理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

动能定理

1. 力的功

一、功的一般表达式

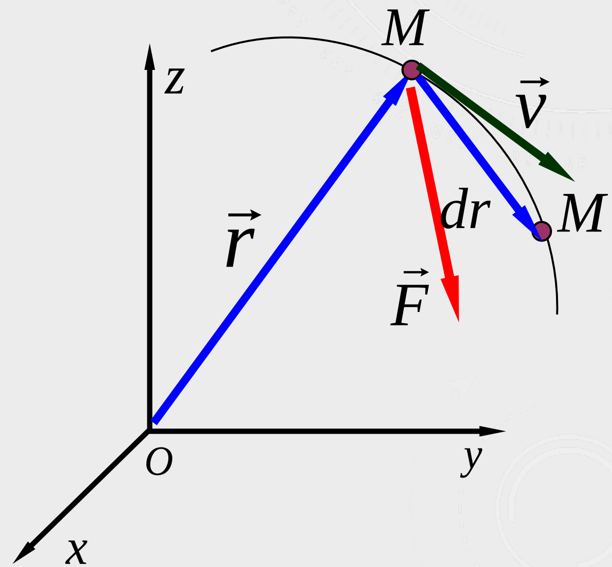
度量力在一段路程上对物体作用的累积效应

元功：$\delta W = F\cos\varphi \,\mathrm{d}s = \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$

总功：$W = \int_s \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z$$

$$W = \int_s (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z) = \int_s \mathrm{d}W$$



$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

多个力做功的情况：

$$W = \int_C (\vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \cdots + \vec{\boldsymbol{F}}_n)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

$$= W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

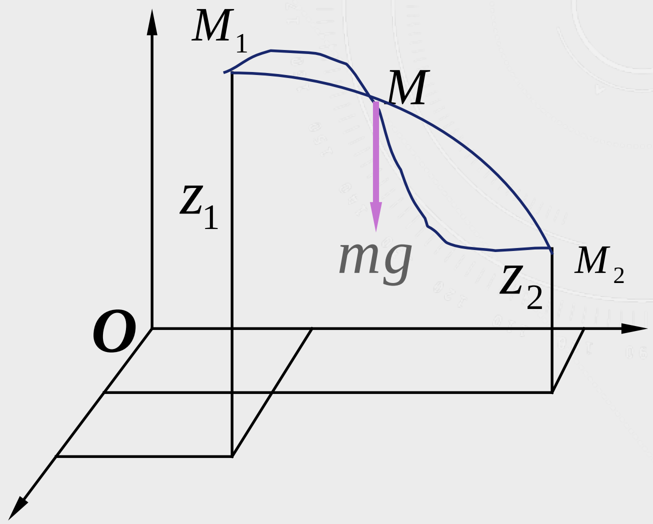
二、几种常见力的功：

1、重力的功

$$F_x = 0,\ \ F_y = 0,\ \ F_z = -mg$$

代入 $$W = \int_s F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z$$

$$= -\int_{z_1}^{z_2} mg\,\mathrm{d}z = mg(z_1 - z_2)$$



重力的功与质点轨迹无关。

保守力(有势力)

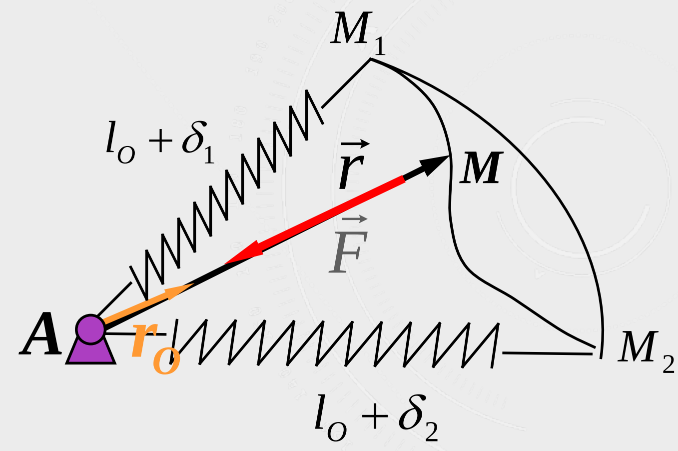
质点系：

$$W = \sum m_i g(z_{i1} - z_{i2}) = (\sum m_i z_{i1})g - (\sum m_i z_{i2})g$$

$$\boxed{W = mg(z_{C1} - z_{C2})}$$

2、弹性力的功

设弹簧原长为l_O，弹簧刚度系数为k，



弹性力为 $$\vec{F}=-k(r-l_0)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\delta W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-k(r-l_0)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=-k(r-l_0)\frac{1}{r}\mathrm{d}(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{2})$$

$$=-k(r-l_0)\frac{1}{r}\mathrm{d}(\frac{r^2}{2})=-k(r-l_0)\mathrm{d}r$$

弹性力的功与弹簧的起始变形与终了变形有关，而与物体运动路径无关。

保守力(有势力)

$$W=\int_{M_1}^{M_2}\delta W=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{k}{2}\mathrm{d}(r-l_0)^2=\frac{k}{2}[(r_1-l_0)^2-(r_2-l_0)^2]$$

令 $\boldsymbol{\delta_1=r_1-L,\quad \delta_2=r_2-L,}$

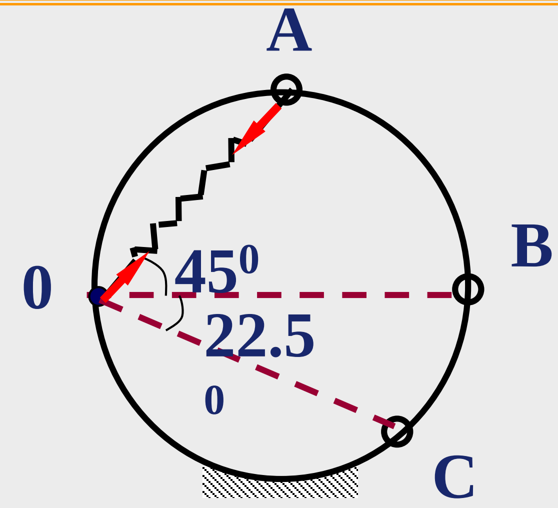
$$\boxed{W=\frac{k}{2}(\delta_1^2-\delta_2^2)}$$

例： 固定圆环半经为R，小球套在圆环上，被长度为$L=\sqrt{2}R$的弹簧约束在O点。试求：小球从A到B的功，又从B到C的功。

解:

从A到B的功:

$$\delta_1 = 0 \qquad \delta_2 = (2R - \sqrt{2}R)$$



$$W = \frac{k}{2}[0^2 - (2R - \sqrt{2}R)^2] = -0.171kR^2$$

从B到C的功:

$$\delta_1 = (2R - \sqrt{2}R) \qquad \delta_2 = (OC - \sqrt{2}R)$$

$$OC = 2R\cos 22.5^\circ = 1.84776R$$

$$W = \frac{k}{2}(\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2) = 0.077kR^2$$

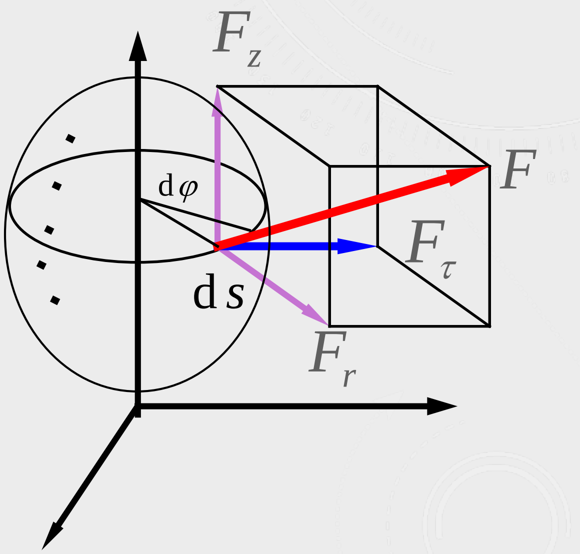
3、作用于转动刚体的力及力偶的功

$$\mathrm{d}s = r \cdot \mathrm{d}\varphi \qquad \delta W = F_\tau \,\mathrm{d}s = F_\tau r \,\mathrm{d}\phi$$

$$F_\tau r = M_z(\vec{F}) = M_z$$

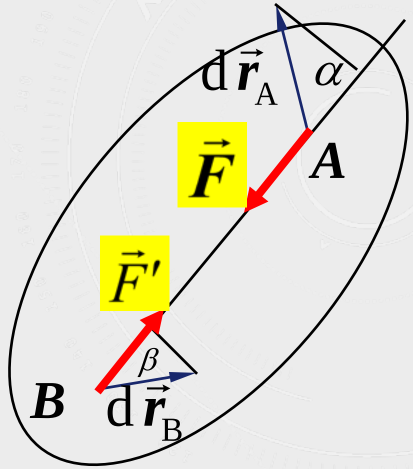
$$\delta W = M_z \,\mathrm{d}\phi$$

$$\boxed{W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_z \,\mathrm{d}\phi}$$



4、内力的功

力*F*、*F*'是一对内力，分别作用于*A*、*B*点。
则二力大小相等、方向相反，沿*AB*连线作用。



内力做功：

$$\delta W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{A}} + \vec{F}'\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{B}} = \vec{F}\cdot \mathrm{d}(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{BA}$$

问题：内力做功一定是零吗？

什么条件下内力做功是零呢？

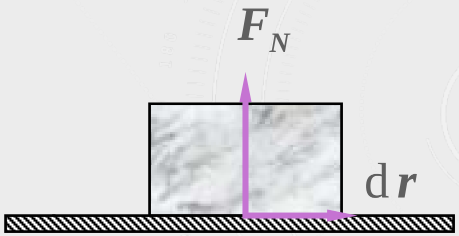
只要*AB*之间距离保持不变，内力功为零

例如：刚体、不可伸长的柔索、二力杆 ➡ $\delta W^{(\mathrm{i})} = 0$

5、约束力的功

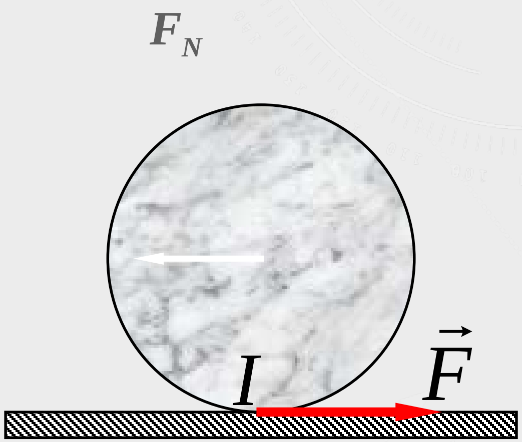
（1）光滑固定面力的功

$$\delta W = \vec{F}_{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$



（2）摩擦力的功

静滑动摩擦力不做功



纯滚动摩擦力：$dW = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}_I \mathrm{d}t = 0$

动滑动摩擦力的功：$dW = -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -f_d \vec{F}_N \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

理想约束： 凡约束力做功之和等于零的约束称理想约束。包括：光滑面约束；铰链；不可伸长的绳索；刚体纯滚动；刚性连接约束等。

2. 动能

质点的动能 $T = \frac{1}{2} m v^2$

刚体?

质点系的动能 $T = \sum (\frac{1}{2} m_i v_i{}^2)$

刚体的动能的计算

需区分不同运动形式

1. 刚体作平移

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i{}^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m v^2$$

2. 刚体作定轴转动

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i(\omega r_i)^2=\frac{1}{2}(\sum m_i r_i^2)\omega^2$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}J_z\omega^2}$$

3. 刚体作平面运动

a、利用瞬心

相当于该时刻绕瞬心定轴转动：$\boxed{T=\frac{1}{2}J_I\omega^2}$ J_I：刚体对瞬心的转动惯量

b、柯尼希定理 任意质点系：$\boxed{T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}\sum m_i v_{iC}^2}$

平面运动刚体： $\boxed{T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2}$

相当于：运动＝随质心平动＋绕质心转动

例：分析计算下列题中的动能。已知：P，Q，R，ω。求 T。

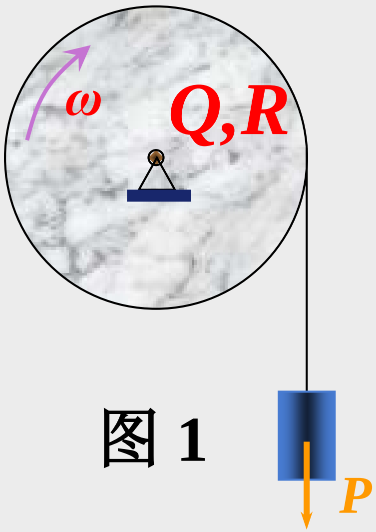


图 1

$$T_1=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{4}\frac{Q}{g}R^2\omega^2$$

$$T_2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\omega^2$$

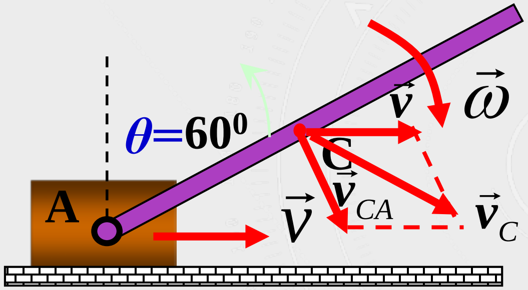
$$T=T_1+T_2$$

图 2

$$T=\frac{1}{2}J_c\omega^2+\frac{1}{2}mv_c{}^2$$

$$=\frac{1}{4}\frac{Q}{g}R^2\omega^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\omega^2$$

例：均质杆*AB*，质量为*m*，长为*L*，以角速度ω绕*A*轴转动，且*A*轴以速度 作水平运动，则杆*AB*在图示瞬时的动能.



解：[杆AB]

$$T=\frac{1}{2}J_c\omega^2+\frac{1}{2}mv_c^{\ 2}$$

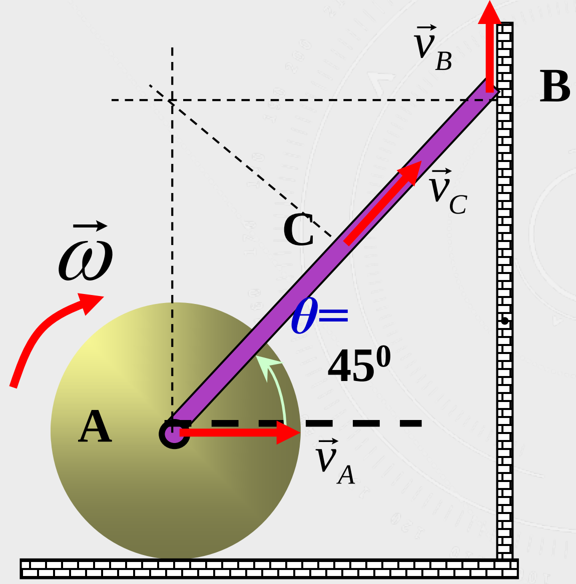
由平面运动速度关系：$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{CA}$

则：$$v_C^{\ 2}=v^2+(\omega\frac{L}{2})^2+2v\omega\frac{L}{2}\cos 60^0=v^2+\frac{1}{4}(\omega L)^2+\frac{1}{2}v\omega L$$

$$T=\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2+\frac{1}{2}m[v^2+\frac{1}{4}(\omega L)^2+\frac{1}{2}v\omega L]$$

$$=\frac{1}{6}ml^2\omega^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mv\omega L$$

例：**AB**长l，质量m，圆柱半径R， 以ω作纯滚动。计算θ= 45°时杆的动能。



解：[杆AB]

$$T_1 = \frac{1}{2} J_c \omega_{AB}^{\ 2} + \frac{1}{2} m v_c^{\ 2}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{\frac{\sqrt{2}}{2} l} = \frac{\sqrt{2}\omega R}{l} \qquad v_c = \omega_{AB} \cdot \frac{1}{2} l = \frac{\sqrt{2}\omega R}{2}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m l^2 \frac{2\omega^2 R^2}{l^2} + \frac{1}{2} m (\frac{\sqrt{2}\omega R}{2})^2 = \frac{1}{3} m \omega^2 R^2$$

3. 质点系动能定理

即

微分形式

$$\boxed{\mathrm{d}T = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i}$$

$$\boxed{\mathrm{d}T = \sum_{i=1}^{n} \delta W_{Fi}}$$

积分形式

$$\boxed{T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} W_{i1-2}}$$

$$\boxed{T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} W_{Fi}}$$

建立质系主动力与运动之间的关系。

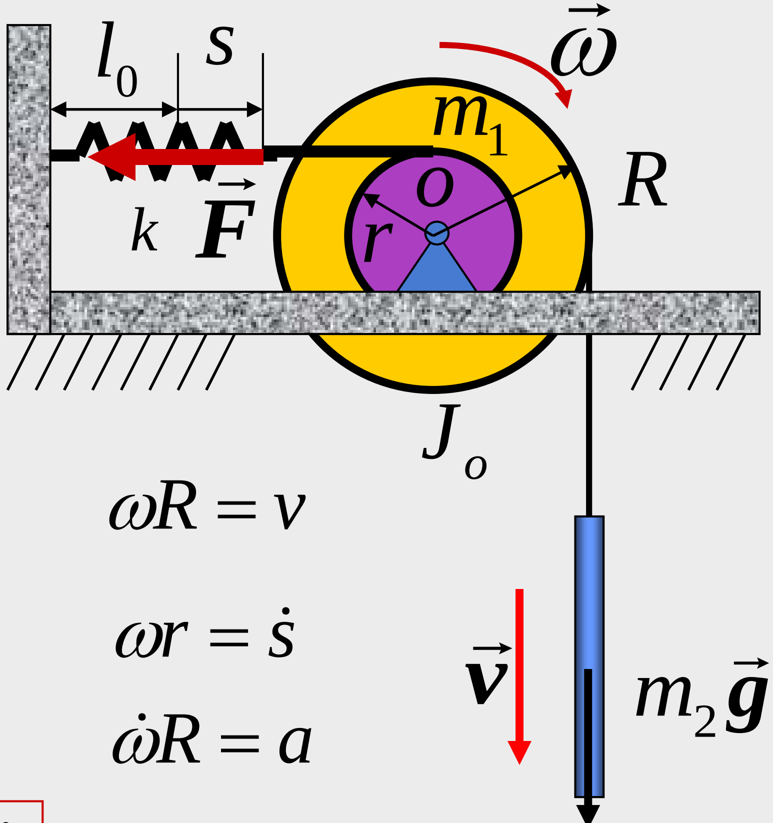
* 将质点上所受力的功分为：

主动力的功 δW_{Fi} 和约束反力的功 δW_{Fi}^*

$$\mathrm{d}T = \sum \delta W_i = \sum \delta W_{Fi}^* + \sum \delta W_{Fi} = \sum \delta W_{Fi}$$

对于理想约束

例： 系统如图所示，$m_1 = m, m_2 = 2m$，$R = 2r, J_o = 2mr^2$，**k**，初始时静止，弹簧为原长 l_0。求弹簧伸长s时，杆的速度和加速度。



$$\omega R = v$$

$$\omega r = \dot{s}$$

$$\dot{\omega} R = a$$

解： $T_1 = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_o \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = 5mr^2\omega^2$$

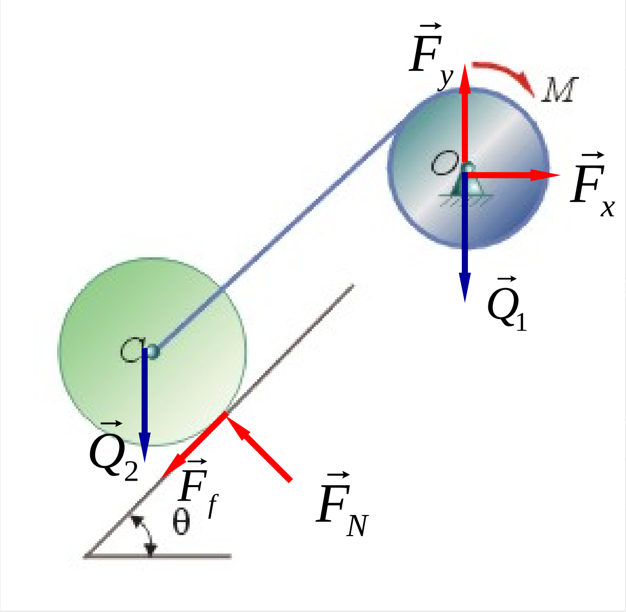
$$W_{1\to2} = m_2 g 2s - \frac{1}{2} ks^2 = 4mgs - \frac{1}{2} ks^2$$

$$\because \quad T_2 - T_1 = W_{1\to2}$$

$$5mr^2\omega^2 = 4mgs - \frac{1}{2} ks^2 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\omega \\ v\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\dot{\omega} \\ a\end{matrix}} \Leftarrow 10mr\dot{\omega} = 4mg - ks \Leftarrow 10mr^2\omega\dot{\omega} = 4mg\dot{s} - ks\dot{s}$$

例 卷扬机如图，已知鼓轮的半径和圆柱半径均为R，鼓轮重量为Q_1，质量分布在轮缘上；圆柱重量为Q_2，质量均匀分布。斜面倾角为θ，圆柱只滚不滑。在不变M力矩的作用下，系统从静止开始运动，求圆柱中心C经过路程l时的速度、轮心加速度及摩擦力。



解：

- 受力分析

  F_x、F_y、F_N、Q_1 不作功

  F_f作功为零

- 运动分析

- 应用动能定理

取初始为1状态，圆柱中心经过路程l时为2状态，这时鼓轮转动ϕ角度

$$T_2 - T_1 = \sum W_{Fi}$$

$$\Sigma W_F = M\varphi - Q_2 \sin\theta \cdot l$$

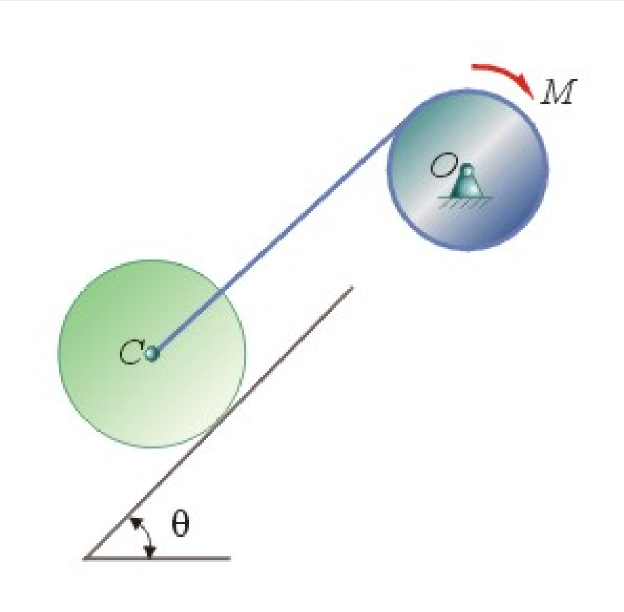
$$\Sigma W_F = M\varphi - Q_2 \sin\theta \cdot l \qquad \varphi R_1 = l$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\frac{Q_2}{g}\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega_2^2$$

其中

$$J_1 = \frac{Q_1}{g}R^2 \text{（环）} \qquad J_c = \frac{1}{2}\frac{Q_2}{g}R^2$$



$$\omega_1 = \frac{\upsilon_c}{R} \qquad \omega_2 = \frac{\upsilon_c}{R}$$

于是

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2g}\upsilon_C^2(Q_1 + \frac{3}{2}Q_2) = M\frac{l}{R_1} - Q_2 l \sin\theta$$

解得

$$\upsilon_c = 2\sqrt{\frac{(M - Q_2 R_1 \sin\theta)gl}{R_1(2Q_1 + 3Q_2)}}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2g} \upsilon_C^2 (Q_1 + \frac{3}{2} Q_2) = M \frac{l}{R_1} - Q_2 l \sin\theta$$

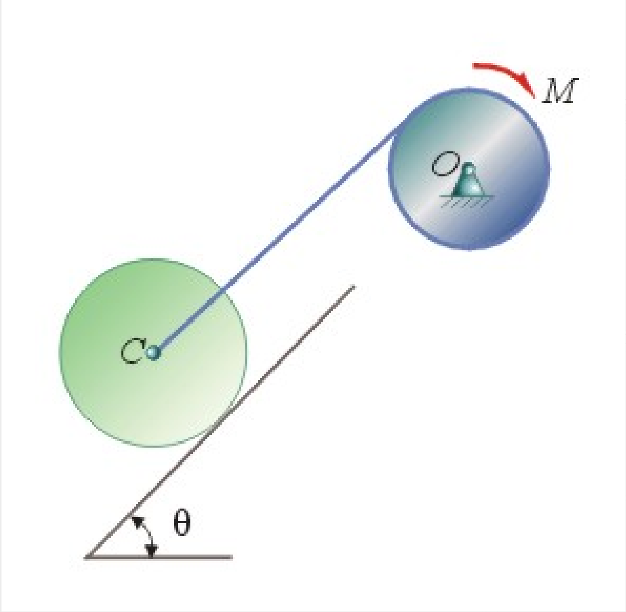
两边对*t*求导数：

$$\frac{1}{g} \upsilon_C \dot{\upsilon}_C (Q_1 + \frac{3}{2} Q_2) = M \frac{\dot{l}}{R_1} - Q_2 \dot{l} \sin\theta$$

因 $\upsilon_C = \dot{l}$

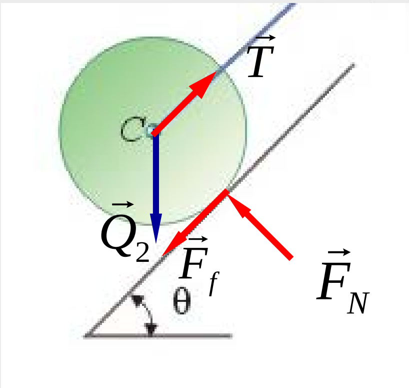
$$\frac{1}{g} a_C (Q_1 + \frac{3}{2} Q_2) = M \frac{1}{R_1} - Q_2 \sin\theta$$

可求得： $$a_C = \frac{g(M \frac{1}{R_1} - Q_2 \sin\theta)}{Q_1 + \frac{3}{2} Q_2}$$



[轮C] $J_C \alpha = F_f \cdot R$

其中 $\alpha = \frac{a_C}{R}$ ➡ $F_f = \frac{1}{2} \frac{Q_2}{g} a_C$

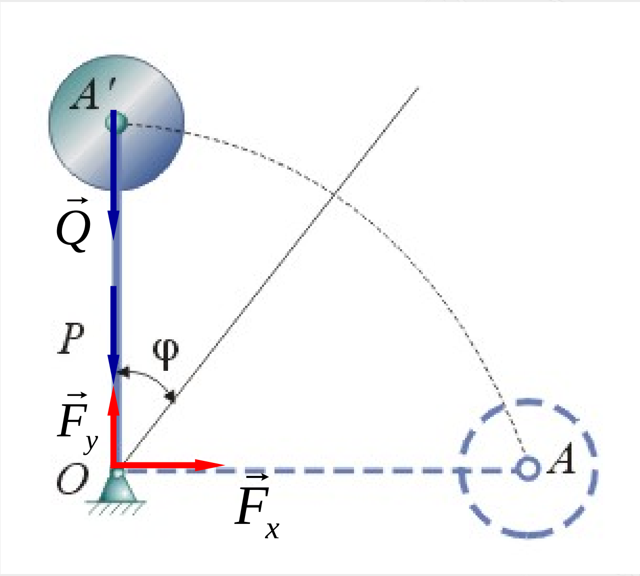


例

均质杆$OA=l$，重P，圆盘重Q，半径r，可绕A轴自由旋转，初始时，杆垂直，系统静止，设OA杆无初速度释放。求：杆转至水平位置时，杆的角速度、角加速度。

解：

- 受力分析
- 运动分析

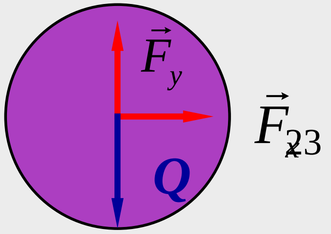


[圆盘]： $J_A\alpha_A=0$ 圆盘平动

[整体]：初始位置到OA杆转过ϕ角的过程应用动能定理：

$$T_1=0 \quad T_2=\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_A^2 \qquad v_A=\dot{\varphi}l$$

$$=\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\dot{\varphi}^2l^2$$

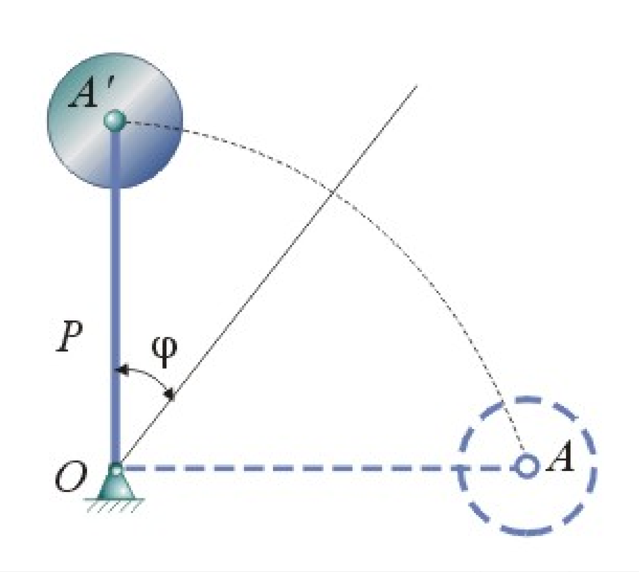


$$\Sigma W=Q(l-l\cos\varphi)+P\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos\varphi\right)$$

$$\left(P\frac{l}{2}+Q\cdot l\right)(1-\cos\varphi)=\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\dot{\varphi}^2 l^2 \qquad \text{（1）}$$

解出角速度$\dot{\varphi}$**，并将** $\varphi=90^\circ$**代入，其中** $J_o=\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2$

$$\dot{\varphi}\,|_{\varphi=90}=\left[\left(\frac{P}{2}+Q\right)\Big/\left(\frac{1}{6}\frac{P}{g}l+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}l\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$



为求角加速度，将（1）式两边对时间求导

$$\left(Ql+\frac{l}{2}P\right)\sin\varphi=J_0\ddot{\varphi}+\frac{Q}{g}l^2\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi}=\left(Q+\frac{P}{2}\right)\sin\varphi\Big/\left(\frac{1}{3}\frac{P}{g}l+\frac{Q}{g}l\right)$$

$$\ddot{\varphi}\,|_{\varphi=90}=\left(Q+\frac{P}{2}\right)\Big/\left(\frac{1}{3}\frac{P}{g}l+\frac{Q}{g}l\right)=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}$$

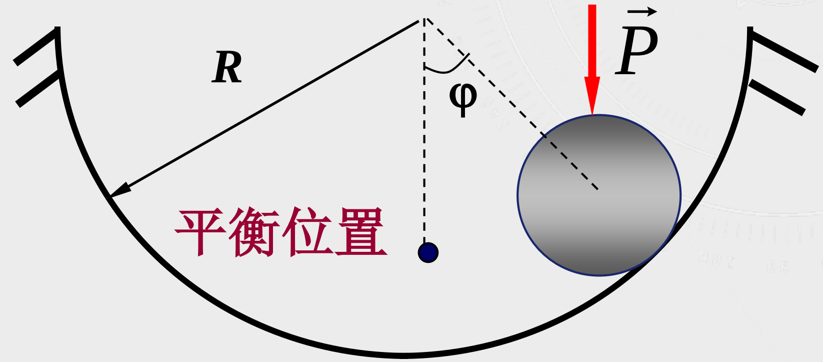
例：重为P半径为R的圆盘在半径为R的圆槽内摆动。试求：微摆动的运动规律。

解：

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{P}{g}(R-r)^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{4}\frac{P}{g}r^2\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{3}{4}\frac{P}{g}(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$



以平衡位置为零势能位 $V=Pz_c=P（R-r）(1-\cos\varphi)$

$$T+V=C \qquad \frac{3}{4}\frac{P}{g}(R-r)^2\dot{\varphi}^2+P(R-r)(1-\cos\varphi)=C$$

两边求导： $$\frac{3}{2}\frac{P}{g}(R-r)^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+P(R-r)\sin\varphi\dot{\varphi}=0$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\sin\varphi=0 \qquad \sin\varphi\approx\varphi \qquad \ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\varphi=0$$

- 动能定理应用于整体分析，体系只有一个运动未知量

理想约束的刚体系约束力和内力不做功

- 使用动能定理积分形式求末状态速度

$$T_2 - T_1 = \sum W_{1-2}$$

- 使用微分形式可求加速度

注意：T_2为任意瞬时的动能，功需要表示成过程量的函数

$$\frac{d(T_2 - T_1)}{dt} = \frac{d(\sum W_{1-2})}{dt}$$

一般情况该加速度也可通过动量矩定理求得