$s=\frac{z-1}{T}\qquad(z=\sigma+j\omega)$$

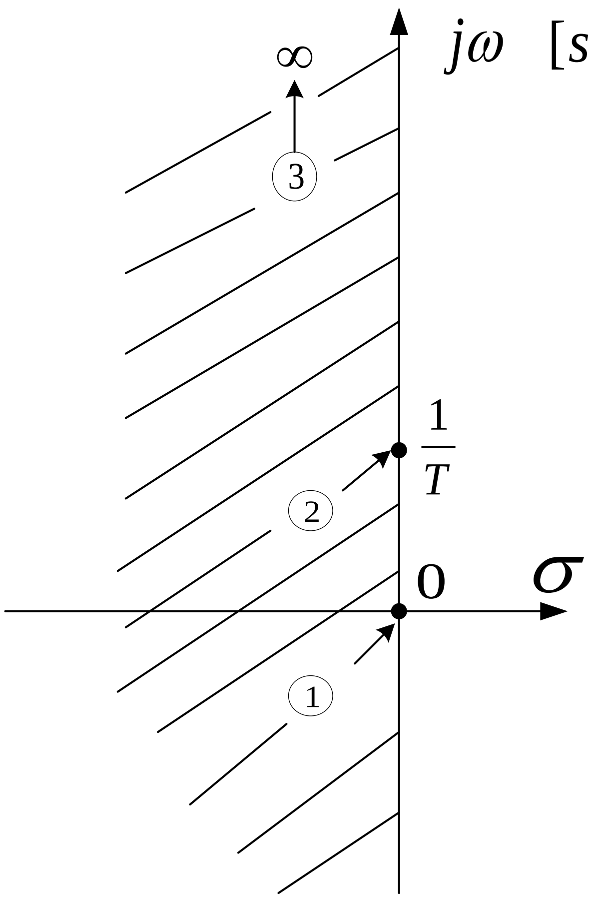
$$\mathrm{Re}(s)=\frac{\sigma-1}{T}<0$$

$$\sigma-1<0$$

- z平面上的z<1的平面。正常z平面的稳定区域是单位园。即前向差分可能会将s平面稳定的极点，映射到z平面的单位园外，导致系统的不稳定。

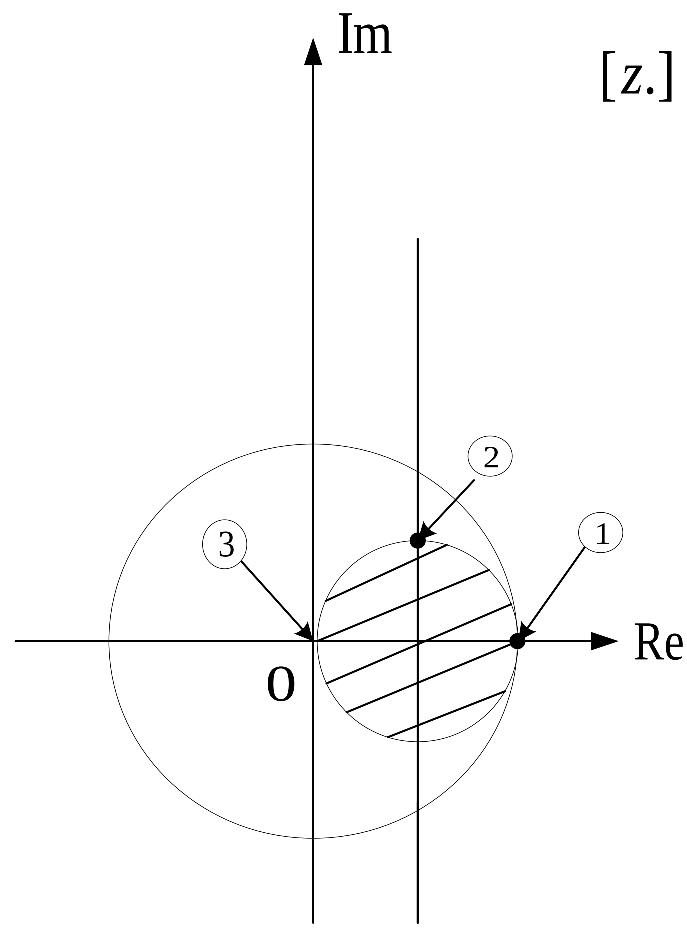
一、差分变换法-稳定性分析

➢ **后向差分**将s左半平面映射到z平面



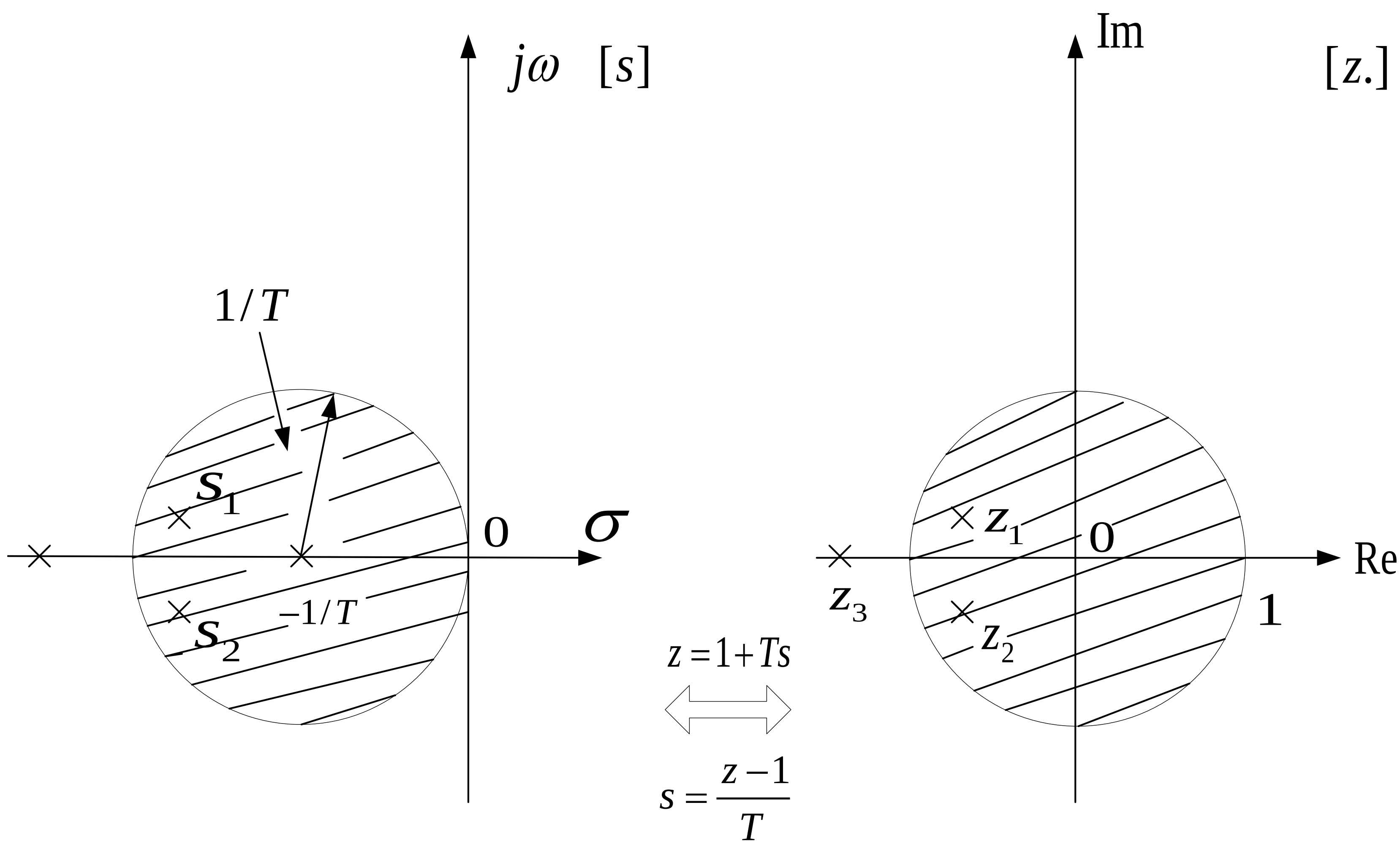
$$z=\frac{1}{1-Ts}$$

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T}$$



一、差分变换法-稳定性分析

➢ **前向差分**将s左半平面映射到z平面



一、差分变换法

一阶后向差分特点：

（1） 公式变换简单，精度不高

（2）若$D(s)$稳定，则$D(z)$一定稳定。

（3）映射后将整个s左半平面变换为z平面单位圆内的一个小圆。故离散后暂态响应和频率响应特性有较大畸变，需采用较小的采样周期。

一阶前向差分特点：

（1） 公式变换简单，精度差

（2）若$D(s)$稳定，则$D(z)$不一定稳定。只有一部分能映射到单位圆内

（3）离散后暂态响应和频率响应特性有较大畸变，需采用较小的采样周期。

二、双线性变换法

- **Z变换定义：**

$$z = e^{Ts} = e^{\frac{T}{2}s} \Big/ e^{-\frac{T}{2}s}$$

- **泰勒展开:**

$$e^{\frac{T}{2}s} = 1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{8}s^2 + \ldots.$$

$$e^{-\frac{T}{2}s} = 1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{8}s^2 + \ldots.$$

- **取前两项，以近似式代入:**

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} = \frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- **双线性变换公式:**

$$D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}*\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

二、双线性变换法

例：设 $D(s)=\dfrac{1}{s}$，用双线性变换法离散化。

解：

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}*\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{T}{2}*\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\Downarrow$$

$$U(z)-Z^{-1}U(z)=\frac{T}{2}*(E(z)+Z^{-1}E(z))$$

对等式两边取z反变换：

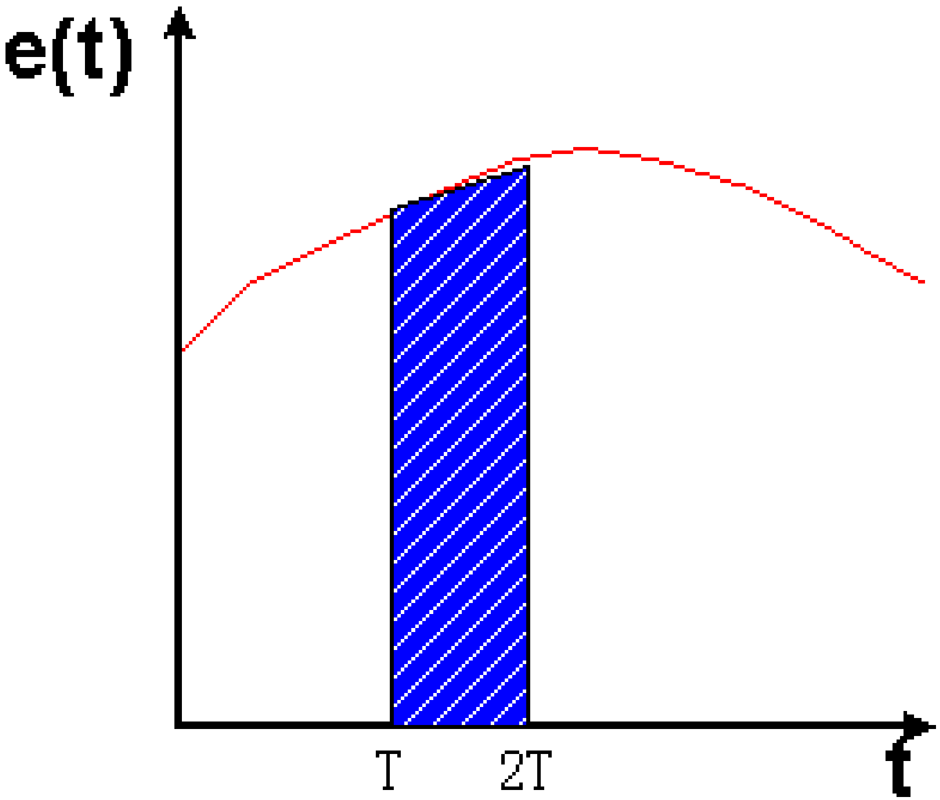
$$u(kT)-u[(k-1)T]=\frac{T}{2}\cdot(e(kT)+e[(k-1)T])$$

$$\Downarrow$$

$$u(kT)=u[(k-1)T]+\frac{T}{2}\cdot(e(kT)+e[(k-1)T])$$

二、双线性变换法

$$u(kT)=u[(k-1)T]+\frac{T}{2}\cdot(e(kT)+e[(k-1)T])$$



该方法是用梯形面积，来近似曲线面积--**梯形积分法**。

二、双线性变换法

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}*\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}$$

- **变换稳定性**

$$\mathrm{Re}(s)<0 \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{2}{T}*\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)<0$$

$$z=\sigma+j\omega \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\sigma+j\omega-1}{\sigma+j\omega+1}\right)<0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(\sigma-1+j\omega)(\sigma+1-j\omega}{(\sigma+j\omega+1)(\sigma+1-j\omega)})\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{\sigma^2-1+\omega^2+j2\omega}{(\sigma+1)^2+\omega^2})\right]<0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma^2-1+\omega^2<0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma^2+\omega^2<1$$

二、双线性变换法

➢ 变换稳定性

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}*\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}$$

$$\sigma^2+\omega^2<1$$

- **上式代表Z平面上以原点为圆心的单位圆。**

- **z变换的映射是重叠映射,而双线性变换映射是一对一的非线性映射, 即整个虚轴对应一个有限长度的单位圆的圆周长。**

结论：

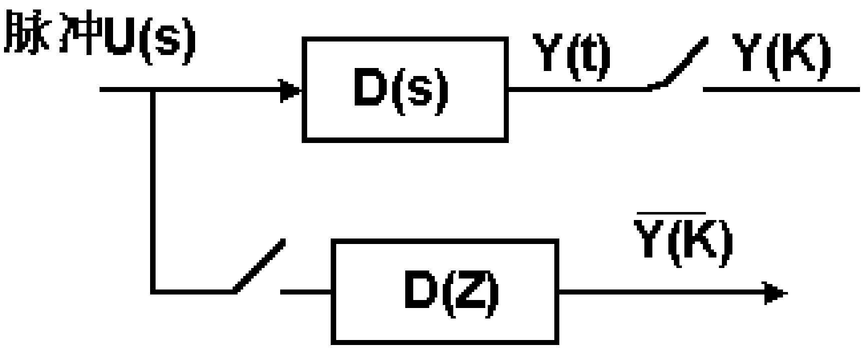
1．$D(s)$稳定，则$D(z)$一定稳定。

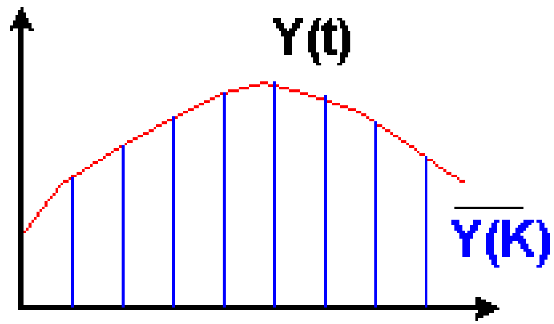
2．转换精度高于差分变换。

3．暂态特性和频率响应特性有畸变。

三、脉冲响应不变法(z变换法)

- 定义：使离散环节的脉冲响应，等于连续环节的脉冲响应函数的采样值。



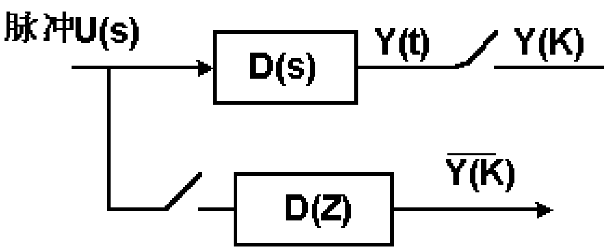


$$\bar{y}(k)=y(k) \Rightarrow \boxed{D(z)\cong Z[D(s)]}$$

- 对$D(s)$取z变换($z=e^{Ts}$)，能保证脉冲响应在采样时刻值不变。

- 该方法需要进行增益匹配。

三、脉冲响应不变法(z变换法)



增益匹配方法1： $D(z) \simeq T * Z[D(s)]$

增益匹配方法2：稳态增益法

$$D(z) \simeq K * Z[D(s)]$$

K满足： $D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1}$

总结：

(1) z变换总是把稳定的$D(s)$映射为稳定的$D(z)$,所以脉冲不变法不存在稳定性问题

(2) 此法确定等效离散滤波器并不容易，复杂滤波器$D(s)$的z变换，求解繁杂。

三、脉冲响应不变法(z变换法)

例： $D(s)=\dfrac{1}{s^2+0.2s+1}$ ，用脉冲响应不变法求**$D(z)$, T=1s**。

解： $D(s)=\dfrac{1}{s^2+0.2s+1}=\dfrac{1}{0.995}*\dfrac{0.995}{(s+0.1)^2+0.995^2}$

$$D(z)\cong T*Z[D(s)]=T*\frac{1}{0.995}*\frac{z*e^{-0.1T}*\sin(0.995T)}{z^2-2ze^{-0.1T}*\cos(0.995T)+e^{-0.2T}}$$

$$D(z)=\frac{0.763z}{z^3-0.985z+0.819}=\frac{0.763z^{-2}}{1-0.985z^{-2}+0.819z^{-3}}=\frac{U(z)}{E(z)}$$

$$U(z)=0.985Z^{-2}U(z)-0.819Z^{-3}U(z)+0.763Z^{-2}E(z)$$

$$u(k)=0.985u(k-2)-0.819u(k-3)+0.763e(k-2)$$

四、阶跃响应不变法

➢ 定义：使离散环节的阶跃响应$D(z)[1/(1-z^{-1})]$，等于连续环节的阶跃响应函数的采样值。

即要求：$$\frac{1}{1-z^{-1}}D(z)=Z\left[\frac{1}{s}D(s)\right]$$

即：$$D(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{D(s)}{s}]=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}D(s)\right]$$

上式右侧可理解为$D(s)$前面有零阶采样保持器。

➢ 特点:

（1）如果$D(s)$稳定，则$D(z)$也稳定；

（2）如果$D(s)$是一个复杂的传递函数，其z变换很可能无法在一般z变换表中查到，需要进行部分分式展开。

五、零极点匹配法(根匹配法)

- 零极点匹配法就是利用*z*变换的定义，将模拟控制器的零极点变换为数字控制器*D*(*z*)的零极点, 使*D*(*s*)和*D*(*z*)的低频增益相互匹配。

- 零极点匹配法的步骤：

（1）将*D*(*s*)变换成零极点形式

$$D(s)=\frac{k\prod_{m}(s+z_i)}{\prod_{n}(s+p_i)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

（2）零、极点分别按$z=e^{Ts}$变换，若分子、分母阶次不等，则表明在$s=\infty$处, 即在$z=-1$处还有$n-m$零点或极点。

$$D(z)=\frac{k_1\prod_{m}(z-e^{-z_iT})}{\prod_{n}(z-e^{-p_iT})}(z+1)^{n-m}$$

D(z)的增益k_1:

- 低通滤波，按$D(s)|_{s=0}=D(z)|_{z=1}$ 匹配
- 高通滤波，按$D(s)|_{s=\infty}=D(z)|_{z=-1}$ 匹配

- **特点**: 该变换是基于*z*变换进行的，*D*(*s*)稳定，*D*(*z*)一定稳定。

离散化方法小结

后向差分法	$D(z)=D(s)\Big\vert_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$	左到小圆	$D(s)$稳定，$D(z)$一定稳定，等效精度差，K不变
前向差分法	$D(z)=D(s)\Big\vert_{s=\frac{z-1}{T}}$	圆到圆	$D(s)$稳定， $D(z)$可能不稳定,等效精度差，K不变
双线性变换法	$D(z)=D(s)\Big\vert_{s=\frac{2}{T}*\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}$	左到单位圆	$D(s)$稳定， $D(z)$也稳定，低频特性保持好,高频失真,无混频现象，K不变
脉冲响应变换法	$D(z)=K\cdot Z\left[D(S)\right]$	左到单位圆(有重复)	脉冲响应采样值相同，易生频混，K改变
阶跃响应不变法	$D(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}D(s)\right]$	左到单位圆(有重复)	阶跃响应采样值相同，稳态增益K改变
零极点匹配法	$D(z)=K\cdot D(s)\Big\vert_{(S+a)\to(z-e^{-aT})}$	左到单位圆	z与s域零极点位置一一对应，补充$z=-1$零点可避免频混，K改变

离散化方法小结

例 **设有模拟控制器** $D(s)=\dfrac{2}{(s+2)(s+3)}$ **，分别用后向差分法、双线性变换法、脉冲响应不变法、阶跃响应不变法、零极点匹配法离散化处理，求其对应的数字控制器$D(z)$。采样周期为0.1s。**

解:

（1）后向差分法

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}=\frac{2}{(\frac{1-z^{-1}}{T}+2)(\frac{1-z^{-1}}{T}+3)}$$

$$=\frac{0.02}{(1.2-z^{-1})(1.3-z^{-1})}$$

$$=\frac{0.0128}{(1-0.8333z^{-1})(1-0.7692z^{-1})}$$

离散化方法小结

例 $D(s)=\dfrac{2}{(s+2)(s+3)}$， **求数字控制器$D(z)$。采样周期为0.1s。**

解：

（2）双线性变换法

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}*\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}=\frac{2}{(\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2)(\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+3)}$$

$$=\frac{2}{(20\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2)(20\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+3)}$$

$$=\frac{2(1+z^{-1})^2}{(22-18z^{-1})(23-17z^{-1})}=\frac{0.004(1+z^{-1})^2}{(1\text{-}0.8182z^{-1})(1-0.7391z^{-1})}$$

离散化方法小结

例 $D(s)=\dfrac{2}{(s+2)(s+3)}$，**求数字控制器$D(z)$。采样周期为0.1s。**

解： **（3）脉冲响应不变法**

$$D'(z)=Z[D(s)]=Z[\frac{2}{(s+2)(s+3)}]=2Z(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3})$$

$$=2(\frac{z}{z-e^{-2T}}-\frac{z}{z-e^{-3T}})=\frac{0.1558z}{(z-0.8187)(z-0.7408)}$$

按照增益匹配法则有:

$$K=T=0.1$$

$$D(z)=K\cdot D'(z)$$

$$=\frac{0.01558z}{(z-0.8187)(z-0.7408)}$$

$$K=\frac{D(s)\big|_{s=0}}{D'(z)\big|_{z=1}}$$

$$=\frac{(1-0.8187)(1-0.7408)}{3*0.1558}=0.1005$$

$$D(z)=K\cdot D'(z)=\frac{0.01566z}{(z-0.8187)(z-0.7408)}$$

离散化方法小结

例 $D(s)=\dfrac{2}{(s+2)(s+3)}$ ， **求数字控制器$D(z)$。采样周期为0.1s。**

解： **（4）阶跃响应不变法**

$$D(z)=Z[\frac{1-e^{sT}}{s}\cdot\frac{2}{(s+2)(s+3)}]$$

$$=\frac{(1-z^{-1})}{3}Z[\frac{6}{s(s+2)(s+3)}]=\frac{(1-z^{-1})}{3}Z[\frac{1}{s}-\frac{3}{s+2}+\frac{2}{s+3}]$$

$$=\frac{(1-z^{-1})}{3}(\frac{z}{z-1}-\frac{3z}{z-e^{-2T}}+\frac{2z}{z-e^{-3T}})$$

$$=\frac{(z-1)}{3}(\frac{1}{z-1}-\frac{3}{z-e^{-0.2}}+\frac{2}{z-e^{-0.3}})$$

$$=\frac{(1+2e^{-0.3}-3e^{-0.2})z+e^{-0.5}+2e^{-0.2}-3e^{-0.3})}{3(z-e^{-0.2})(z-e^{-0.3})}$$

$$=\frac{0.00848(z+0.8465)}{(z-0.8187)(z-0.7408)}=\frac{0.00848z^{-1}(1+0.8465z^{-1})}{(1-0.8187z^{-1})(1-0.7408z^{-1})}$$

离散化方法小结

例 $D(s)=\dfrac{2}{(s+2)(s+3)}$ ，**求数字控制器$D(z)$。采样周期为0.1s。**

解：（5）零极点匹配法

$$\boxed{D(z)=\frac{k_1\prod\limits_m (z-e^{-z_i T})}{\prod\limits_n (z-e^{-p_i T})}(z+1)^{n-m}}$$

两个极点： $p_1=-2 \quad p_2=-3$

$$D'(z)=\frac{(z+1)^2}{(z-e^{-2\times0.1})(z-e^{-3\times0.1})}=\frac{(z+1)^2}{(z-0.8187)(z-0.7408)}$$

按照增益匹配法则有:

$$K=\frac{D(s)|_{s=0}}{D'(z)|_{z=1}}=\frac{(1-0.8187)(1-0.7408)}{12}=0.0039$$

$$D(z)=KD'(z)=\frac{0.0039(z+1)^2}{(z-0.8187)(z-0.7408)}=\frac{0.0039(1-z^{-1})^2}{(1-0.8187z^{-1})(1-0.7408z^{-1})}$$

思考题

- 列举5种常见的连续系统离散化方法，并比较其精度和对系统稳定性的影响。