第二章　导热基本定律及稳态导热

本章教学内容

2-1 导热基本定律

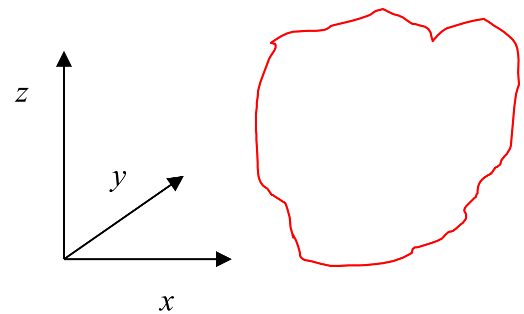
2-2 导热微分方程式及定解条件

2-3 通过平壁及圆筒壁的一维稳态导热

2-4 通过延伸体的稳态导热分析

§2-1导热的基本定律和热导率（导热系数）

一、温度分布的描述和表示(几个术语)



1. 温度场：某一瞬间物体内各点的温度分布称为温度场。（各个点温度分布的集合）

求解导热问题的主要任务就是要获得物体内的温度场。

温度场分类

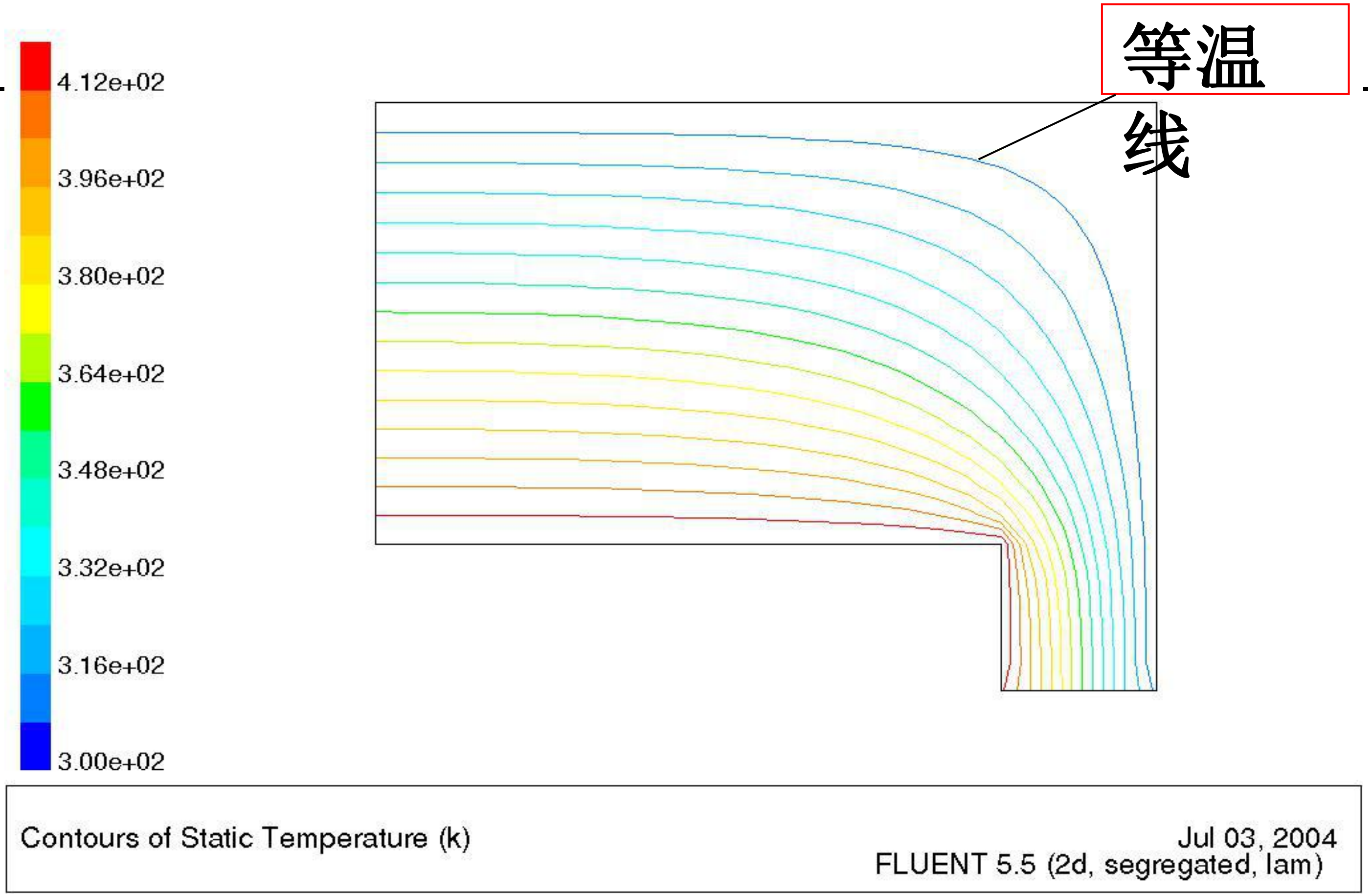
- 稳态温度场 $t = f(x, y, z)$
- 非稳态温度场 $t = f(x, y, z, \tau)$

- 一维温度场
  - $t = f(x)$
  - $t = f(x, \tau)$
- 二维温度场
  - $t = f(x, y)$
  - $t = f(x, y, \tau)$
- 三维温度场
  - $t = f(x, y, z)$
  - $t = f(x, y, z, \tau)$

2. 等温线，等温面

①定义：同一瞬间温度相等的各点连成的线或面称为等温线或等温面

关系：等温线在任何一个二维的截面上等温面表现为等温线。



②特点：

- 温度不同的等温线或等温面彼此不能相交
- 连续温度场中等温线或面不会中止，呈闭合曲线或终止与边界上。
- 稳态温度场，位置与形状固定不变

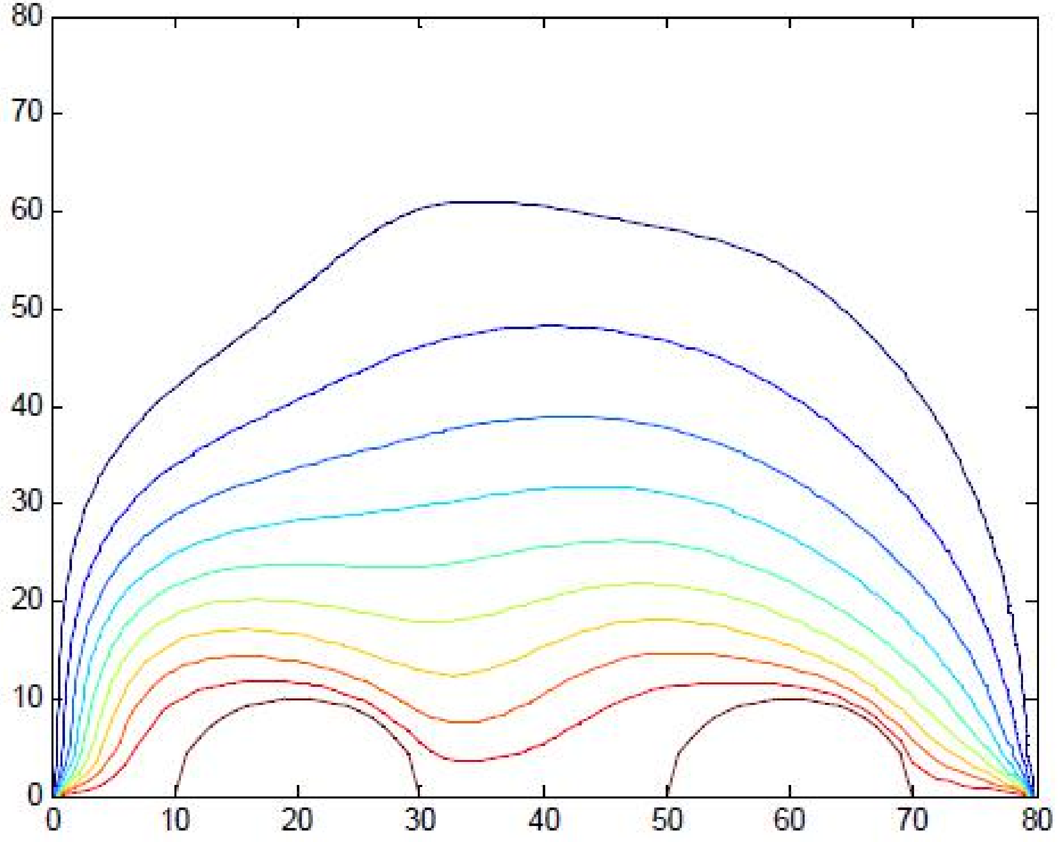
③用途：

(1) 等温线的疏密可直观反映出不同区域温度梯度（即热流密度）的相对大小

(2) 由等温线与界面的交角可以判定界面是否绝热

—绝热界面必与等温线垂直 $\frac{\partial t}{\partial n}=0$

金属部件内的等温线



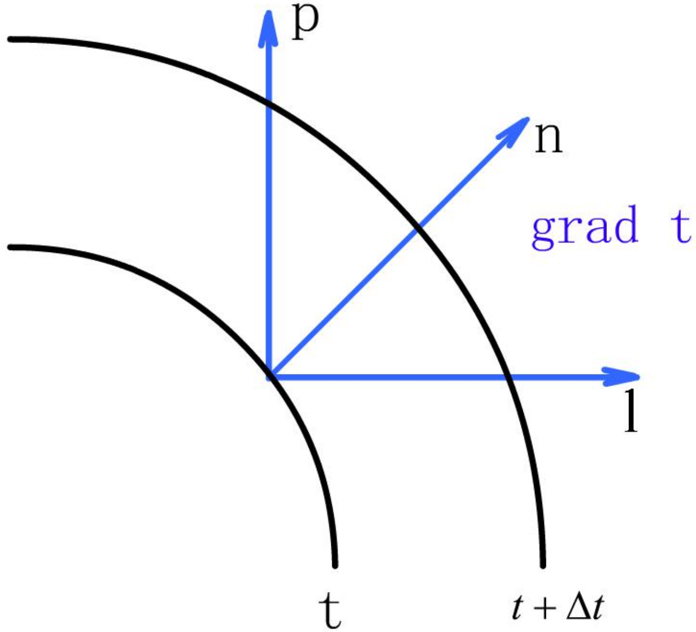
3. 温度梯度

①梯度：指向变化最剧烈的方向(向量, 正向朝着增加方向)

②温度梯度(某点所在等温线与相邻等温线之间的温差与其法线间距离之比取极限)

$$\lim_{\Delta n\to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta n}\right)\vec{n}=grad\left(t\right)=\frac{\partial t}{\partial n}\vec{n}$$

$$grad\left(t\right)=\frac{\partial t}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial t}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial t}{\partial z}\vec{k}$$



4. 热流量

单位时间内，经由面积A的传递热量称为传热量，用Φ表示，单位 W。

5. 热流密度

单位面积的热流量称为热流密度，用q表示单位 W/m^2。

二、导热基本定律(傅里叶定律)

1822年，法国数学家傅里叶（Fourier）在实验研究基础上，发现导热基本规律 —— 傅里叶定律.

法国数学家Fourier：法国拿破仑时代的高级官员。曾于1798-1801追随拿破仑去埃及。后期致力于传热理论，1807年提交了234页的论文，但直到1822年才出版。

1. 导热基本定律的文字表达：

单位时间内通过单位截面积所传递的热量，正比于当地垂直于截面方向上的温度变化率，方向指向温度降低的方向。

2. 导热基本定律的数学表达：

$$\vec{q}=\frac{\vec{\phi}}{A}=-\lambda gradt=-\lambda\frac{\partial t}{\partial n}\vec{n}$$

grad t —空间某点的温度梯度；

$\boldsymbol{n}$ —通过该点的等温线上法向单位矢量；

在直角坐标系中的向量表达式为：

$$\vec{q}=-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial t}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial t}{\partial z}\vec{k}\right)\qquad \mathrm{W/m^2}$$

热流密度在x，y，z 方向的投影的大小分别为：

$$q_x=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x};\quad q_y=-\lambda\frac{\partial t}{\partial y};\quad q_z=-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}$$

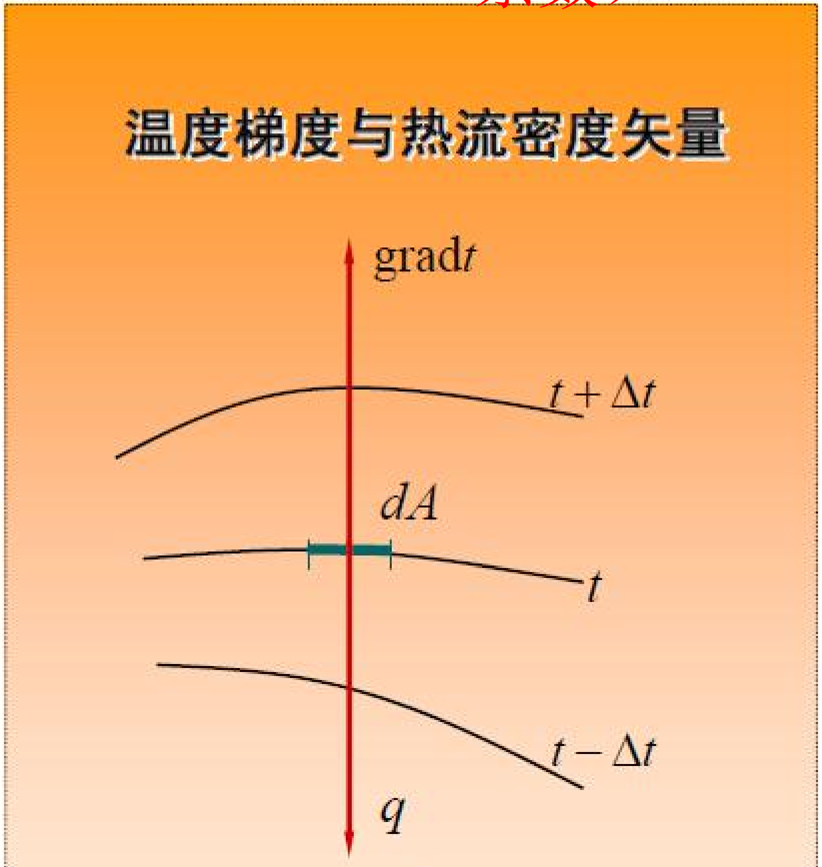
对一维稳态导热可写为：

$$\vec{q}_x=-\lambda\frac{dt}{dx}\vec{i}\qquad \mathrm{W/m^2}$$

q —该处的**热量密度矢量**；

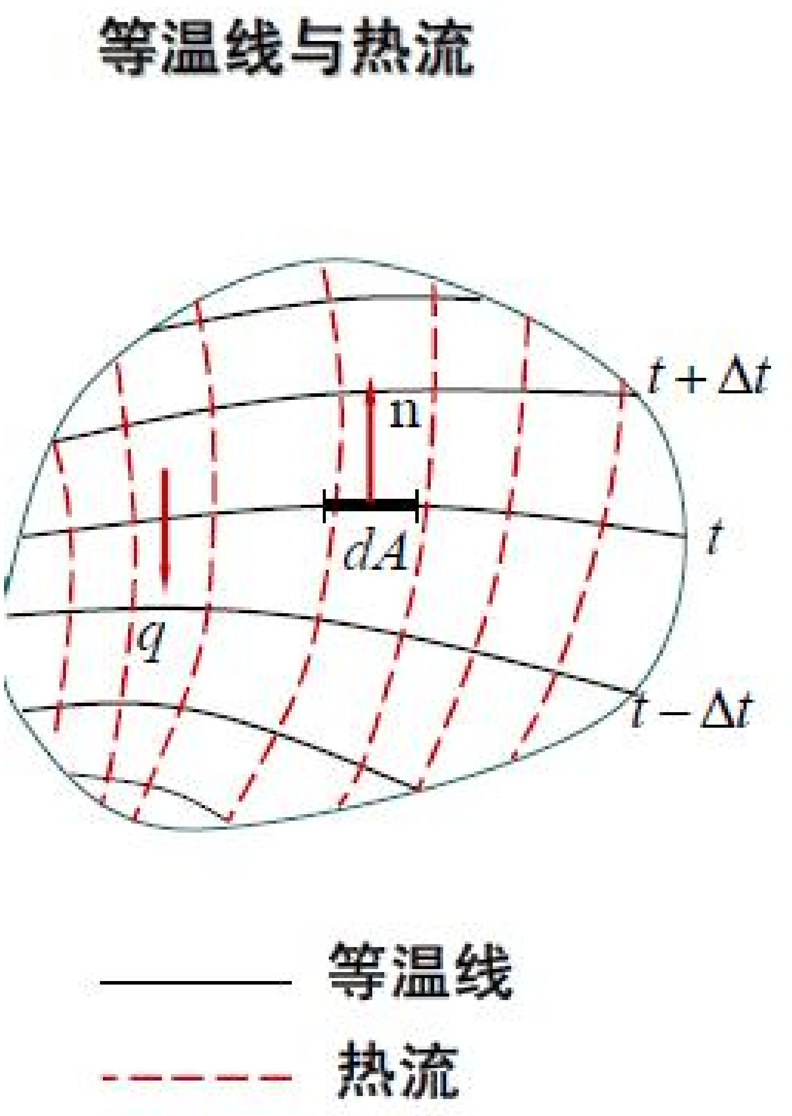
λ—热导率 **W/(m.K)**。

2－1　导热的基本定律和热导率（导热系数）



$$\mathbf{q}=-\lambda \mathrm{grad} t$$

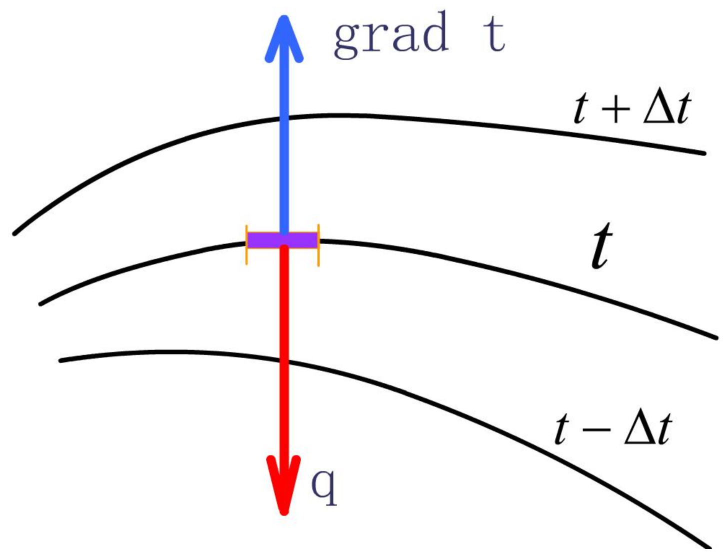
$$q=\frac{d\Phi}{dA}$$



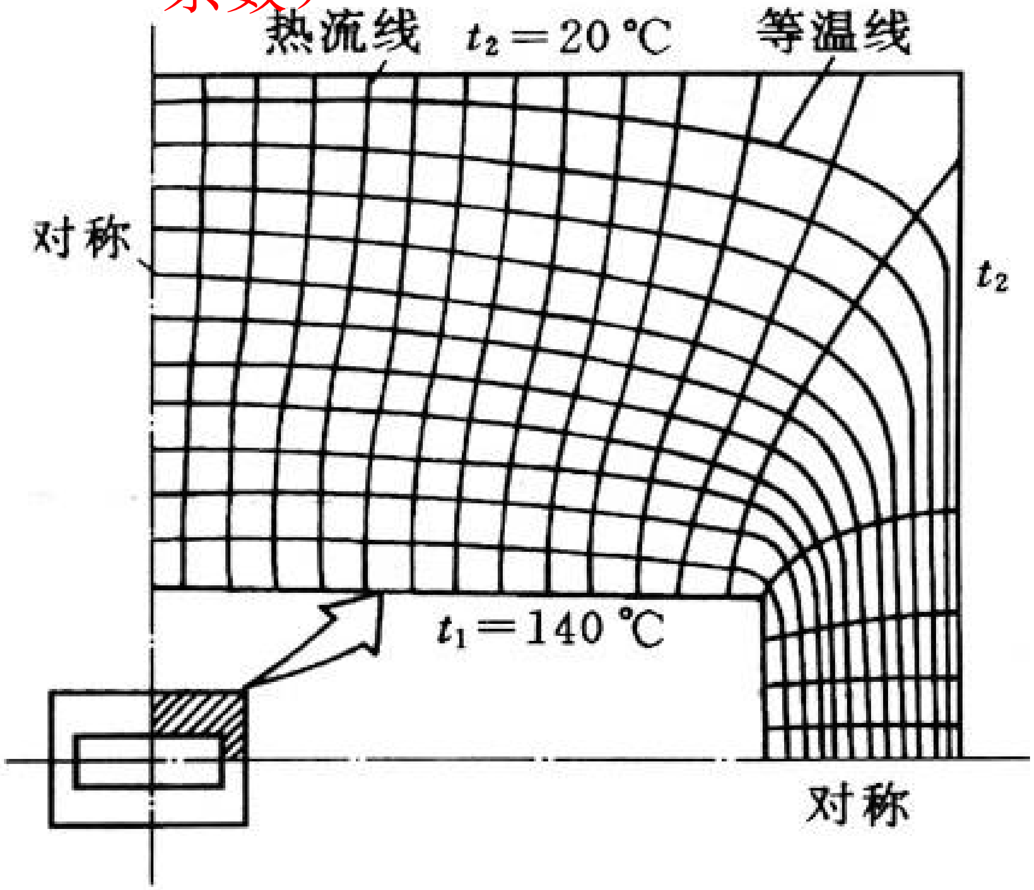
3. 注意

①负号的含义：热量传递方向指向温度降低方向，与温度升高方向相反

②热流方向与等温线(面)垂直，热流密度矢量的走向可用热流线来表示



2－1　导热的基本定律和热导率（导热系数）



思考题：

不同温度的等温面(线)不能相交，热流线能相交吗？热流线为什么与等温线垂直？

③实验定律，普遍适用(变物性，内热源，非稳态，固液气)

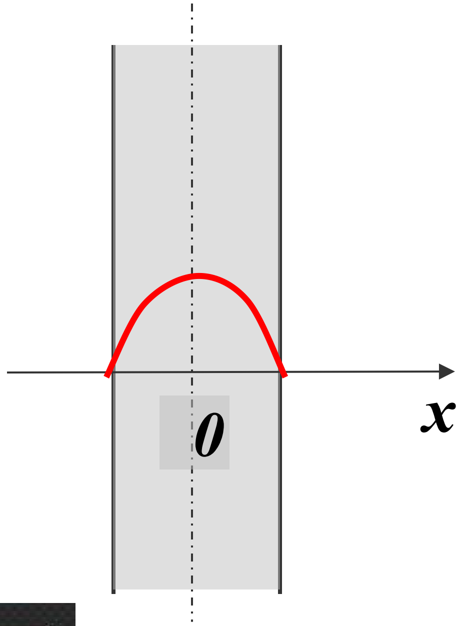
④引起物体内部或物体之间的热量传递的根本原因：　温度梯度

⑤一旦温度分布$t = f(x, y, z, \tau)$已知，热流密度可求（求解导热问题的关键：获得温度场分布）

例1：已知右图平板中的温度分布可以表示成如下的形式：

$$t = c_1 x^2 + c_2$$

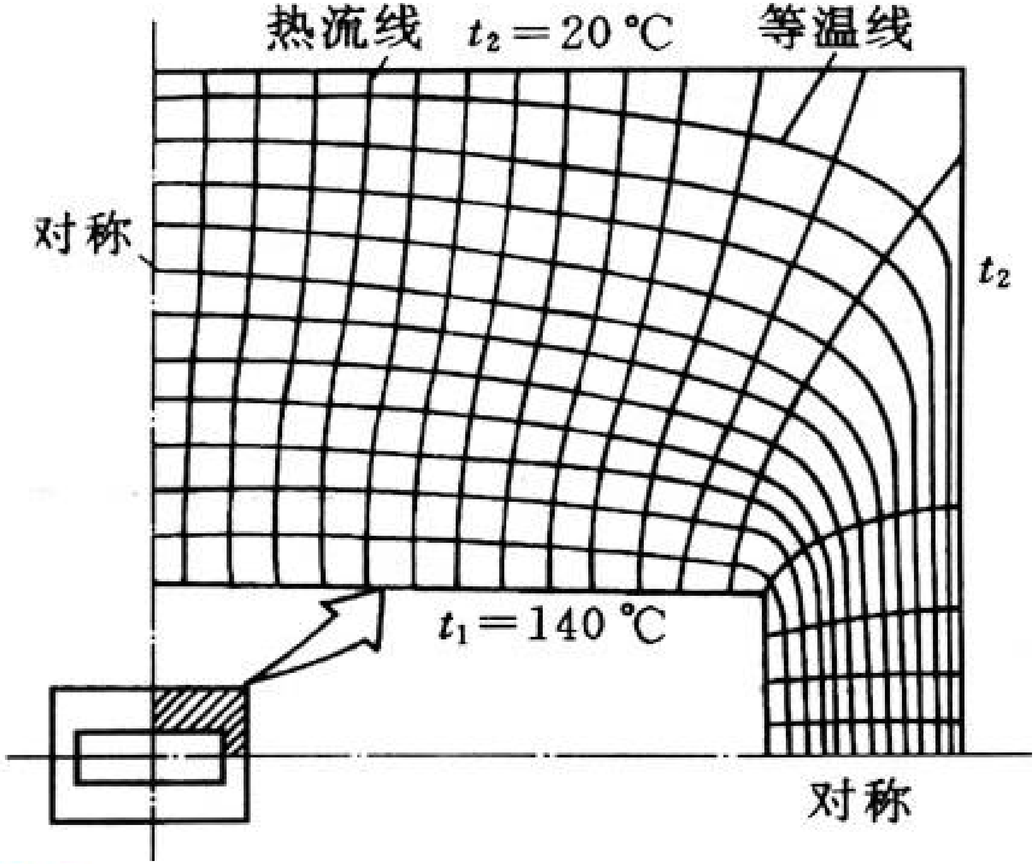
其中C_1、C_2和平板的导热系数为常数，计算在通过 $x = 0$ 截面处的热流密度为多少？



求解步骤：

$$t = f(x, y, z, \tau) \rightarrow grad\ t \rightarrow q$$

2－1　导热的基本定律和热导率（导热系数）



思考题：

不同温度的等温面(线)不能相交，热流线能相交吗？热流线为什么与等温线垂直？

三、热导率（导热系数）

1. 定义

$$\lambda = \frac{|\bar{q}|}{|\mathrm{grad}\ t|}$$

单位温度梯度作用下的物体内所产生的热流量，**标量**，单位：**W/(m·K)**

2. 热导率是材料固有的热物理性质，表示物质导热能力的大小。

1.影响热导率的因素

1）状态、成分、结构

- 状态(气态、液态和固态)

物质在三种相态中其热导率的大小是：

气态时热导率最小，液态次之，固态时最大。

如：　0.0183W/(m.K) 、0.55W/(m.K)、2.22W/(m.K) 。

- 成分

金属的热导率大于非金属，纯金属的热导率大于其合金。

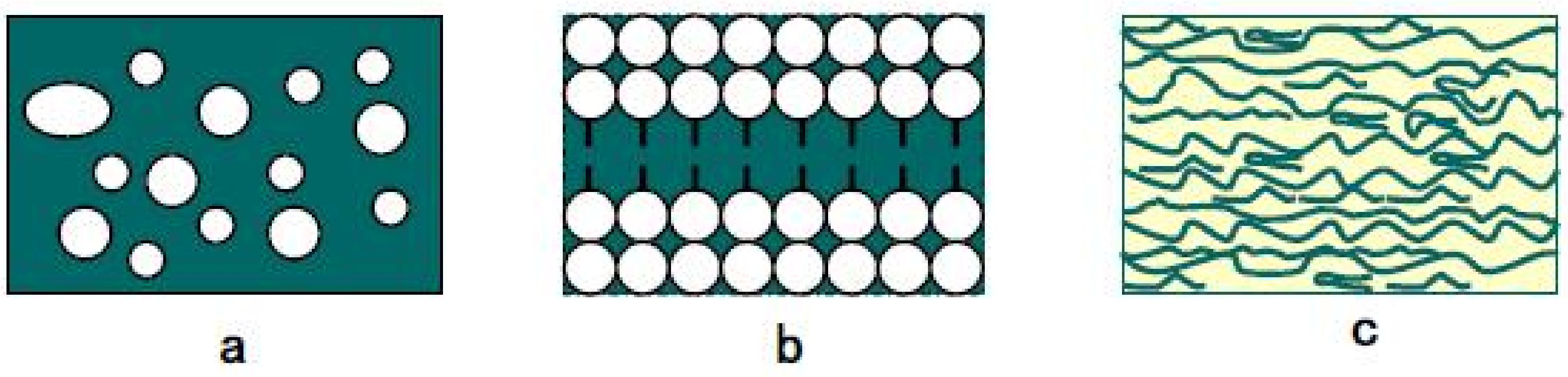
- 结构

同一种物质，晶体时的热导率大于非晶体时的热导率。

三相点下的冰、水和水蒸气的热导率。

2）多孔材料的密度

- 多孔材料的热传递的机理是：骨架和骨架空隙内的介质的**导热、对流和辐射**共同作用，其热导率称为表观热导率，习惯上也称为热导率。
- 多孔材料表观密度的不同关系到孔隙内部流体的传热机理和骨架间的传热机理，从而会影响表观热导率。

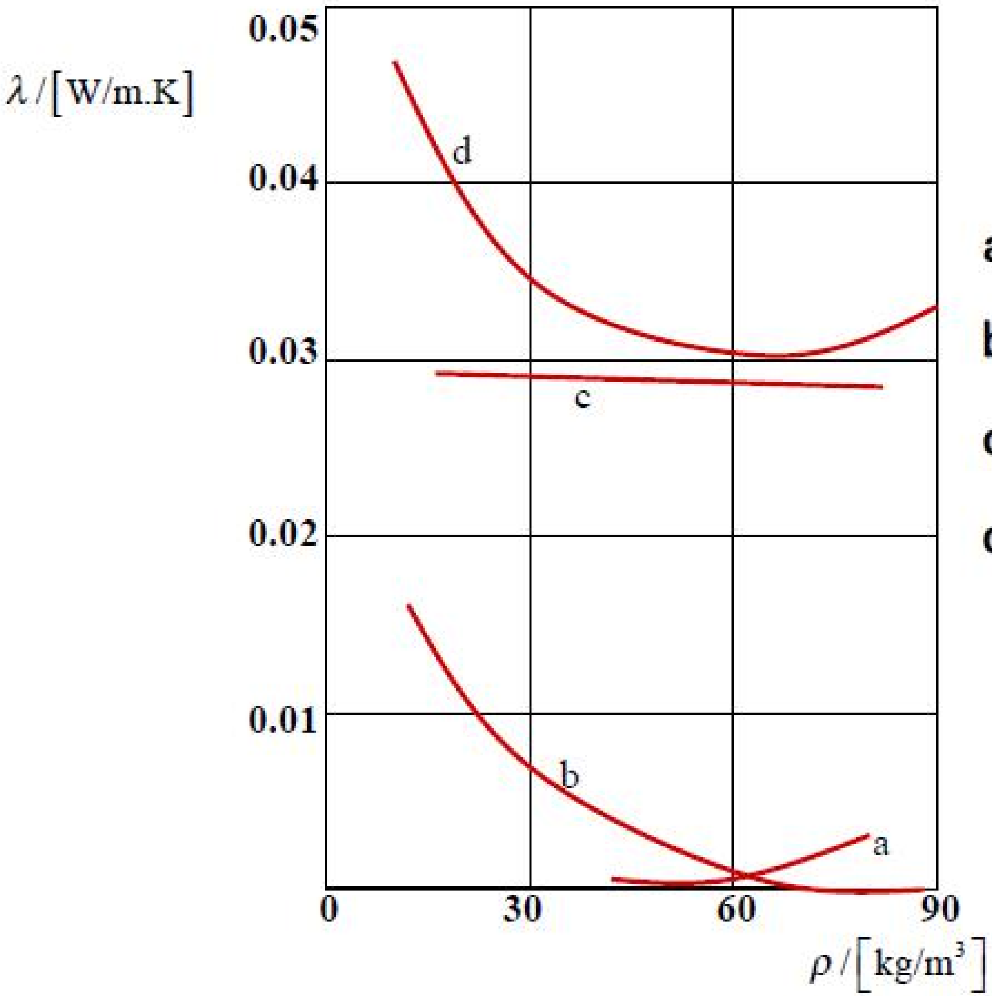


● 保温材料—（GB4272-92）凡平均温度不高于350℃时热导率不大于0.12W/(m.K）的材料称为保温材料。

● 保温材料热导率小的原因是：骨架间的空隙和孔腔内含有热导率较小的介质；这些介质在保温材料中流动或不流动。

● 一般来说，表观密度越小，这些材料所含低热导率介质越多，材料的热导率越小。但密度太小，孔隙尺寸变大，对流传热和辐射传热的作用增强，热导率反而增加。

纤维直径为5μm的玻璃棉在20℃时的表观热导率



a—固体中的导热；

b—辐射传热；

c—气相传热；

d—表观热导率。

2－1 导热的基本定律和热导率（导热系数）

保温保冷材料的分类

分类	纤维状							多孔状							层状
	无机				有机			无机			有机				金属
	人造	人造	人造	人造	天然	天然		人造			人造				人造
材料及制品形状	石棉	陶瓷纤维	玻璃纤维	矿渣棉	软木塞	硅藻土珍珠岩	蛭石	硅酸钙	轻质耐火材料	泡沫玻璃	泡沫酚醛树脂	泡沫聚氨乙烯	泡沫聚苯乙烯	泡沫聚氯乙烯	铝板或其它金属箔
	板、筒、带、绳	毡、筒、带、绳	毡、筒、带、绳	毡、筒、带、绳	板、粒	粉粒、块	粉粒、块	板、筒、	块	块、板、筒、	块、板、筒、	块、板、筒、	块、板、筒、	块、板、筒、	由铝板或其它金属薄板制成的夹层

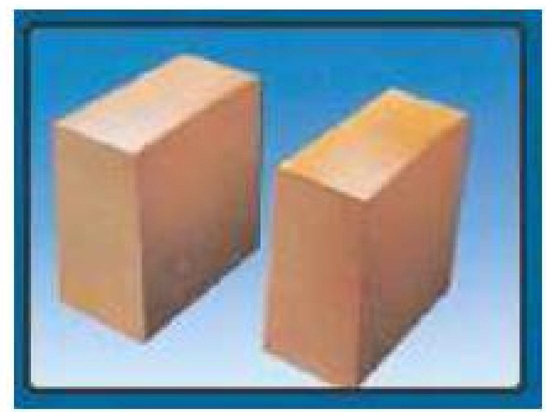
复合硅酸盐

玻璃棉

聚氨酯泡沫

岩棉

泡沫石棉



耐火材料

3) 温度

金属 λ大

$t\uparrow$， $\lambda\downarrow$

非金属固体 λ远低于金属

$t\uparrow$， $\lambda\uparrow$

液体 λ介于气体、固体之间

$t\uparrow$， $\lambda\downarrow$

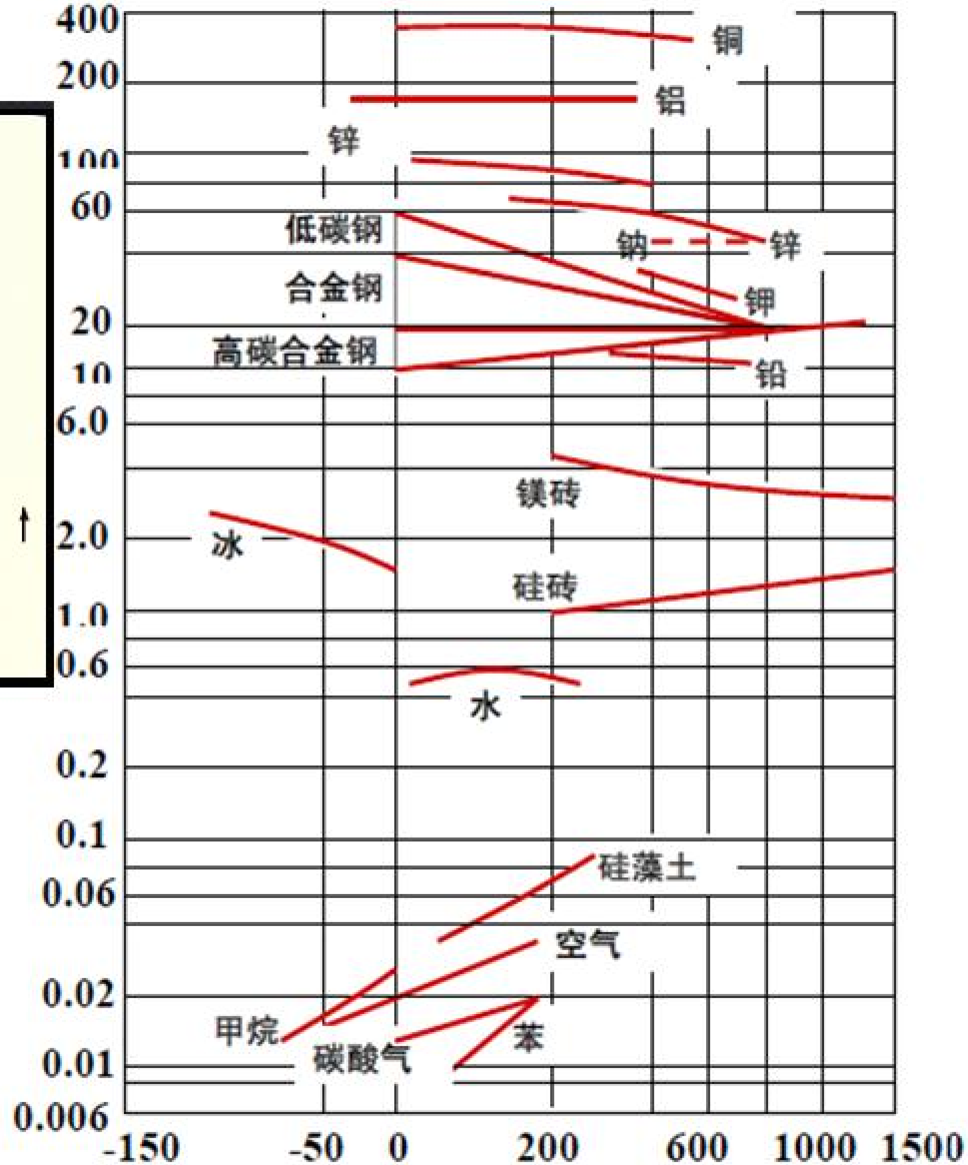
例外：水、甘油 $t\uparrow$， $\lambda\uparrow$

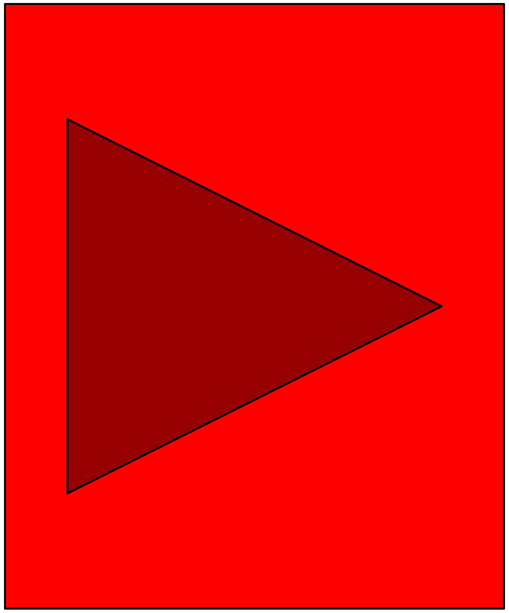
气体 λ小

$t\uparrow$， $\lambda\uparrow$

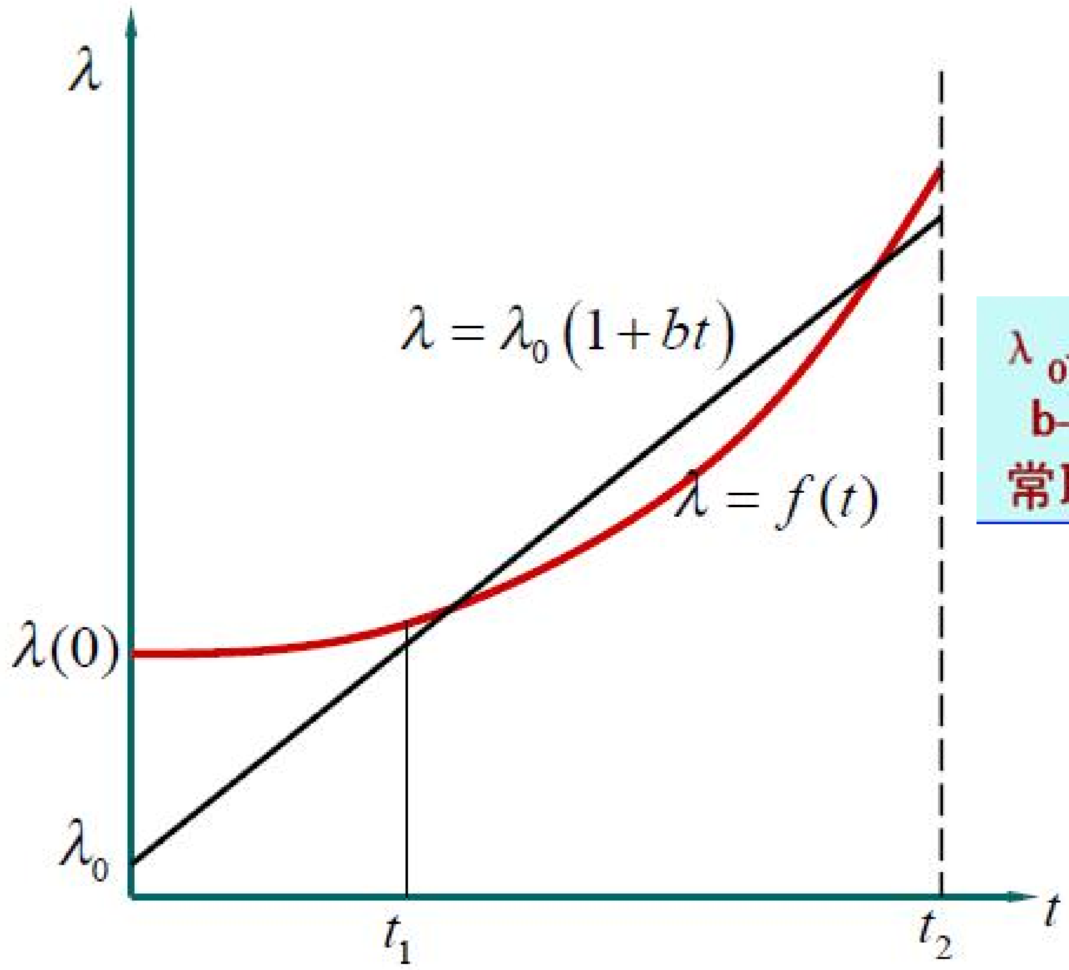
工程上为方便使用，习惯将一定温度范围内的热导率与温度的的关系近似回归成直线表示

$$\lambda = \lambda_0(1+bt)$$





λ 与 t 的关系



λ_0—按公式计算的0℃时的导热系数

b—实验测定的系数，b>0或b≤0,

常取$t=(t_1+t_2)/2$

2－1 导热的基本定律和热导率（导热系数）

平均热导率 $$\bar{\lambda}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\lambda_0\left(1+bt\right)dt}{t_2-t_1}$$

$$=\frac{\lambda_0}{t_2-t_1}\left[\left(t_2-t_1\right)+b\frac{\left(t_2-t_1\right)\left(t_2+t_1\right)}{2}\right]$$

则 $$\bar{\lambda}=\lambda_0\left(1+b\frac{t_2+t_1}{2}\right)$$

而热导率 $$\lambda=\lambda_0\left(1+bt\right)$$

比较后可知，平均热导率等于平均温度下的热导率。

4）含水率

多孔材料很容易吸收水分。吸水后，由于热导率较大的水代替了热导率较小的介质（如空气等），且在温度梯度的推动下引起水分迁移，使多孔材料的表观热导率增加。如，矿渣棉含水10.7%时热导率增加25%，含水23.5%时热导率增加500%。

例:露天保温管道和保温的设备外包保护层。

6）记住常用物质之值

在常温（20℃）条件下

纯铜：$\lambda = 399\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$

碳钢：$\lambda = 36.7\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$

水：$\lambda = 0.599\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$

空气：$\lambda = 0.0259\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$

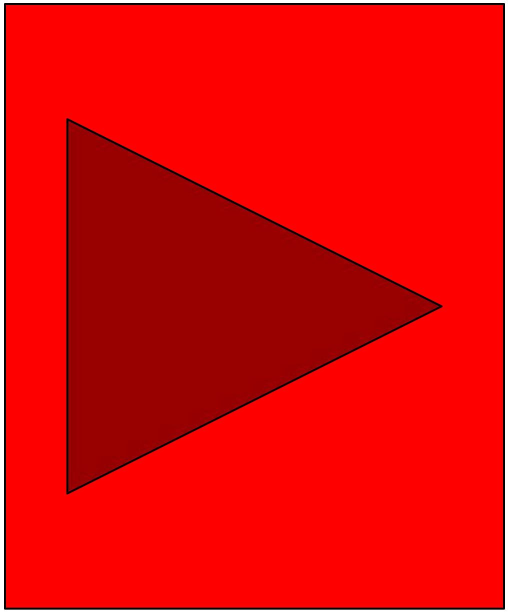
四、使用傅里叶定律应注意的几点:

1. 表达式适用于连续介质的假定;
2. 适用于稳态和非稳态、有内热源和无内热源、以及常物性和物性随温度改变的情况;

3. 对各向异性材料必须做一定的修改;
4. 当导热发生的过程时间极短或空间尺度极小时，傅里叶定律不在适合。

§2-2 导热微分方程式及定解条件

问题1：影响导热过程的因素有哪些？



问题1：影响导热过程的因素有哪些？

① 几何条件：导热体的几何形状及大小、如：平壁、圆筒壁、球形、壁厚、直径等；

② 物理条件：导热体的λ 、ρ、c、及是否随温度变化等，是否具有内热源及其分布状况；

③ 初始条件：时间因素影响，反映导热系统的初始状态；

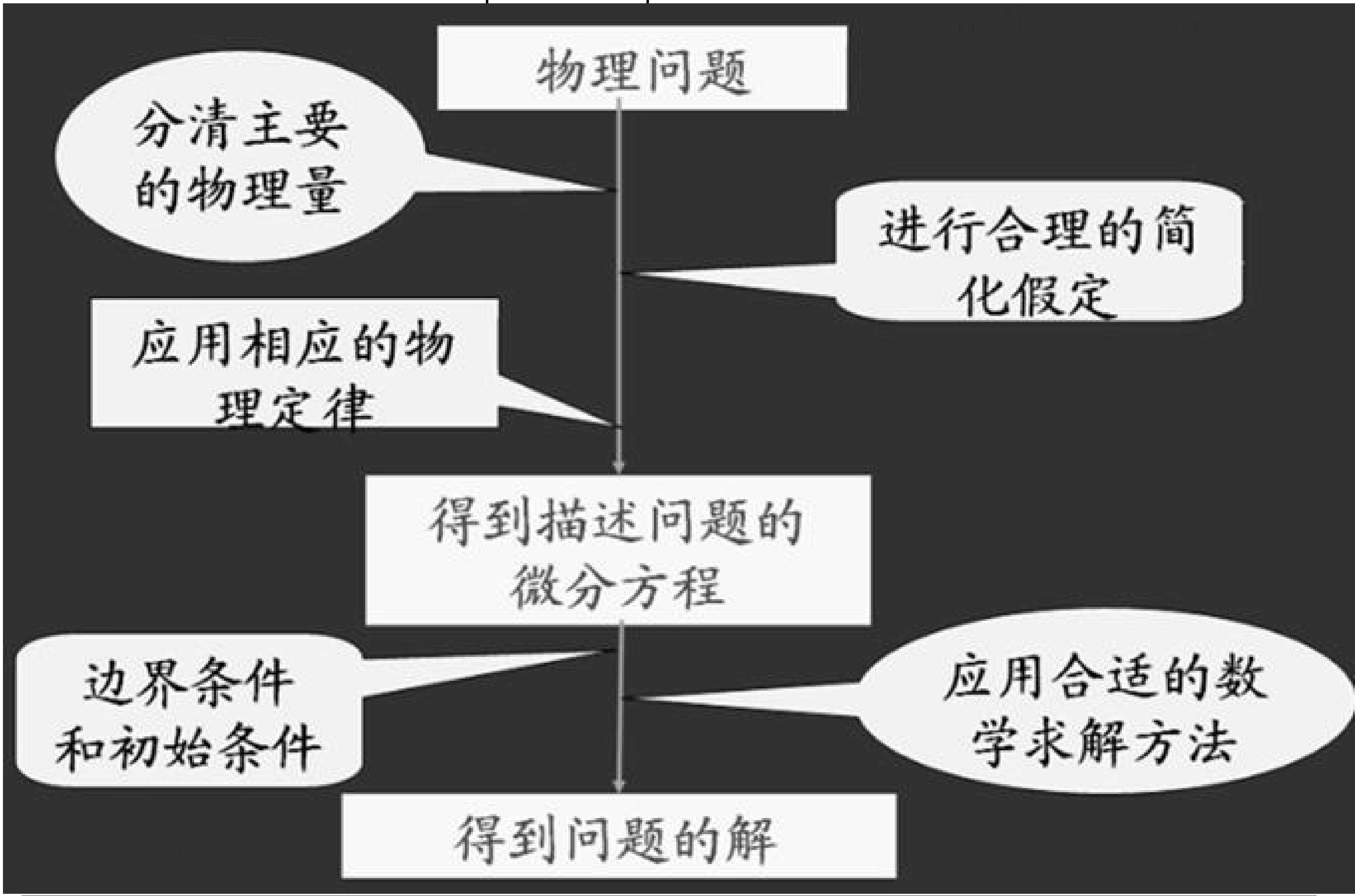
④ 边界条件：反映导热系统的边界特征、导热系统与外界之间的联系。

问题2：有没有确定导热过程中导热速率和温度分布的一般方法呢？

尽管根据傅里叶定律 $\vec{q} = -\lambda \mathrm{grad} t$

我们知道了温度场中任意一点的热流密度与物体的热导率和温度梯度的关系，但是如果不知道温度分布，我们还是无法知道物体中的热量传递规律。

那么，什么方法能够帮助我们获得温度梯度的信息呢？换言之，怎样才能知道温度场的信息呢？


物理问题
分清主要的物理量
进行合理的简化假定
应用相应的物理定律
得到描述问题的微分方程
边界条件和初始条件
应用合适的数学求解方法
得到问题的解

§2-2 导热微分方程式及定解条件

一、基本思想

作用：导热微分方程式及定解条件是对导热体的数学描述，是理论求解导热体温度分布的基础。

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

理论：导热微分方程式建立的基础是：

$$\boxed{\text{热力学第一定律+傅里叶定律}}$$

方法：对导热体内任意的一个微小单元进行分析，依据能量守恒关系，建立该处温度与其它变量之间的关系式。

二、推导

1. 物理问题描述

三维的非稳态导热体，且物体内有内热源（导热以外其它形式的热量，如化学反应能、电能等）。

2. 假设条件

(1) 所研究的物体是各向同性的连续介质；

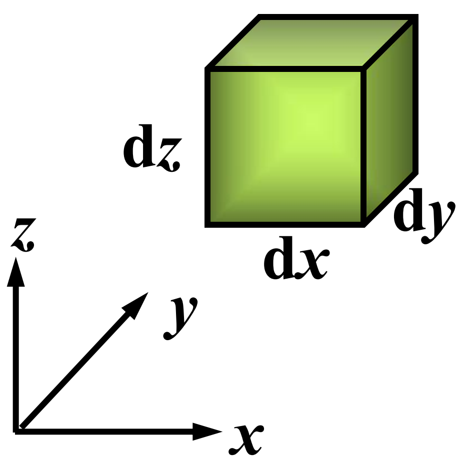
(2) 导热率、比热容和密度均已知；

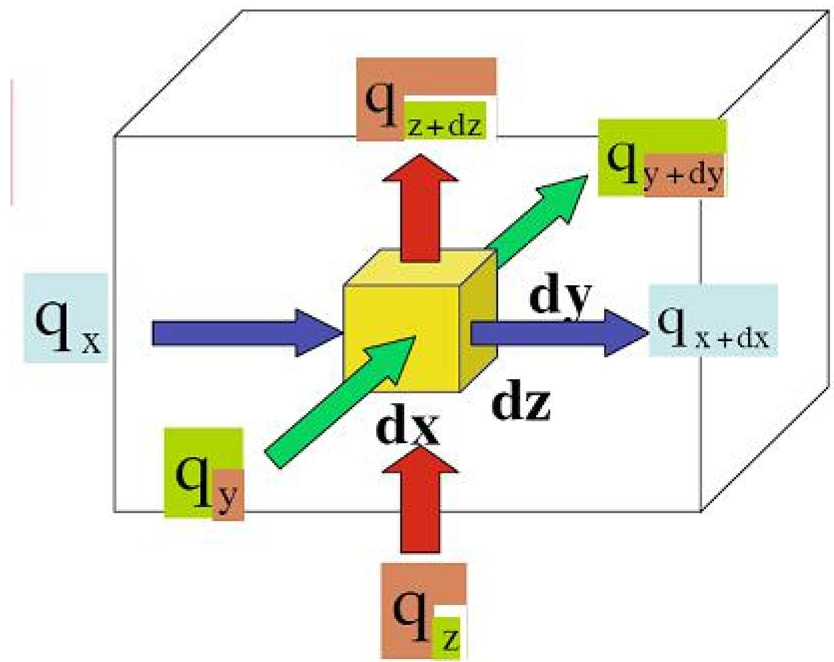
(3) 内热源均匀分布，强度为 $\dot{\Phi}$ [W/m^3]；

(4) 导热体与外界没有功的交换。

3. 建立坐标系，取分析对象（微元体）

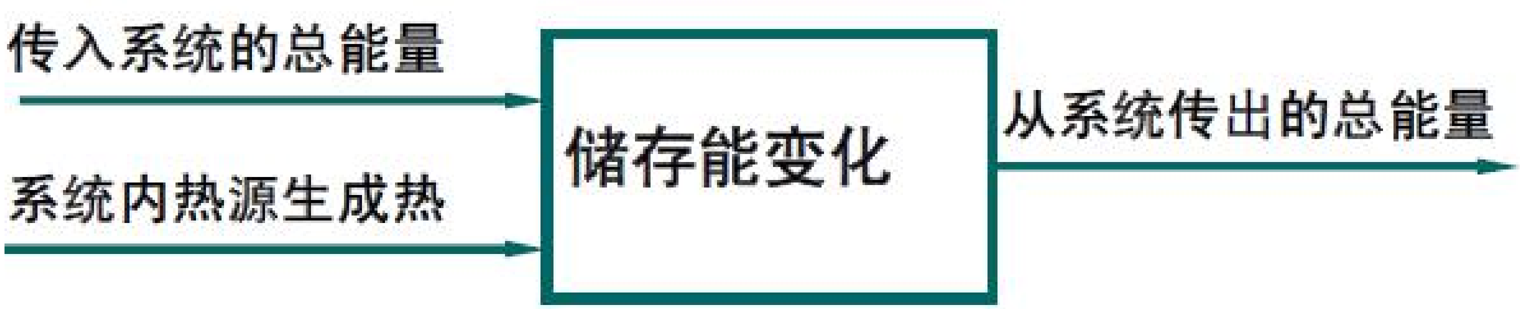
按照从前的思路，从微元体入手可能是一条正确的道路、尝试在直角坐标系中进行分析





4. 能量变化的分析

由于是非稳态导热，微元体的温度随时间变化，因此存在**内能的变化**；从各个界面上有**导入和导出**微元体的热量；**内热源**产生的热量。



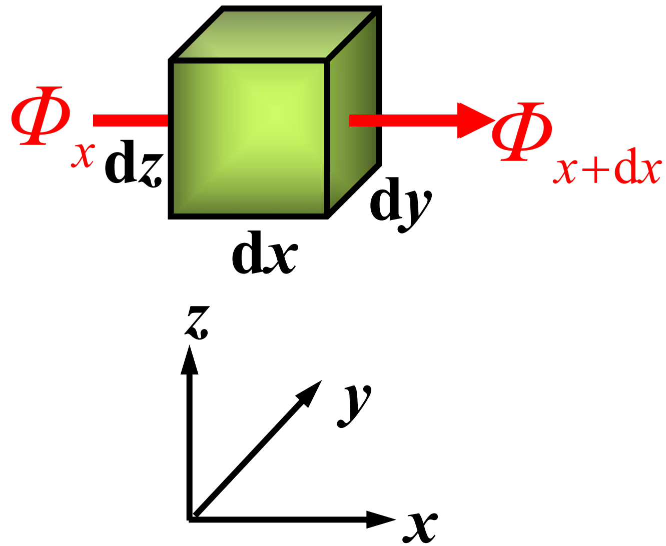
能量平衡方程：

导入与导出净热量+内热源发热量
=热力学能的增加

①导入微元体的热量(Fourier Law)

沿x轴方向、经x表面导入的热量：

$$\Phi_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydz$$



③导出微元体的热量

沿 x 轴方向、经 x+dx 表面导出的热量

$$\Phi_{x+dx} = \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \mathrm{d}x = \Phi_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

沿x 轴方向导入与导出微元体净热量

$$\Phi_x - \Phi_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right)\mathrm{dxdydz}$$

同理可得：

沿 y 轴方向导入与导出微元体净热量

$$\Phi_y - \Phi_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right)\mathrm{dxdydz}$$

沿 z 轴方向导入与导出微元体净热量

$$\Phi_z - \Phi_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right)\mathrm{dxdydz}$$

导入与导出净热量①~③：

$$\Phi_c = [\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})]dxdydz$$

②微元体内热源生成的热量

$$\Phi_V = \dot{\Phi}dxdydz$$

④微元体热力学能（内能）的增量

$$\Delta E = \rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}\cdot dxdydz$$

5. 导热微分方程的基本形式

④=①−③+②

$$\underbrace{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}}_{\text{非稳态项}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)}_{\text{扩散项（导热引起）}}+\underbrace{\dot{\Phi}}_{\text{内热源项}}$$

内能增量

三个坐标方向净导入的热量

- 导热微分方程的基本形式

$$\begin{cases} \mathbf{q} = -\lambda\, \mathbf{grad}\, t \\ \rho c \dfrac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla \bullet (-\mathbf{q}) + \Phi_v \end{cases}$$

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right) + \Phi_v$$

6. 导热微分方程与Fourier导热定律的关系

导热微分方程 = 能量守恒定律＋Fourier导热定律

导热微分方程：描述物体内部温度随时间和空间变化的一般关系（t, τ, x, y, z）

Fourier导热定律：描述物体内部温度梯度和热流密度间的关系（q, t）

三、简化情形

1. λ=constant

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

$$a=\frac{\lambda}{\rho c}$$

导温系数或热扩散率，单位：m^2/s，物性参数

热扩散率反映了导热过程中材料的导热能力(λ)与沿途物质储热能力(ρc)之间的关系，a值大，即 λ 值大或 ρc 值小，说明物体的某一部分一旦获得热量，该热量能在整个物体中很快扩散

表示物体被加热或冷却时，物体内部温度趋于一致的能力。

2. λ=constant & 无内热源

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) = a\nabla^2 t$$

3. λ=constant & steady

$$\nabla^2 t + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0$$

4. λ=constant & steady &无内热源

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

5. λ=constant & steady & 1D

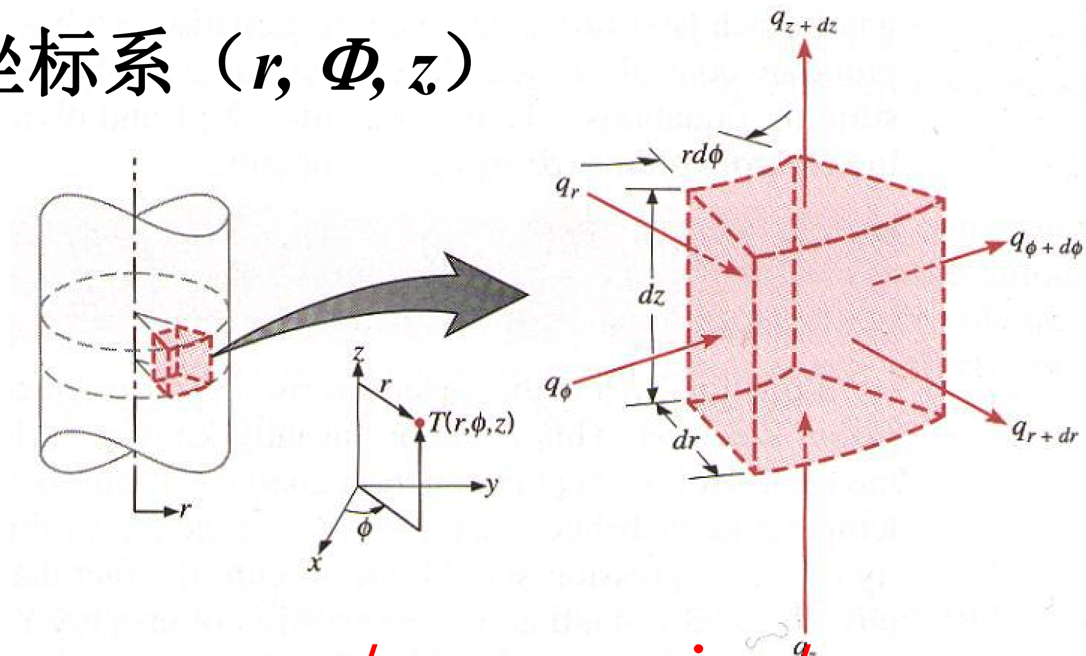
$$\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0$$

6. λ=constant & steady & 无内热源 & 1D

$$\frac{d^2t}{dx^2}=0$$

四、其它坐标系中的导热微分方程式

1. 圆柱坐标系（*r*, *Φ*, *z*）

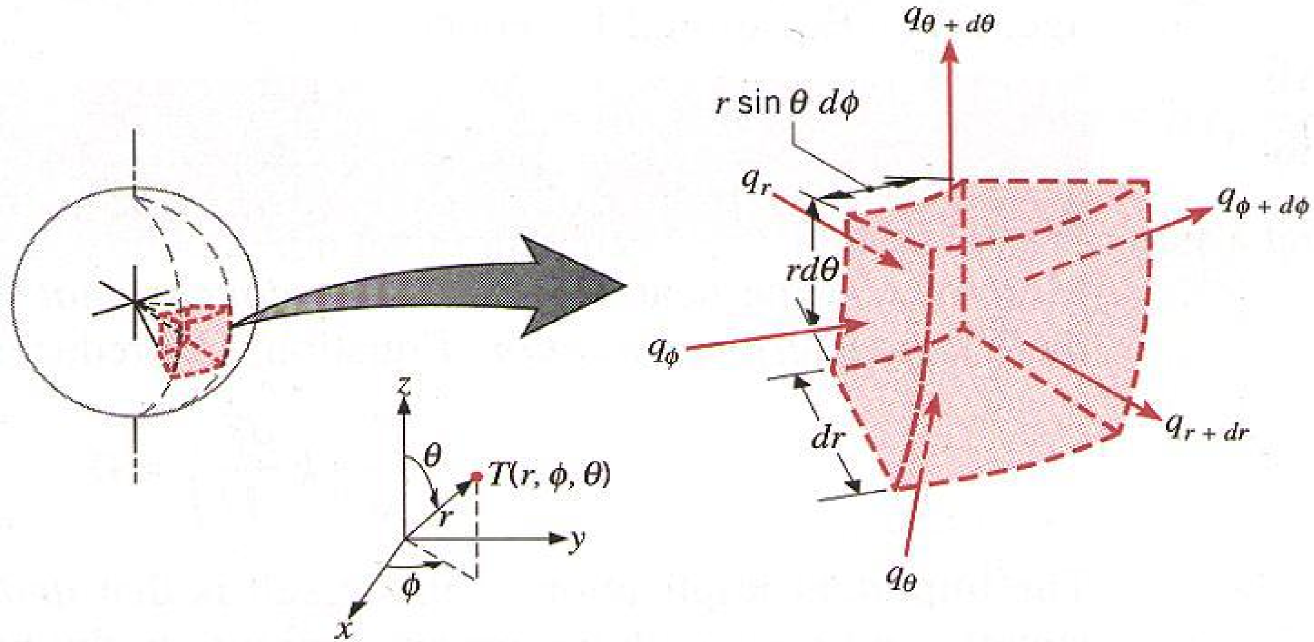


$$x = r\cos\phi;\ \ y = r\sin\phi;\ \ z = z$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \,\mathrm{grad}\, t = -\lambda \nabla t = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial t}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \dot{\Phi}$$

2. 球坐标系（r, θ, Φ）



$$x = r\sin\theta\cdot\cos\phi;\ \ y = r\sin\theta\cdot\sin\phi;\ \ z = r\cos\theta$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \mathrm{grad} t = -\lambda\nabla t = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\vec{e_\phi}\right)$$

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\lambda\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}) + \dot{\Phi}$$

五、定解条件

导热微分方程式描写物体的温度随时间和空间变化的关系；没有涉及具体、特定的导热过程。是通用表达式。

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0$$

有无穷多解

1. 导热问题的完整数学描述：

$$\boxed{\text{导热微分方程 + 定解条件}}$$

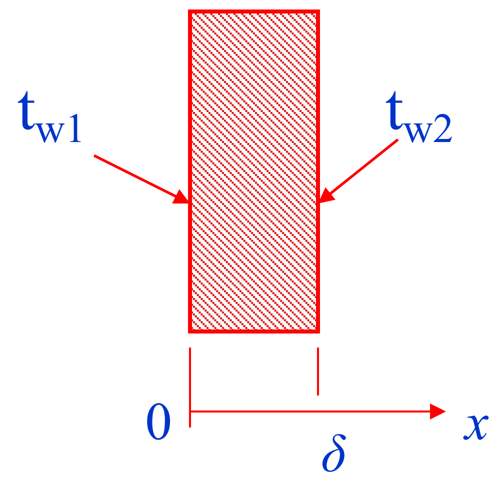
2. 定解条件定义：使得微分方程获得某一特定问题唯一解的附加条件。分为初始条件和边界条件

①初始条件

$$\tau = 0, t = f\left(x, y, z\right)$$

②常见的边界条件有三类

(1) 第一类边界条件：指定边界上的温度分布



$$t_w = f(\tau)$$

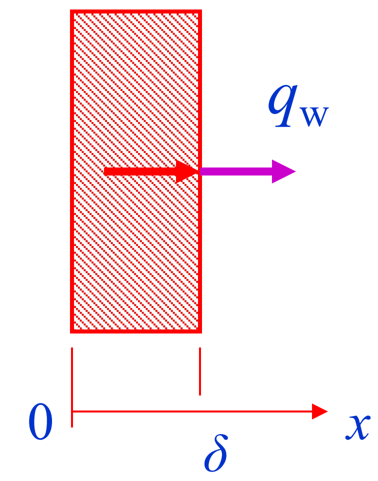
例：右图中

$$x = 0,\ t = t_{w1}$$

$$x = \delta,\ t = t_{w2}$$

(2) 第二类边界条件：给定边界上的热流密度

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\bigg|_w = f(\tau) = q_w$$



例：右图中

$$x = \delta, \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = q_w$$

思考：q_w的方向

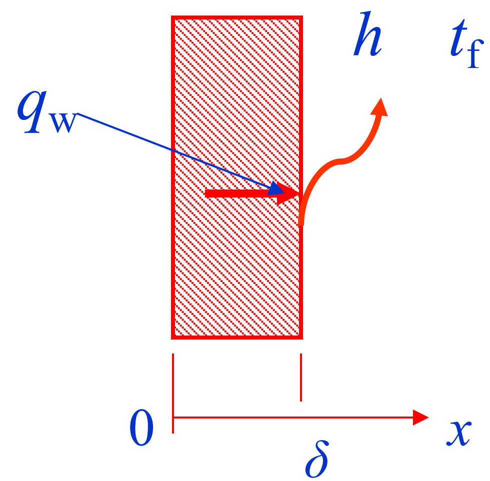
(3) 第三类边界条件：给定了边界上物体与周围流体间的**表面传热系数**以及**流体温度**

牛顿冷却定律：

$$q_w = h(t_w - t_f)$$

Fourier定律：

$$q_w = -\lambda(\partial t / \partial n)_w$$



$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\bigg|_w = h(t_w - t_f)$$

例：上图中

$$x = \delta, \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=\delta} = h(t_w - t_f)$$

导热微分方程式的求解方法

积分法、杜哈美尔法、格林函数法、拉普拉斯变换法 、分离变量法、积分变换法、数值计算法

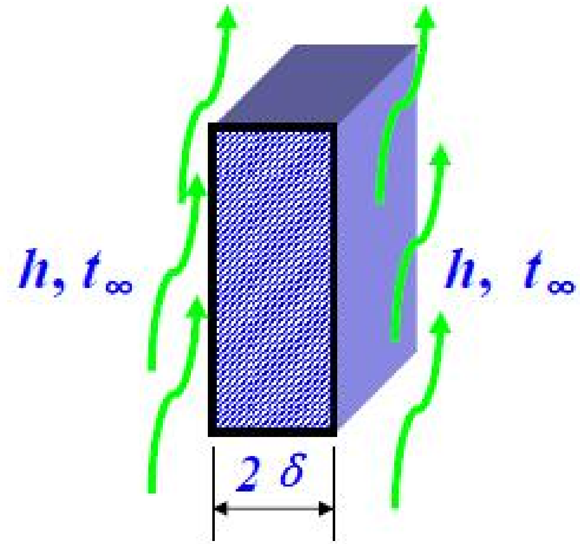
导热微分方程＋单值性条件＋求解方法 ➔温度场

课上作业：列出下列问题的的数学描述：

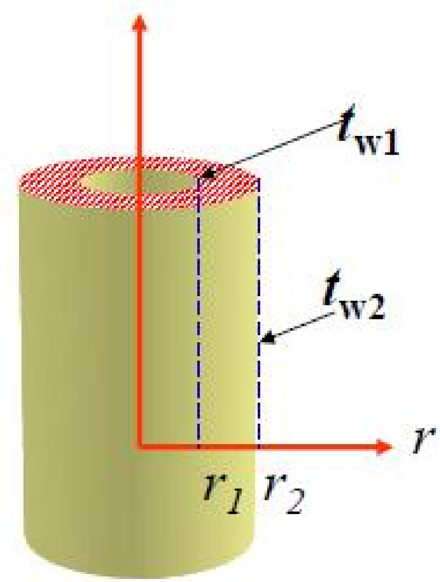
1．一块厚度为δ的平板，两侧的温度分别为t_{w1}和t_{w2}。（1）导热系数为常数；（2）导热系数是温度的函数。

2．一块厚度为δ的平板，平板内有均匀的内热源，热源强度为$\dot{\Phi}$，平板一侧绝热，平板另一侧与温度为t_f的流体对流换热，且表面传热系数为h。

3. 厚度 2δ 的无限大平壁，物性为常数，$\tau=0$时温度为 t_0，突然将其放置于侧介质温度为 t_∞并保持不变的流体中，两侧表面与介质之间的表面传热系数为h。



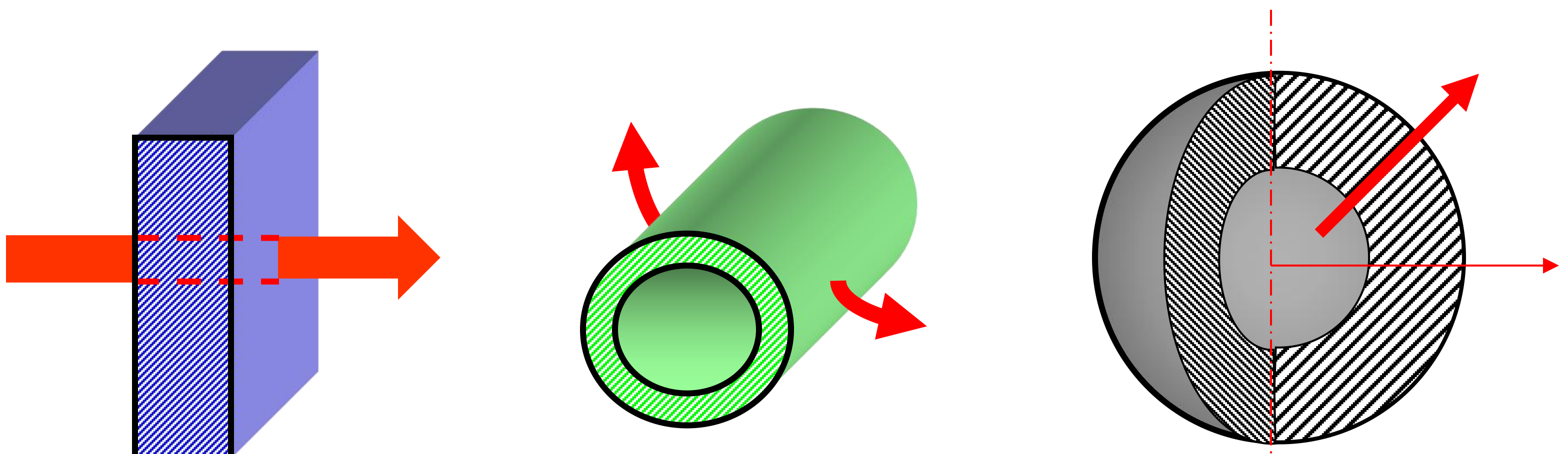
4\. 已知一单层圆筒壁的内、外半径分别为r_1、r_2，导热系数 λ为常量，无内热源，内、外壁面维持均匀恒定的温度t_{w1}，t_{w2} 。



§ 2-3 通过平壁及圆筒壁的一维稳态导热

稳态导热 $\partial t / \partial \tau = 0$ 温度不随时间而变化。

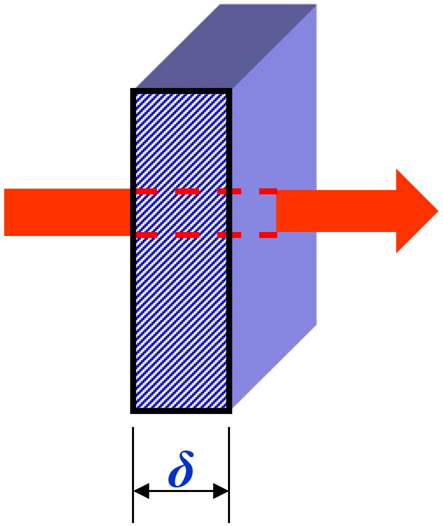
- 通过平壁的导热，直角坐标系中的一维问题。
- 通过圆筒壁的导热，圆柱坐标系中的一维问题。
- 通过球壳的导热，球坐标系中的一维问题。

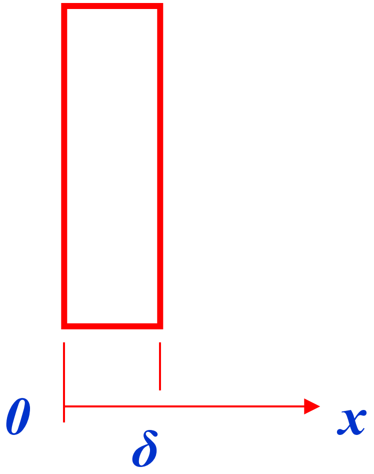


一、通过平壁的导热

平壁的长度和宽度都远大于其厚度，且平板两侧保持均匀边界条件，则该问题就可以归纳为直角坐标系中的一维导热问题。

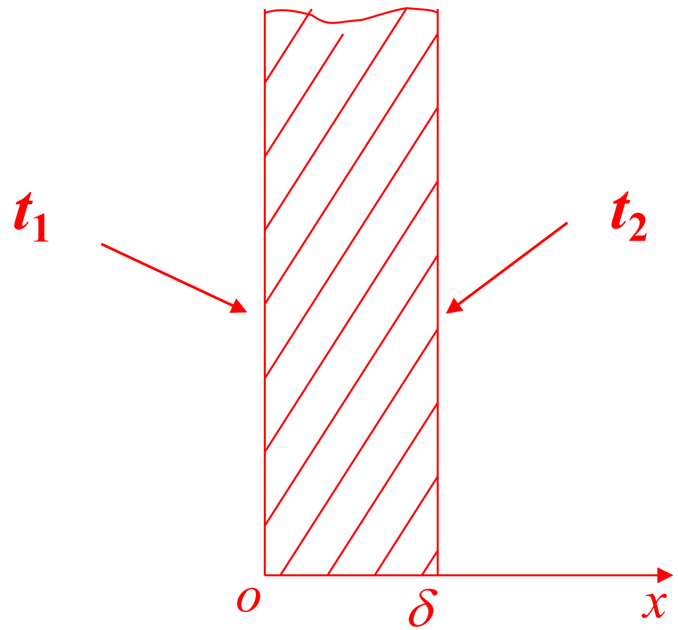
本章只讨论稳态的情况，平壁两侧的边界条件有给定温度、给定热流及对流边界等情况，此外还有平壁材料的导热系数是否是常数，是否有内热源存在等区分。下面分别介绍。





1：1D, 稳态，无内热源，λ 为常数，两侧均为第一类边界

①问题图示：



②数学描写：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 t}{dx^2} = 0 \\ x = 0, \ t = t_1 \\ x = \delta, \ t = t_2 \end{cases}$$

③解：

对微分方程直接积分两次，得微分方程的通解

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = c_1 \Rightarrow t = c_1 x + c_2$$

利用两个边界条件

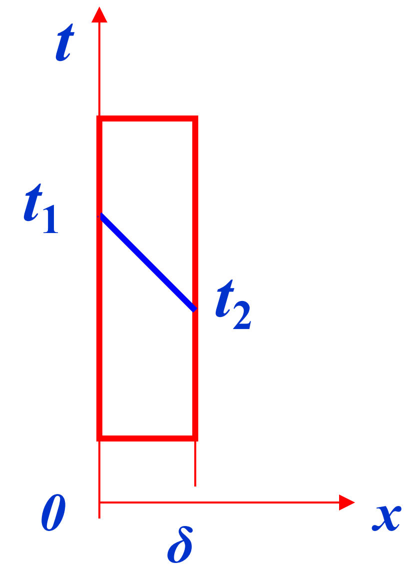
$$x = 0,\ t = t_1 \rightarrow c_2 = t_1$$

$$x = \delta,\ t = t_2 \rightarrow c_1 = \frac{t_2 - t_1}{\delta}$$

将两个积分常数代入原通解，可得平壁内的温度分布如下

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x$$

线性分布，与λ无关



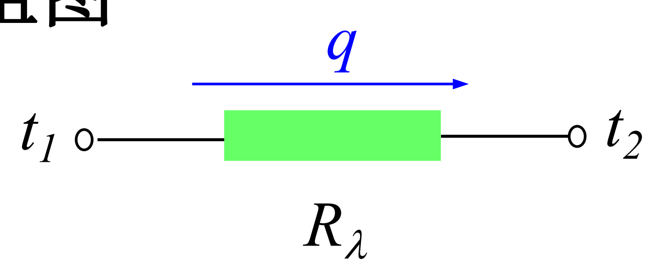
利用Fourier导热定律可得通过平壁的热流密度和热流量

$$q = -\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{t_1 - t_2}{\delta / \lambda} \qquad \mathrm{W/m^2}$$

$$\Phi = -\lambda A \frac{\mathrm{d}t}{dx} = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{\delta} = \frac{t_1 - t_2}{\delta / (\lambda A)} \qquad \mathrm{W}$$

Φ q 与x无关

④热阻图



⑤Fourier定律直接求解获得热流量

$$\Phi = -\lambda A \frac{\mathrm{d}t}{dx} = const$$

$$\Phi \int_0^{\delta} \frac{dx}{A} = -\int_{t1}^{t2} \lambda \mathrm{d}t \longrightarrow \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\delta/(\lambda A)}$$

2. 1D,稳态，无内热源，变导热系数，两侧均为第一类边界

λ_0、b为常数 $\lambda=\lambda_0(1+bt)=\lambda_0+at$

只要取计算区域平均温度下对应的$\overline{\lambda}$代替λ等于常数的计算公式计算既可得到正确的结果

$$\overline{\lambda}=\lambda_0+a\frac{t_1+t_2}{2}$$

证明过程：

则导热微分方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda_0(1+bt)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

对x积分一次得

$$\lambda_0(1+bt)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=c_1$$

对x再次积分得微分方程的通解

$$\lambda_0(t+\frac{b}{2}t^2)=c_1x+c_2$$

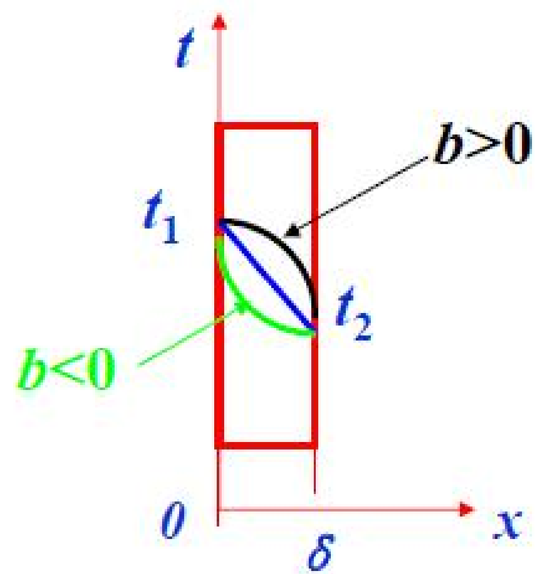
利用边界条件最后得温度分布为

物线线形式

$$t+\frac{b}{2}t^2=(t_1+\frac{b}{2}t_1^2)-\frac{t_1-t_2}{\delta}\left[1+\frac{b}{2}(t_1+t_2)\right]x$$

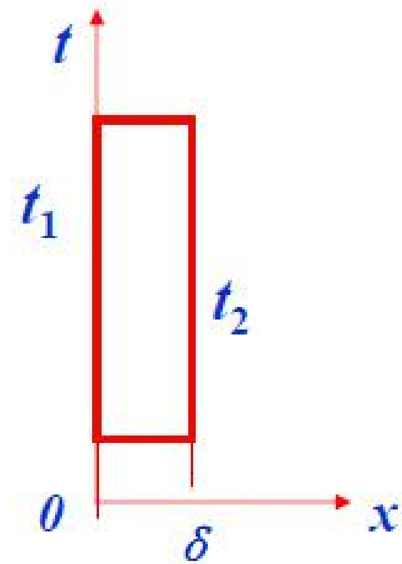
其抛物线的凹向取决于系数b的正负。当$b>0$，$\lambda=\lambda_0(1+bt)$，随着t增大，λ增大，即高温区的导热系数大于低温区。所以高温区的温度梯度dt/dx较小，而形成上凸的温度分布。当$b<0$，情况相反。

$$\Phi=-\lambda A\frac{dt}{dx}$$



热流密度计算式为：

$$q=\lambda_0\left[1+\frac{b}{2}(t_2+t_1)\right]\frac{t_1-t_2}{\delta}$$



或

$$q=\frac{\lambda_m}{\delta}(t_1-t_2)$$

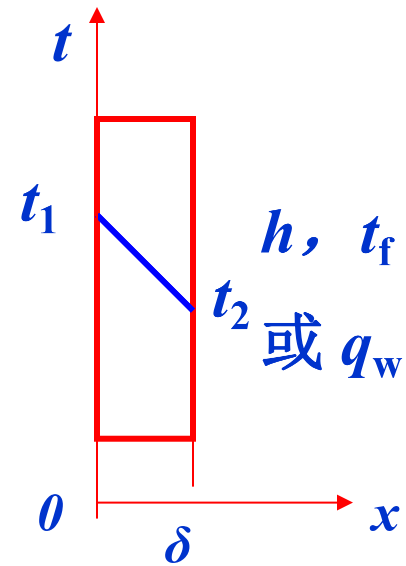
式中

$$\lambda_m=(\lambda_1+\lambda_2)/2=\lambda_0\left[1+b(t_1+t_2)/2\right]=\lambda_0(1+bt_m)$$

从中不难看出，λ_m为平壁两表面温度下的导热系数值的算术平均值，亦为平壁两表面温度算术平均值下的导热系数值。

3. 1D, 稳态，无内热源，λ为常数，一侧为第一类边界，另一侧为第二类或第三类边界

①问题图示：



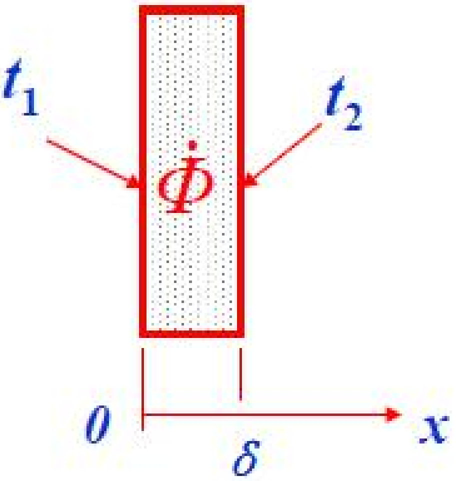
②数学描写：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} = 0 \\
x = 0,\quad t = t_1 \\
x = \delta,\quad -\lambda \dfrac{dt}{dx} = q_w \text{ or } -\lambda \dfrac{dt}{dx} = h(t_2 - t_f)
\end{cases}
$$

4. 有均匀内热源，λ 为常数，两侧均为第一类边界

数学描述：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 t}{dx^2} + \dot{\Phi}/\lambda = 0 \\ x = 0,\ t = t_1 \\ x = \delta,\ t = t_2 \end{cases}$$



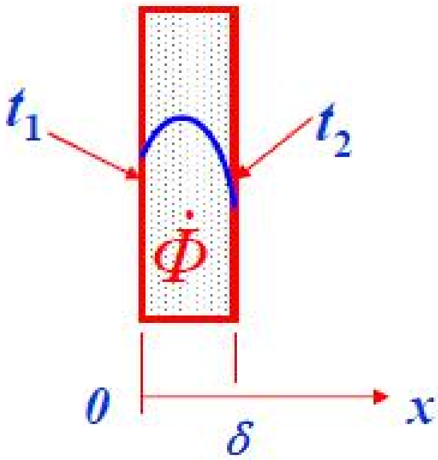
对微分方程直接积分两次，得微分方程的通解

$$t = -\frac{\dot{\Phi}}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2$$

利用两个边界条件

$$x = 0,\ t = t_1 \Rightarrow c_2 = t_1$$

$$x = \delta,\ t = t_2$$



$$\Rightarrow c_1 = (t_2 - t_1)/\delta + \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda}\delta$$

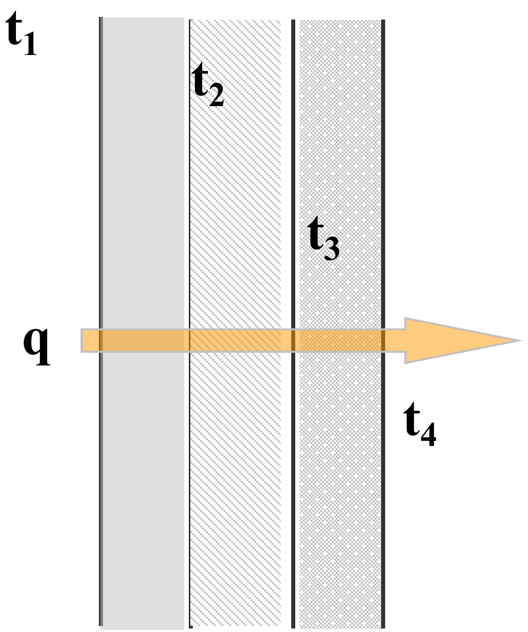
将两个积分常数代入原通解，可得平壁内的温度分布如下

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta}x + \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda}x(\delta - x)$$

通过多层平壁的导热

多层平壁：由几层不同材料组成

例：房屋的墙壁 — 白灰内层、水泥沙浆层、红砖（青砖）主体层等组成



假设各层之间接触良好，可以近似地认为接合面上各处的温度相等

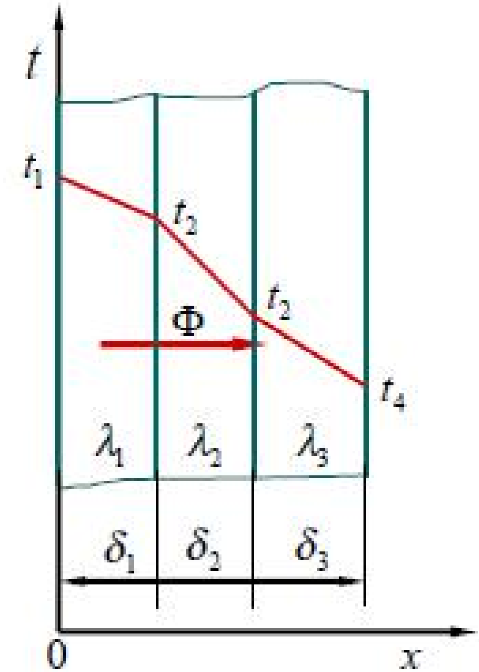
前提：多层平壁，1D，稳态，无内热源，λ为常数，两侧均为第一类边界

多层壁也被称为复合壁，是由几种不同材料叠在一起组成的。通过各层的热流密度为 $q_1 = q_2 = q_3 = q$

$$q_1 = \frac{t_1 - t_2}{\delta_1/\lambda_1} = \frac{t_1 - t_2}{R_1}$$

$$q_2 = \frac{t_2 - t_3}{\delta_2/\lambda_2} = \frac{t_2 - t_3}{R_2}$$

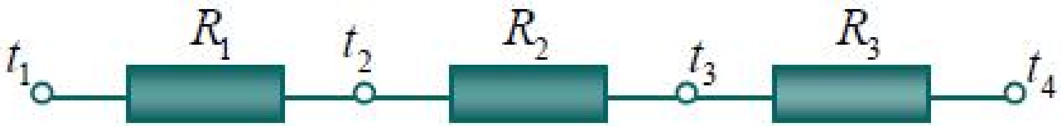
$$q_3 = \frac{t_3 - t_4}{\delta_3/\lambda_3} = \frac{t_3 - t_4}{R_3}$$



分热阻： $R_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_1}$， $R_2 = \frac{\delta_2}{\lambda_2}$， $R_3 = \frac{\delta_3}{\lambda_3}$

与电学类比可知，串联总热阻等于各分热阻之和，即

与电路类比



- 总热阻 $R=\sum R_i=R_1+R_2+R_3$
- 热流量 $\Phi=A\dfrac{\Delta t}{R}=A\dfrac{t_1-t_4}{R_1+R_2+R_3}$
- 热流密度 $q=\dfrac{\Phi}{A}=\dfrac{\Delta t}{R}=\dfrac{t_1-t_4}{R_1+R_2+R_3}$

若知道了q就可得到各接触面上的温度

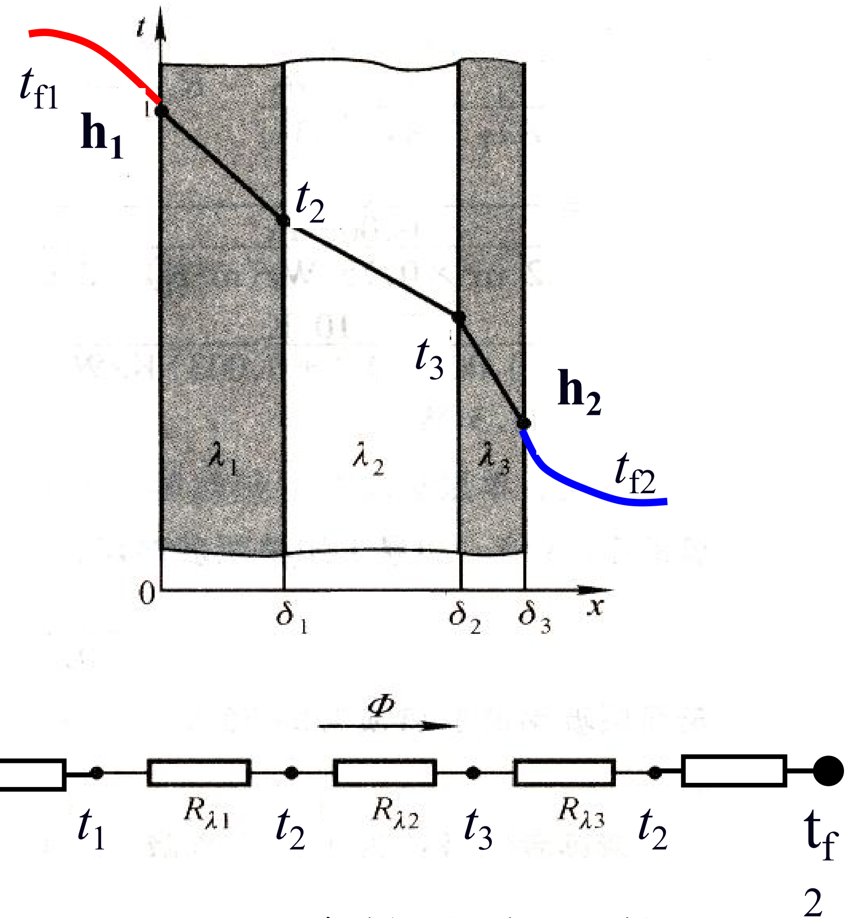
第一层： $$q=\frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_1-t_2)\Rightarrow t_2=t_1-q\frac{\delta_1}{\lambda_1}$$

第二层： $$q=\frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_2-t_3)\Rightarrow t_3=t_2-q\frac{\delta_2}{\lambda_2}$$

第 i 层： $$q=\frac{\lambda_i}{\delta_i}(t_i-t_{i+11})\Rightarrow t_{i+1}=t_i-q\frac{\delta_i}{\lambda_i}$$

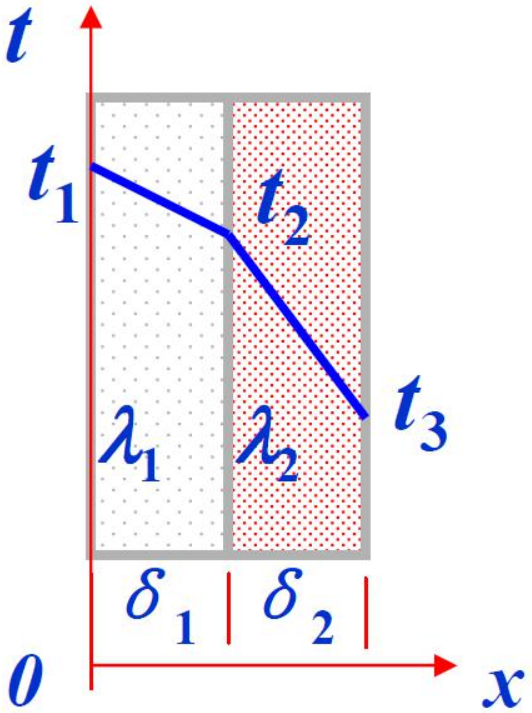
前提：多层平壁，1D，稳态，无内热源， λ 为常数，两侧均为第三类边界

$$q=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{\dfrac{1}{h_1}+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}+\dfrac{1}{h_2}}$$



三层平壁的稳态导热

显然，对于组合平板的每一层都可看成是一单平板，其内部的温度与厚度呈线性关系。不同的材料，直线的斜率 $\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{q}{\lambda}$ 不等。



当 q 为定值时，$\left|\frac{\partial t}{\partial x}\right| \propto \frac{1}{\lambda}$，平板材料的热导率越大，温度曲线的斜率愈平缓；平板材料的热导率越小，温度曲线的斜率愈陡。

计算：利用温度梯度（温差）与热阻成正比

例题2-4 某加热炉炉墙由厚460 mm的GZ-94硅砖、厚230mm的QN-1.0轻质土砖和厚5mm的钢板组成，炉墙内表面的温度为1600℃，外表面的温度为80℃。三层材料的热导率分别为1.85W/(m.K)、0.45W/(m.K)和40W/(m.K)。已知QN-1.0轻质土砖最高使用温度为1300℃，求炉墙散热的热流密度，并确定QN-1.0轻质土砖是否在安全使用温度范围内。

已知： $\delta_1 = 460\text{mm}, \delta_2 = 230\text{mm}, \delta_3 = 5\text{mm}$

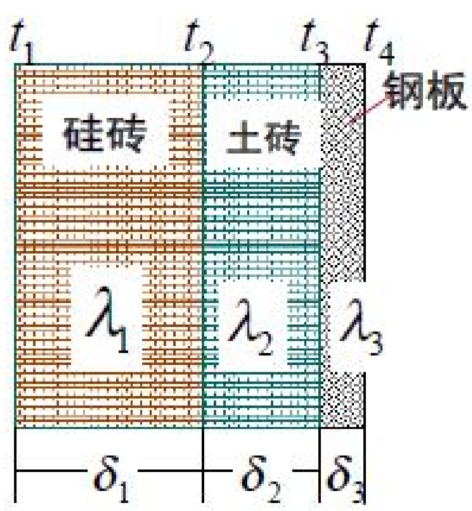
$\lambda_1 = 1.85\text{W/(m}\cdot\text{K)},$

$\lambda_2 = 0.45\text{W/(m}\cdot\text{K)},$

$\lambda_3 = 40\text{W/(m}\cdot\text{K)}$

$t_1 = 1600℃,\qquad t_4 = 80℃$

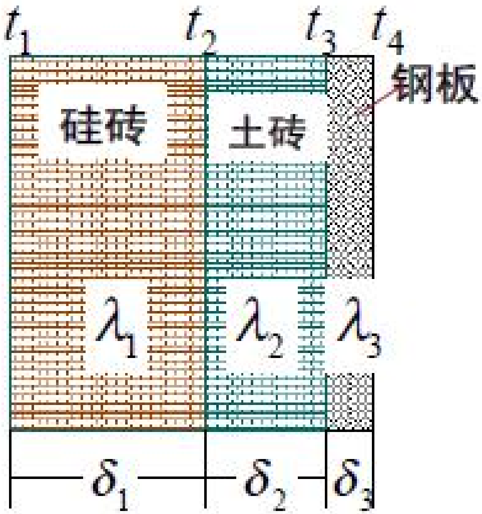
求： $q = ?\qquad t_2 = ?$



解 （1）热流密度

$$q=\frac{\Phi}{A}=\frac{\Delta t}{R}=\frac{t_1-t_4}{R_1+R_2+R_3}=\frac{t_1-t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}+\frac{\delta_2}{\lambda_2}+\frac{\delta_3}{\lambda_3}}$$

$$=\frac{1600-80}{\frac{0.460}{1.85}+\frac{0.23}{0.45}+\frac{0.005}{40}}=2000\mathrm{W/(m\cdot K)}$$



（2）界面温度 t_2

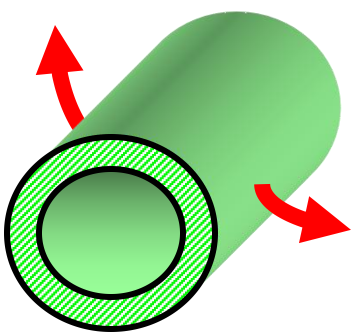
由 $q=\dfrac{t_1-t_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}}$ 得 $t_2=t_1-q\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}$

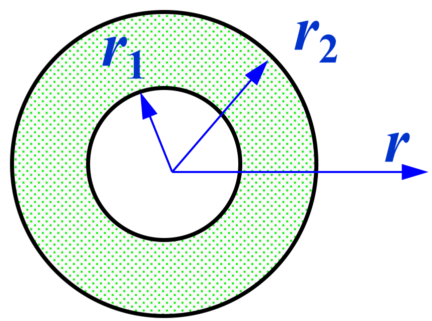
$$t_2=1600-2000\times\frac{0.460}{1.85}=1102.7℃$$

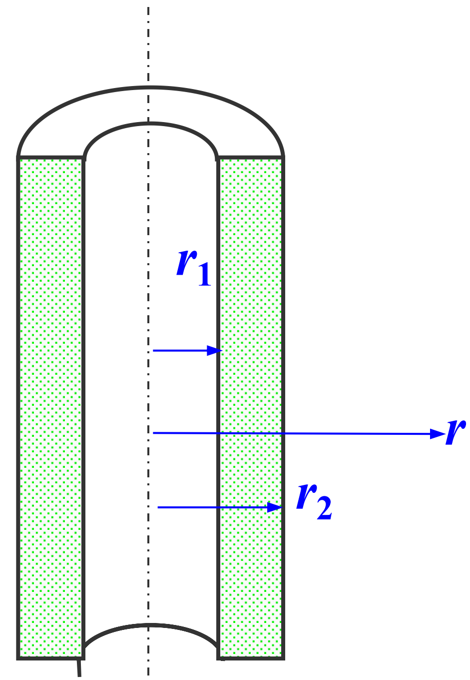
$t_2<1300$ ℃，在安全使用温度范围内。

二、通过圆筒壁的导热

通过管壁的导热当作圆柱坐标系上的一维导热问题

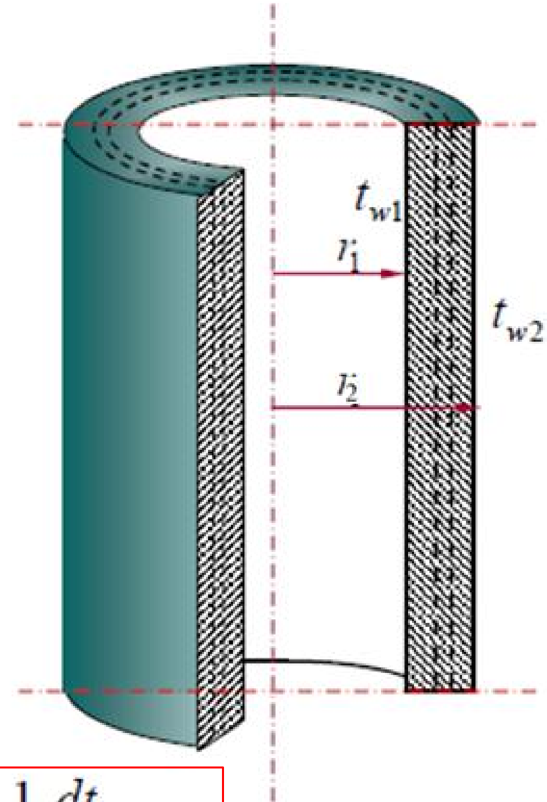






二、通过圆筒壁的导热

1. 单层圆筒壁



此问题可看成是

a. 端面绝热或 $L >> d$;

b. 内外表面均为等温面；

c. $\lambda =$ 常数；

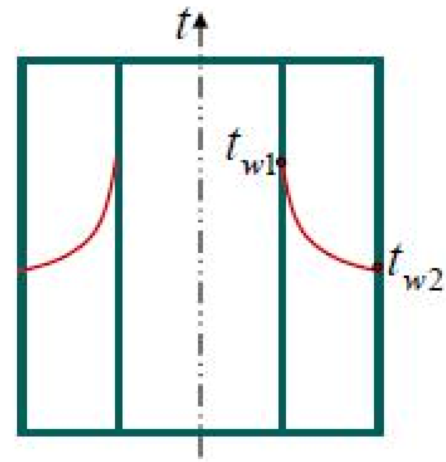
d. 温度 $t = f(r)$ 的一维稳态温度场。

圆柱坐标下的一维热传导方程 $\boxed{\dfrac{d^2t}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dt}{dr} = 0}$

边界条件：$\begin{cases} r = r_1 & t = t_{w1} \\ r = r_2 & t = t_{w2} \end{cases}$

$$\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}=0$$ 这是一个二阶线性齐次微分方程。

用分离变量法，有 $$\frac{d}{dr}\left(\frac{dt}{dr}\right)=-\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}$$



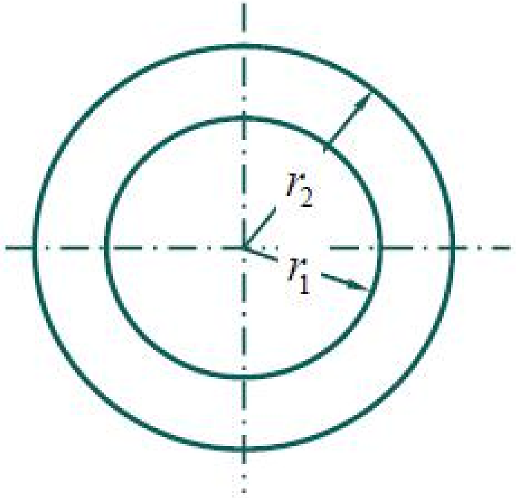
不定积分 $$\int\frac{1}{dt/dr}d\left(\frac{dt}{dr}\right)=-\int\frac{1}{r}dr$$

得 $$\ln\frac{dt}{dr}=-\ln r+\ln C_1=\ln\frac{C_1}{r}$$ 或 $$\frac{dt}{dr}=\frac{C_1}{r}$$

定积分，得 $t=C_1\ln r+C_2$ 代入边界条件 $$\begin{cases} r=r_1 & t=t_{w1} \\ r=r_2 & t=t_{w2} \end{cases}$$

得 $$C_1=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}},\quad C_2=t_{w1}-\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln r_1$$

温度分布为 $$t = t_{w1} + \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \ln\frac{r}{r_1}$$



温度梯度 $$\frac{dt}{dr} = \frac{C'}{r} = \frac{1}{r}\frac{t_{w2} - t_{w1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

由傅里叶定律 $$q = -\lambda\frac{dt}{dr}$$ ，得

热流密度 $$q = -\lambda\frac{1}{r}\frac{t_{w2} - t_{w1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$ 随半径变化

通过长度 L 的热流量 $$\Phi = qF = q2\pi rL = -2\pi rL\lambda\frac{1}{r}\frac{t_{w2} - t_{w1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$ 不随半径变化

习惯上，热流量写成 $$\Phi = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

- 通过一个单位长度的热流量

$$q_L = \frac{\Phi}{L} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\dfrac{1}{2\pi\lambda}\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{R}$$

- 一个单位长度圆筒壁的导热热阻

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

同理，多层圆筒壁的导热

$$\Phi = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{R} = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2\pi\lambda_i}\ln\dfrac{r_{i+1}}{r_i}}$$

● 多层圆筒壁的导热量计算式

$$\Phi = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{R} = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}$$

多层圆筒壁常见的问题：

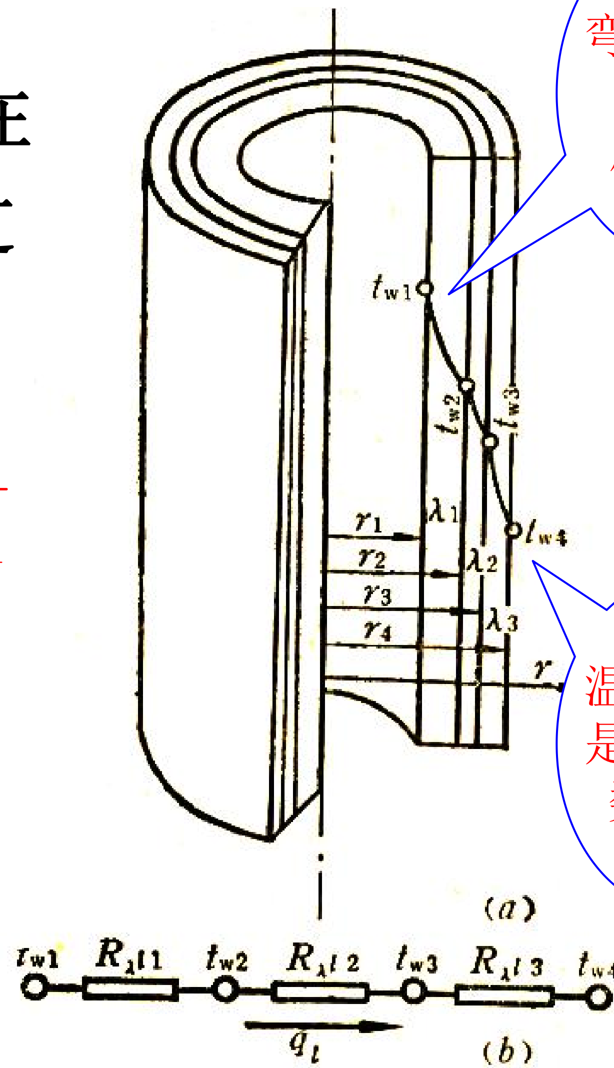
1. 求热流量；
2. 求某层的壁温；
3. 求某层的厚度；
4. 选择保温材料（热流量已知）；
5. 保温层的放置顺序（内、外）。

计算：各层温度梯度（温差）与热阻成正比

采用热阻的概念进行分析。在**稳态**、**无内热源**的情况下，通过各层的热流量相等。

$$\Phi=\frac{t_1-t_2}{\dfrac{1}{2\pi\lambda_1 l}\ell n\dfrac{r_2}{r_1}}=\frac{t_2-t_3}{\dfrac{1}{2\pi\lambda_2 l}\ell n\dfrac{r_3}{r_2}}=\frac{t_3-t_4}{\dfrac{1}{2\pi\lambda_3 l}\ell n\dfrac{r_4}{r_3}}$$

$$=\frac{t_1-t_4}{\dfrac{1}{2\pi\lambda_1 l}\ell n\dfrac{r_2}{r_1}+\dfrac{1}{2\pi\lambda_2 l}\ell n\dfrac{r_3}{r_2}+\dfrac{1}{2\pi\lambda_3 l}\ell n\dfrac{r_4}{r_3}}$$



弯曲方向？
原因？

温度分布是一条对数曲线

例题：2-6 P34页

例题 2-6 一主蒸汽管道，蒸汽温度为 540 ℃，管子外径 $d_1=273$ mm。管外包厚 δ 的水泥蛭石保温层，外侧再包 15 mm 的保护层。按规定，保护层外侧温度为 48 ℃，热损失为 442 W/m。水泥蛭石和保护层的热导率分别为 0.105 W/(m·K)和 0.192 W/(m·K)。求保温层的厚度。

分析 本题为圆筒壁的一维稳态导热。由表 1-1，水蒸气的凝结传热系数 $h_c=5\,000\sim15\,000$ W/(m^2·K)，其热阻很小；金属管道壁厚几个毫米，热导率为 30～50 W/(m·K)，其热阻也不大。而且，以上二热阻比保温层的热阻小得多。此外，因管道外有保温层，散热热流量不大，所以在以上二热阻上的温度降很小。因此，保温层内表面的温度可认为近似等于饱和蒸汽温度。利用式(2-21)求解。

解 由题意，$d_1=273$ mm，$d_2=273\text{ mm}+2\delta$，$d_3=273\text{ mm}+2\delta+15\text{ mm}\times2=303\text{ mm}+2\delta$。单位长度的散热量为

$$\Phi_l=\frac{\Phi}{l}=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\dfrac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\dfrac{d_2}{d_1}+\dfrac{1}{2\pi\lambda_2}\ln\dfrac{d_3}{d_2}}$$

$$=\frac{(540-48)\text{K}}{\dfrac{1}{2\pi\times0.105\text{ W/(m·K)}}\times\ln\dfrac{273\text{ mm}+2\delta}{273\text{ mm}}+\dfrac{1}{2\pi\times0.192\text{ W/(m·K)}}\times\ln\dfrac{303\text{ mm}+2\delta}{273\text{ mm}+2\delta}}$$

$$=\frac{492}{1.517\,1\times\ln\dfrac{273\text{ mm}+2\delta}{273\text{ mm}}+0.829\,4\times\ln\dfrac{303\text{ mm}+2\delta}{273\text{ mm}}}\text{W/m}=442\text{ W/m} \qquad \text{(a)}$$

例题：2-6 P34页

设 $\delta=150$ mm，代入式(a)得

$$\Phi_l=\frac{492}{1.517\,1\times\ln\dfrac{273\text{ mm}+150\text{ mm}\times 2}{273\text{ mm}}+0.829\,4\times\ln\dfrac{303\text{ mm}+150\text{ mm}\times 2}{273\text{ mm}+150\text{ mm}\times 2}}\text{W/m}$$

$$=421\text{W/m}<442\text{W/m}$$

又设 $\delta=140$ mm，代入式(a)求得 $\Phi_l=441.5$ W/m。此 Φ_l 值与规定值相近，于是可取保温层厚度 $\delta=140$ mm。

讨论 (1) 解题中，利用热阻分析且略去次要热阻，使传热计算大大简化。本题如不忽略蒸汽凝结热阻和金属管壁热阻，传热计算将比较复杂。因此，利用热阻分析，且略去次要热阻的解题方法是一种有效的方法。

(2) 式(a)中只一个未知数 δ，似乎可以直接求解，但因 δ 出现在两个不同的对数中，无法直接求解，所以本题采用试算法

(3) 第二次 δ 的设值能大于 150 mm(第一次设值)吗？为什么？

Matlab程序计算保温层厚度

```
for a=1:300
    d1=273;
    d2=273+2*a;
    d3=303+2*a;
    tw1=540;
    tw2=48;
    b1=0.105;
    b2=0.192;
R1=(1/(2*3.1416*b1))*log(d2/d1);
R2=(1/(2*3.1416*b2))*log(d3/d2);
    Q1=(tw1-tw2)/(R1+R2);
    if abs(Q1-442)<2
        str=['a=' num2str(a)];
       disp(str)
        break
    end
end
```

Tw1=340的时候

a=65

三、通过球壳的导热

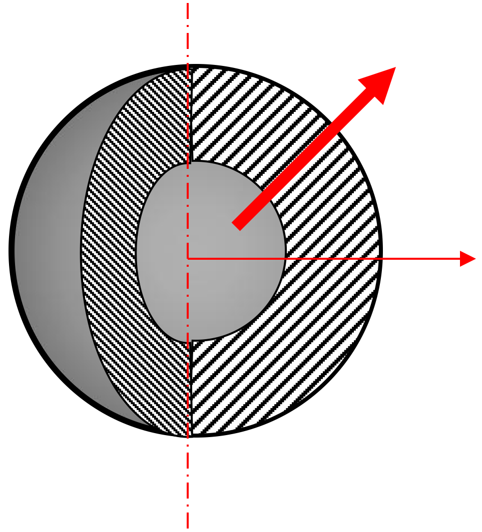
内、外半径分别为r_1、r_2，球壳材料的导热系数为常数，无内热源，球壳内、外侧壁面分别维持均匀恒定的温度t_1、t_2。

1. 数学描述：

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dt}{dr}\right)=0}$$

$$r=r_1, t=t_1$$

$$r=r_2, t=t_2$$



2. 温度分布：

$$t = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{1/r_1 - 1/r_2}\left(1/r - 1/r_2\right)$$

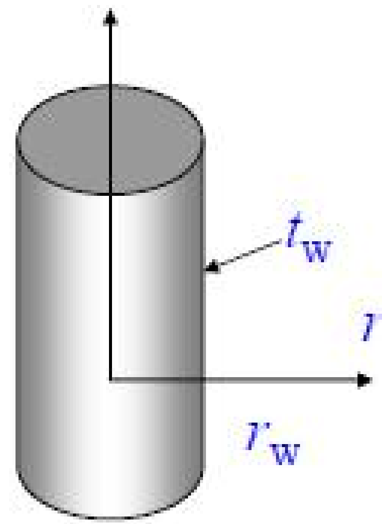
3. 热流量：

$$\Phi = \frac{4\pi\lambda\left(t_1 - t_2\right)}{1/r_1 - 1/r_2}$$

4. 热阻：

$$\boxed{R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(1/r_1 - 1/r_2\right)}$$

2. 通过含内热源实心圆柱体的导热



数学描述:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0;$$

$$r=0,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=0;$$

$$r=r_w,t=t_w$$

积分上面的微分方程两次有

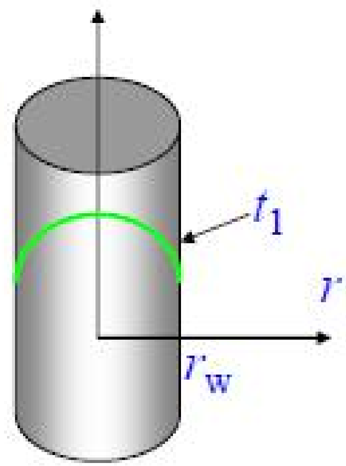
$$t=\frac{\dot{\Phi}}{4\lambda}r^2+c_1\ell nr+c_2$$

进一步利用两个边界得出圆柱体内的温度分为：

$$t = t_w + \frac{\dot{\Phi}}{4\lambda}\left(r_w^2 - r^2\right)$$

由傅里叶定律可得出壁面处的热流量：

$$\Phi = \pi r_w^2 l \dot{\Phi}$$



由能量守恒法则，可直接得到上式。

例题：2-8 P36页

例题 2－8　某炉墙由耐火砖层、硅藻土焙烧板层和金属密封护板所构成(见图 2－16)。各层的热导率分别为 $\lambda_1=(0.7+0.000\,58|t|_{℃})\mathrm{W/(m\cdot K)}$，$\lambda_2=(0.047+0.000\,21|t|_{℃})\mathrm{W/(m\cdot K)}$ 和 $\lambda_3=45\mathrm{W/(m\cdot K)}$；厚度分别为 $\delta_1=115$ mm、$\delta_2=185$ mm 和 $\delta_3=3$ mm；炉墙内外表面的温度分别为 $t_{w1}=642$ ℃ 和 $t_{w4}=54$ ℃。试求通过炉墙的热流密度。

解　炉墙内温度分布如图 2－16 所示。由热阻分析，金属护板热阻很小，可以忽略，即 $t_{w3}\approx t_{w4}=54$ ℃。

由于界面温度 t_{w2} 未知，因此无法计算耐火砖和硅藻土焙烧板的平均温度、热导率和炉墙的热流密度。现用试算法求解

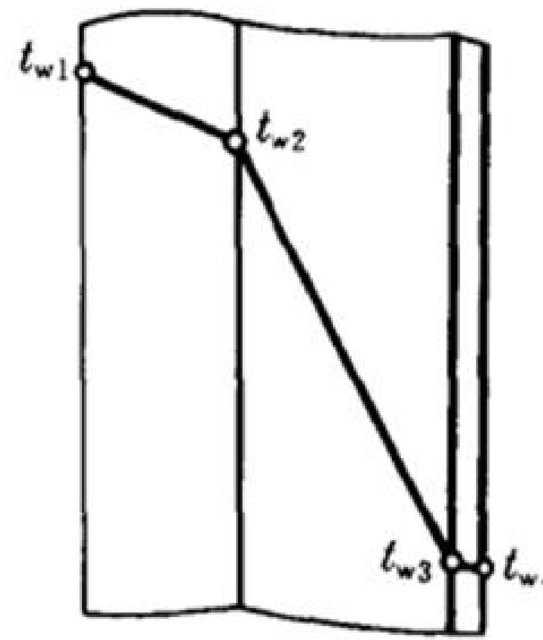


图 2－16　例题 2－8 附图

例题：2-8 P36页

初设 $t_{w2}=200$ ℃，则

$$\lambda_1=(0.7+0.000\,58\{t\}_{℃})\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$$
$$=\left(0.7+0.000\,58\times\frac{642+200}{2}\right)\mathrm{W/(m\cdot K)}$$
$$=0.944\ \mathrm{W/(m\cdot K)}$$
$$\lambda_2=(0.047+0.000\,21\{t\}_{℃})\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$$
$$=\left(0.047+0.000\,21\times\frac{200+54}{2}\right)\mathrm{W/(m\cdot K)}$$
$$=0.073\,67\ \mathrm{W/(m\cdot K)}$$

而热流密度为

$$q=\frac{t_{w1}-t_{w3}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}+\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}}=\frac{(642-54)\mathrm{K}}{\dfrac{0.115\ \mathrm{m}}{0.944\ \mathrm{W/(m\cdot K)}}+\dfrac{0.185\ \mathrm{m}}{0.072\,5\mathrm{W/(m\cdot K)}}}=220\ \mathrm{W/m^2}$$

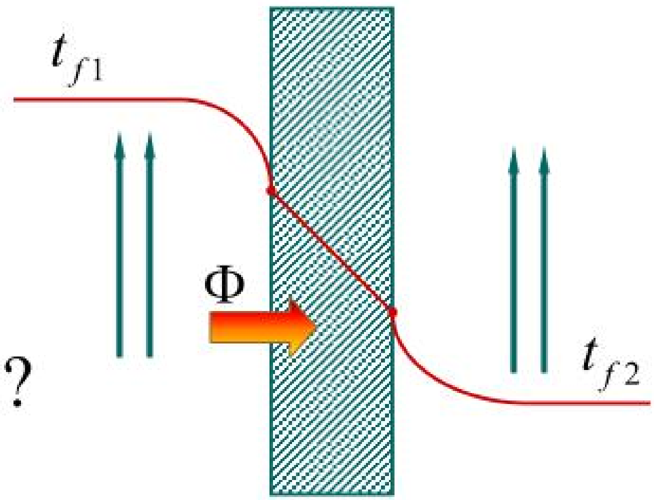
校核壁温 t_{w2}：

$$\Delta t_w=t_{w1}-t_{w2}=q\frac{\delta_1}{\lambda_1}=220\ \mathrm{W/m^2}\times\frac{0.115\ \mathrm{m}}{0.944\ \mathrm{W/(m\cdot K)}}\approx 27\ ℃$$
$$t_{w2}=t_{w1}-\Delta t_w=(642-27)℃=615\ ℃$$

与假设值相差太大，必须重新计算。第二次设 $t_{w2}=615$ ℃。通过类似的计算得：$\lambda_1=1.065$ W/(m·K)，$\lambda_2=0.114$ W/(m·K)，$q=340\ \mathrm{W/m^2}$。第二次校核得 $t_{w2}=605$ ℃。与第二次假设值相差不大，所以可认为炉墙热流密度 $q=340\ \mathrm{W/m^2}$。

讨论：传热过程的增强措施

传热量 $$\Phi=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{\dfrac{1}{h_1A}+\dfrac{\delta}{\lambda A}+\dfrac{1}{h_2A}}$$



t_{f1},t_{f2} 不变，如何增大传热量 $\Phi\uparrow$？

$\Phi\uparrow$ 就要使 $\dfrac{1}{h_1A}+\dfrac{\delta}{\lambda A}+\dfrac{1}{h_2A}$ 减小

方法：$h_1\uparrow$, $h_2\uparrow$, $\delta\downarrow$, $\lambda\uparrow$,

$A\uparrow$.

圆筒壁呢？