理论力学

吴 佰 建

EMAIL: BAWU@SEU.EDU.CN

运 动 学

点的合成运动

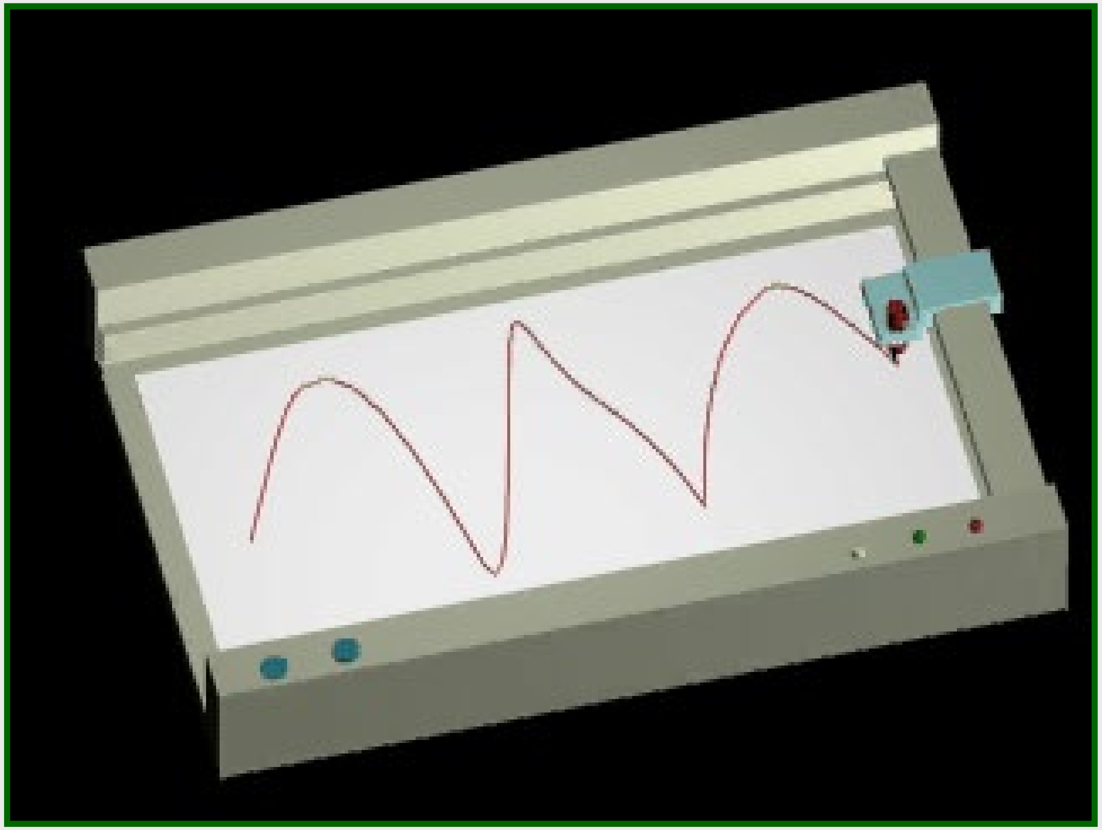
COMPOSITE MOTION OF A POINT

已学	待学
点的运动 刚体基本运动	点的运动 动点相对不同参考系（坐标系）的运动

为什么要学习点的合成运动？

点的复杂运动

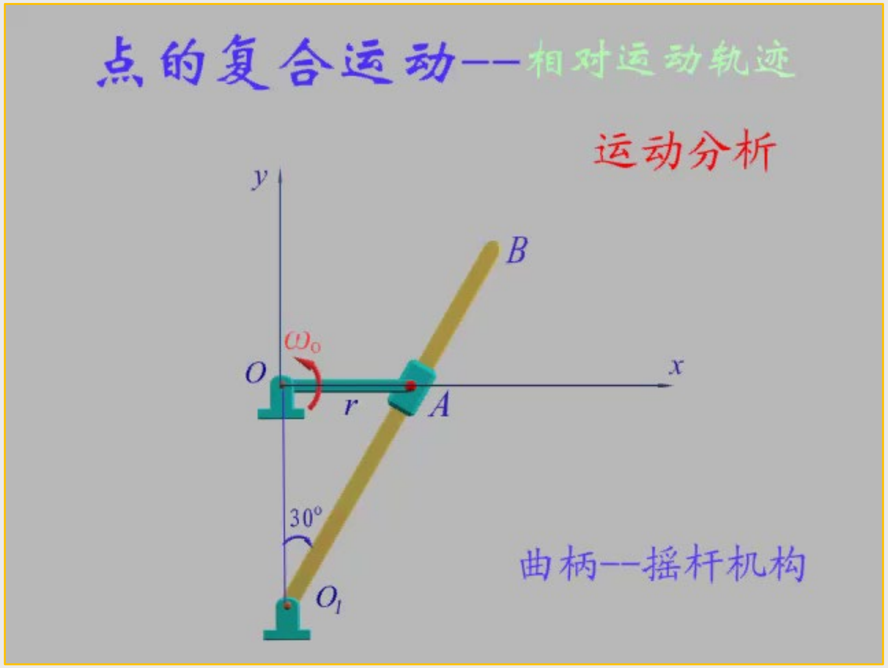
观察: 直升飞机作机动飞行时,旋翼上某一点 ***P*** 的运动。

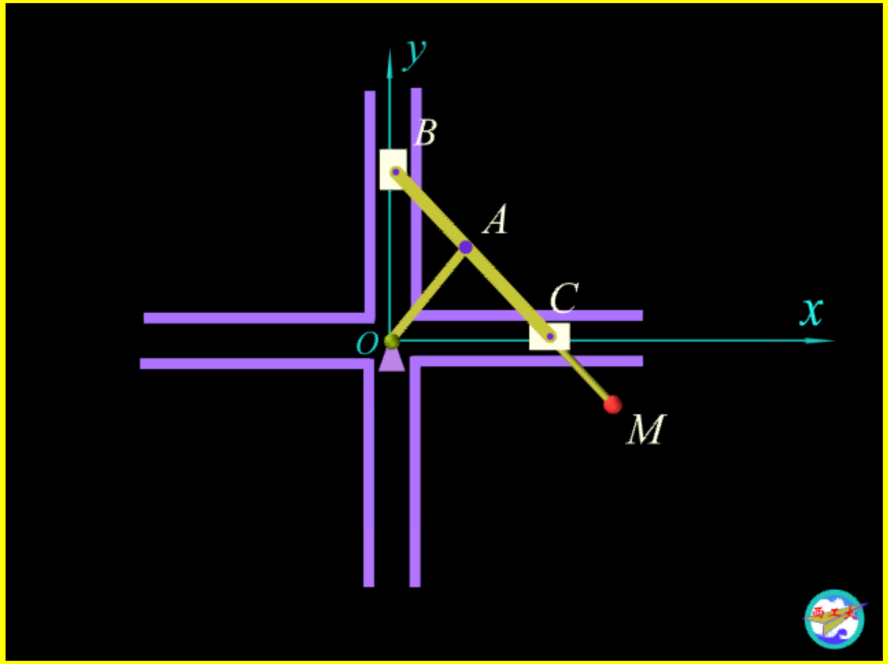


观察: 画 $y=f(x)$ 的曲线时，绘图机构如何运动?

复杂运动：用几个**简单**的运动合成？

传动问题





问题： 已知*OA*杆运动，

如何求摇杆O_1B的运动？

问题： 已知*OA*杆运动，

如何求B、C点的运动？

1. 点的合成运动的概念

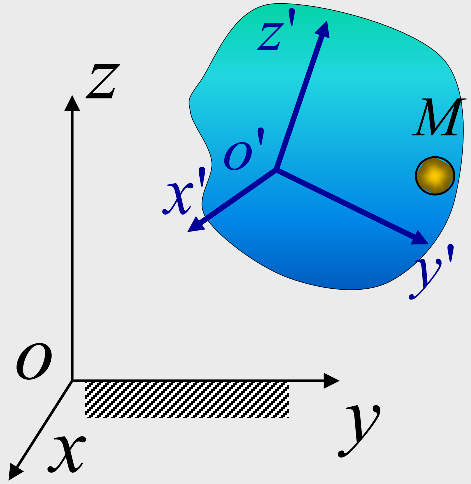
1. 点的合成运动的概念

一 点
二 系
三 运动

研究运动的点为动点

Oxyz 为静参考系

O'x'y'z' 为动参考系



- 绝对运动 (**absolute motion**)：动点相对静系的运动
- 相对运动 (**relative motion**)：动点相对动系的运动
- 牵连运动 (**entrainment motion**)：动系相对静系的运动

是刚体的运动！

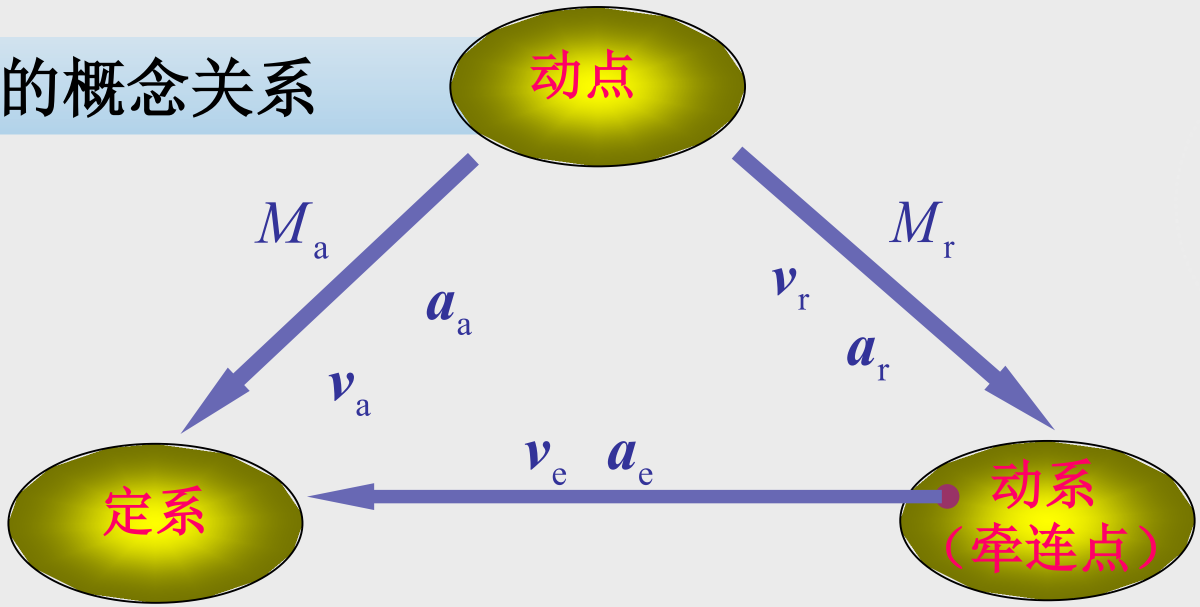
复合运动的一般模型

定(静)系: 一般为地球、地面。

动　系: 固连于运动物体。如: 直升机

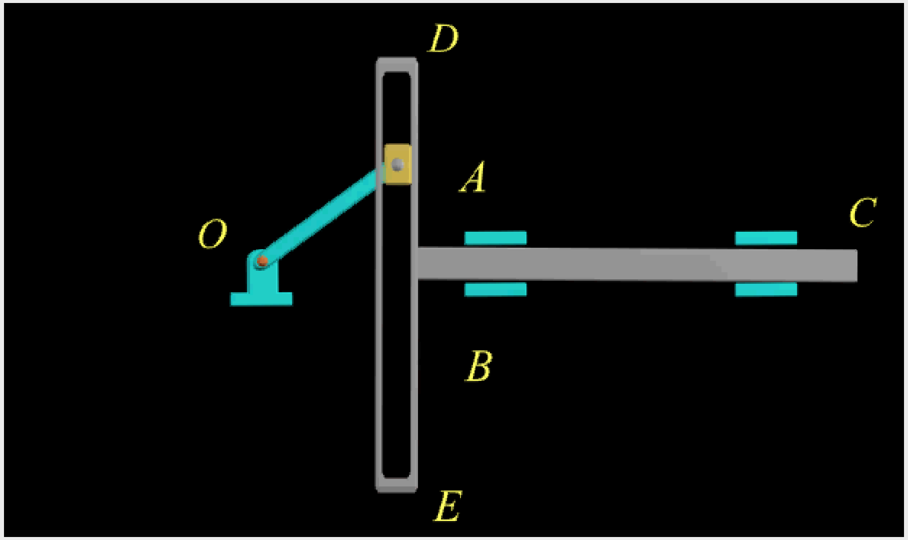
动　点: 研究对象。如: *P*点

点合成运动的概念关系



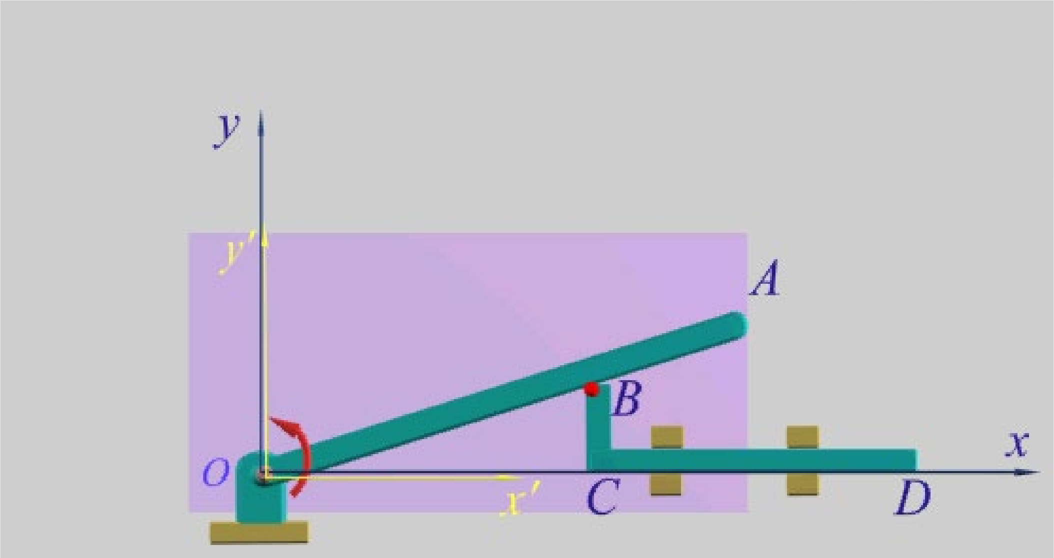
判断三种运动

一 点
二 系
三 运动



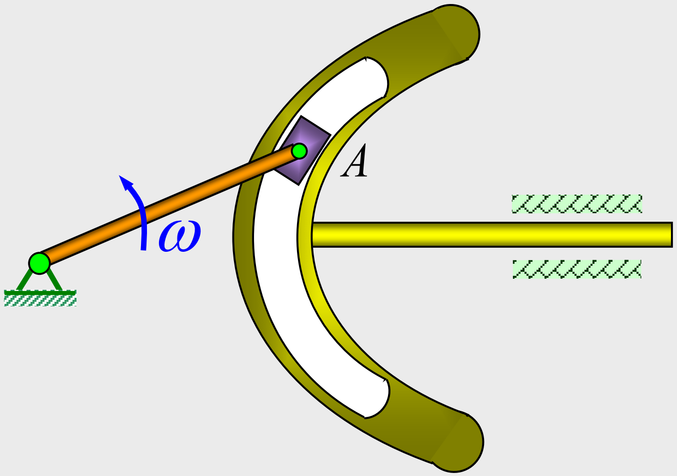
动点：滑块上点*A*

动系：*T*型构件



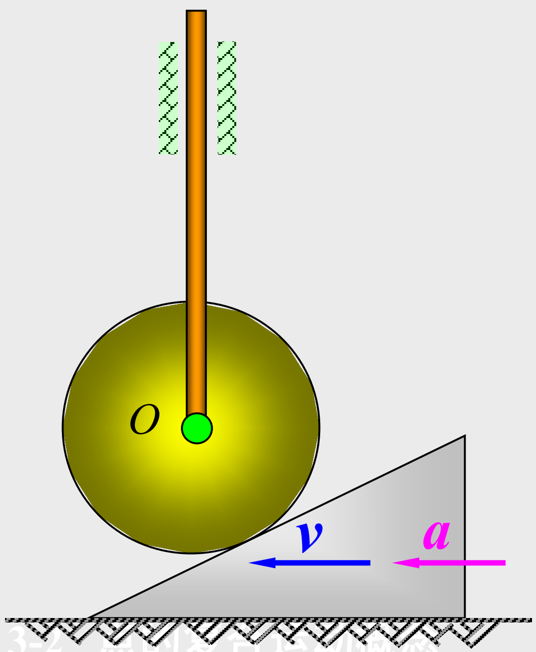
动点：*B*

动系：*OA*杆



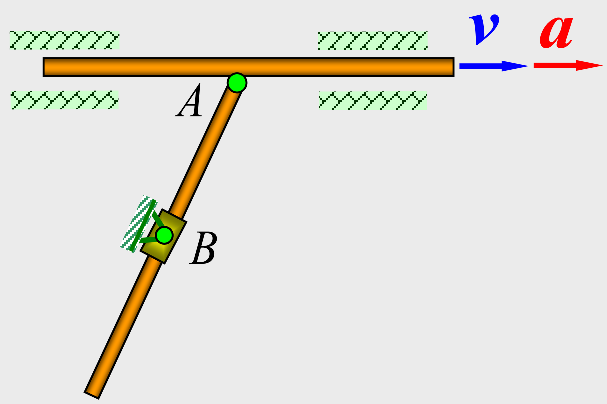
动系：滑槽

动点：滑块A



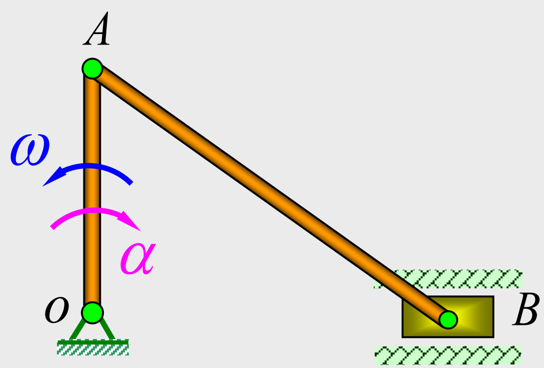
动系：斜面

动点：轮心O



动系: 套筒*B*

动点: 铰*A*



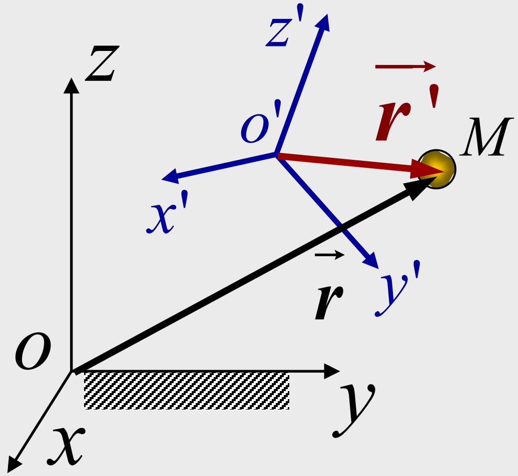
动系: *OA*杆

动点: 滑块*B*

2. 速度合成定理

2. 速度合成定理

速度的解析表达



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

- 绝对速度：动点相对静系的速度

$$\vec{v}_a = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

- 相对速度：动点相对动系的速度

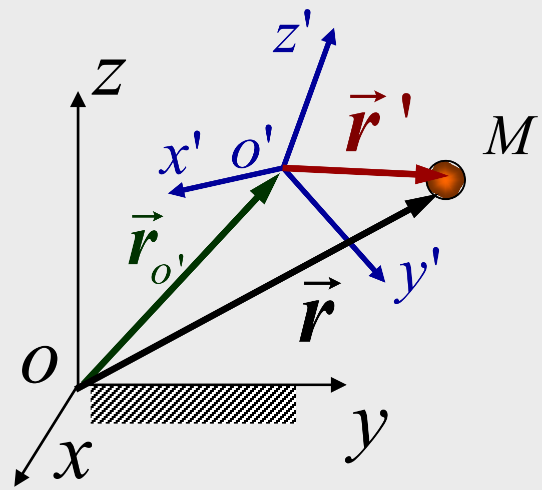
$$\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$$

- 牵连(点)运动?

一 点
二 系
三 运动

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{v}_a = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ $\qquad$ $\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$



由 $\quad \vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$

两边对t求导 $\quad \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_{o'}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{o'} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{o'} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}' + \vec{v}_r$$

◎ $$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}{dt}$$

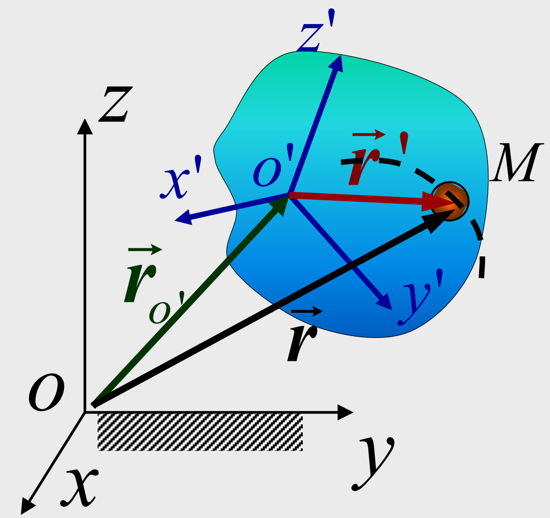
$$= \vec{\omega}_e \times \vec{r}' + \vec{v}_r$$

泊松公式

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\vec{i}'}{dt} &= \vec{\omega}_e \times \vec{i}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} &= \vec{\omega}_e \times \vec{j}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} &= \vec{\omega}_e \times \vec{k}' \end{aligned}\right.$$

动系转动角速度

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{a}}} = \underline{\vec{v}_{o'} + \vec{\omega}_{\mathrm{e}} \times \vec{r}\,'} + \vec{v}_{\mathrm{r}}$$



◎ $\underline{\vec{v}_{o'} + \vec{\omega}_{\mathrm{e}} \times \vec{r}\,'} = \vec{v}_{\mathrm{e}}$ ⇒ 牵连速度

该瞬时动系所在刚体上，
与动点重合点的速度

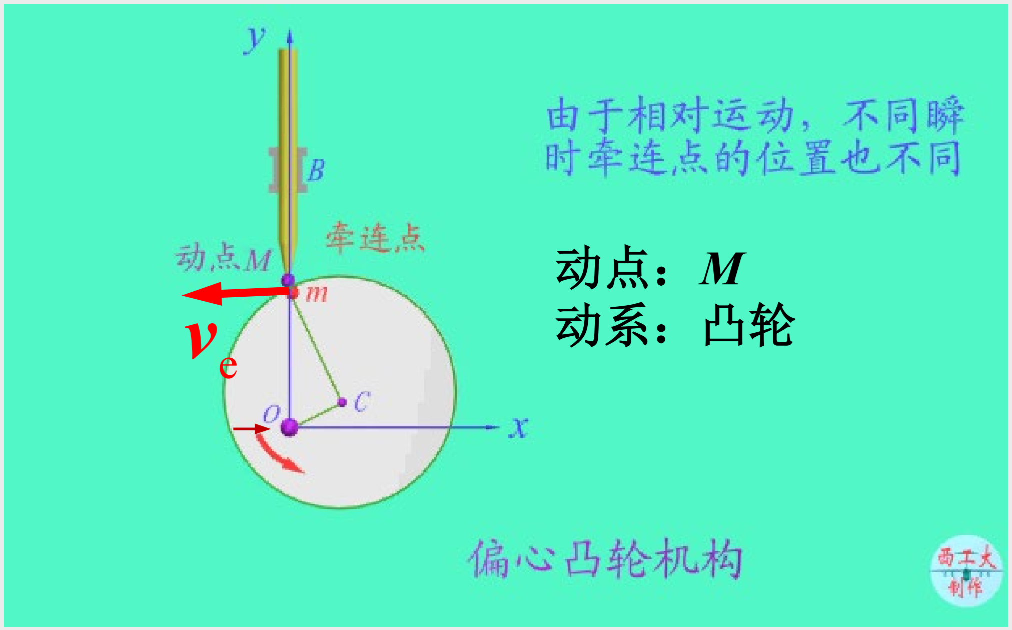
牵连点（*M'*）

速度合成定理

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}}}$$

绝对速度　　牵连速度　　相对速度

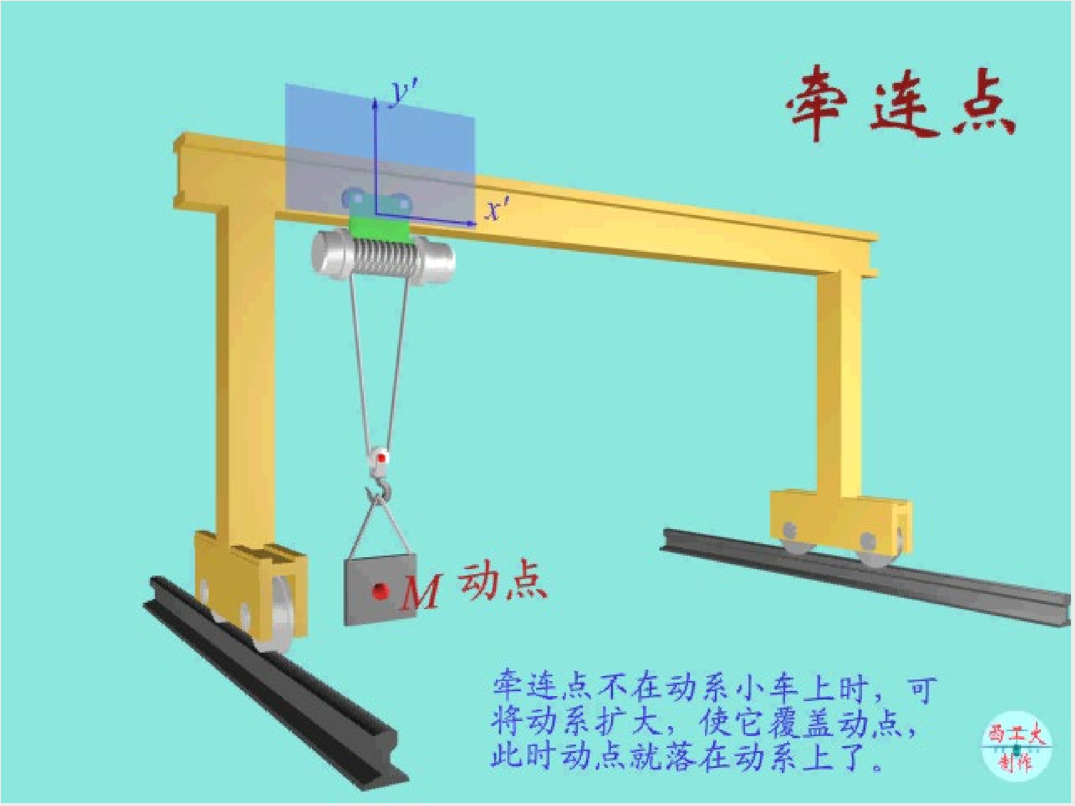
• 牵连点： 某瞬时，动系所在刚体上与动点重合的点。



牵连点具有瞬时性特点。

• 牵连速度： 牵连点的速度

观察动点M的牵连点m



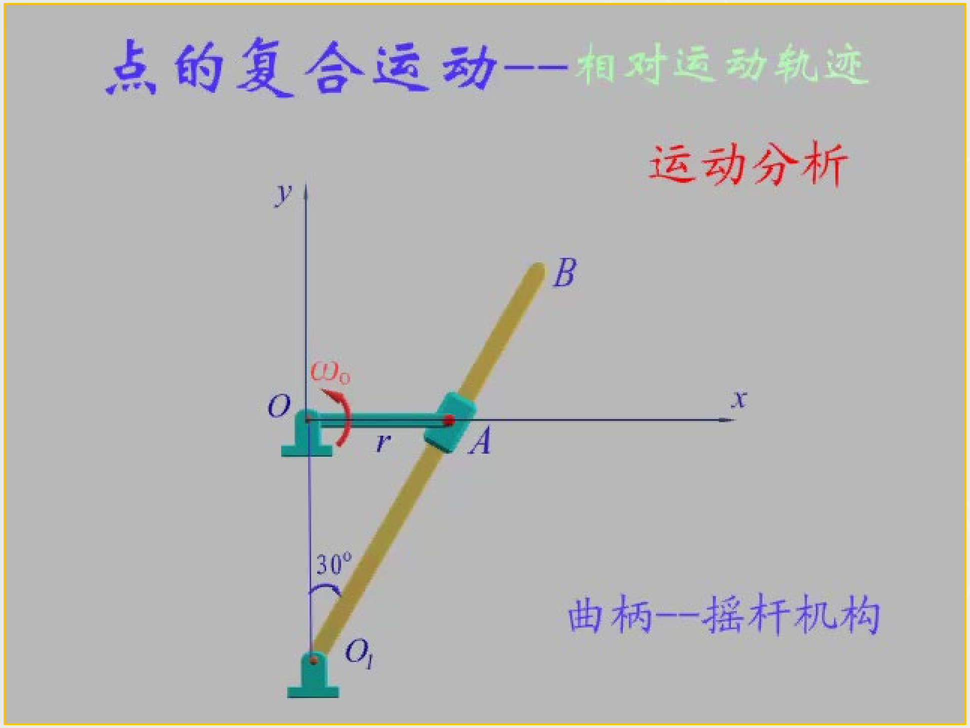
动系刚体可以进行延拓！

练习与讨论

例：已知OA在图示瞬时水平，其角速度为ω_0，O_1B与铅垂向夹角30^0。求 O_1B杆的角速度。

选法一：动点：套筒上A点

动系：摇杆O_1B

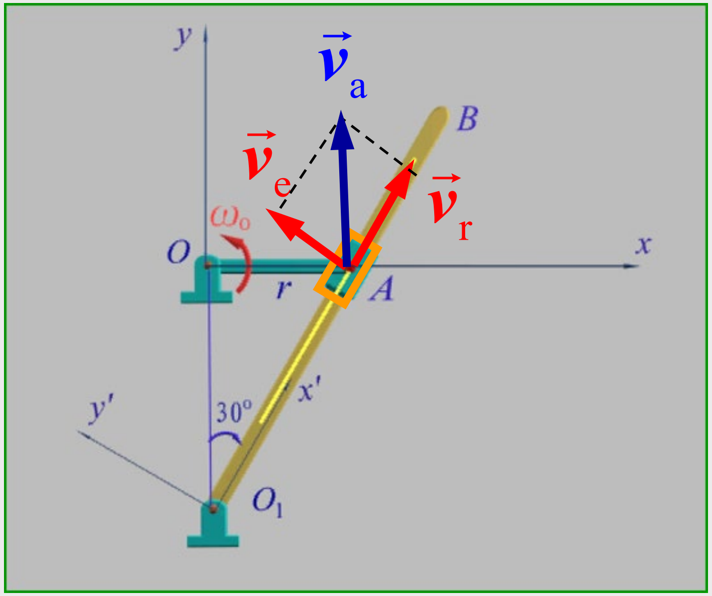


运动分析

绝对运动： **圆周运动**

相对运动： **直线运动**

牵连运动： **定轴转动**



动点：套筒上A点
动系：摇杆O_1B

运动分析

绝对运动： 圆周运动

相对运动： 直线运动

牵连运动： 定轴转动

速度分析： $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

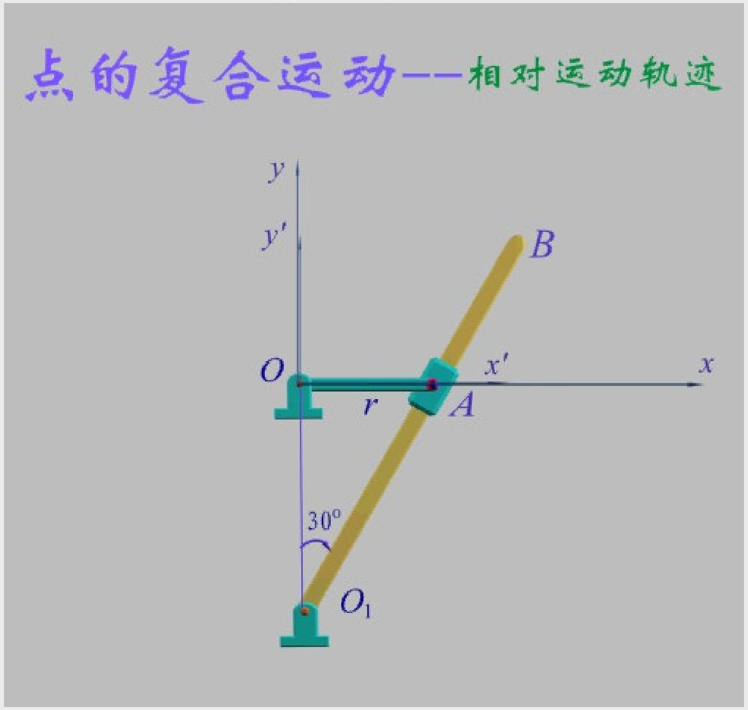
√ ? ?

其中： $v_a = \omega_0 R$

则： $v_e = v_a \sin 30^\circ = \dfrac{\omega_0 |OA|}{2}$

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_e}{|AO_1|} = \frac{\omega_0}{4}$$

成功！

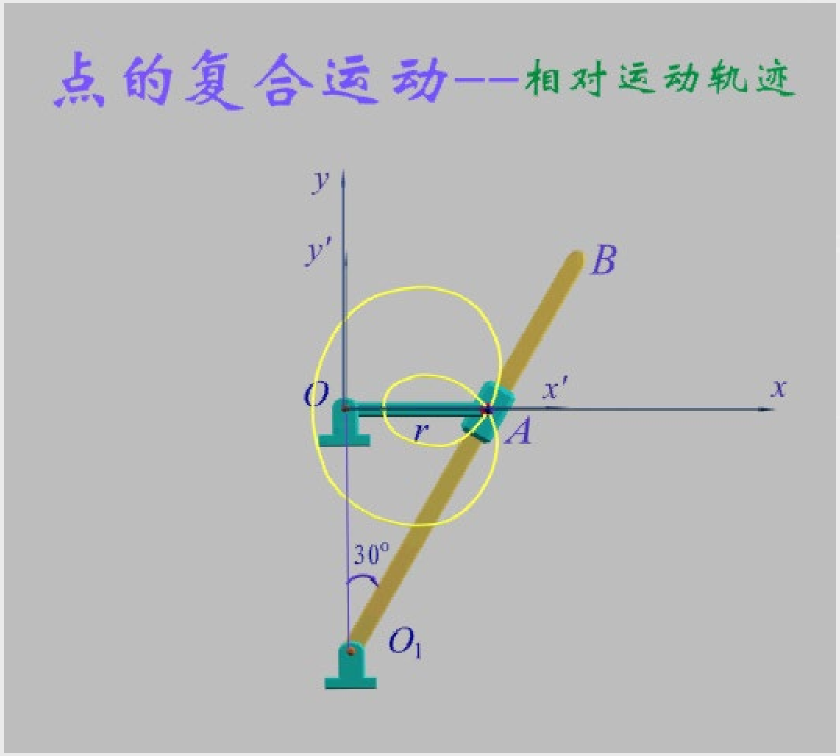


选法二：

动点：摇杆O_1B 上的A'

动系：OA杆

猜一猜相对运动轨迹！

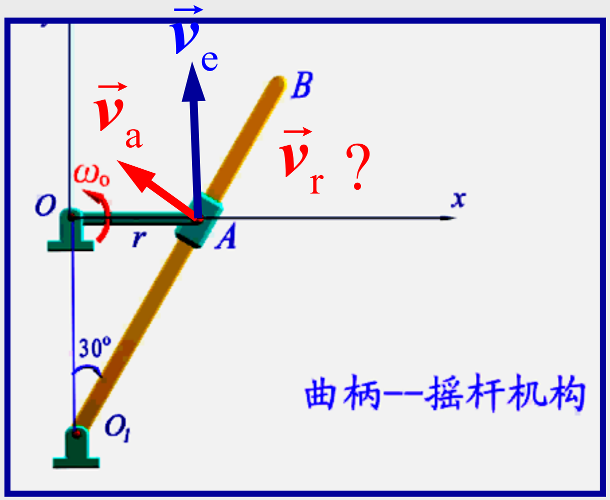


运动分析

绝对运动： **圆周运动**

相对运动： **未知曲线运动**

牵连运动： **定轴转动**



方法二：

动点：摇杆O_1B 上的A

动系：OA杆

运动分析

绝对运动： **圆周运动**

相对运动： **未知曲线运动**

牵连运动： **定轴转动**

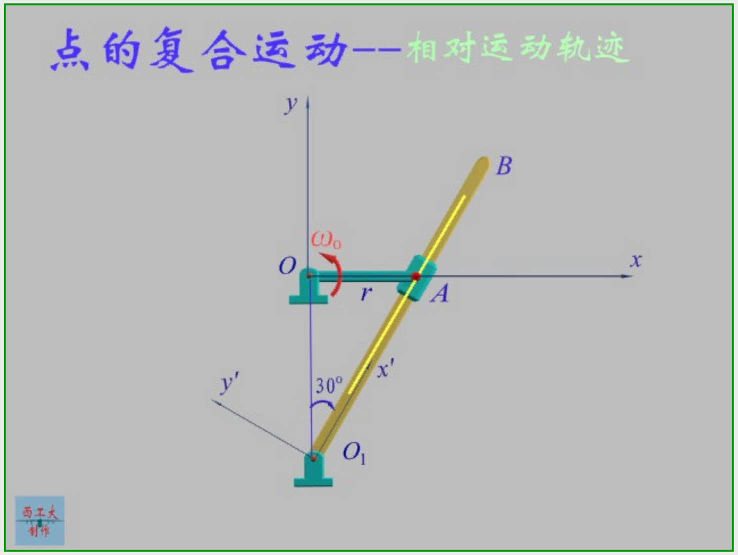
速度分析： $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

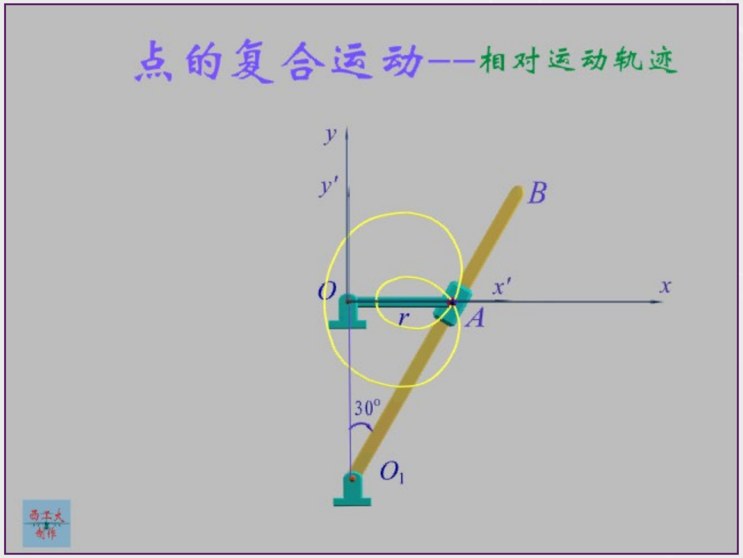
	$\vec{v}_a$	$\vec{v}_e$	$\vec{v}_r$
大小：	?	√	?
方向：	√	√	?

失败

有3个未知量！ 不可解！

动点动系的选择规律





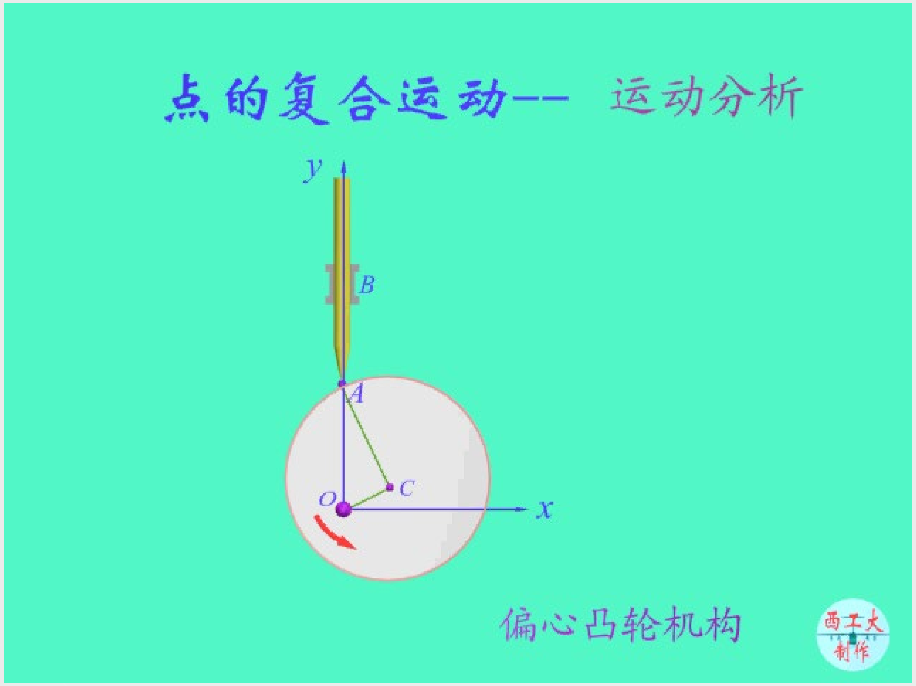
（1）动点、动系分别在两个物体上，否则就没有相对运动。

（2）相对运动轨迹清晰：为已知的、简单的情况。

动点动系的选择规律

（1）动点、动系分别在两个物体上，否则就没有相对运动。

（2）相对运动轨迹清晰：为已知的、简单的情况。



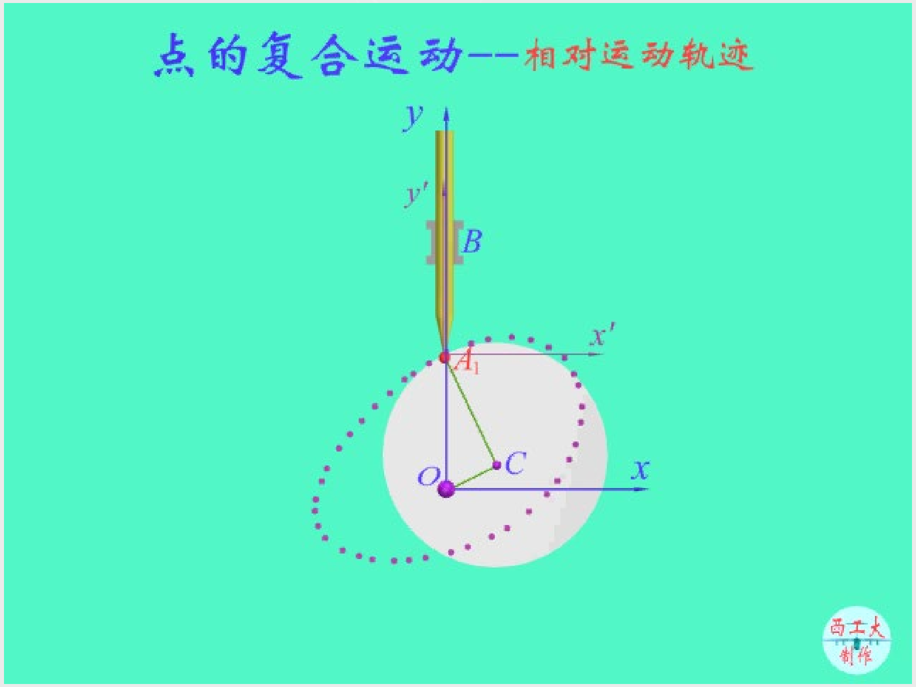
动点：A

动系：凸轮C

相对运动：

绕C的圆周运动

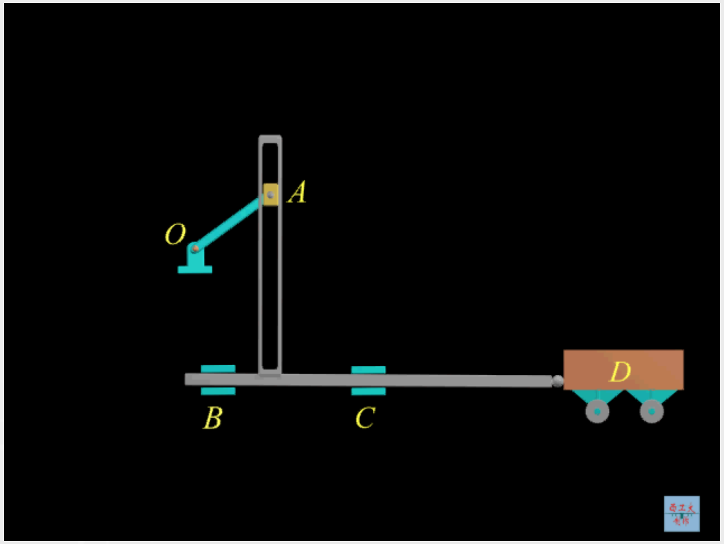
√

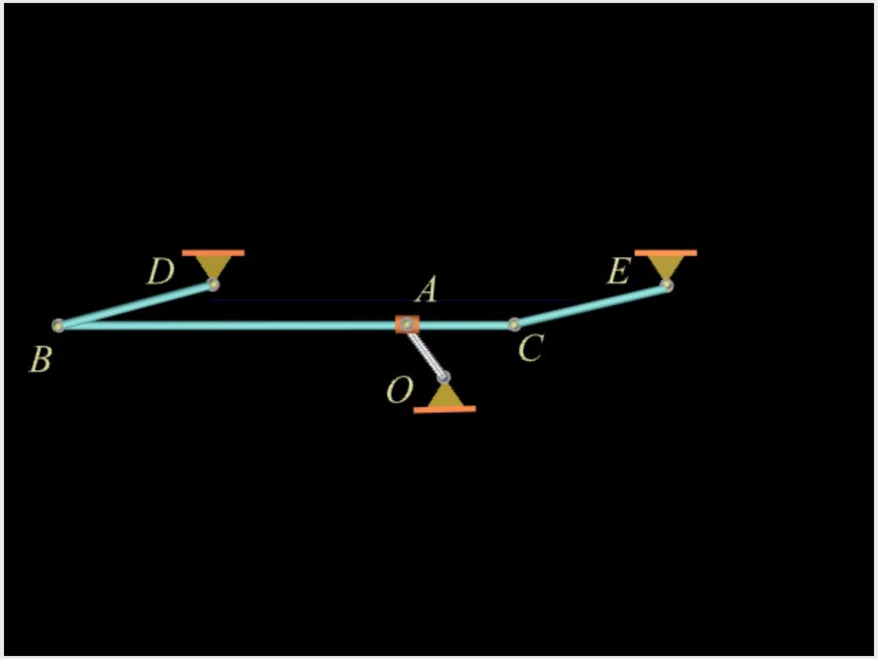


动点：圆周上A_1点

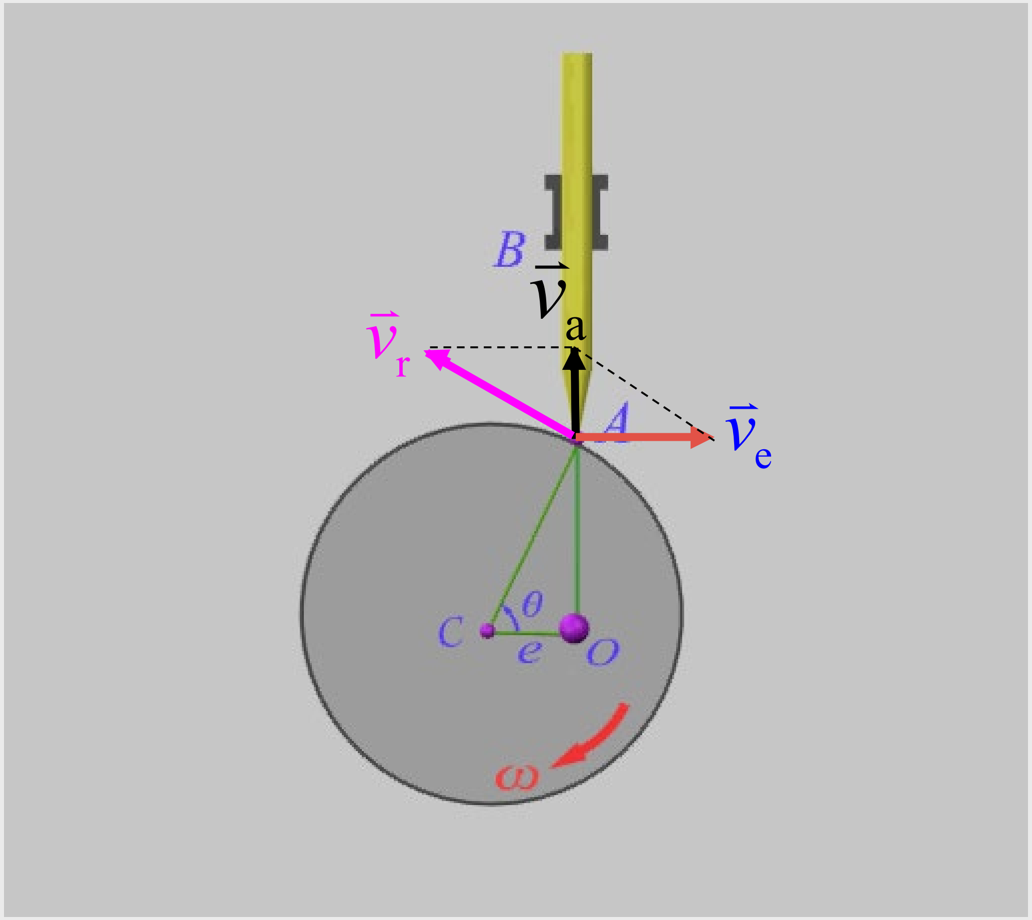
动系：杆AB

X





例：　已知图示凸轮以角速度ω运动：（1）判断三种运动并标注三种速度方向；（2）求杆上点A的速度。



解：（1）：

动点：杆上点A

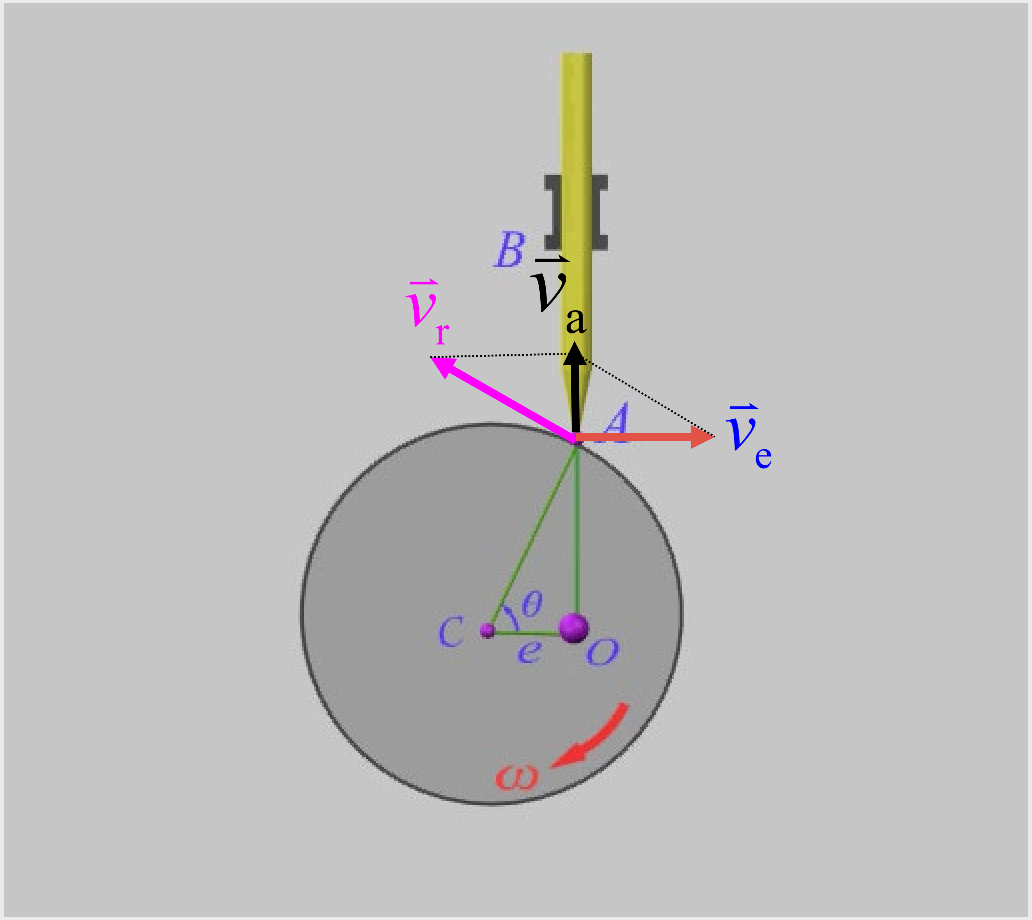
动系：凸轮

绝对运动：直线运动

相对运动：圆周运动

牵连运动：定轴转动

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$



（2）杆上点A的速度：

由速度合成定理：

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

	$\vec{v}_a$	$\vec{v}_r$	$\vec{v}_e$
大小：	？	？	√
方向：	√	√	√

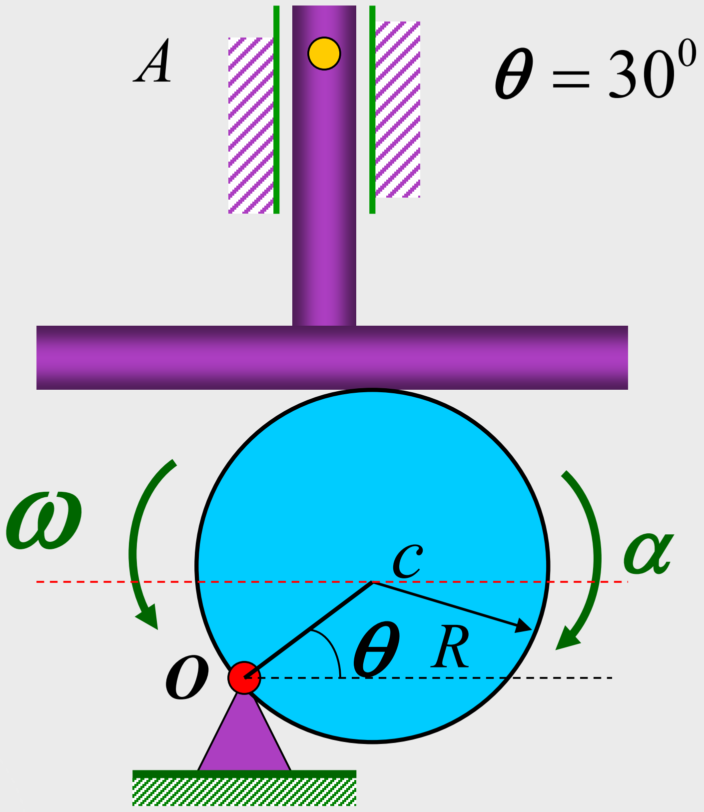
$$\therefore v_a = v_e \cot\theta$$

$$= \omega R \cos\theta$$

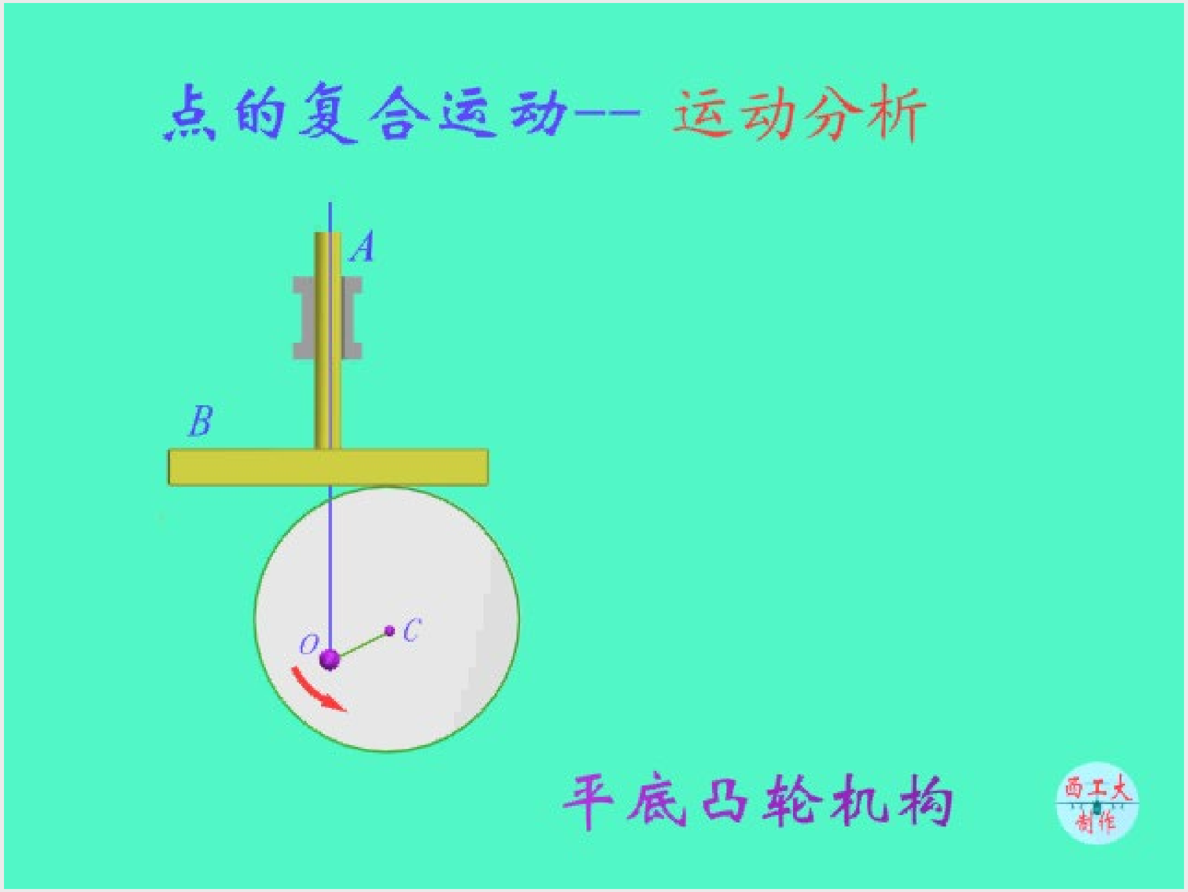
$$\therefore v_B = v_a$$

问题：如果动点不选在杆上点A，而选在凸轮上，则该选哪一点？三种运动又会怎么变化？应用速度合成定理求得点B速度是否相同？

例： 已知图示瞬时圆盘的角速度 ω， 求杆上A点的速度。



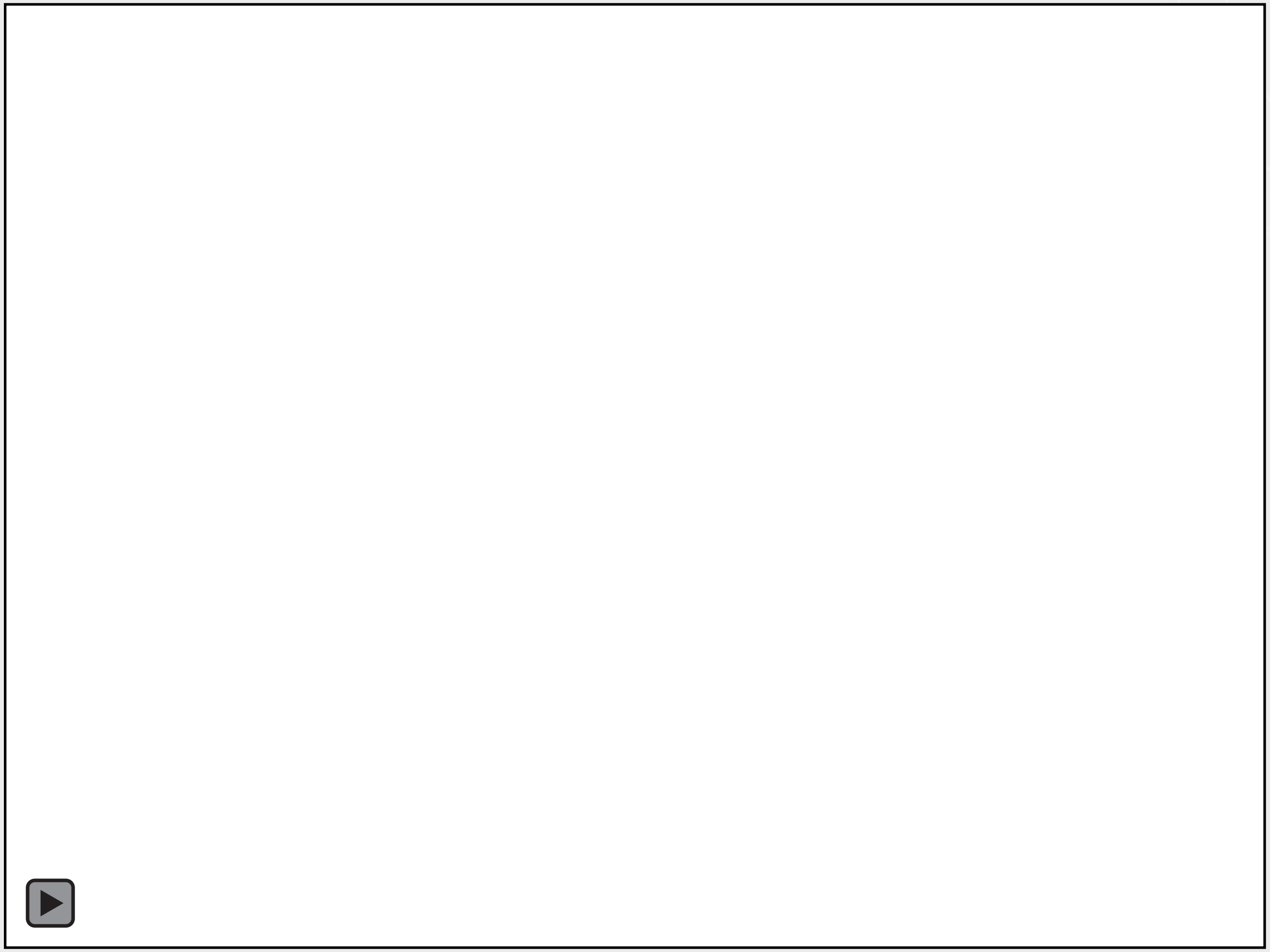
平底凸轮机构的运动分解



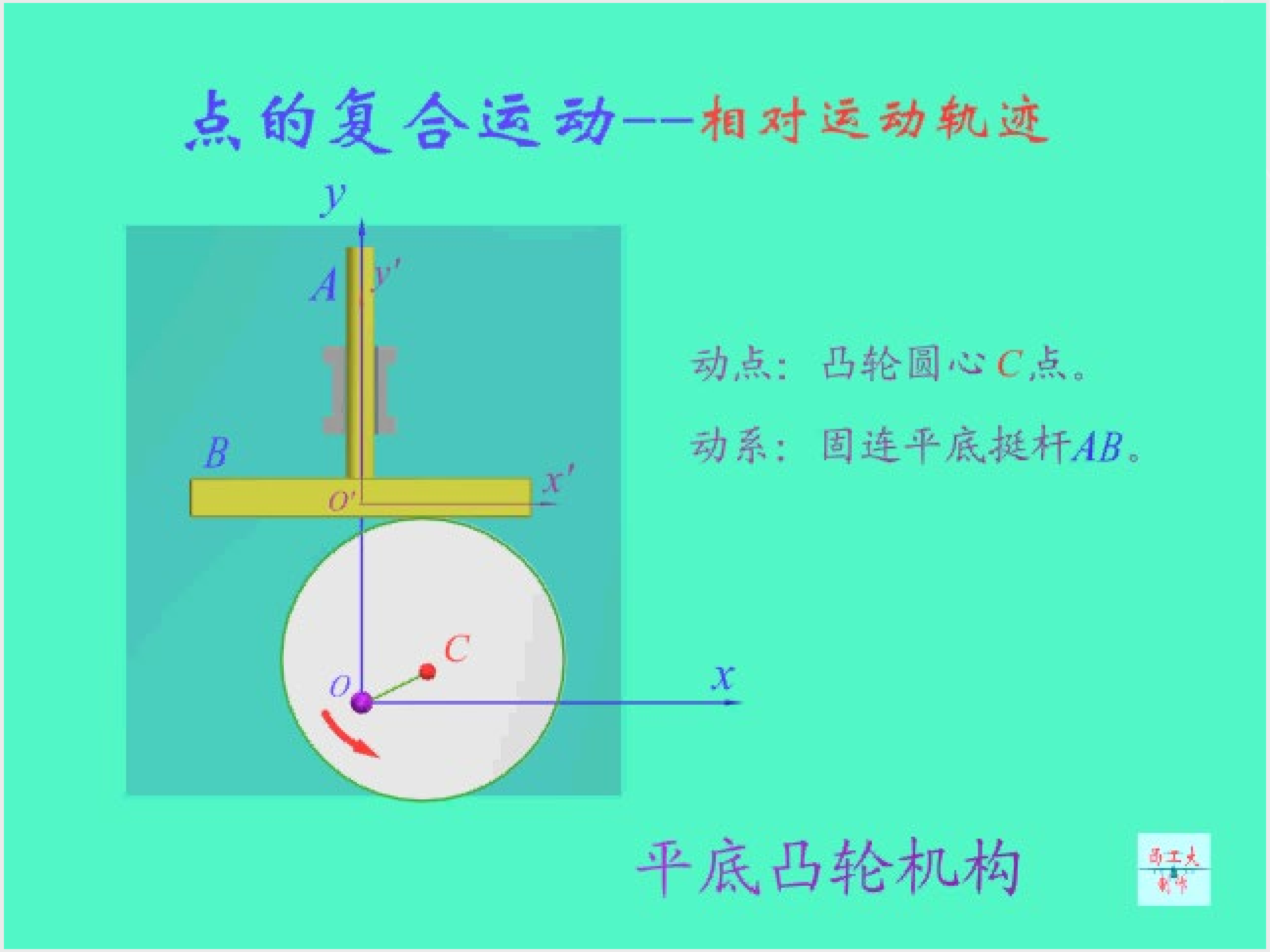
如何选动点、动系？

选法1 X

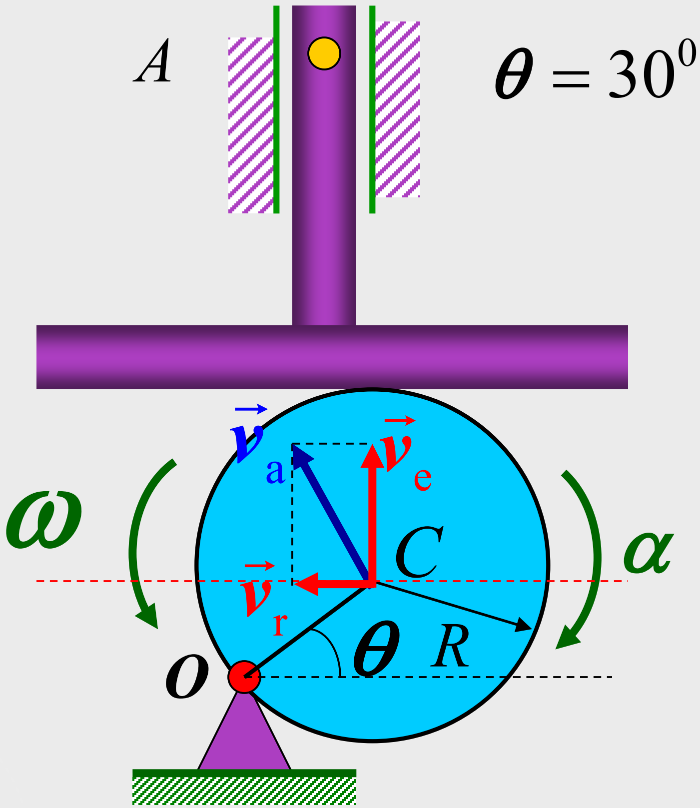
选法2 X



选法3 √



例： 已知图示瞬时圆盘的角速度 ω， 求杆上A点的速度。



解： 动点： 盘心C

动系： 杆

运动分析

绝对运动： 圆周运动

相对运动： 直线运动

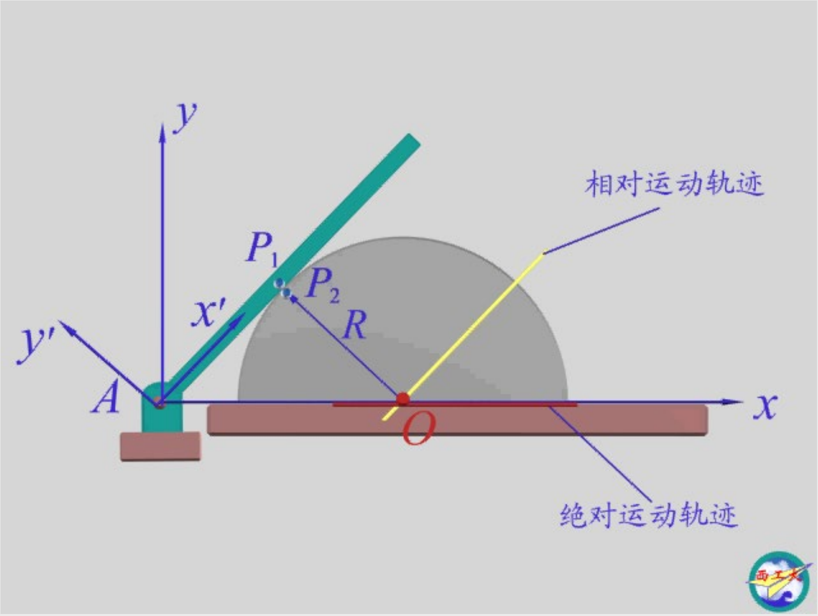
牵连运动： 直线平移

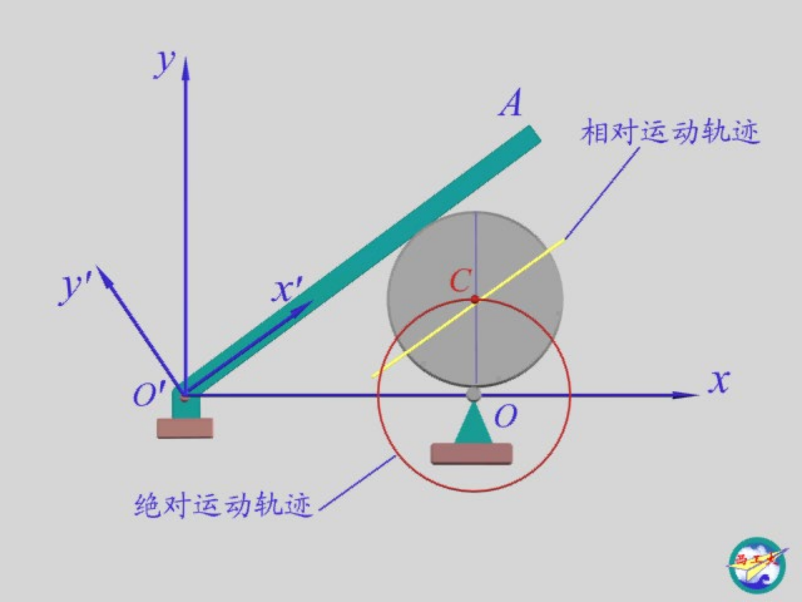
速度分析： $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$v_a \cos\theta = v_e$$

$$\boxed{v_e = R\omega\cos 30^0}$$

选动点、动系





动点：圆心O

动系：杆件

相对运动：

平行于杆的直线运动

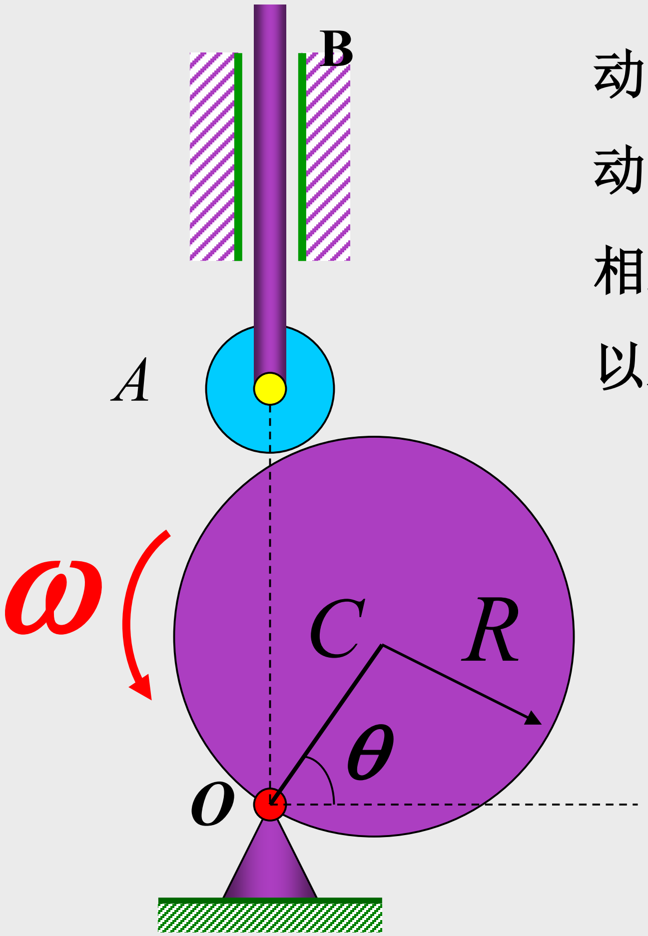
动点：圆心C

动系：OA杆

相对运动：

平行于OA的直线运动

选动点、动系



动点：圆心C

动系：AB杆

相对运动：

以A为圆心的圆周运动

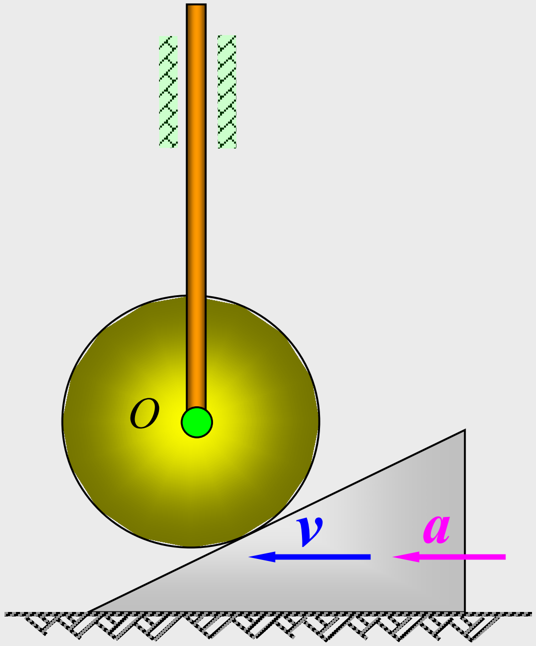
动点：圆心A

动系：凸轮C

相对运动：

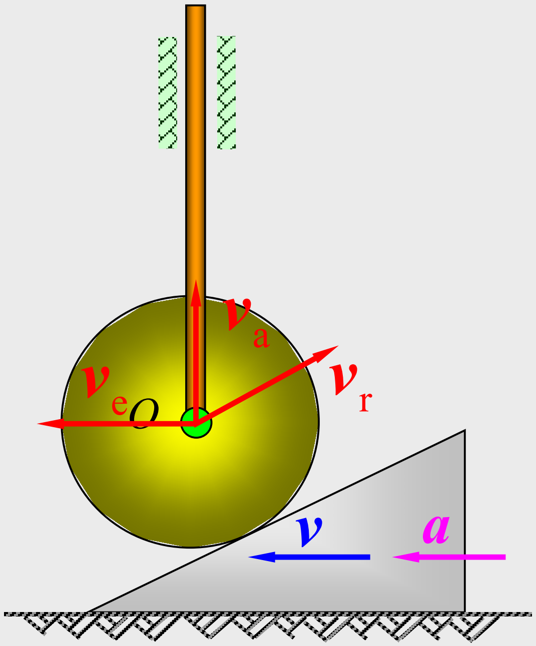
以C为圆心的圆周运动

概念问题课堂练习

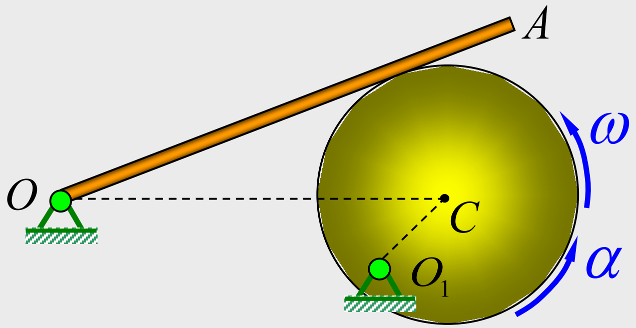


动系为斜面，

动点为轮心*O*。

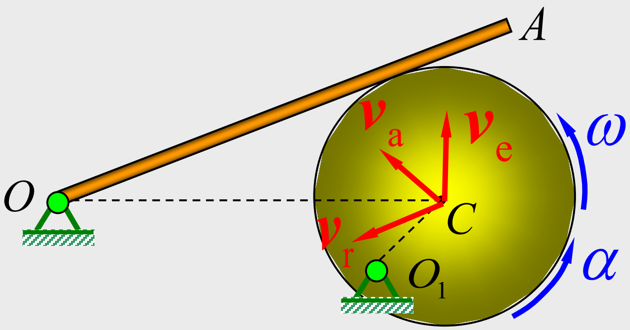


概念问题课堂练习:

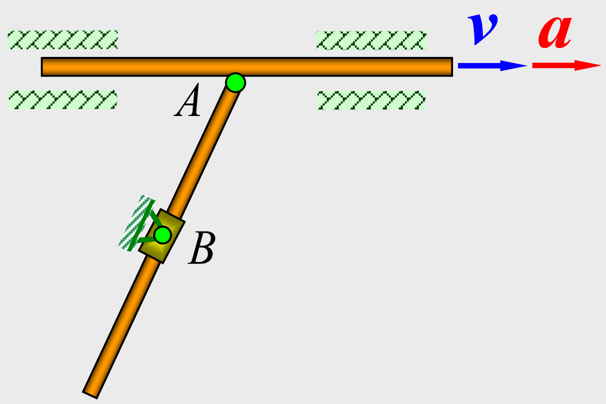


动系:$\boldsymbol{OA}$

动点:轮心$\boldsymbol{C}$。

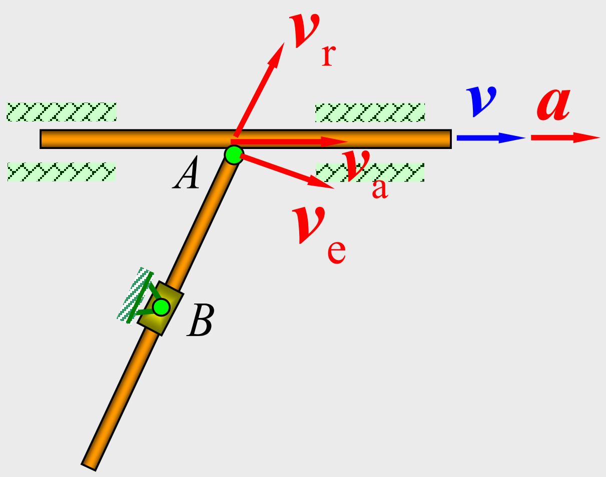


概念问题课堂练习



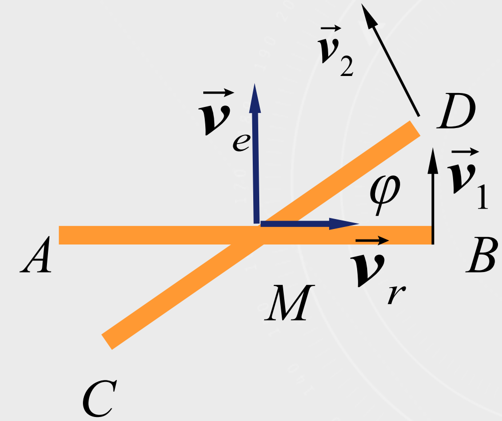
动系：套筒B

动点：铰A。



例

已知：两根杆分别以速度v_1、v_2在平面上平动，两杆夹角为 φ ，
试求交点M的速度。



解： 将动系固结于AB杆

1、 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_r$

大小： ? ?

方向： ?

再将动系固定于CD杆

2、 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_2 + \vec{v}_r'$

? ?

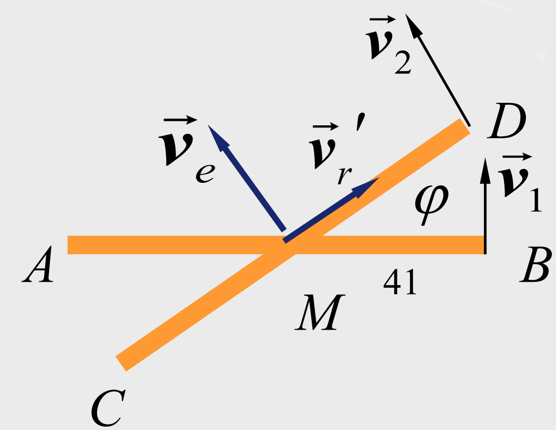
?

由于 v_a不随动系而变

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_r = \vec{v}_2 + \vec{v}_r'$$

大小： ? ?

方向：



$$\vec{v}_1 + \vec{v}_r = \vec{v}_2 + \vec{v}_r{}'$$

将上式投影到垂直于*AB*方向：

$$v_1 + O = v_2 \cos\varphi + v_r{}' \sin\varphi$$

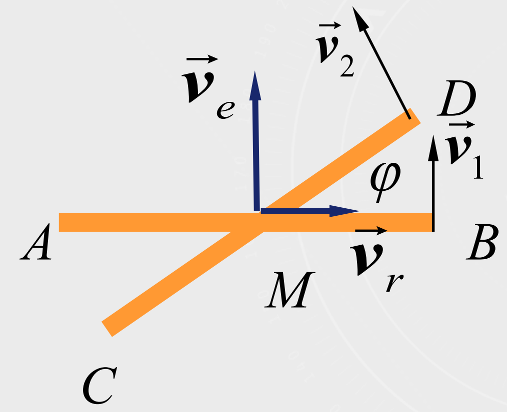
将上式投影到垂直于*CD*方向：

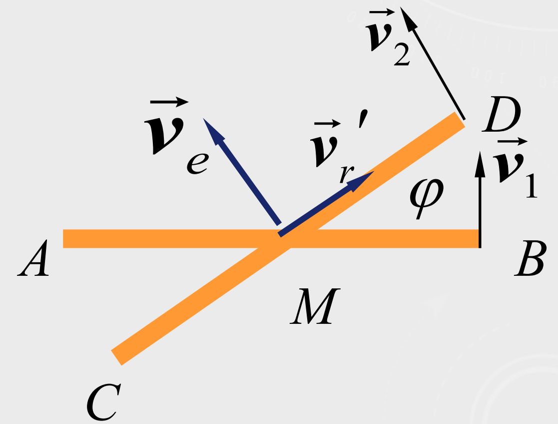
$$v_1 \cos\varphi - v_r \sin\varphi = v_2$$

再利用(1)或(2)将 v_r 或 $v_r{}'$ 代入

$$v_a = \sqrt{v_1^2 + v_r^2} = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\varphi}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_1}{v_r} = \frac{v_1 \sin\varphi}{v_1 \cos\varphi - v_2}$$





TAKE-HOME MESSAGE

1、一点，二系，三运动

2、$\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}}$

3、让问题变得简单