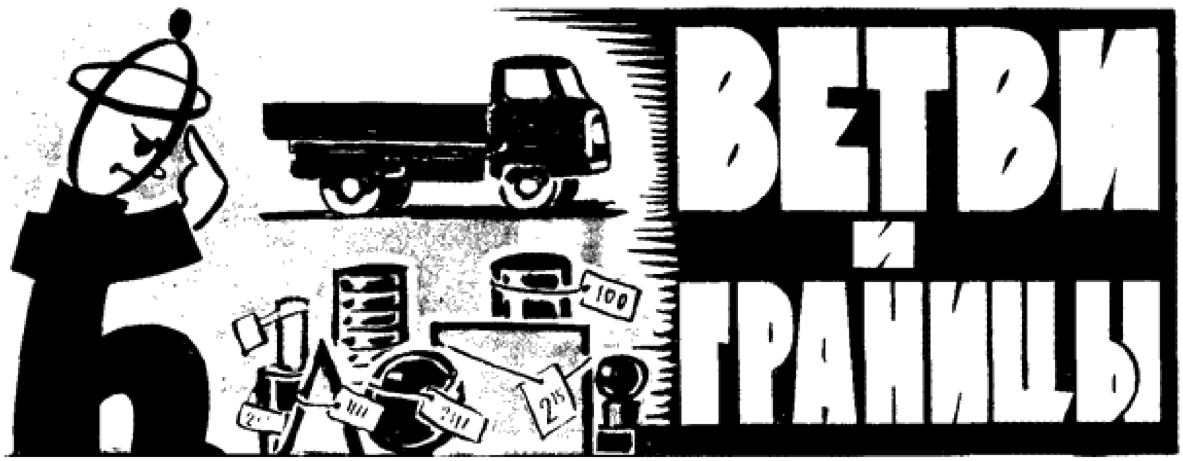

Р. П. Шейнцвит

Рассмотрим задачу:

На складе имеются предметы (каждый по одному), вес и стоимость которых указаны в таблице.

Порядковый номер	Вес в центнерах	Стоимость (в рублях)
1	11	120
2	7	140
3	6	60
4	5	80
5	12	160
6	9	110
Всего:	50	670

Грузоподъемность автомашины — 3200 кг. Требуется так загрузить автомашину, чтобы общая стоимость взятых предметов была как можно большей.

Очевидно, выгоднее брать предметы, имеющие при малом весе большую стоимость.

Введем понятие *удельной стоимости* предмета d_i, то есть стоимости одного центнера i-го предмета в рублях: $d_1 = 10,9; d_2 = 20; d_3 = 10; d_4 = 16; d_5 = 13,3; d_6 = 12,2$.

Если загрузить автомашину предметами с наибольшей удельной стоимостью - вторым, четвертым, пятым и шестым, — то сумма их весов окажется больше грузоподъемности автомашины $(7 + 15 + 12 + 9 > 32)$.

Если же взять только 2-й, 4-й и 5-й предметы, то машина окажется недогруженной на 8 *ц*. Можно тогда погрузить еще только один 3-й предмет, причем суммарная стоимость получится равной 440 руб., а машина будет недогружена на 2 *ц*. Можем ли мы быть уверены, что не существует лучшего способа загрузки машины?

Может быть, выгоднее оставить какой-либо из предметов с большей удельной стоимостью, но зато уве- личить общую стоимость путем пол- ного использования грузоподъемно- сти машины?

Как видим, «в лоб» задачу решить трудно. А в реальных условиях, когда речь зачастую идет не о шести, а о шестидесяти предметах, и браться за нее нельзя, не вооружившись математическими методами. Переведем задачу на язык математики (как говорят, математизируем ситуацию).

Пусть $x_i = 1$, если i-й предмет погружается на автомашину, и $x_i = 0$ в противном случае ($i = 1\dots6$). Тогда общая стоимость погруженных предметов равна $120x_1 + 140x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 160x_5 + 110x_6$, а их общий вес в центнерах равен $11x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 12x_5 + 9x_6$.

С помощью известных формул геометрии и тригонометрии из теоремы косинусов можно вывести некоторые соотношения, связывающие элементы любого треугольника.

П р и м е р 2. *Доказать, что стороны, углы и площадь S треугольника ABC удовлетворяют соотношению*

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Р е ш е н и е. Из формулы $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ находим, что $bc = \frac{2S}{\sin A}$. Подставив формулу $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ вместо $2bc$ выражение $\frac{4S}{\sin A}$, получим, соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{ctg} A. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

П р и м е р 3. *Доказать, что для любого треугольника справедливы неравенства*

$$a) \sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

$$b) \operatorname{tg}\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2h_a},$$

где *a, b, c - стороны треугольника ABC и h_a - высота, проведённая из вершины A.*

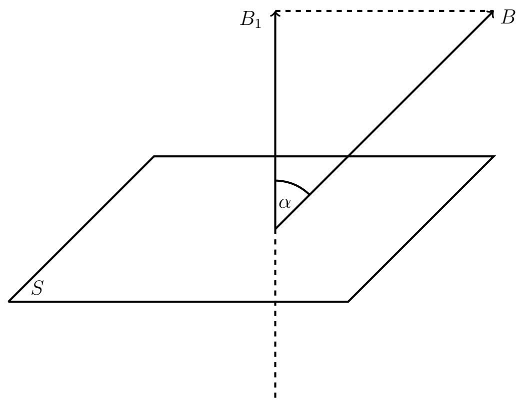

Рис. 1.