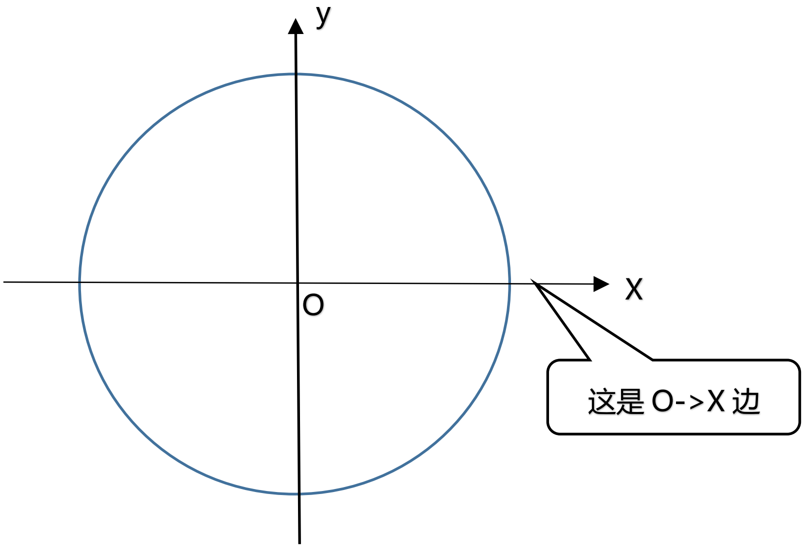
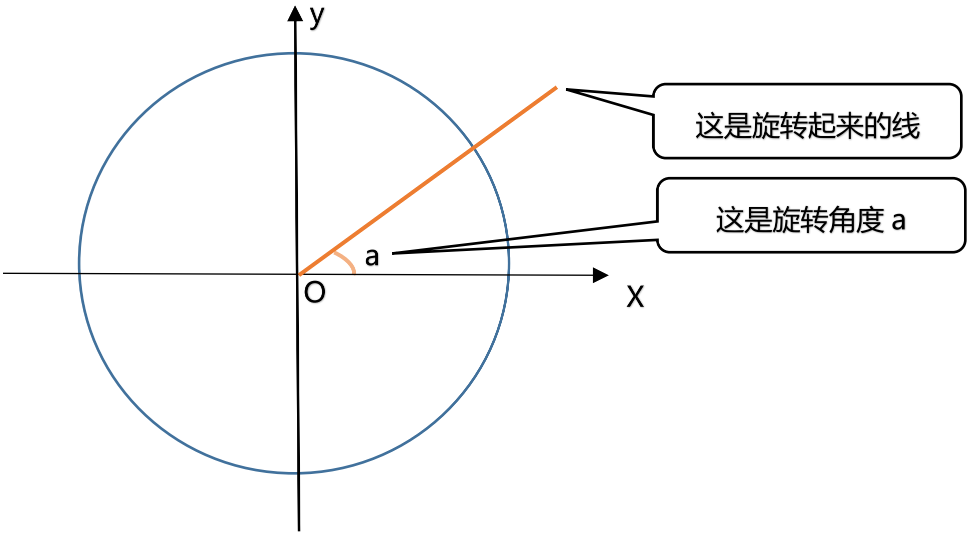
电子工程常用数学分析

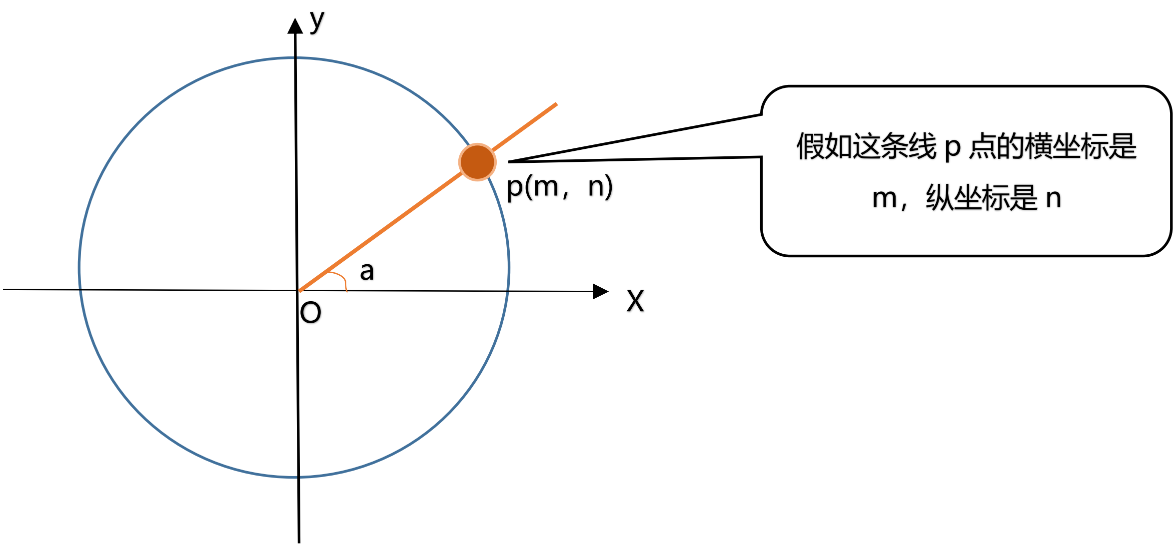
作者：向仔州

三角函数



以 O->X 这条边为始边旋转一个角度，这个角度叫 a 阿尔法

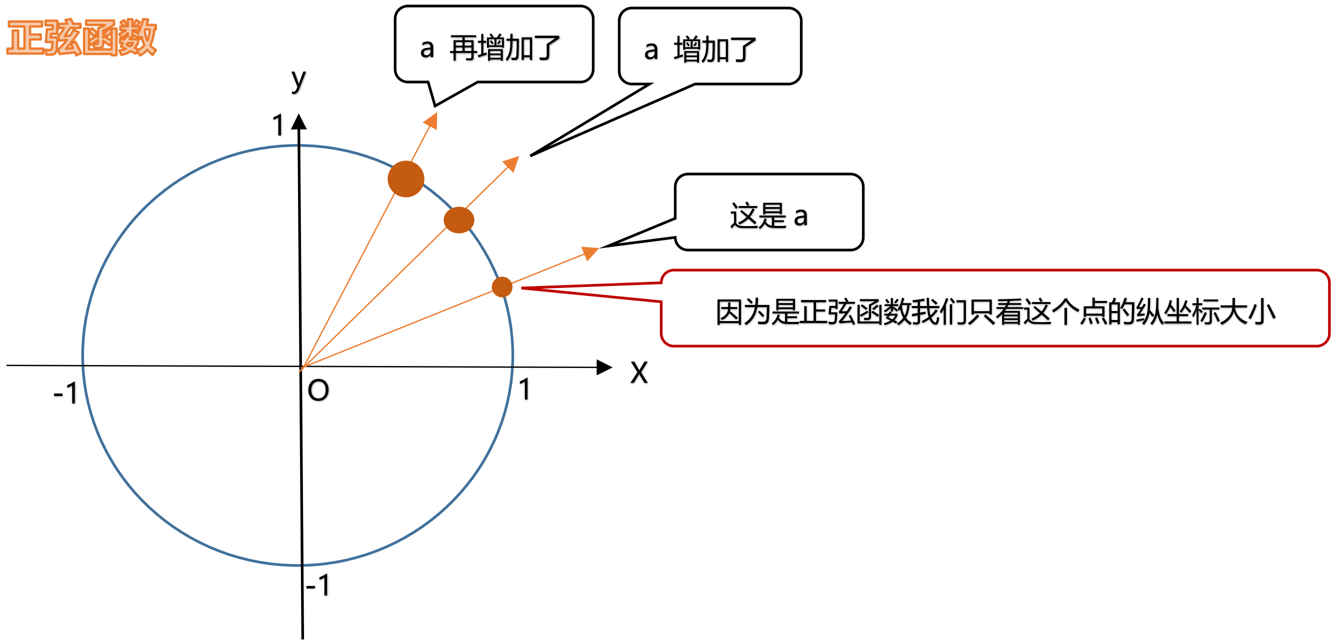




我们就得到这个 a 角度变化的时候，m 和 n 跟着 a 角度变化而变化。

我们知道正弦函数就是 n=sin(a)

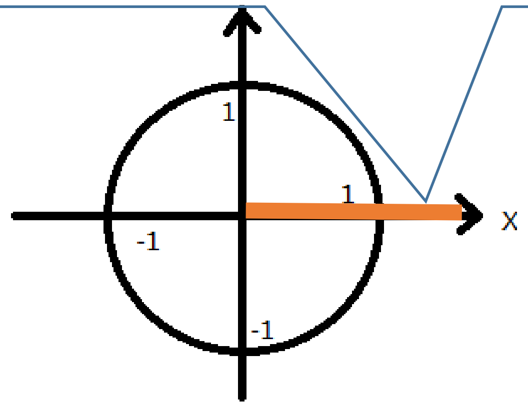
正弦函数



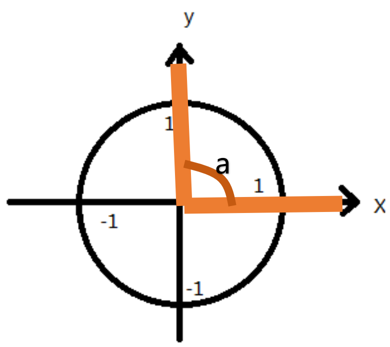
所以就有了如下的关系式，因为是正弦函数我们就是看 n 的大小，n 代表纵坐标大小，m 直接忽略.所以根据公式 n=sin(a)，a 的变化会导致 n 的变换，这个变化是下面这样的：

从图形上看，前面说了是正弦函数，所以我们只看 n 在纵坐标的位置，很明显这条线 y=0，n=y，所以 n 为 0，和 sin(a)得出一样的结论.

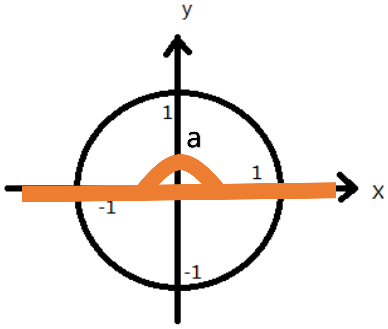
当 a 没有开始旋转时，a=0°，n=0
因为 n=sin(a)，所以计算出来 n=0



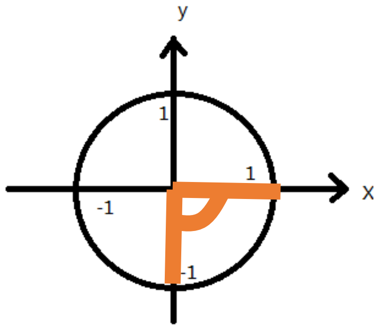
当 a 开始旋转了，a=90°，n=1
因为 n=sin(a)，所以计算出来 n=1



当 a 转到 a=180°，n=0
因为 n=sin(a)，所以计算出来 n=0



当 a 转到 a=270°，n=-1
因为 n=sin(a)，所以计算出来 n=-1

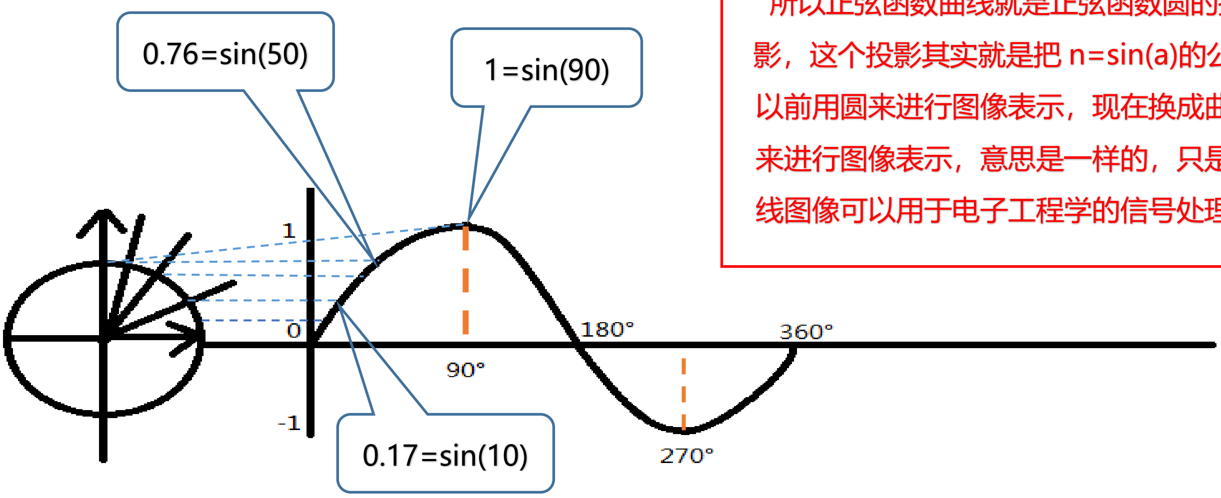


所以不论从图像坐上看还是计算 sin（a）公式都可以得出下面结论

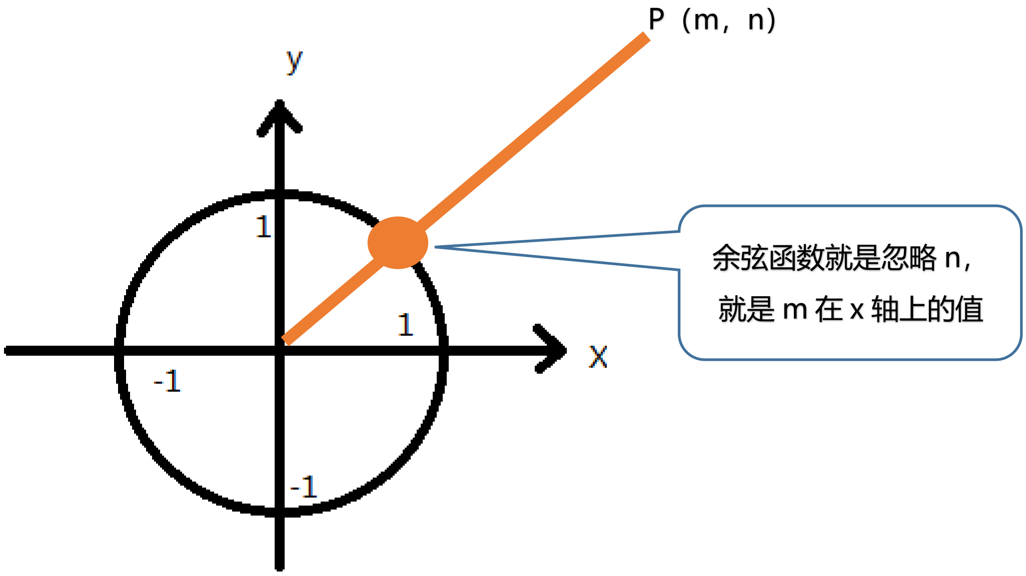
a	n=sin(a)
0°	0
∏/2°	1
∏°	0
270°	-1
2∏°	0

如果我们用曲线表示上面的正弦函数

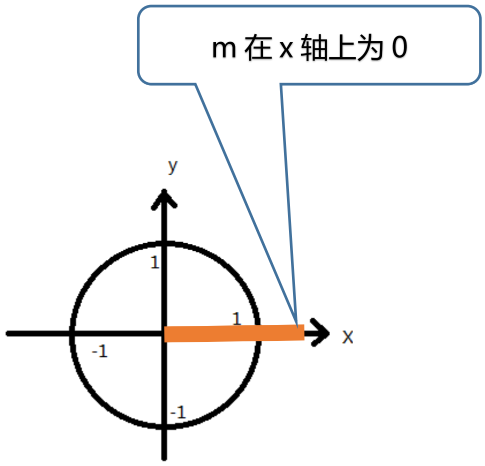
所以正弦函数曲线就是正弦函数圆的投影，这个投影其实就是把 n=sin(a)的公式以前用圆来进行图像表示，现在换成曲线来进行图像表示，意思是一样的，只是曲线图像可以用于电子工程学的信号处理。



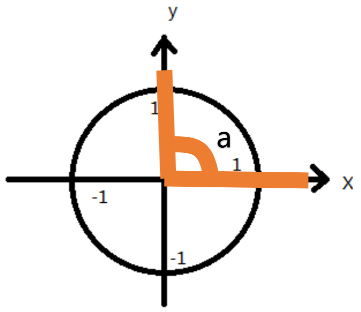
余弦函数也是差不多



当 a=0°，m=1
因为 m=cos(a)，所以计算出来 m=1

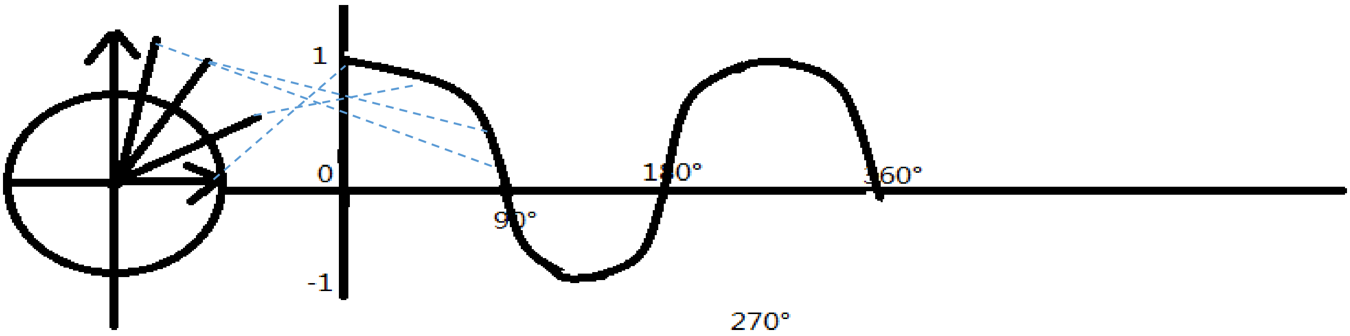


当 a=90°，m=0
因为 m=cos(a)，所以计算出来 m=0



余弦函数的计算方法和正弦函数是一样的

a	m=cos(a)
0°	1
∏/2°	0
∏°	-1
270°	0
2∏°	1

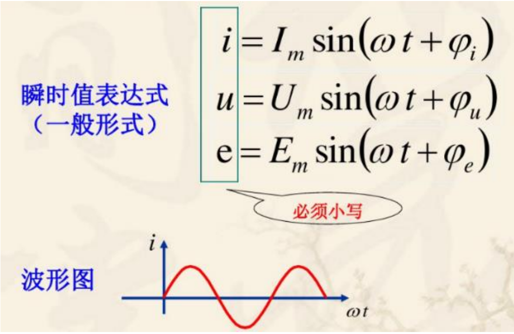


如果用计算机来计算正弦值和余弦值就像下面这样操作

比如：n=sin(10)，m=cos(30)

得到 n=0.1736，同样的方法计算 cos，得到 m=0.86

正弦函数可以计算交流信号电每一秒(s)，每一毫秒(ms)，每一纳秒(ns)的电压值



怎么用公式来计算？我们用电压 u 来举例

V = Um sin(ωt+φ)

V是这一时刻毫秒，微妙，纳秒的瞬间电压值

Um 是我们必须先设置信号源或者其它仪器什么的，要求正弦信号的峰峰值是多少，这是人为设置的

ω 是2πf，π = 3.14，f=你要求设置正弦信号频率

Φ 是我们设置的正弦信号0时刻在坐标系的什么位置，也就是初相位

例1: 设正弦信号峰峰值为5V，频率10hz，初相位0度

V = Um sin(ωt+φ)

t = 10hz

φ = 0

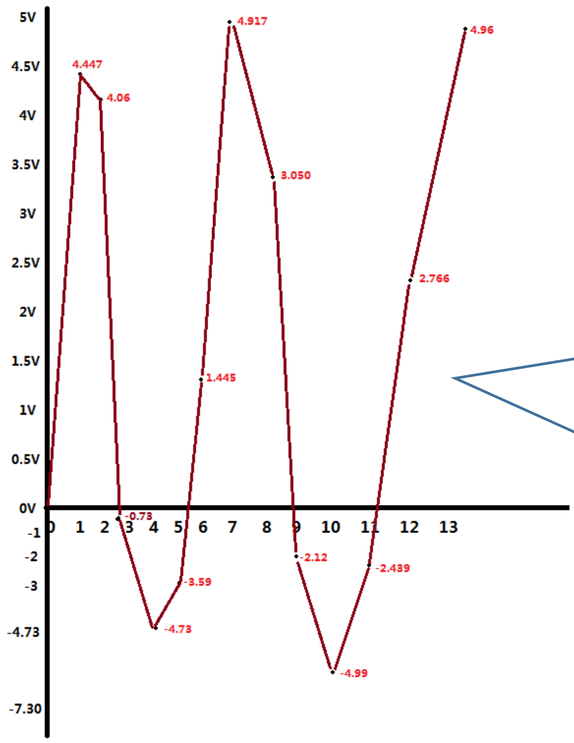
第1秒正弦波电压 **V = Um sin(ωt+φ) =5V x sin(2x 3.14 x 10 x 1s)+0 =4.447V**

第2秒正弦波电压 **V = Um sin(ωt+φ) =5V x sin(2 x 3.14 x 10 x 2s)+0 = 4.06V**

以此类推

t=1 V=4.447
t=2 V=4.06
t=3 V= -0.73
t=4 V=-4.73
t=5 V=-3.59
t=6 V=1.445
t=7 V=4.917
t=8 V=3.050
t=9 V=-2.12
t=10 V=-4.99
t=11 V=-2.439
t=12 V=2.766
t=13 V=4.96

下面画出这些 t 时间的波形图



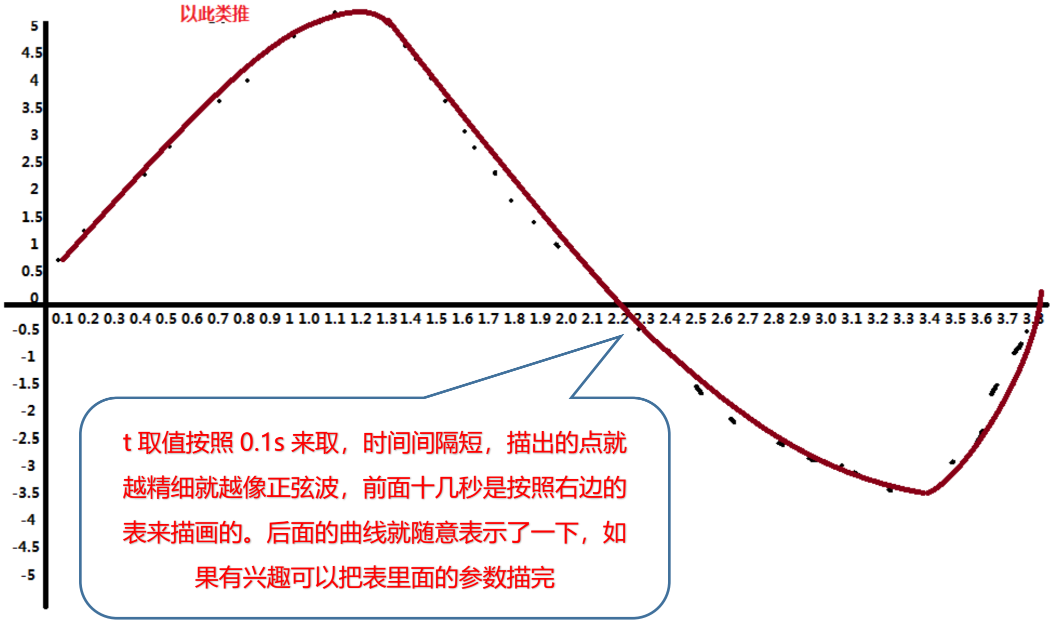
这就是计算出来的正弦函数值，最大值不会超过+5V 和-5V。但是这个波形怎么看起有点像变异的正弦波呢？这是因为我的时间 t 取的是 1 秒。时间间隔太大，如果我取 0.1 秒我们就能看出更完整的正弦波，下面我们试试

例2:设正弦信号峰峰值为5V，频率10hz，初相位0度

V=Um sin(ωt+φ) =5 x sin(2 x 3.14 x 10 x 0.1) + 0=0.54 第0.1秒电压值

V = Um sin(ωt+φ) = 5 x sin(2 x 3.14 x 10 x 0.2)+0=1.08 第0.2秒电压值

以此类推



t=0.1 i = 0.54	t=2.7 i = 0.90
t=0.2 i = 1.08	t=2.8 i = 0.36
t=0.3 i = 1.61	t=2.9 i = -0.18
t=0.4 i = 2.12	t=3.0 i = -0.73
t=0.5 i = 2.60	t=3.1 i = -1.26
t=0.6 i = 3.05	t=3.2 i = -1.78
t=0.7 i = 3.47	t=3.3 i = -2.28
t=0.8 i = 3.84	t=3.4 i = -2.76
t=0.9 i = 4.17	t=3.5 i = -3.20
t=1.0 i = 4.44	t=3.6 i = -3.60
t=1.1 i = 4.67	t=3.7 i = -3.95
t=1.2 i = 4.83	t=3.8 i = -4.26
t=1.3 i = 4.94	t=3.9 i = -4.52
t=1.4 i = 4.99	t=4.0 i = -4.73
t=1.5 i = 4.98	t=4.1 i = -4.88
t=1.6 i = 4.91	t=4.2 i = -4.97
t=1.7 i = 4.78	t=4.3 i = -4.99
t=1.8 i = 4.60	t=4.4 i = -4.96
t=1.9 i = 4.35	t=4.5 i = -4.87
t=2.0 i = 4.06	t=4.6 i = -4.73
	t=4.7 i = -4.52
	t=4.8 i = -4.26
	t=4.9 i = -3.95
	t=5.0 i = -3.59

∑求和计算方法

N 是 i 要加到的次数

$$\sum_{i}^{N} K$$

K 是从 i 开始取数

i 是起始数

比如 i=0，那么 i 就从 1 开始加，一直加到 100，得出这些数加起来的和

$$\sum_{i=0}^{N=100} i=1+2+3+4+5\cdots\cdots+100$$

$$\sum_{i=1}^{10} xi = x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10$$

这种就是 x 是不变的，i 是自变，每次 i 加 1，加到 N 要求的 10

我们来实际看看∑到底有什么用

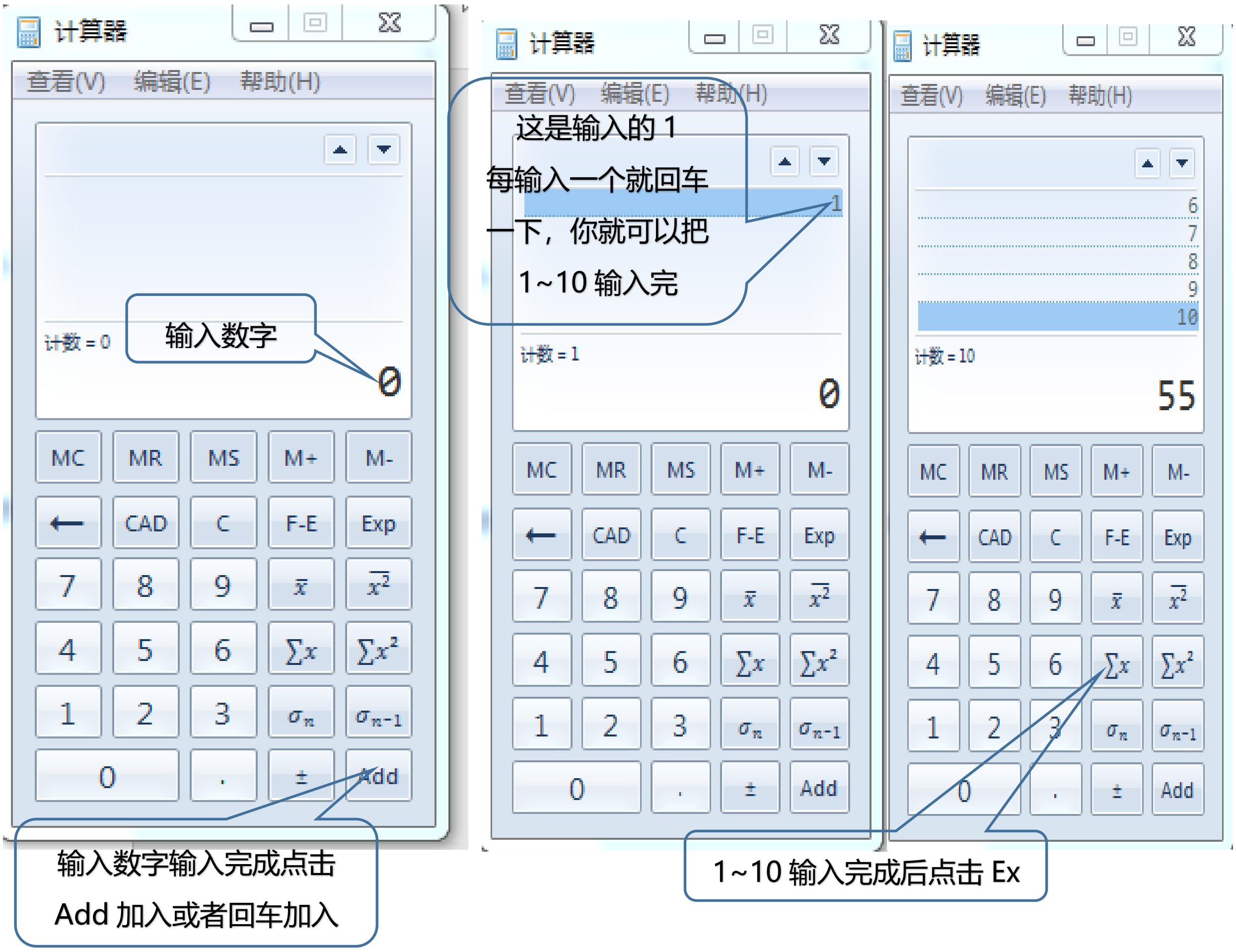
比如我想知道 $1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots\cdots+100=?$ 加到 100 等于多少我就可以用∑来表示

$$S=\sum_{i=0}^{N=100} i=1+2+3+4+5\cdots\cdots+100$$

这个 S 就是 1 加到 100 的和。像这种用上∑西格玛的东西都是用计算机或者程序来计算。我们用计算机来算一个 1~10 的数

$$S=\sum_{i=0}^{10} i=1+2+3+4+5\cdots\cdots+10$$

选择电脑计算机统计信息选项



最后得出 1~10 的每个数加起来等于 55。

$$S=\sum_{x=1}^{10} x^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$$

这种计算和上面一样，只是多了平方所以

我们计算器要这样使用

其实计算方法和上面一样，计算每个数平方后的和

下面我来计算一个复杂点的公式

$$f(x)=\sum_{x=1}^{x=20}\left(\frac{1}{x}\sin\left(\frac{x\pi}{25}\right)\right)$$

2.计算 sin

1.先四则运算

X=1 时，代入 xπ = 1*3.14=3.14，然后 sin（3.14/25）计算机算出来，然后乘以 1 得到 0.00219

X=2 时，代入 xπ = 2*3.14=6.28，然后 sin（6.28/25）计算机算出来，然后乘以 0.5 得到 0.00219

X=3 时，代入 xπ = 3*3.14=9.24，然后 sin（9.25/25）计算机算出来，然后乘以 0.3 得到 0.002206

X=4 时，代入 xπ = 4*3.14=12.56，然后 sin（12.56/25）计算机算出来，然后乘以 0.2 得到 0.00219

以此下去就可以 x=5,6,7,8,9,10......直到 20 的每一个数算出来，但是这还不是 f(x)的值哦!!

要把算出来的 X=1~20 的每一个值加起来，才是 f（x）的值。

如果你算到了 x=3，就可以把 x=1，x=2，x=3 的值加起来才是 f(x=3)的值

如果你算到了 x=5，就可以把 x=1，x=2，x=3，x=4，x=5 的值加起来才是 f(x=5)的值

所以 f(20)=1~20 的数全部加起来。这就是∑的作用，一般遇到∑都是用计算器或者写程序去计算，不会用人一个一个的去算，人去算如果遇到 N=10000 那岂不是算到猴年马月了

在电子学中遇到的余弦波叠加后成为方波

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_n\left[\cos(\phi_n)\cos(n\omega_0 t)-\sin(\phi_n)\sin(n\omega_0 t)\right]\right\}$$
$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)\right]$$

这个公式和我们前面讲的先算三角函数后算∑是不是一样的呢？，哈哈哈

根号的意义

$$2^2 = 4 \quad \text{平方的逆运算就是根号} \quad \sqrt{4} = 2$$

你看到带根号的数就要想到它开根号后的结果是被平方的数。

$$3^3 = 27 \quad \text{那么} \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

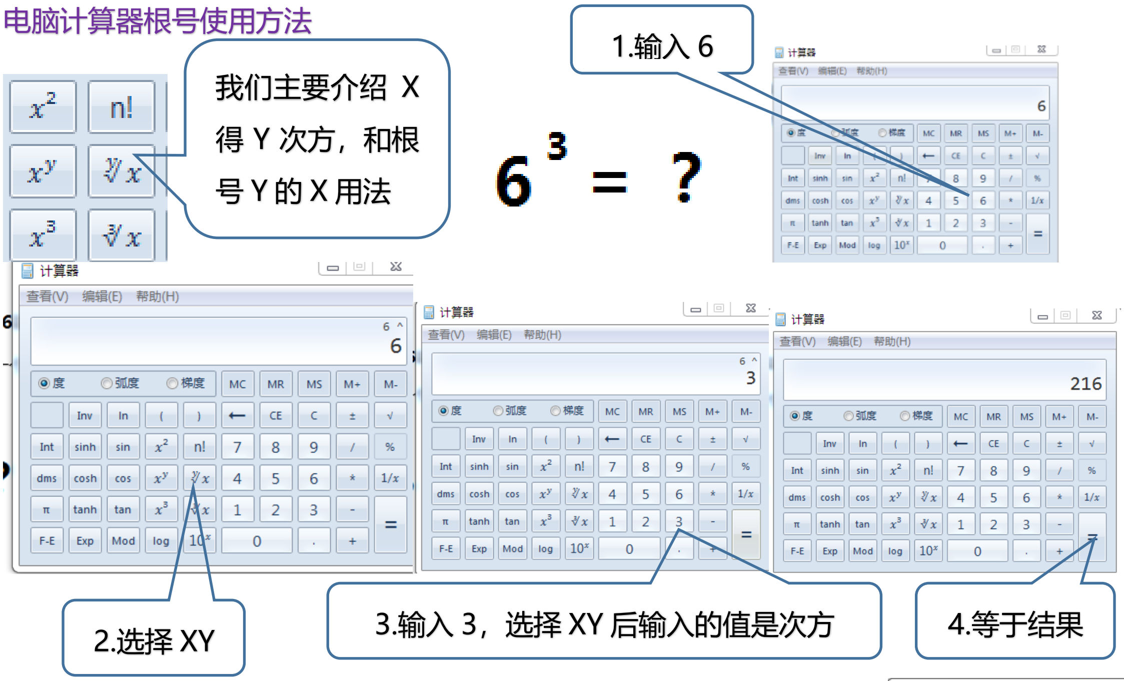
比如

但是 27 的根号 2 是多少呢?

$$\sqrt{27} = 5.1961524\ldots\ldots \quad \text{反过来} \quad 5.1961524 \times 5.1961524 = 26.999999764\ldots$$

能被开根号 3 的数，不要去开根号 2，因为根号 2 开出来是一个无限接近被平方的数，但是不是绝对一样。

电脑计算器根号使用方法



$$\sqrt[3]{216} = ?$$

指数的小数运算

$$4^{1.5} = 4^{1} \times 4^{0.5}$$

我们要计算 4 的 1.5 次方是多少，我们可以将它分开成这样

$$4^{1} = 4 \quad 和 \quad 4^{0.5} = \sqrt{4} = 2$$

$$4^{0.5} = 4^{\frac{5}{10}} = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$4^{1} = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$$

0. 9是十分之九。	$0.9=\frac{9}{10}$
0. 03是百分之三。	$0.03=\frac{3}{10}$
1. 21是一又百分之二十一。	$1.21=1\frac{21}{100}$

$$4 \times 2 = 8$$

其实上面的计算就是先将 4^1.5 次方分成两部分，然后各算出各的部分再一起相乘，就是结果

最后结果就是 $4^{1.5} = 4^{1} \times 4^{0.5} = 4 \times 2 = 8$

$$\sqrt[1.5]{8} = 4$$

我们将 8 用来开 1.5 方逆运算　　　　得到结果是对的

我来再来看看小数次方

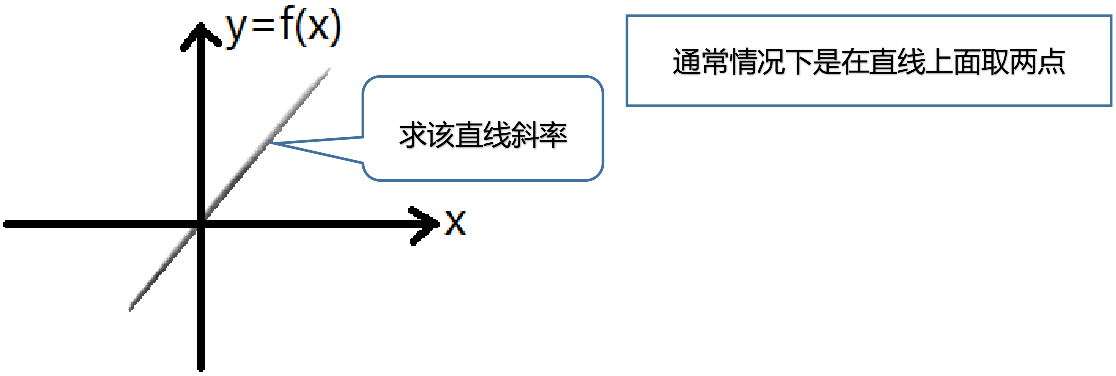
$$8^{0.8} = ?$$

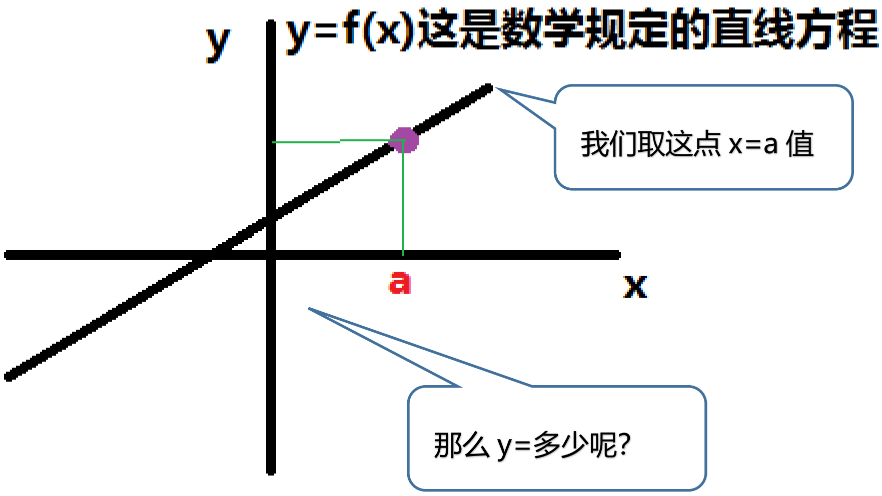
$$8^{\frac{8}{10}} = 8^{\frac{4}{5}} \quad 8^{4} = 4096 \quad \sqrt[5]{4096} = 5.2780$$

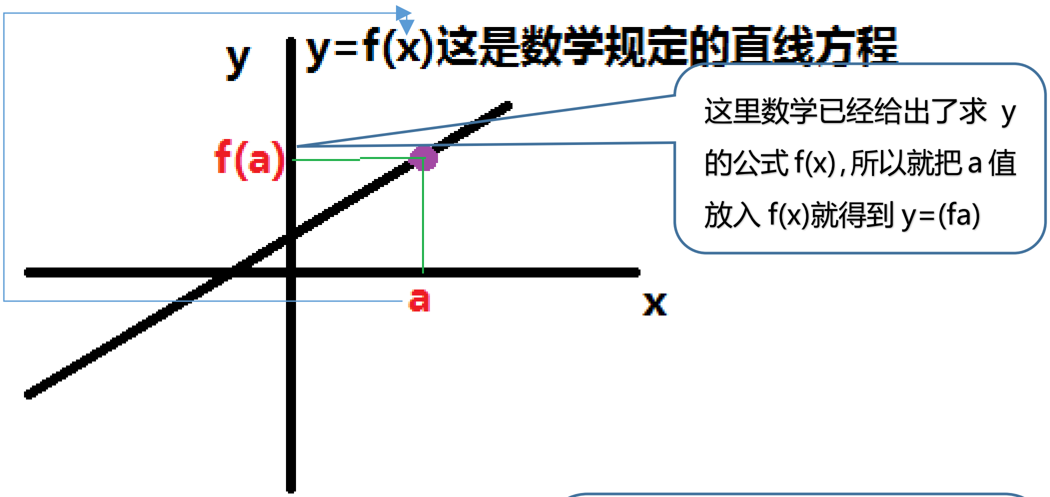
计算器算出来也是 $8^{0.8} = 5.2780$ 证明上面的算法是对的。

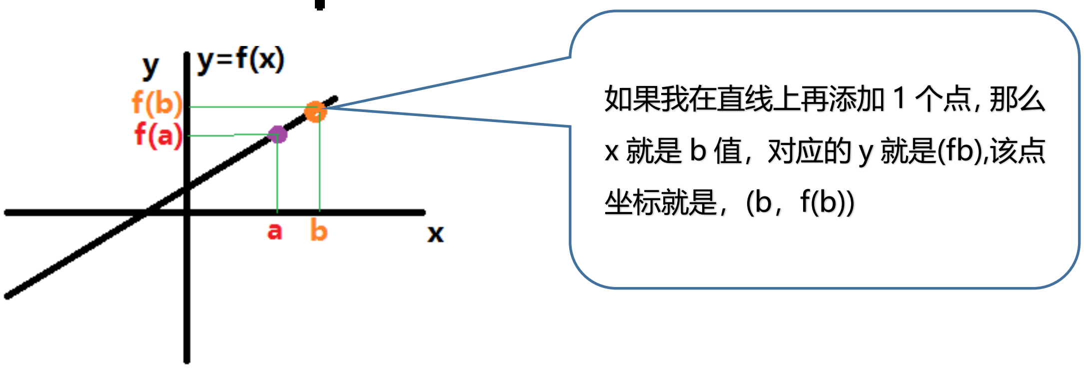
导数(导函数)

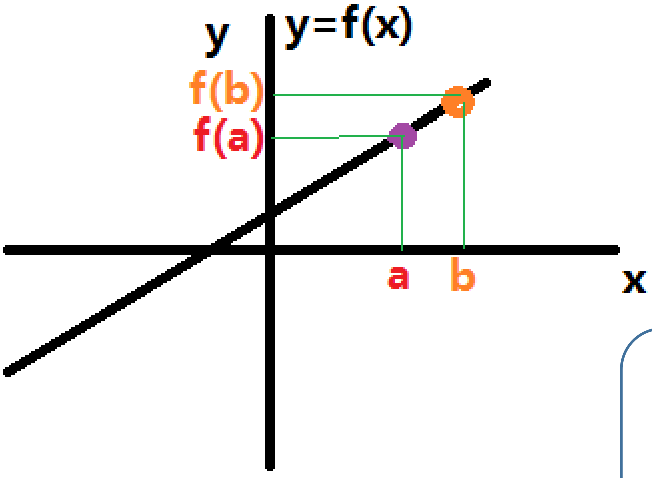
怎么求出一条直线的斜率?









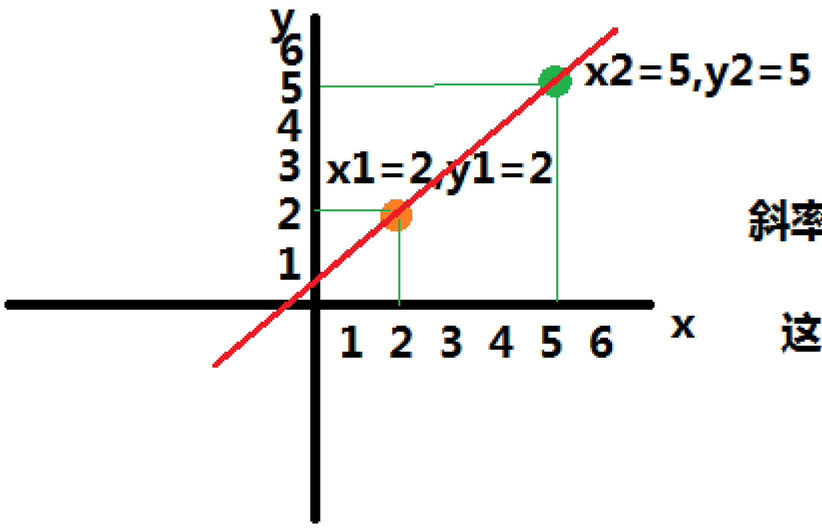


这条直线的斜率就是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

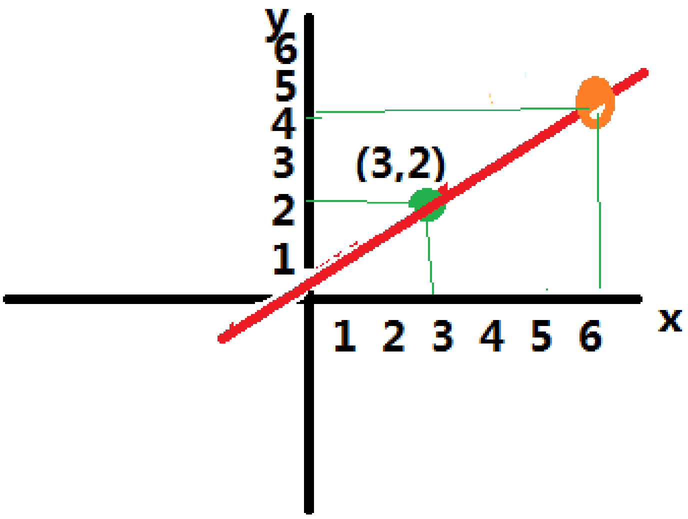
直线的斜率就是大的一个 xy 坐标减去小的 xy 坐标，在这里就是{f(b)-f(a)这就是 y 的差值}/{a-b 这就是 x 差值}得到一个斜率值

现在我们给一个确切的坐标值来计算



$$\text{斜率} = \frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{5-2}{5-2} = 1$$

这条线斜率=1

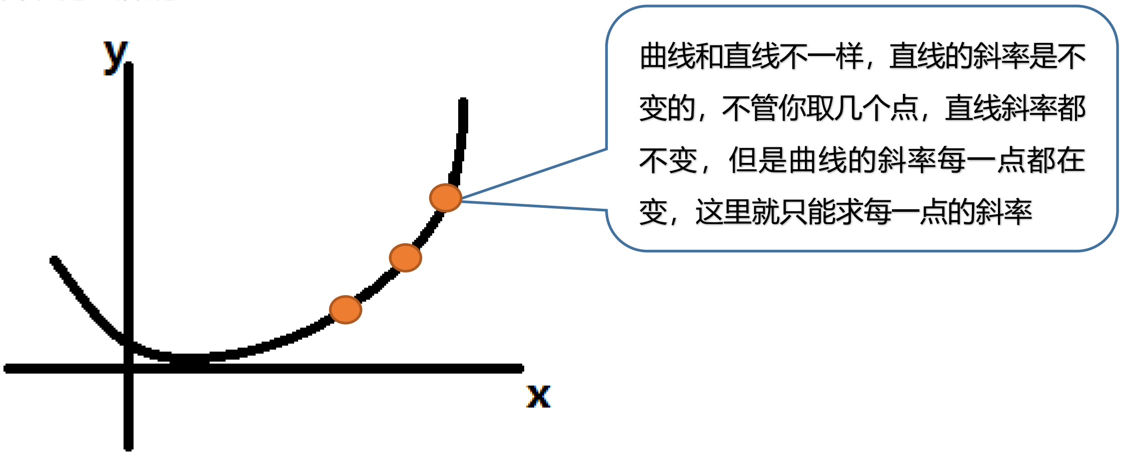


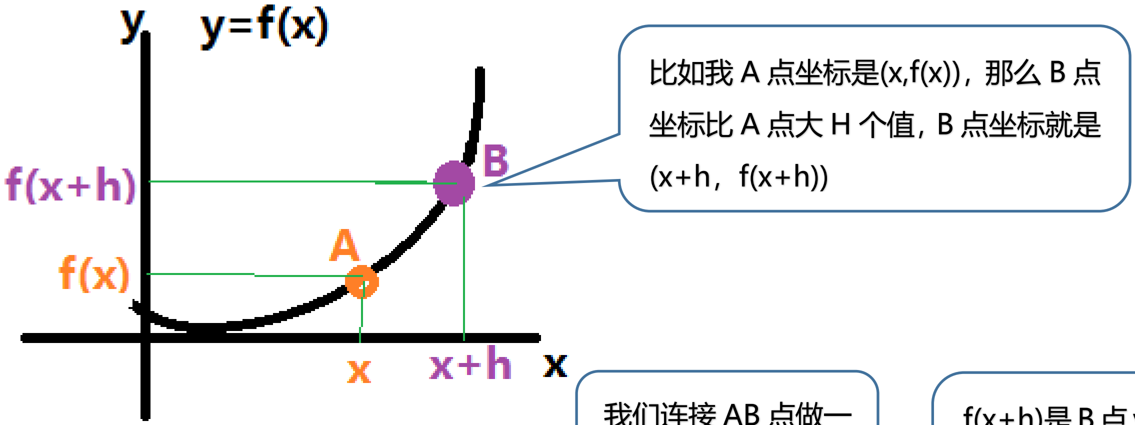
x1=3,y1=2
x2=6,y2=4

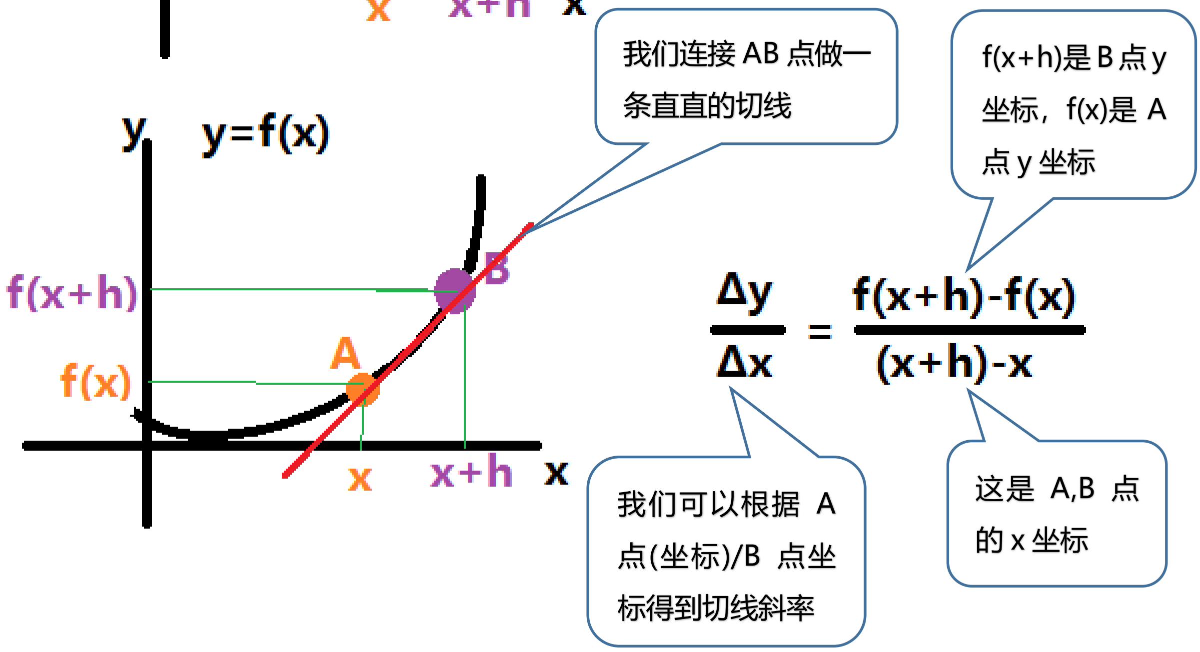
$$\frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{2}{3} = 0.666$$

斜率就是0.666

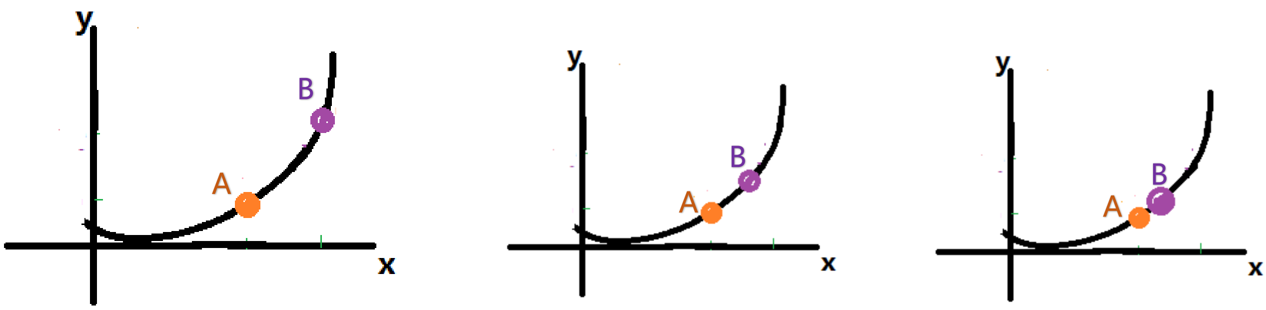
曲线斜率又怎么做呢？





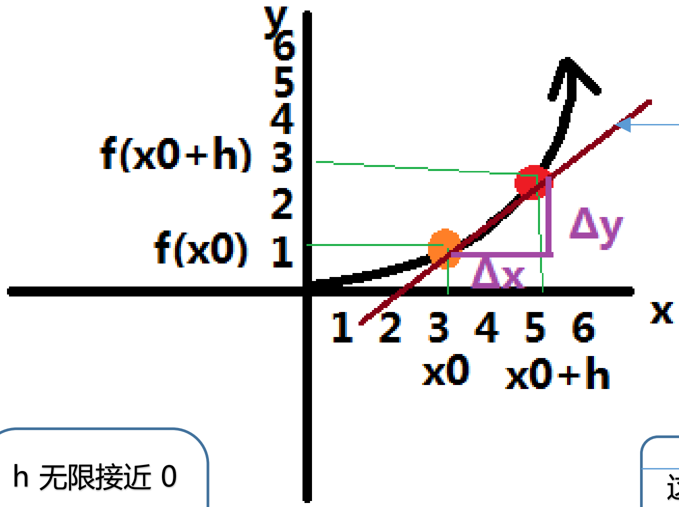


但是这只能得到切线斜率，并得不到 A 点斜率，



我们让 B 点无限接近于 A 点，然后做个很短很短的切线，求 AB 两点的斜率，这个斜率就是 A 点的斜率

这其实就是用到极限理论的近似表示的方法。不能完全求出 A 点的斜率，只是求出接近 A 点的斜率当做 A 点斜率



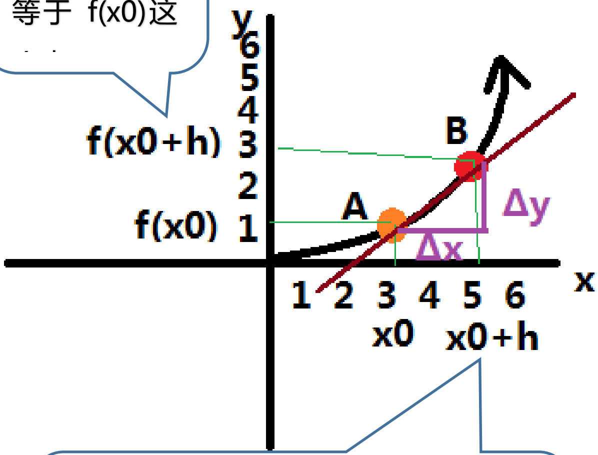
切线斜率

$$\frac{f(x0+h)-f(x)}{(\cancel{x0}+h)-\cancel{x0}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x0+h)-f(x)}{h} = \text{斜率}$$

这是简化后的切线斜率

h 无限接近 0 那么这里就等于 f(x0)这



切线斜率

$$\frac{f(x0+h)-f(x)}{h} = \text{斜率}$$

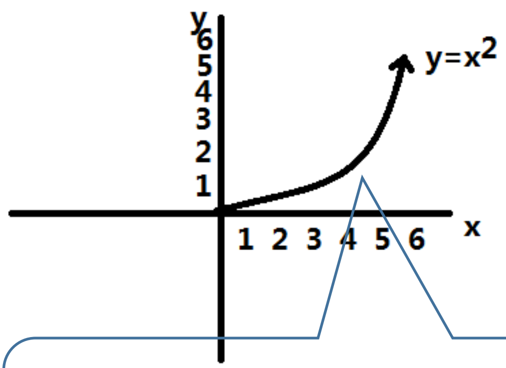
利用切线斜率求曲线斜率

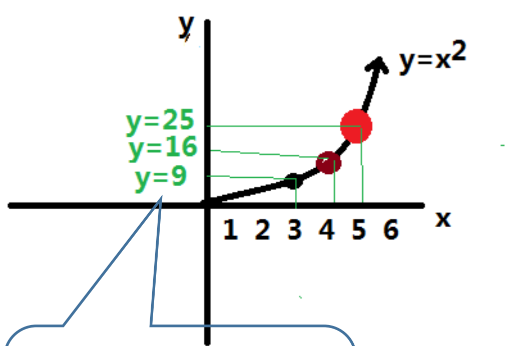
$$\lim_{h->0} = \frac{f(x0+h)-f(x)}{h} = \text{A点的斜率}$$

h 无限接近 0 那么这里就等于 x0 个点了，因为 B 点是加了 h 的长度，如果 h 等于 0 了就相当于没有加长度

所以用极限来表示 h 接近于 0，那么 AB 两点的切线就很短，这样的切线斜率就是曲线 A 点的斜率

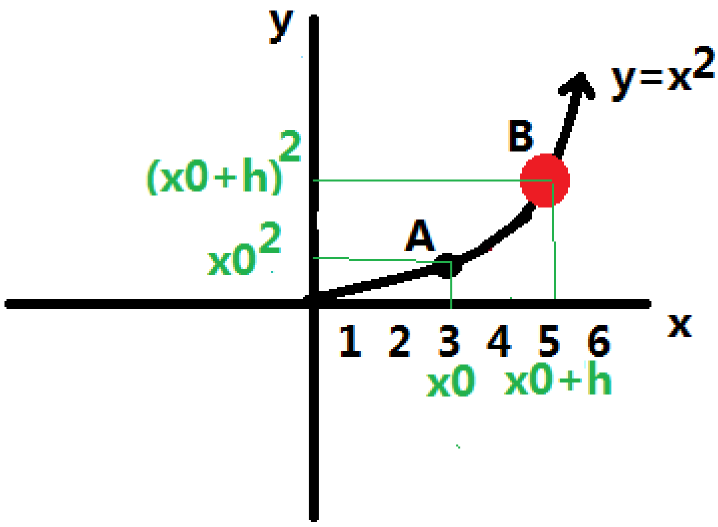
求曲线斜率其实不用这么复杂，非要给出两点来求，下面就来一个简单的方法





我自己定义了一个曲线公式 y=x^2，就是说曲线上每一点的 y 值，都是该点对应的 x^2 值

每一个点的 y 值就是该点对应 x 值的平方



$$\frac{(x0+h)^2 - x0^2}{(x0+h)-x0}$$

$$= \frac{(x0+h)^2 - x0^2}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

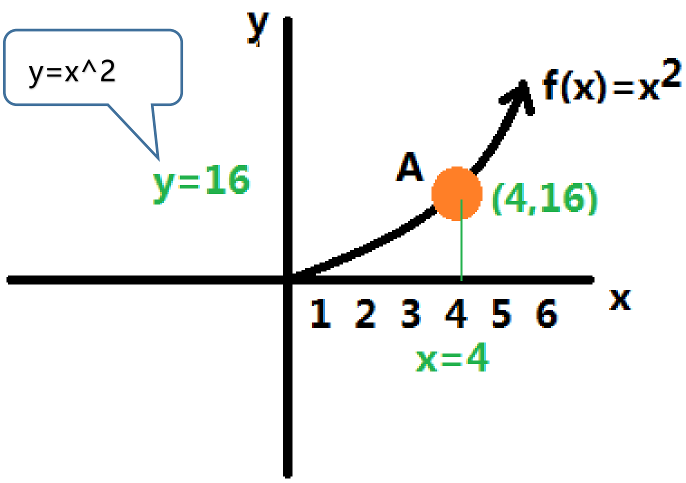
$$= \lim_{h \to 0} = 2x+h = 2x$$

经过切线斜率公式转换，得到了切线斜率，然后将 h 趋近于 0，得到了 2x

$$f'(x) = 2x$$

这个 f’ （x）就是代表 A 点在 x 处位置是其斜率是多少，f’ (x)就是函数 f(x)的导函数

我们下面给 x 代入实际的参数来计算下某点的曲线斜率



$y=x^2$ 曲线斜率公式是 $f'(x)=2x$

$f'(4)=2 \times 4$

A点斜率=8

这就是斜率的最快算法

f’ (x)代表导函数。导函数是什么，比如我的曲线 A 点坐标（x，y=x^2），这只能求出 A 点的坐标，A 点的斜率就要用导函数。坐标 y=x^2 的导函数就是 f ‘(x)=2x

曲线坐标xy的关系，我们随意来定义几个

$y=x^2$ 导函数 $f'(x) = 2x$

$y=x^2$ 导函数 $f'(x) = 3x^2$

$y=x^4$ 导函数 $f'(x)= 4x^3$

$y = x^5$ 导函数 $f'(x) = 5x^4$

所以 $y=x^n$ 导函数 $f'(x) = nx^{n-1}$

根据曲线 xy 的坐标关系，用导函数 f’ （x）得到点的斜率

$y=x^2$ 另一种写法 $f(x)=x^2$

$y=x^3$另一种写法 $f(x)=x^3$

这是莱布尼茨的写法

其实是一个意思

$\frac{d}{dx}$ 这就表示求关于x的导函数

x^2 导函数就是 2x，上一页有转换列表

如果我想求Af(x)的导函数

5 就是常数 A，拿过来就是，不变

$$\frac{d}{dx}Af(x) = A\frac{d}{dx}f(x)$$

比如说原函数$f(x)=5x^2$ 它的导函数就是$f'(x)=5*(2x)=10x$

所以原函数 5x^2 导函数就是 10x

$g(x)=3x^{12}$ 它的导函数为 $g'(x)=3*(12x^{11})$

$$g'(x)=36x^{11}$$

这就是 g 的导函数案例

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$ 这是莱布尼茨的原函数写法

$$= f'(x) + g'(x)$$ 这是拉格朗日的原函数写法

都是一个意思，只是写法不同而已

比如我们要求原函数 $f(x)=3x^2+5x+3$ 的导函数

原函数 $f(x)=3x^2+5x+3$

1.先求 3x^2 的导函数，3x^2 将 x^2 分解出来就是 2x，再用 2x*3=6x

导函数 $f'(x)=6x+5+0$

3. 3 项的 3 是常数，所以写 0

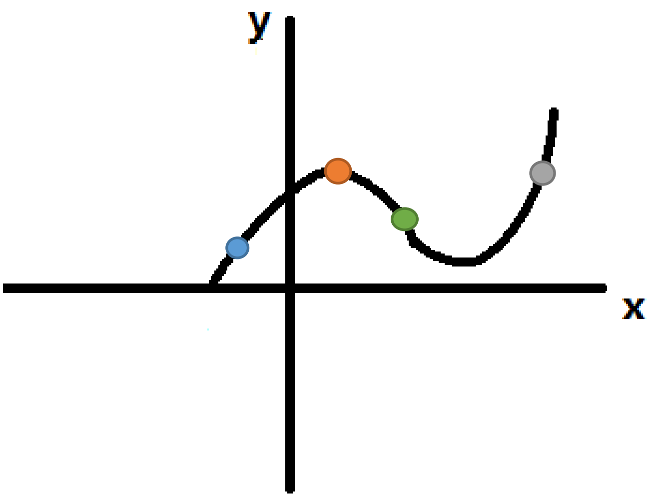
2. 5x 项，x 没有指数，那么 x=1，所以得到 5,。

$y = 10x^5 - 7x^3 + 4x + 1$ **这是另一种写法其实y就是f(x)**

$$\frac{dy}{dx} = 10*5x^4 - 7*3x^2 + 4 + 0$$

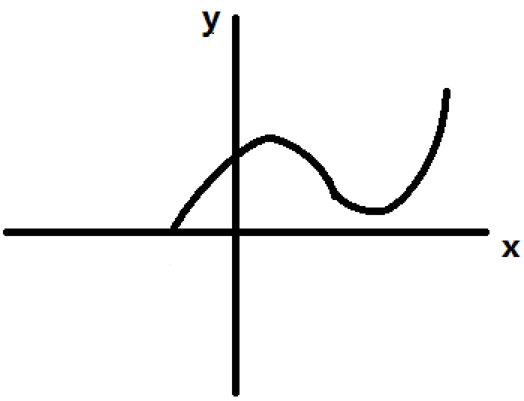
$$= 50x^4 - 21x^2 + 4$$

用 dy/dx 来表示导函数



$f(x) = 10x^7 + 6x^3 + 15x - x^{16}$

这个原函数表示不规则曲线上随意定义 4 个点的 XY 坐标



$f(x) = 10x^7 + 6x^3 + 15x - x^{16}$

$f'(x) = 70x^6 + 18x^2 + 15 - 16x^{15}$ **这就是f(x) 4个点的导函数，表示每个点的斜率**

链式法则

$f(x) = (2x+3)^5$ **对这个原函数求导**

$f(x) = (2x+3)^5$

$f(x) = 2$ *

$(2x+3)^5$

$5(2x+3)^4$

2.把整个括号看成一个黑匣子A，然后对括号边的指数求导，A^5 求导=5A^4，求导后括号里面的内容不变

1.先对括号内部的函数求导，得到结果放在乘号左边

$f'(x) = 2*5(2x+3)^4$

3. 把两边乘起来，就得到(2x+3)^5 的导数了

$f'(x) = 10(2x+3)^4$

$$g(x) = (x^2 + 2x + 3)^8$$

1.老规矩选把括号里面的求导得到这个

$$g'(x) = (2x+2)*8(x^2 + 2x + 3)^7$$

这种导函数要怎么算出最后的结论？

2.再把括号看成 A^7 求导，得到这个

$$g'(x) = (2x+2) * 8 \quad (x^2 + 2x + 3)^7$$

4.得到 16x+16

$$(16x+16)$$

3.前面括号乘以后面括号前的常数 8

$$g'(x) = (16x+16)(x^2 + 2x + 3)^7$$

5. 常数 8 经过乘法运算消失了，再将后面括号的原函数直接乘前面括号就是了，

这就是结果

负指数是这样的，指数-2 向前，-(-2)*x=2x，然后指数向负值+1，所以得到 2x^-3

$$f(x) = (x^3 + 2x^2 - x^{-2})^{-7}$$

$$f'(x) = (3x^2 + 4x + 2x^{-3})*-7(x^3 + 2x^2 - x^{-2})^{-8}$$

$$=(-21x^2 - 28x - 14x^{-3})(x^3 + 2x^2 - x^{-2})^{-8}$$

这其实就是曲线的每一个点，把 x 赋值，代入这个公式就能求到曲线这几个点的斜率

更复杂的链式法则

1.先对括号里面求导，放在这里

$$f(x) = (3x^{-2} + (5x^3 - 7x)^5)^3$$

$$= (15x - 7)$$

$$f'(x) = ((15x^2 - 7)*5(5x^3 - 7x)^4 + -6x^{-3})$$

$$f'(x) = ((15x^2 - 7)*5(5x^3 - 7x)^4 + -6x^{-3}) \quad *3(3x + (5x - 7x))$$

$$f(x) = (3x^{-2} + (5x^3 - 7x)^5)^3$$

$$=5(5x^3 - 7x)^4$$

2.再对括号外的指数求导，放在这里

$$f(x) = (3x^{-2} + (5x^3 - 7x)^5)^3$$

$$=-6x^{-3}$$

3，把+的另一项求导

4.最后将最外层大括号求导乘以前面的括号内求导数

链式法则练习

$f(x) = h(g(x))$ 符合这个公式的函数

$f'(x) = g'(x) * h'(g(x))$ 求导方法就是和这个公式一样

例如:$f(x) = (x^2 + 5x + 3)^5$

$g(x) = x^2 + 5x + 3 \longrightarrow$ 导数$g'(x) = 2x + 5$

$h(x) = (x)^5 \longrightarrow$ 导数$h'(x) = 5x^4$

其实这个x就是(x^2+5x+3)^4,上面一页说了将它看成一个黑盒子

把$g'(x) * h'(g(x))$结合起来 $= (2x+5)\ X\ 5(x^2 + 5x + 3)^4$

所以f(x)的导数$f'(x) = (2x+5)\ X\ 5(x^2 + 5x + 3)^4$

这个练习和上面一页一样，只是用了g’(x) * h’(g(x))这个公式表示而已

我们再来练习一个，

$f(x) = h(g(x))$

$g(x) = x^7 - 3x^{-3}$

$h(x) = x^{-10}$

我现在想经过这两个g(x)，h(x)已知量求出h(g(x))

$h(g(x)) = (x^7 - 3x^{-3})^{-10}$ 直接用代入法就OK了

如果计算导数呢？$f'(x) = g'(x) * h'(g(x))$

先算 g(x)导数，然后再乘以h(g(x))导数

$f'(x) = (7x^6 + 9x^{-4})\ X\ 10(x^7 - 3x^{-3})^{-11}$

乘积法则

$$f(x) = h(x) * g(x)$$

$$f'(x) = h'(x) \times g(x) + h(x) \times g'(x)$$

例如: $f(x) = (5x^5 - x^7)(20x^2 + 3x^{-7})$ 这个函数的导数怎么求？

因为: $f'(x) = h'(x) \times g(x) + h(x) \times g'(x)$

1.我们先求出各项括号里面的导数

$h(x) = (5x^5 - x^7)$ 导数 $= (25x^4 - 7x^6) = h'(x)$

$g(x) = (20x^2 + 3x^{-7})$ 导数 $= (40x - 21x^{-8}) = g(x)$

所以f(x)的导数 $f'(x) = (25x^4 - 7x^6)(20x^2 + 3x^{-7}) + (40x - 21x^{-8})(5x^5 - x^7)$

这就是乘积法则

2.根据公式，先将第一项导数乘以第二项原函数

3.再加上第二项导数乘以第一项原函数

下面来一个复杂的乘积法则

$$y = (x^2 + 2x)^5 (3x^{-5} + x^2)^{-7}$$

1.用链式法则计算 $(x^2 + 2x)^5 = (2x+2)5(x^2 + 2x)^4$

2.用乘积法则将第一项链式法则的结果结合起来

这里应该是 15，写错了

对y求导用莱布尼茨写法 $\dfrac{dy}{dx} = (2x+2)5(x^2 + 2x)^4 (3x^{-3} + x^2)^{-7} + (-9x^{-4} + 2x) \times -7(3x^{-3} + x^2)^{-8}$

3.再加上第二项(3x^-5+x^2)^-7，第二项也要先用链式法则和乘积法则展开，然后再加上第一项的展开

商法则

$$\frac{d}{dx} = \frac{(x^3 - 5x^5)^3}{(2x + 5)^5}$$

这种有分子分母的原函数怎么求导？

我们直接把分母拿到右边来，就是负指数

$$(x^3 - 5x^5)^3 (2x + 5)^{-5}$$

这样用乘积法则就可以求出该原函数的导数

$$(3x^2 - 25x^4)3(x^3 - 5x^5)^2 (2x + 5)^{-5} + 2 * -5(2x+5)^{-6}(x^3 - 5x^5)^3$$

常用函数的导数(要记住)

$$\frac{d}{dx} e^x \quad \text{导数} = e^x$$

意思就是要算出曲线 e^x 沿任意点处的斜率

$(e = 2.7)$

$f(x) = e^x$

$f(2) = e^2$

这句话就是 e^2 在(2 , e^2)点处斜率是多少

结论就是它在曲线任意一处点的斜率就是它本身 e^2

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \text{这就是lnx的导数} = \frac{1}{x}$$

x^{-3}导数= $-3x^{-4}$

x^{-2}导数= $-2x^{-3}$

x^{-1}导数= x^{-2}

lnx 的导数就是 x^-1

x^0 导数= 0

x^1 导数= 1

x^2导数= $2x$

$$\frac{d}{dx} \sin X \quad \text{导数} = \cos X$$

$$\frac{d}{dx} \cos X \quad \text{导数} = -\sin X$$

$$\frac{d}{dx} \tan X \quad \text{导数} = \frac{1}{\cos^2 X} \quad \text{也可写成} = \sec^2 X$$

我们练习下函数导数

$$f(x) = \sin(3x^5 + 2x)$$

$$3x^5 + 2x = (15x+2)$$

1.用链式法则对括号内求导

$$\sin(3x^5+2x) = \cos(3x^5+2x)$$

2.把 sin 看成一个 sin()黑匣子，对 sin 求导得到 cos

$$f'(x) = (15x^4 + 2)\cos(3x^5 + 2x)$$

3.把括号内求导乘上括号外求导，其实就是链式法则的使用

例子 2

$$y = e^x \cos^5 x$$

$$e^x \text{ 导数} = e^x \cos^5 x$$

1.先计算 e^x 的导数，上一页讲了 e^x 的导数就是它本身

$$\cos^5 x \text{ 导数} = (-\sin x)5(\cos^4 x)e^x$$

因为$\cos^5 x$可以看成$(\cos x)^5$

2.再计算 cos^5x 的导数，上一页讲了 cosx 导数就是-sinx

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos^5 x + (-\sin x)5(\cos^4 x)e^x$$

然后将两个导数用乘积法则加起来就是了

例子 3

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{(3x+10)}\right]$$ 对该原函数求导

$$= (\ln x)(3x+10)^{-1}$$

1.老规矩，把分母放上来指数-1

$$= \frac{1}{x}(3x+10)^{-1} + 3 * -1(3x+10)^{-2} \ln x$$

2.lnx 导数就是 1/x，用乘积法则

$$= \frac{1}{x(3x+10)} \text{ X } - \frac{3\ln x}{(3x+10)^2}$$

4.将-2 变成正 2 就要把括号放在分母位置

3.可以化简，(3x+10)^-1 就是 1/（3x+10)

$$p=\frac{\sin x}{\cos x}$$

不管用什么字母都可以表示原函数，p 就是原函数

$$p=\sin x(\cos x)^{-1}$$

P/dx 就是对原函数求导

$$\frac{dp}{dx}=\cos x(\cos x)^{-1}+\ (-\sin x)*-1(\cos x)^{-2}\sin x$$

化简 $\frac{dp}{dx}=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

-sinx*sinx=-sinx^2

cosx^-2 放在分母就是 cosx^2

1=cosx(cosx)^-1， 其 实 就 是 (cosx)^-1=1/cosx，所以这里为 1

二阶导数

$$y=\frac{6}{x^2}$$

$\frac{dy}{dx}$ 这是我们求y对x的一次导数的方法

$\frac{d}{dx}[y]$ 也可以写成这样求y对x的一次导数

我们先求一阶导数，用上面学过的链式法则

$y=\frac{6}{x^2}$ 为了方便计算把x放上来 $y=6x^{-2}$

对$y=6x^{-2}$ 左右两边求导

$$\frac{d}{dx}[y]=\frac{d}{dx}[6x^{-2}]$$

$\frac{dy}{dx}=-12x^{-3}$ 这就是一次导数的结果，就是用链式法则

现在我们 再对 $\frac{dy}{dx}$ 进行二次求导，也就是对$-12x^{-3}$ 求导

把-3 乘上-12，指数再加-1

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[-12x^{-3}\right]$$

其实就是对一次导数的结果$[-12x^{-3}]$再用链式法则求一次导数

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^{-4} = \frac{36}{x^4}$$

这就是二阶导数，把一阶导数的结果再用链式法则算一遍

函数的定义

有了前面导函数的思想，下面来归纳一些函数的写法和类型。

y = f(x) 随着x自变量的变化，y因变量跟着变化

函数在x_0处取得的函数值 $y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$

数据在变化当中取到某一个值，得到一个公式。

比如当x = x0的时候得到这个公式

符号只是一种表示，也可以：$y = g(x)$、$y = \varphi(x)$、$y = \psi(x)$

有些人喜欢把y = f(x)，写成y = g(x)，y=z(x)

或者上面这样，其实都是一样的，只是个人习惯写法不一样，都表示y随x变化

分段函数：$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

这就是分段函数

当x>0 取 $\sqrt{x}$, 使用 ，也就是 $f(x) = \sqrt{x}$,

当x<0 取 $-x$, 使用 ， 也就是 $f(x) = -x$

反函数：$h=\frac{1}{2}gt^2$ $\rightarrow h=h(t)$ $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\rightarrow t=t(h)$

本来函数是这样 → 现在改成反函数求t → t 得到求导的函数

显函数与隐函数：$y=x^2+1$ F(x,y)=0 $3x+y-4=0$

显函数就是我们常看到的y = x^2 + 4

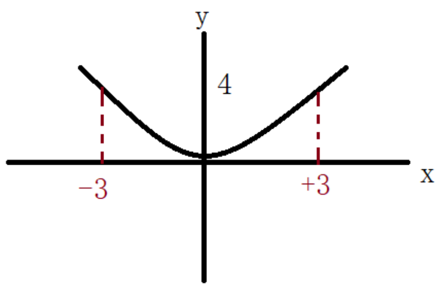
隐函数就是让你看起来没有y=x^2 + 1这样直接，不是y直接随x变化，而是让一个公式等于0，你去推测

函数奇偶性

偶函数

f(-x) = f(x) y轴对称 　　 $f(x)=x^2$ 　　 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

偶函数 　　 不管传入的x是正x 　　 还是传入的x是负x 　　 得到的都是正数



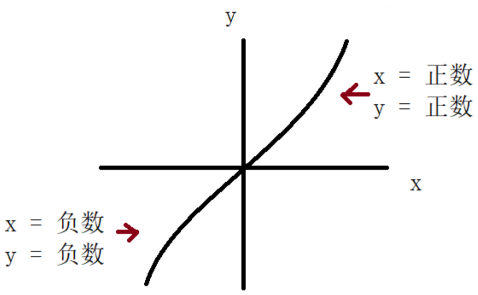
无论x取的是正3，还是x取的-3，y的结果是一样的 = 4

奇函数

奇函数：f(-x) = - f(x) 原点对称 $f(x)=x^3$

奇函数是原点对称的正负函数

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$$

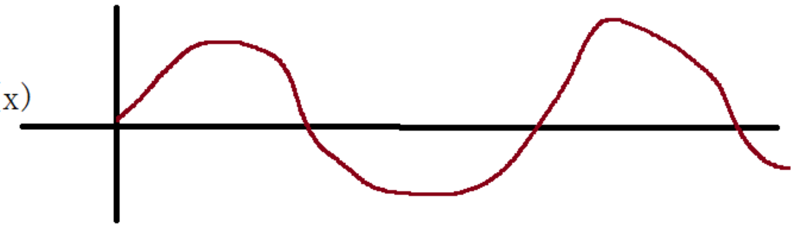


周期性函数

周期性：$f(x+T) = f(x)$

函数也有周期性这种性质

比如sin(x)

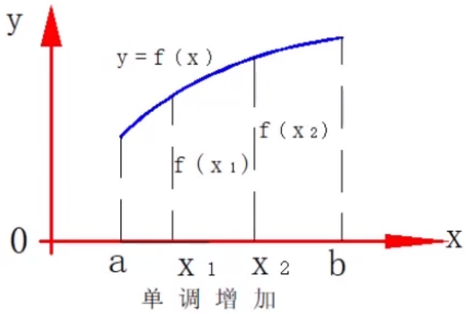


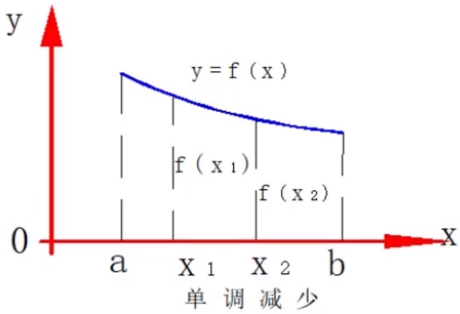
$$f(x+\underline{T}) = f(x)$$

这样我们就可以单独把T拿出来，比如让T = 2π

函数单调性

单调性：





函数可以向一个方向增加，或者向一个方向减小。

数列

按照一定次数排列的一列数：$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ ，其中u_n叫做通项。

什么是通项?

比如 $\frac{1}{n+1}$ 如果n = 1 就是 $\frac{1}{2}$ n = 2 就是 $\frac{1}{3}$ n = 3 就是 $\frac{1}{4}$ 这个n就是通项，结果跟着n的改变而改变

如果我发现n 在无限的接近于一个常数，比如n无限接近于常数A

$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 那么我们就说这个数列，它是以A为极限，这个数列收敛与A

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A，或\quad u_n \to A\ (n \to \infty) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

这就表示n收敛与A
就是n最后不管怎么变
得到的结果都是A

这种写法也是一样的n
最后收敛与A

这个式子n无穷大的时候，收敛与0

这个式子，n无穷大的时候，收敛与1

$\lim_{n\to\infty} 2^n$ 不存在

像 2n 这种，n 无穷大的时候极限是不存在的，这就表示这个式子不收敛，是发散的。

$x \to \infty$ 表示“当 $|x|$ 无限增大时”；

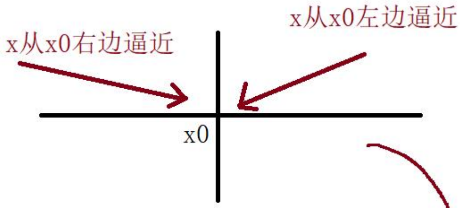
$x \to +\infty$ 表示“当 x 无限增大时”；

$x \to -\infty$ 表示“当 x 无限减少时”；

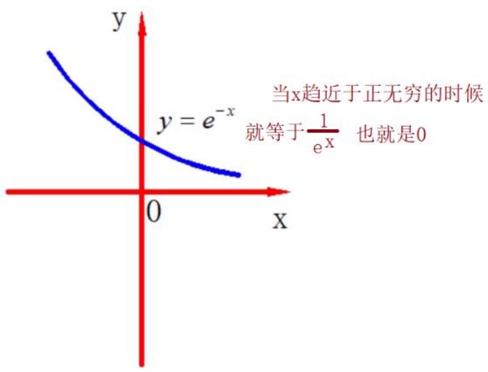
$x \to x_0$ 表示“当 x 从 x_0 的左右两侧无限接近于 x_0 时”；

$x \to x_0^+$ 表示“当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 时”；

$x \to x_0^-$ 表示“当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 时”；

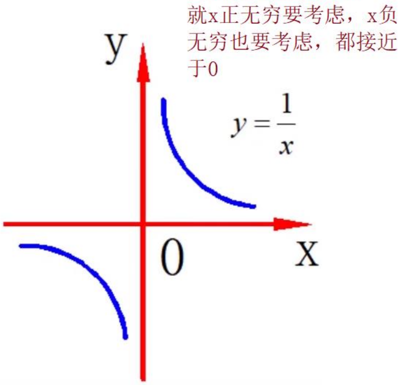


$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

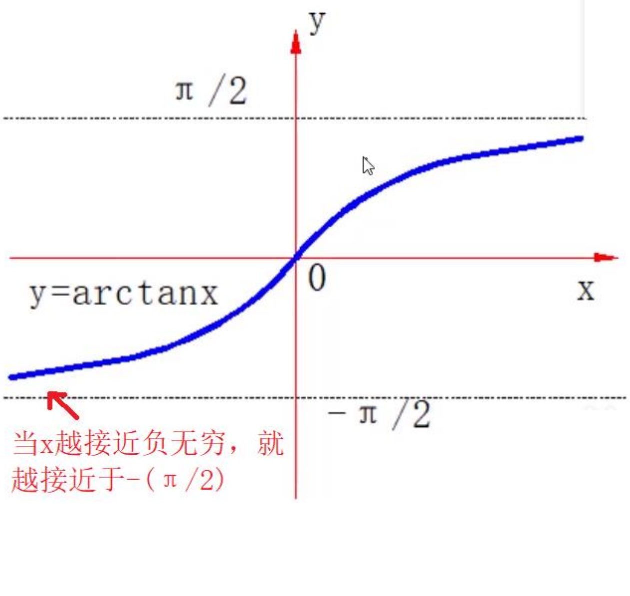


$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

当x从两侧接近于0
就x正无穷要考虑，x负无穷也要考虑，都接近于0



$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$



函数在x0的邻域内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0)$

当x趋近于x0，收敛与A的时候

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

就可以写出当x趋近于1的极限
当x趋近于2的极限
当x趋近于3的极限
等等.....

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 的充要条件是 } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

有些极限可以从x0的坐标趋近于x0，也可以从x0右边趋近于x0，那么两边趋近于x0的值必须都是A，如果有一边趋近于x0不是A，那么就不能说两边趋近的都是A，所以必须先给出充要条件

以下这个式子就是极限左右两边有一边不等于A，也就是左右两边都趋近于某个数，但是不相等

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

左右极限存在但不相等，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在

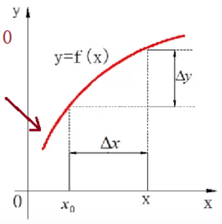
函数连续性

函数的连续性

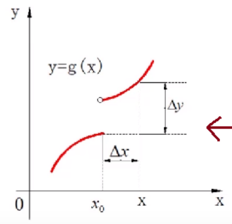
设函数 y = f (x)在点x。的某邻域内有定义，如果当自变量的改变量△x趋近于零时，相应函数的改变量△y也趋近于零，则称y = f (x)在点 x。处连续。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

当Δx向0移动的时候，我希望y也向0移动



当$\Delta x\to 0$时,$\Delta y\to 0$;



当Δx向0移动一丢丢，那么Δy出现了断崖式的下跌，这种就叫做Δy不能趋近与0

当$\Delta x\to 0^+$时，Δy不能趋近于0

导数计算瞬时速度

平均速度：（速度）$\upsilon = \dfrac{s\,(\text{路程})}{t\,(\text{时间})}$ 但是如何表示瞬时速度呢?

这是一小段路程的值

瞬时经过路程：$\Delta s = \boxed{s(t_0 + \Delta t)} - s(t_0)$

瞬间经过的路程　t0这时间点开始　走了这么一小段时间　原来的路程

瞬间经过的路程

这一小段的平均速度：$\bar{\upsilon} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$

瞬间经过的时间

当 $\Delta t \to 0$ 时也就是瞬时速度了

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

如果平均变化率的极限存在，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Δy 就是上面的Δs　　Δx 就是上面的Δt　　x_0 就是上面的t0

常用的求导公式

1) $(C)' = 0$　　2) $(x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1}$

3) $(\sin x)' = \cos x$　　4) $(\cos x)' = -\sin x$

5) $(\tan x)' = \sec^2 x$　　6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$　　8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

9) $(a^x)' = a^x \ln a$　　10) $(e^x)' = e^x$

11) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$　　12) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　　16) $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

求导的运算方式

（1）$(u \pm v)' = u' \pm v'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$

(4) $(Cu)' = Cu'$

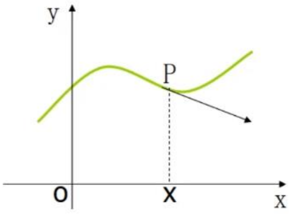
(5) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$ （C为常数）

偏导数

偏导数

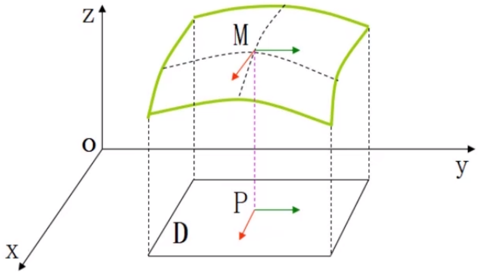
对于一元函数y=f(x)只存在y随x的变化

一元函数很简单，就是x变化了，y随着变化



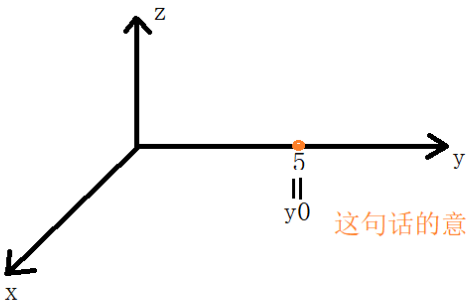
二元函数z=f(x,y)存在z随x变化的变化率，随y变化的变化率，随x、y同时变化的变化率。

二元函数就很复杂了，z随x有个变化率，z随y有个变化率，
并且随着x和y同时z还有个变化率，这时候就要用偏导数了。



定义：1.设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义

定 $\boxed{y=y_0,}$



这句话的意思就是我人为先定义y = y0处的值，比如y = 5

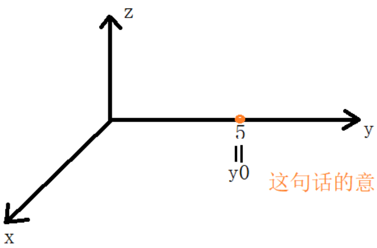
2.一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，

因为y有了固定值5，那么f(x,5)，就相当于只计算x的变化引起的z变化

这里又提醒了(x=x0)x在x0点的位置可以求导，那么就可以写成z=f(x,5)极限方程，为了好理解，就写z=f(x，y0)极限方程

定义：1.设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义

定 $\boxed{y=y_0,}$



这句话的意思就是我人为先定义y = y0处的值，比如y = 5

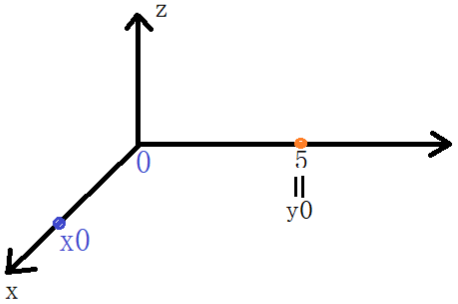
2.一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，

因为y有了固定值5，那么f(x,5)，就相当于只计算x的变化引起的z变化

这里又提醒了(x=x0)x在x0点的位置可以求导，那么就可以写成z=f(x,5)极限方程，为了好理解，就写z=f(x，y0)极限方程

即极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}=A$

当Δx无限接近于0那么就成了$\dfrac{f(x0, y0) - f(x0, y0)}{\Delta x}=A$ 求出这个A之后，我们就可以



认为 A为函数：$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于自变量X的偏导数

记作：$f_x(x_0,y_0)$ 后或者 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ $\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$

这种写法就表示当前fx在x0，y0处对x进行求偏导

这种写法也是对x求偏导

几何意义：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$ 是曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$ 这个曲面就是z=f(x，y)

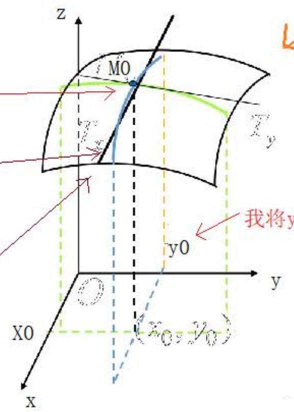
首先这个式子是对x求偏导

y固定为y0之后 在点M0处的切线

这个切线是沿着y0方向画的切线 黑色的切线

M_0T_x 对x轴的斜率。

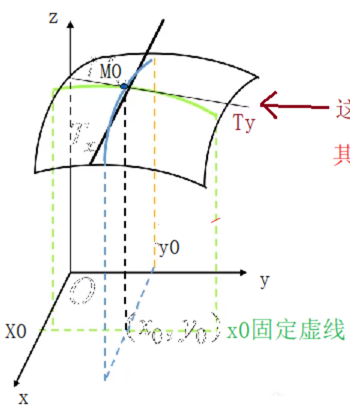
这句就是M0点切线对x轴的斜率是多少



我将y固定y=y0

几何意义：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$ 是曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\x=x_0\end{cases}$ 这次是先固定x的值，让x=x0

在点M0处的切线 M_0T_y 对y轴的斜率。这次是x固定了对y求偏导



这个Ty的切线就是x固定，然后对y求的偏导

其实就是这个切线对于y轴斜率是多少

这种二元函数求导就是用在有两个变量影响一个结果的工程中。

比如 x 变化和 y 变化都会造成一个输出值 z 变化。可以用来做二元线性回归等.....

下面我们需要用到前面章节导数(导函数)的知识来求解。

函数 $z = f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

对某个变量求偏导的时候，其余变量作为常数，比如对x求偏导，那么y就作为常数

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 0$

y^2 常数求导都为0

对x求导，x^2 就是导函数2x

3xy 可以写成3y * x x求导为1，3和y都是常数，所以是3y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3x + 2y$$

对y进行求导，所有的x都是常数

例 $z = x^3 + x^2 y + y^3$

求所有的二阶偏导数

解: $\dfrac{\delta z}{\delta x}$ 先求z对x偏导，那么把y看做是常数

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 3x^2 + 2xy + 0$$

求导函数

x^2 求导 2x y是常数，所以不变

因为y是常数，所以常数求导都为0

$\dfrac{\delta z}{\delta y}$ 再求z对y偏导，把x看做常数

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 0 + x^2 + 3y^2$$

y^3 求导 就是$3y^2$

x^3 常数偏导为0

$\boxed{\text{x是常数，所以保留，} x^2 \ \ y^1\text{求导，所以是1}}$

求 $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 (1,2) 处的偏导数。

这种二元函数我们需要分别对x和y单独求偏导(也就是二阶偏导数)

$f_x(x,y) = 2x + 3y$ 对x求导，将y做常数

$f_y(x,y) = 3x + 2y$ 对y求导，将x做常数

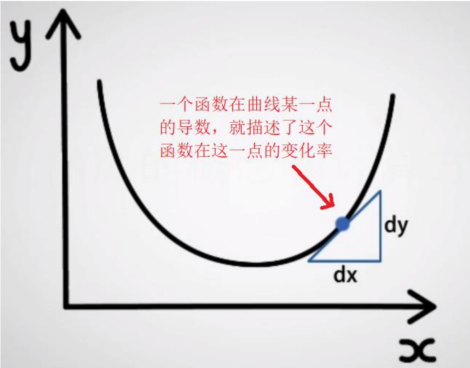
$f_x(1,2) = (2x+3y)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 8$ 将数据代入x求偏导的式子

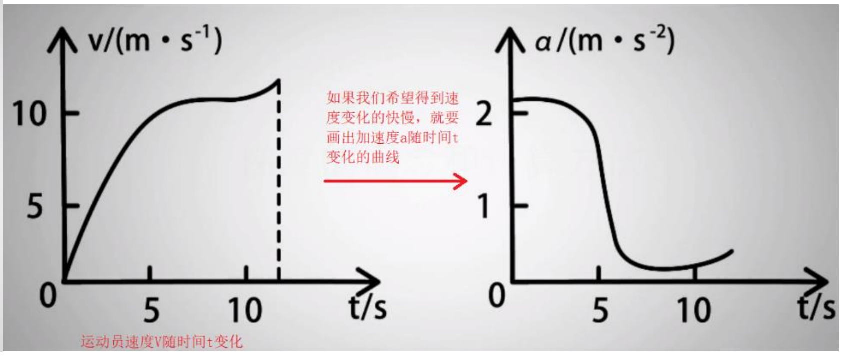
$f_y(1,2) = (3x+2y)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 7$ 将数据代入y求偏导的式子

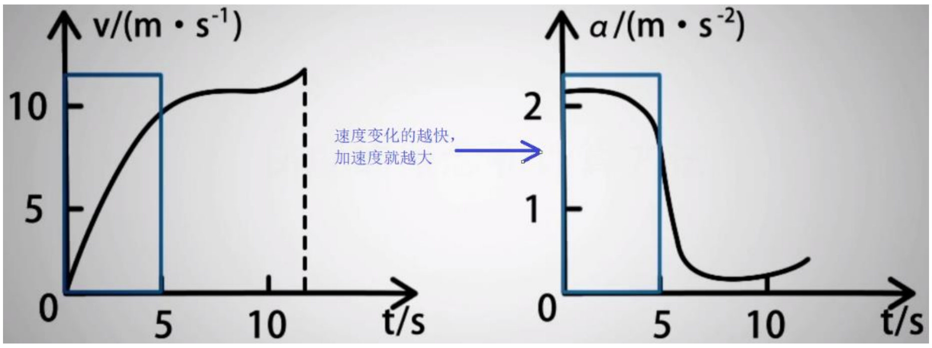
多元函数

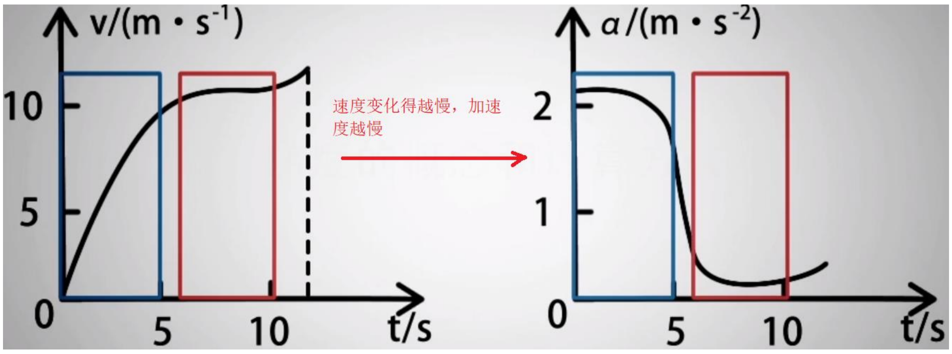
补充下上面二元函数的知识，来讲讲多元函数

导数回顾









$c'=0$　　　　$(\cos x)'=-\sin x$

导数计算公式很多，因为我们做梯度下降，所以就研究幂函数求导公式

$(\sin x)'=\cos x$　　　　$\boxed{(x^a)'=ax^{(a-1)}}$

$y=x^{\alpha}$

y对x求导

$$\frac{dy}{dx}=y'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

$y=x^2$　　$y'=2x$

$y=x^3$　　$y'=3x^2$

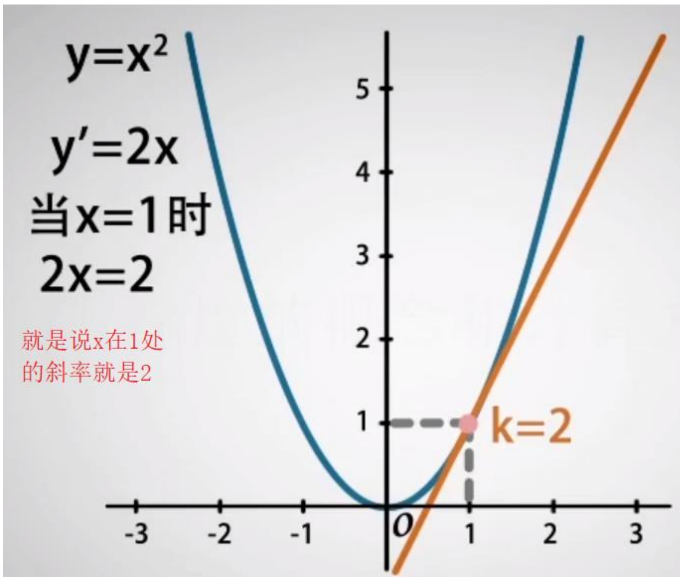
$y=x$ y对无指数的x求导是1　　$y'=1$

$y=c$　　$y'=0$ y对常数求导是0

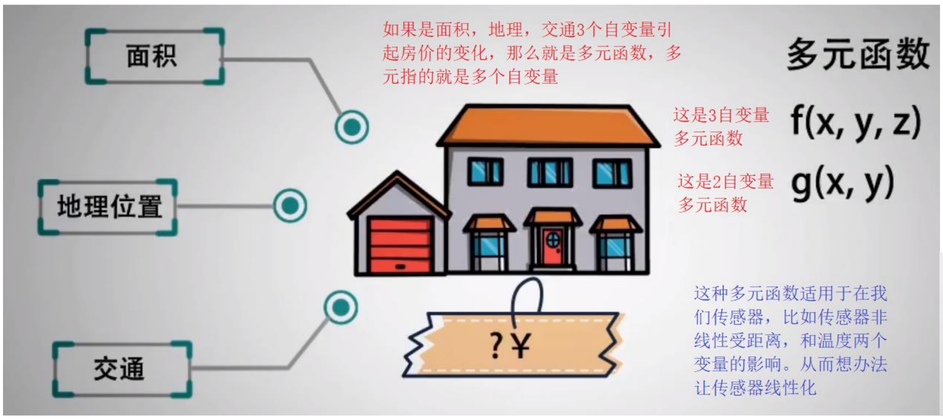
$$y=3x^3-2x^2+x+6$$

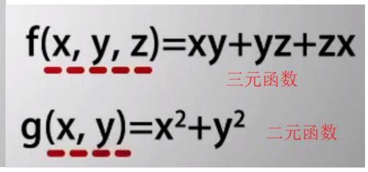
没有指数就是1　　常数0

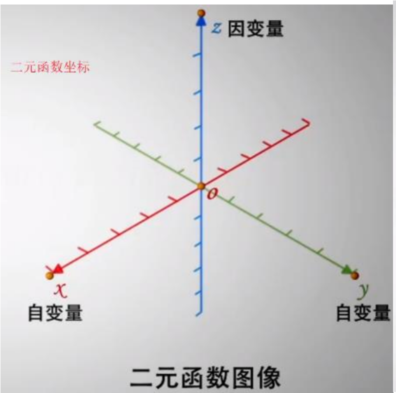
$$y'=9x^2-4x+1$$

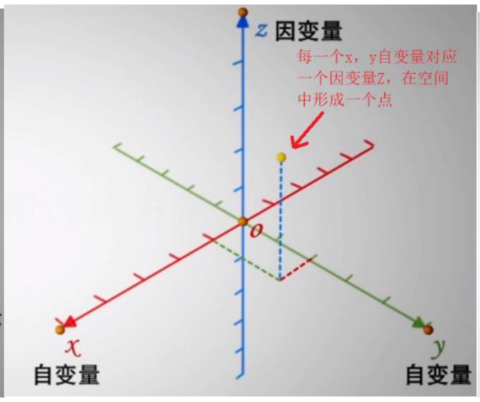

y=x²
y'=2x
当x=1时
2x=2
就是说x在1处
的斜率就是2
k=2

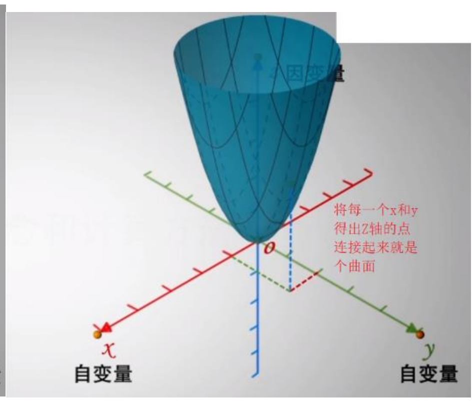
多元函数

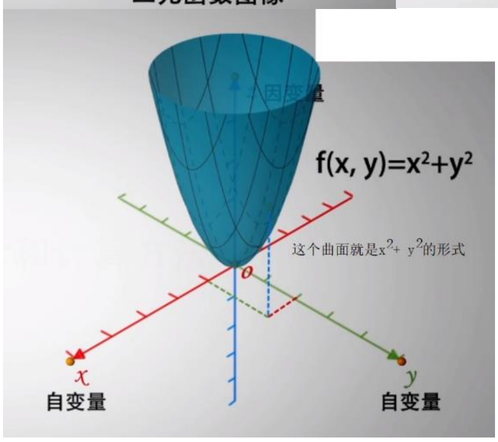

面积
地理位置
交通
如果是面积，地理，交通3个自变量引起房价的变化，那么就是多元函数，多元指的就是多个自变量
多元函数
这是3自变量多元函数
f(x, y, z)
这是2自变量多元函数
g(x, y)
?￥
这种多元函数适用于在我们传感器，比如传感器非线性受距离，和温度两个变量的影响。从而想办法让传感器线性化

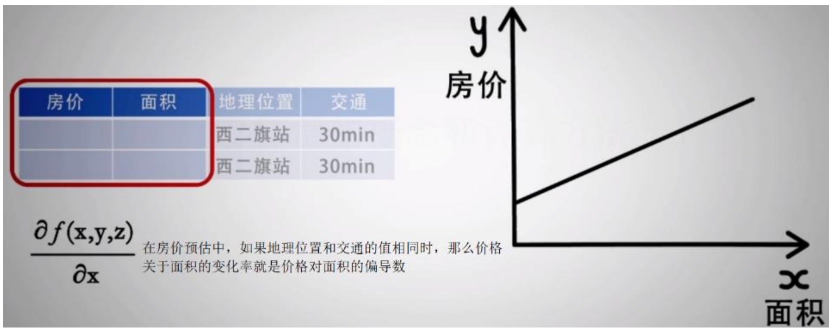

f(x, y, z)=xy+yz+zx
三元函数
g(x, y)=x²+y²
二元函数


z 因变量
二元函数坐标
自变量
自变量
二元函数图像


z 因变量
每一个x，y自变量对应一个因变量Z，在空间中形成一个点
自变量
自变量


将每一个x和y得出Z轴的点连接起来就是个曲面
自变量
自变量


f(x, y)=x²+y²
这个曲面就是x²+ y²的形式
自变量
自变量


房价
面积
地理位置
交通
西二旗站
30min
西二旗站
30min
∂f(x,y,z)/∂x
在房价预估中，如果地理位置和交通的值相同时，那么价格关于面积的变化率就是价格对面积的偏导数
房价
面积

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

x的偏导数　　y的偏导数　　z的偏导数

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

当我们计算x的偏导数时，就要把其它两个变量看成常数，这里常数是y和z

例如
$$f(x,y)=x^2+y^2+2xy+3y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

对x偏导的时候，将y看做一个常数

$$f(x,y)=x^2+\underbrace{y^2}_{\text{常数0}}+2xy+\underbrace{3y}_{\text{常数0}}$$

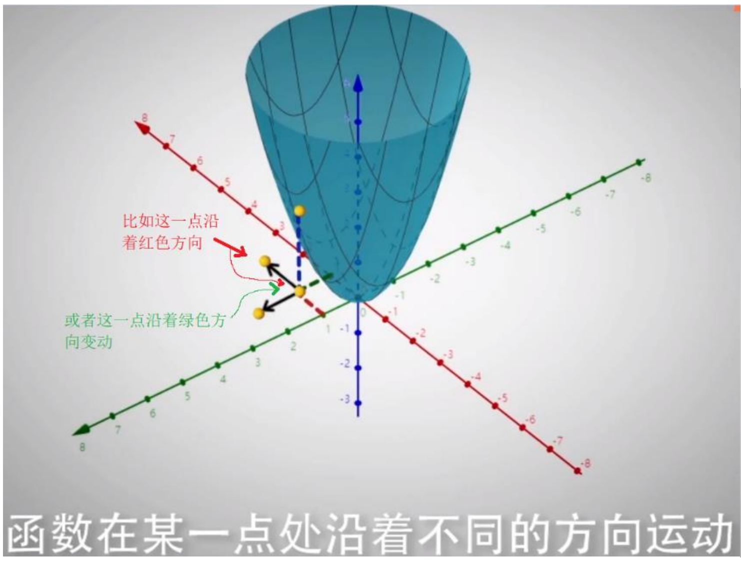
因为有偏导数x所以y就不用变为常数，x求导就是1

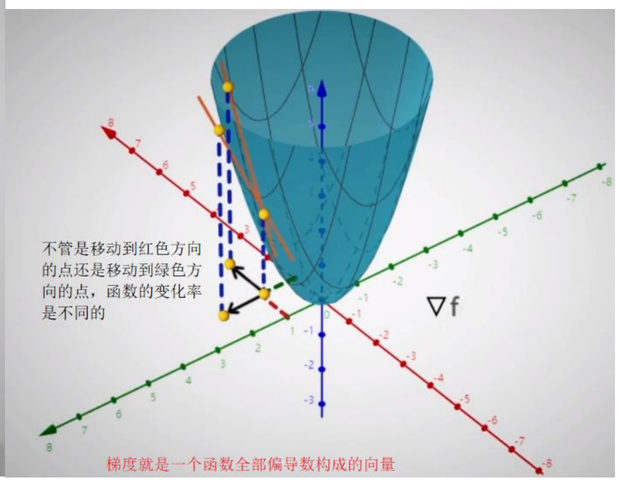
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+2y$$

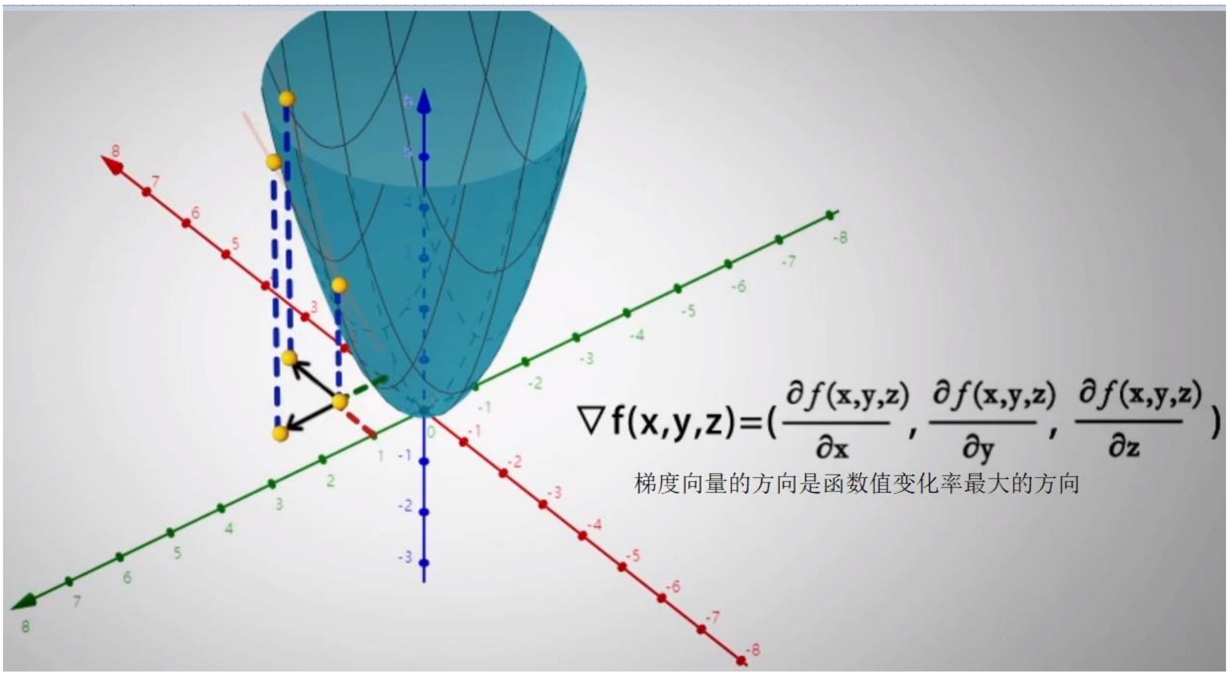
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y+2x+3$$

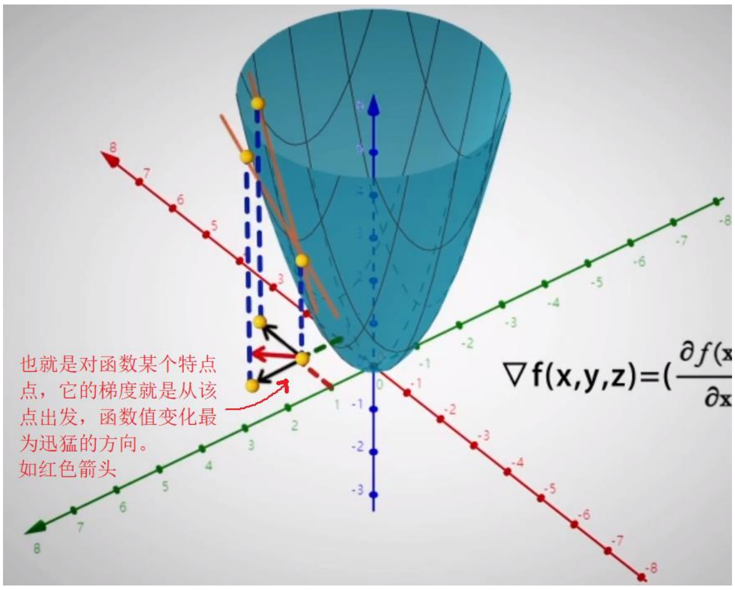
对y求导

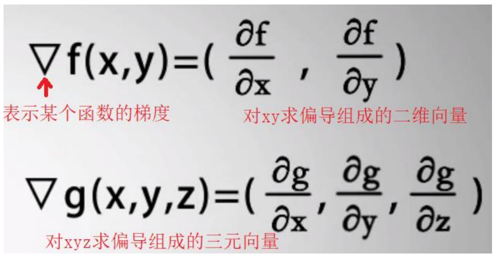
梯度的初步认识

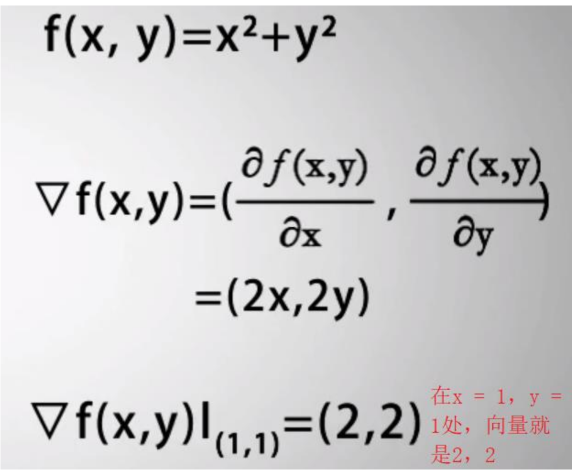


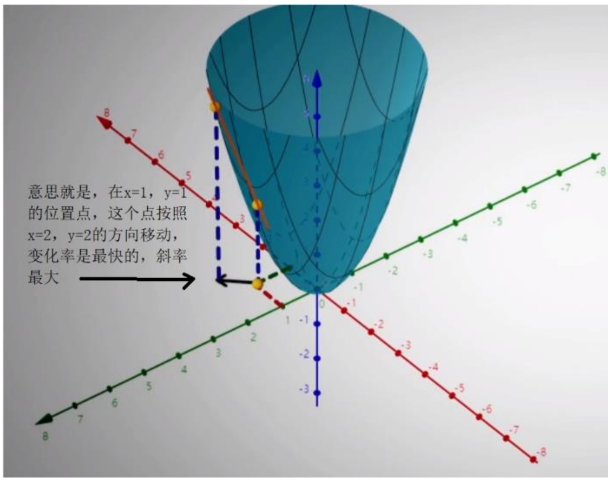




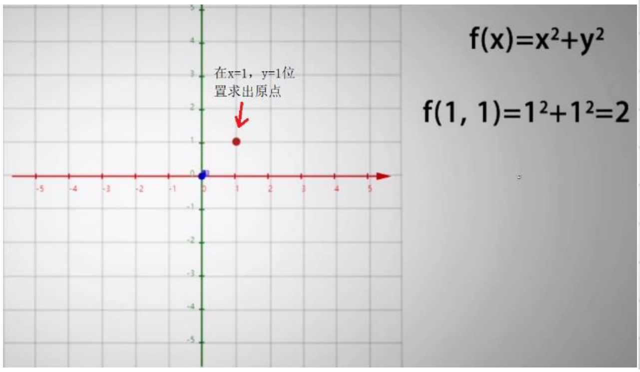


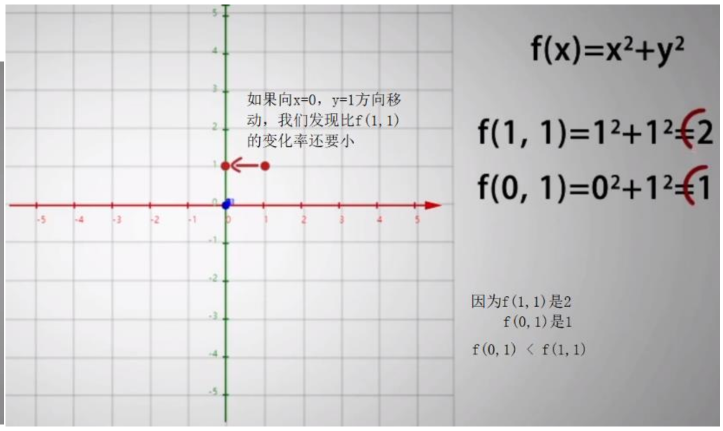


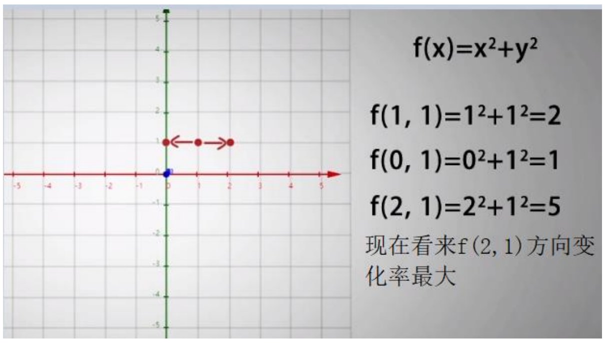


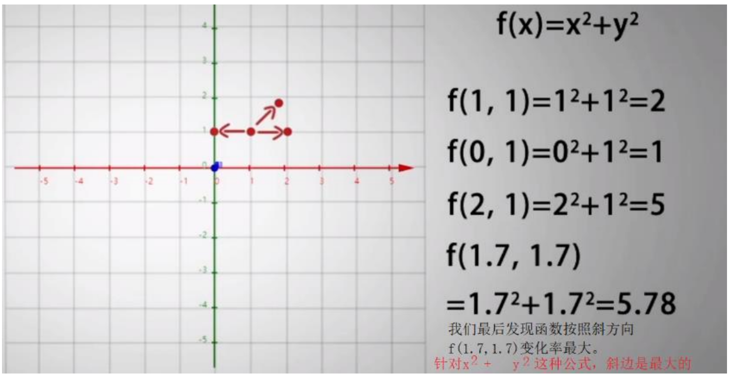


为了方便观察，下面我们用 xOy 平面来看





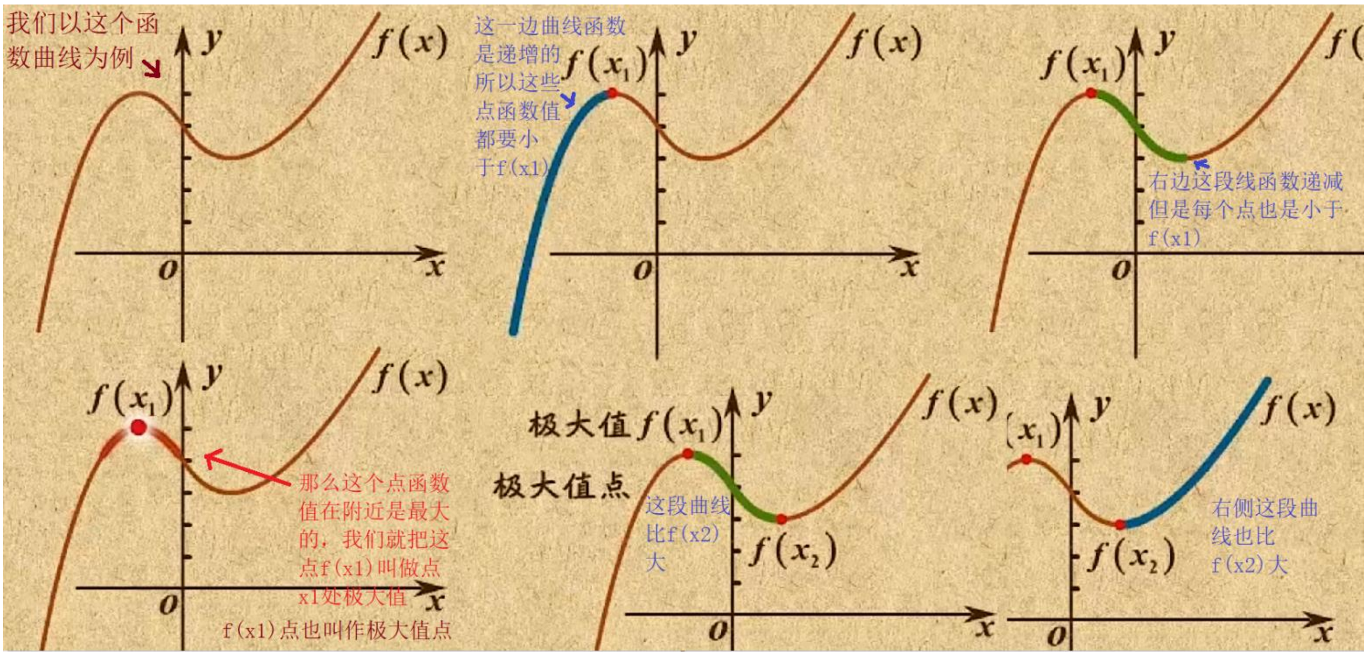


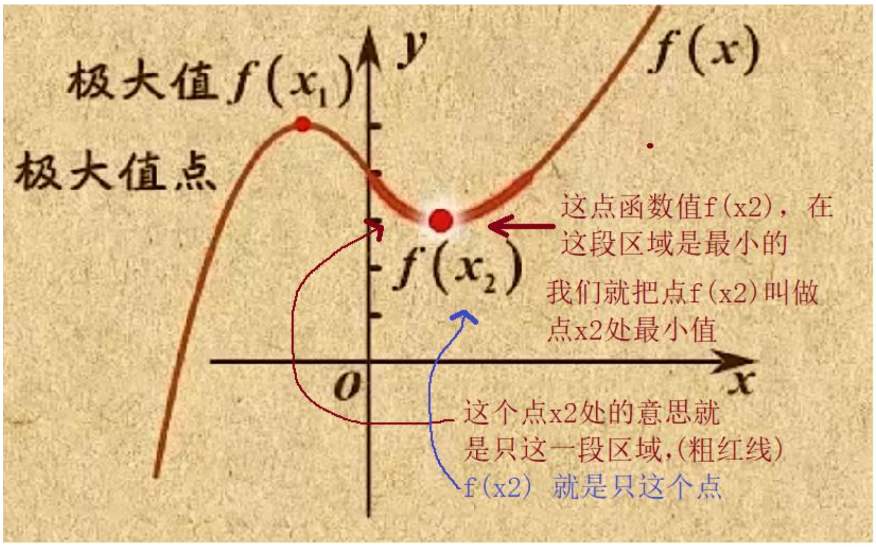


梯度下降算法的原理就讲完了。

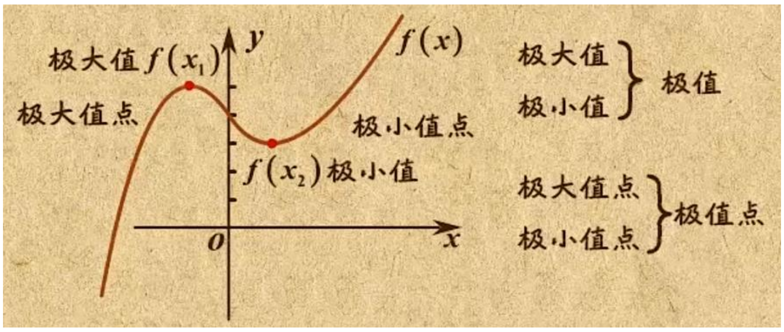
二元函数零点，驻点，极值点，拐点

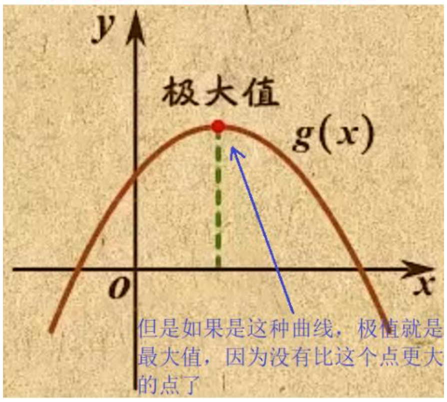
我们先看一元函数的极值点



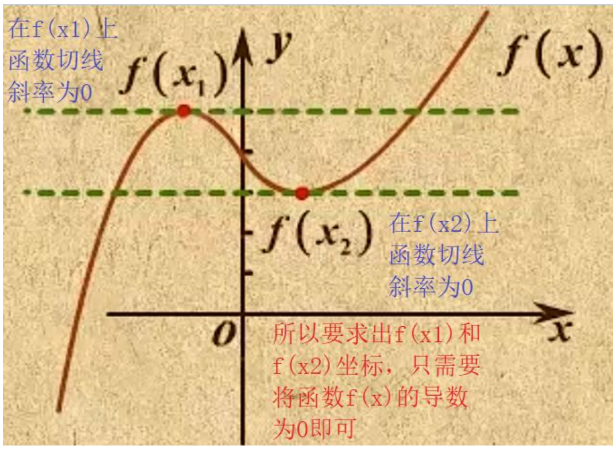


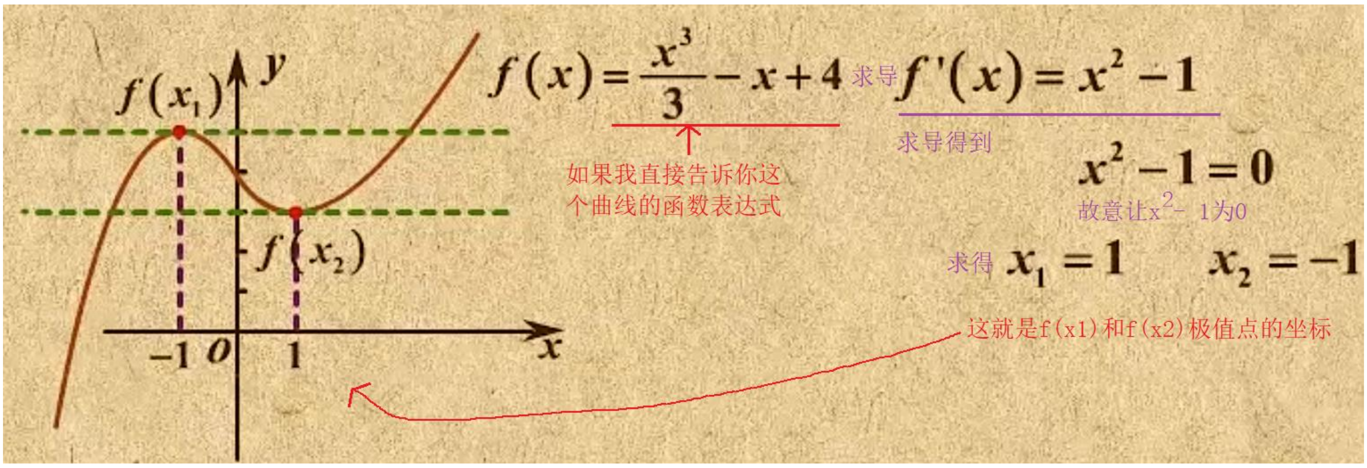
记住极大值不一定整个曲线的最大值

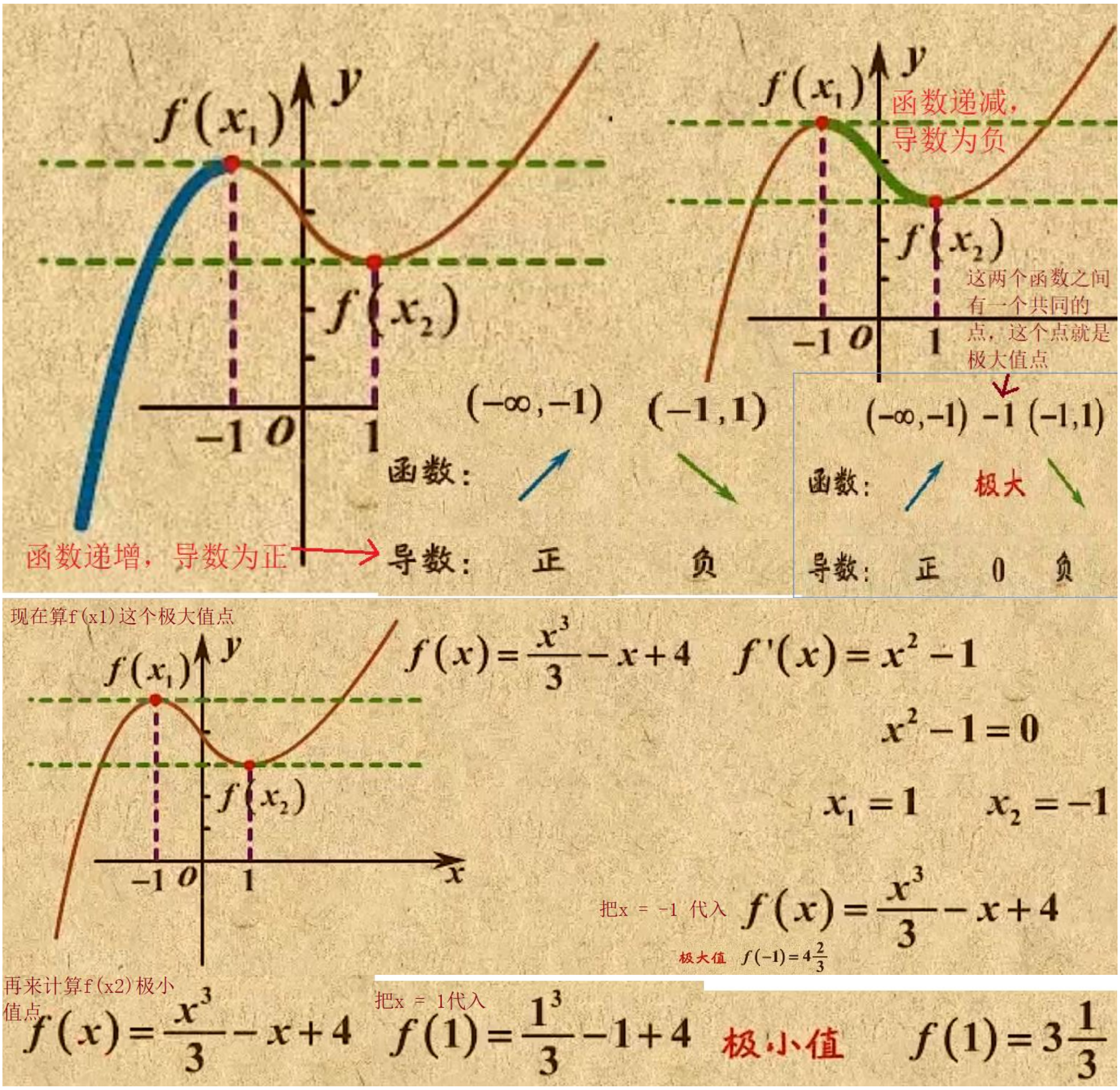




极值该如何求解?

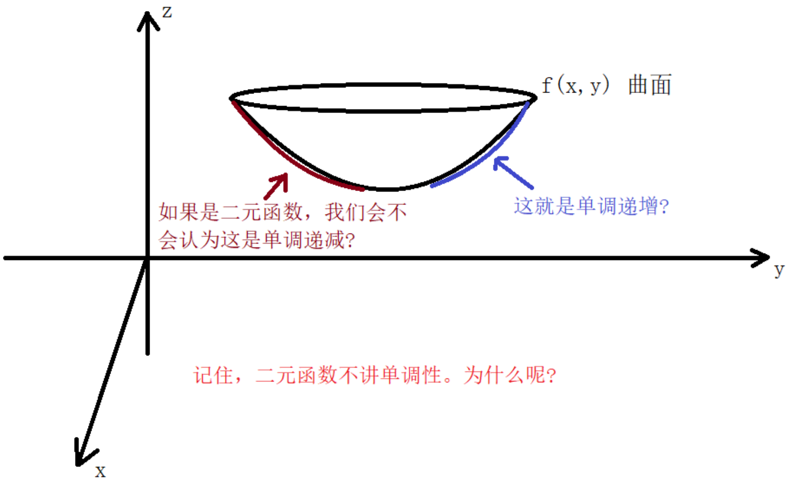




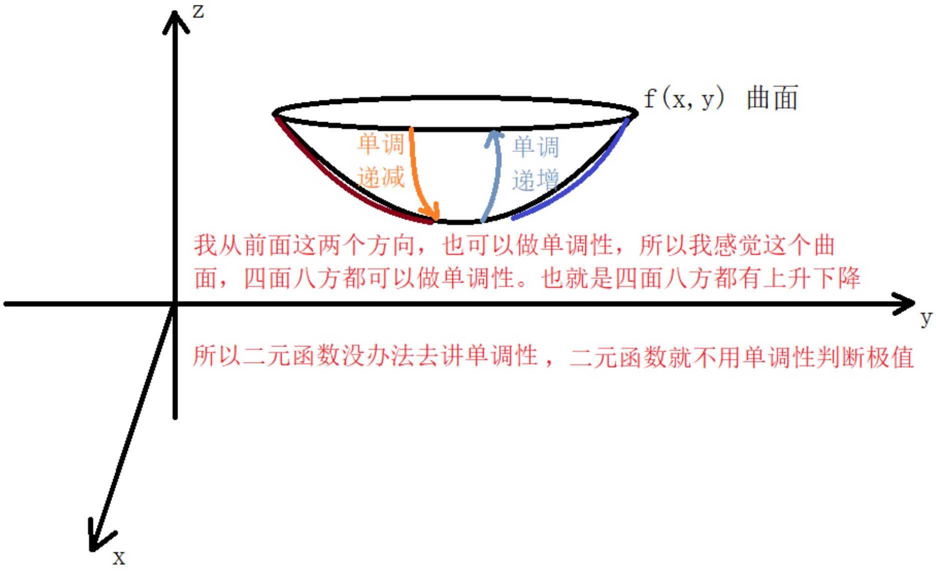


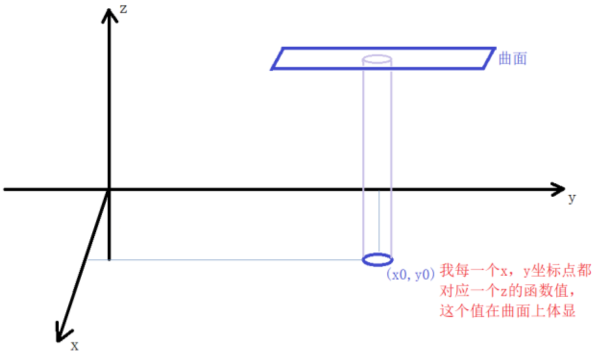
函数递增，导数为正
(-∞,-1)　(-1,1)
函数：
导数：　正　负
函数递减，导数为负
这两个函数之间有一个共同的点，这个点就是极大值点
(-∞,-1)　-1　(-1,1)
函数：　极大
导数：　正　0　负
现在算f(x1)这个极大值点
$f(x)=\frac{x^3}{3}-x+4$　$f'(x)=x^2-1$
$x^2-1=0$
$x_1=1$　$x_2=-1$
把x = -1 代入 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+4$
极大值 $f(-1)=4\frac{2}{3}$
再来计算f(x2)极小值点
$f(x)=\frac{x^3}{3}-x+4$
把x = 1代入 $f(1)=\frac{1^3}{3}-1+4$
极小值　$f(1)=3\frac{1}{3}$

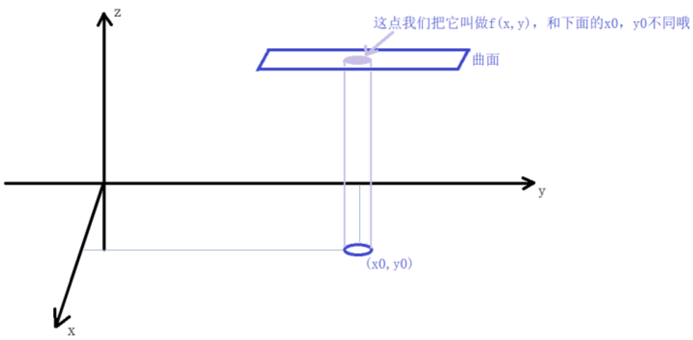
二元函数极值点

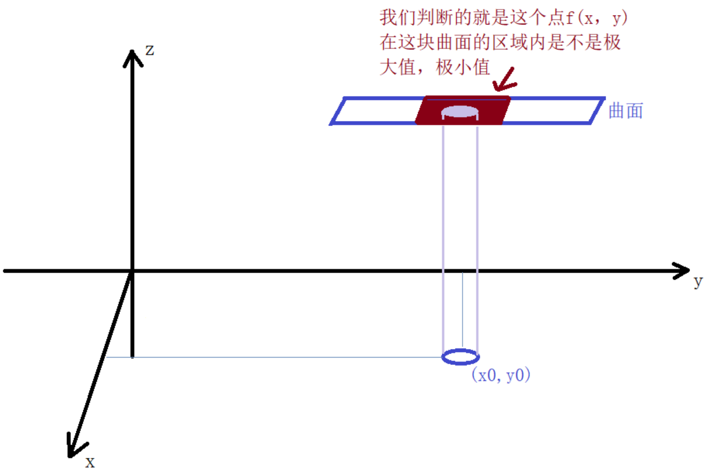


z
f(x, y) 曲面
如果是二元函数，我们会不会认为这是单调递减?
这就是单调递增?
y
记住，二元函数不讲单调性。为什么呢?
x

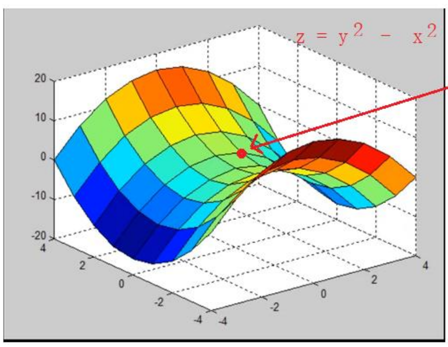








但是我们这个中心点能不能也算极值点呢?



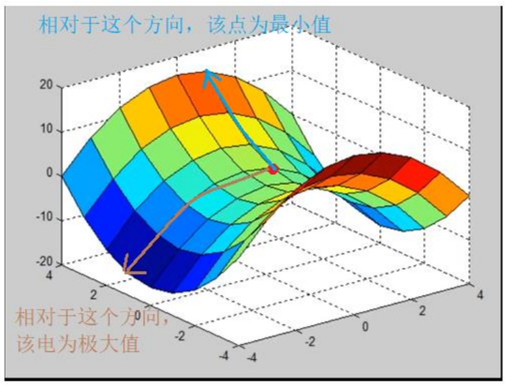
(0, 0)中心位置

0, 0肯定是驻点

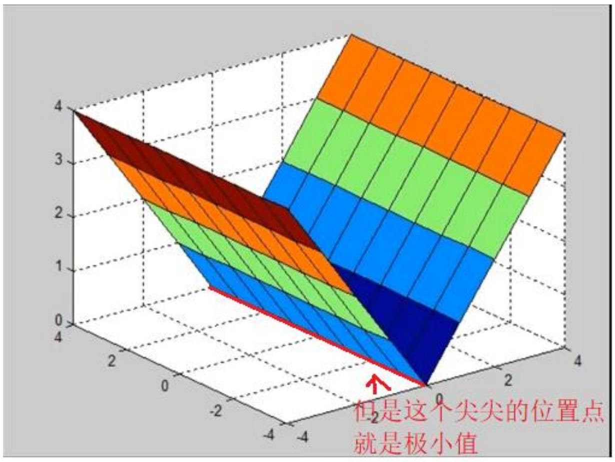
$$\frac{dz}{dx} = 0 - 2x = 0 \qquad x = 0$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y - 0 = 0 \qquad y = 0$$

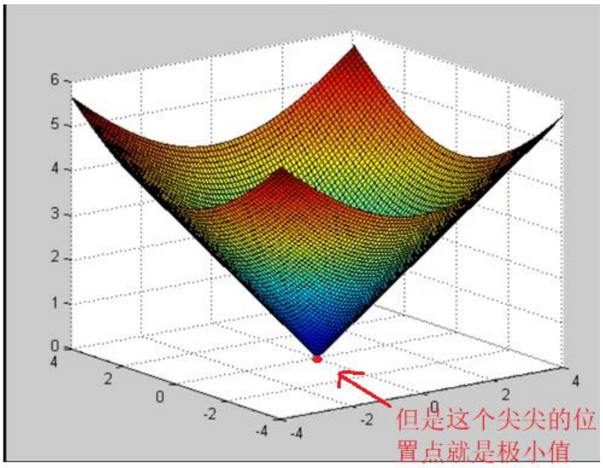
x和y都是0，就是驻点



那么这个驻点(0, 0)就很尴尬，不同的方向，极大值，
极小值混合影响。所以驻点不一定是极值点



这种尖尖的图形，表示偏导数不存在



这种尖尖的图形，表示偏导数不存在

二元函数的极值用一阶偏导数无法做，只有用二阶偏导来求极值。

二元函数求极值方法

1. 先求 $\frac{dz}{dx}$ $\frac{dz}{dy}$ 一阶偏导

2. 解方程组 $\frac{dz}{dx}=0$ $\frac{dz}{dy}=0$ 强制让x和y一阶偏导的结果 = 0，解方程组得到驻点

3. $\frac{dz}{dx}=0$ $\frac{dz}{dy}=0$ 解完这个方程组，得到的x和y就是驻点

4. 求极值

$$P(x,y) = (Z''_{xy})^2 - Z''_{xx} * Z''_{yy}$$

先求x偏导，再求y偏导　关于x连续两次偏导　关于y连续两次偏导

5. 当P < 0: Z''_{xx} (x0, y0) < 0　那么 (x0, y0) 极大值

Z''_{xx} (x0, y0) > 0　那么 (x0, y0) 极小值

P > 0: (x0, y0) 不是极值点

P = 0: 无法判断

例: $Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

① $\frac{dz}{dx} = 2x - y + 9$　对x 求一阶导

$\frac{dz}{dy} = -x + 2y - 6$　对y 求一阶导

② $\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ 解方程组

$x = -4$
$y = 1$

③ (x0, y0) = (-4, 1) 有一个驻点

④ 求 Z''_{xx}

求x二阶偏导 $2x - y + 9$

$\frac{d^2z}{d^2x} = 2$　求x二阶偏导

$Z''_{xx} = 2$

求 Z''_{yy}

求y二阶偏导 $-x + 2y - 6$

$\frac{d^2z}{d^2y} = (-x + 2y - 6)'_y = 2$

$Z''_{yy} = 2$

求 $(Z''_{xy})^2$

$(2x - y + 9)'_y = -1$

这个意思是先求一次x偏导，得到一个式子，再将这个式子求一次y偏导，得到-1

$$P(x,y)\Big|_{\substack{x=x0\\y=y0}} = (-1)^2 - \underline{2} \times \underline{2} = -3$$

求偏导对象不一样的平方 $(Z''_{xy})^2$

偏导对象一样的相乘 Z''_{xx}

偏导对象一样的相乘 Z''_{yy}

$$P(x,y)\Big|_{\substack{x=x0\\y=y0}} = (-1)^2 - \underline{2} \times \underline{2} = -3$$

求偏导对象不一样的平方 $(Z''_{xy})^2$

偏导对象一样的相乘 Z''_{xx}

偏导对象一样的相乘 Z''_{yy}

→ -3 是< 0的，就有个极大值和极小值的选择

当P < 0: Z''_{xx} (x0, y0) < 0　那么 (x0, y0) 极大值

Z''_{xx} (x0, y0) > 0　那么 (x0, y0) 极小值

根据公式，-3选这项，然后去看看 Z''_{xx} 计算范围

因为 Z''_{xx} = 2 > 0 那么就选这条

Z''_{xx} (x0, y0) > 0　那么 (x0, y0) 极小值

(-4, 1) 是极小值点

如果算极值f(-4, 1) 代入原函数

$Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

就算出Z了

方向导数

方向导数使用需要方向余弦，单位向量知识

平面向量

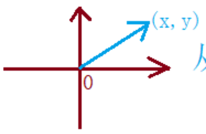
向量

$\vec{a}$ 用箭头表示向量a

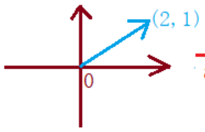
这表示向量a

$\overrightarrow{AB}$ 或者用向量的起点A到终点B的线段来表示

$\vec{a}=(x, y)$ 也可以用坐标表示向量



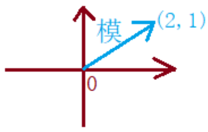
从0到x, y 如:



$\vec{a}=(2, 1)$

$|\vec{a}|$ $|\overrightarrow{AB}|$ 加绝对值就是向量的模（向量的模就代表向量的大小）

模就向量线段的长度



$\vec{a}=(2, 1)$

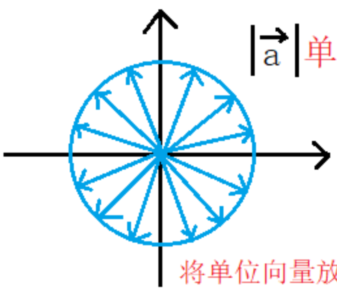
零向量

模为 0，方向任意的向量为 0 向量

$\vec{0}$ 人为规定，0向量与任何向量平行

单位向量

模为 1 的向量是单位向量

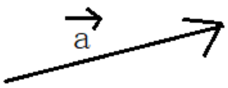


$|\vec{a}|$ 单位向量符号

将单位向量放在圆点，向无数个方向发射，形成单位圆，因为单位向量长度都是为1

$|\vec{a}|=1$

给出任意向量



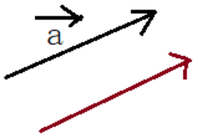
长度 >1（也就是模>1）

加入一根与a向量方向相同的单位向量，该如何表示？

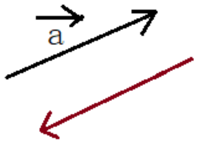
$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

这就是表示与方向a方向相同的单位向量表示方法

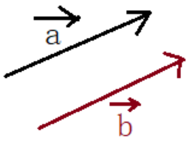
平行向量(共线向量)



a向量与另外一个向量方向相同是平行向量

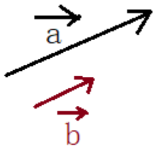


a向量与另外一个向量方向相反，但是平行不交叉，也叫平行向量



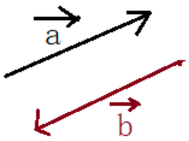
$\vec{a} = \vec{b}$

两个向量长度相同，就是a向量 = b向量



$\vec{a} = 2\vec{b}$

b向量是a向量的一半
所以就用2倍的b表示



$\vec{a} = -\vec{b}$

$\vec{a} // \vec{b}$

a平行于b

$|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

表示a向量长度是b向量长度2倍

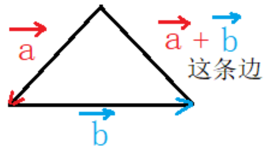
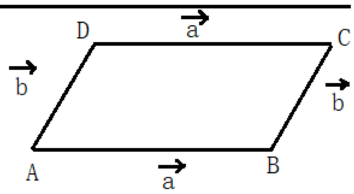
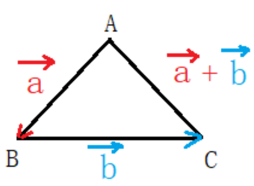
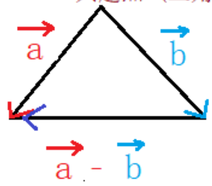
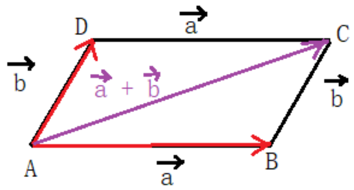
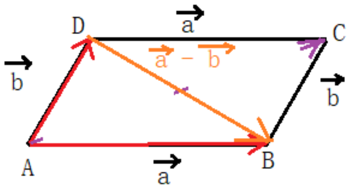
两个 向量坐标表示

$\vec{a} = (x, y)$ $\vec{b} = (x2, y2)$

如果两个向量相等

$\vec{a} = \vec{b}$ 等效 $\begin{cases} x1 = x2 & \text{就是横坐标等于横坐标} \\ y1 = y2 & \text{纵坐标等于纵坐标} \end{cases}$

向量几何运算

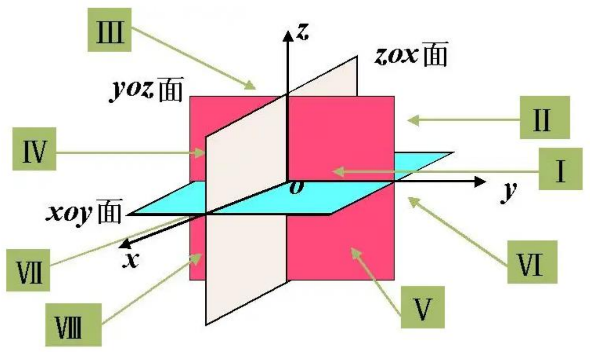
	三角形加法法则	三角形减法	平行四边形法则
		 向量减法三角形不能像加法那样收尾相连	
给三角形加ABC符号	 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$	共起点（三角形减法）  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ 为什么是C在前？ 看箭头	 a与b首尾相连，所以是 $\vec{a}+\vec{b}$ 

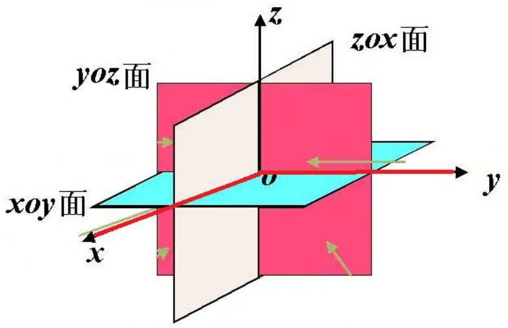
例如 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$

$= \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ 然后 $\vec{AC} + \vec{CA} = 0$

先AB + BC　CA 是AC的反方向，所以是负-AC

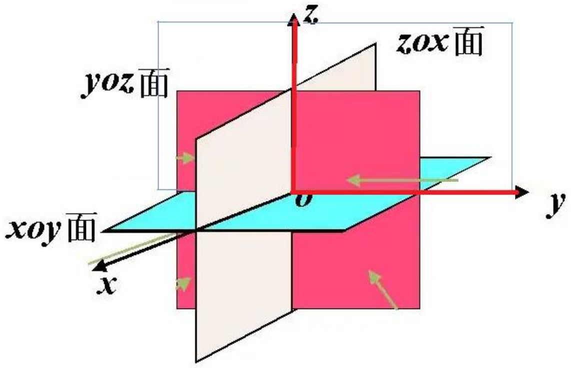
空间坐标系



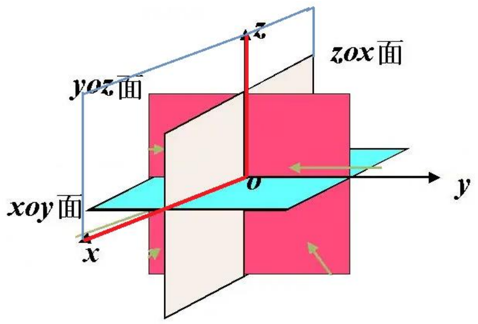


红线x和y轴形成的平面叫xOy面

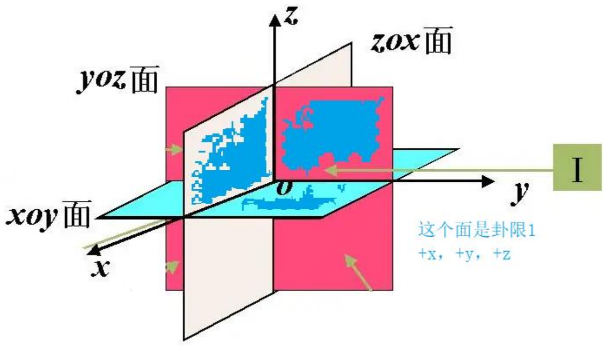
这就是空间坐标系

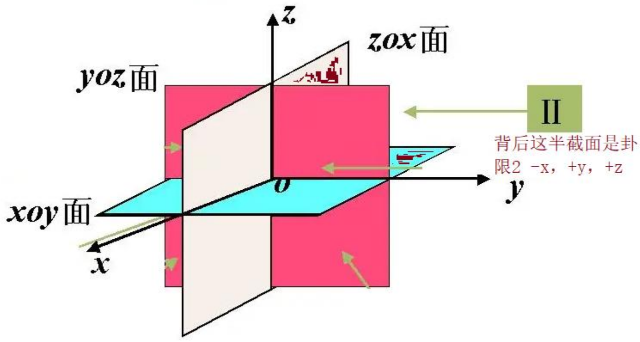


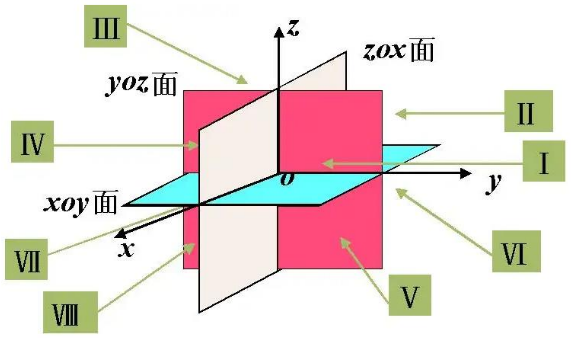
红线y和z形成的平面是yOz面
我用灰色表示这个yOz面



红线z和x轴相交的面就
是zOx面　灰色的面



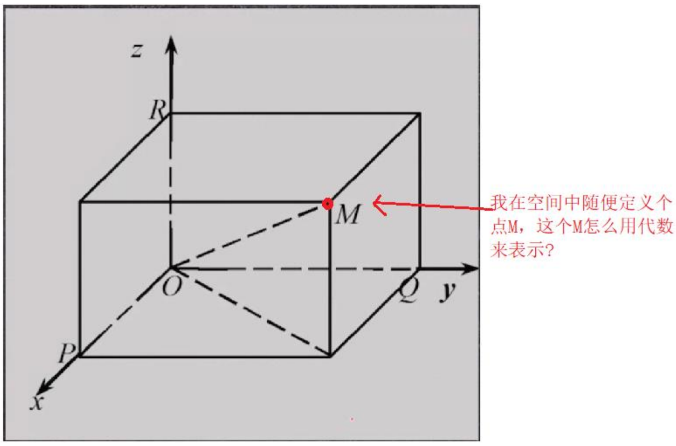


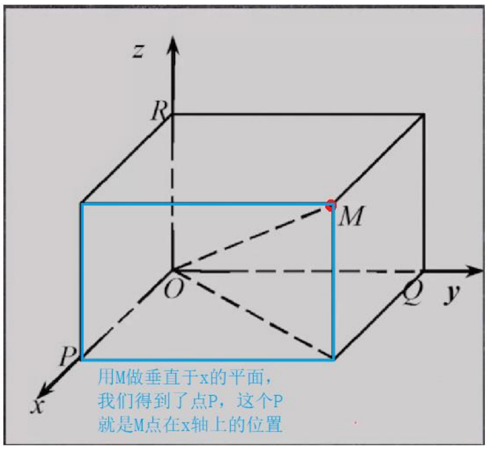


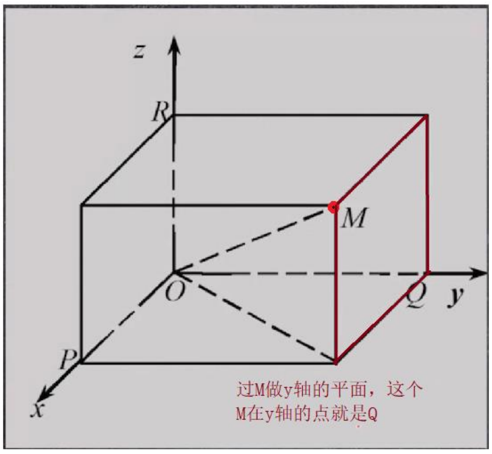
卦限 / 坐标	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

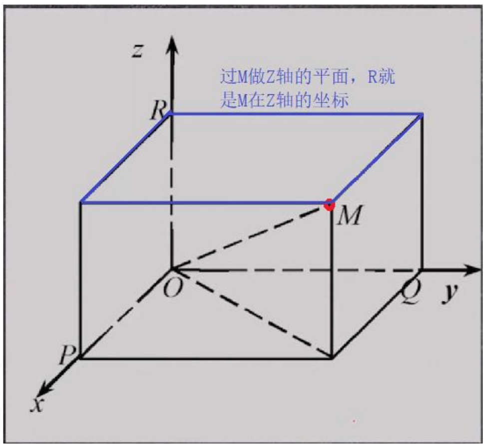
这就是卦限用坐标来表示的方式。

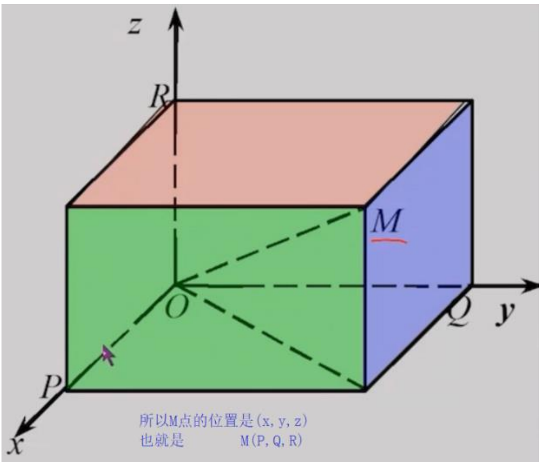
空间直角坐标系 x，y，z 的表示方法

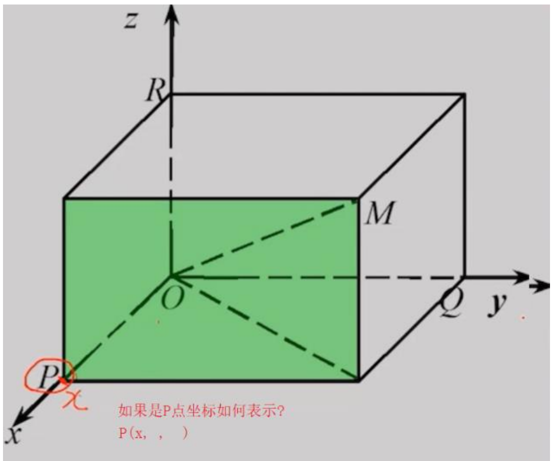


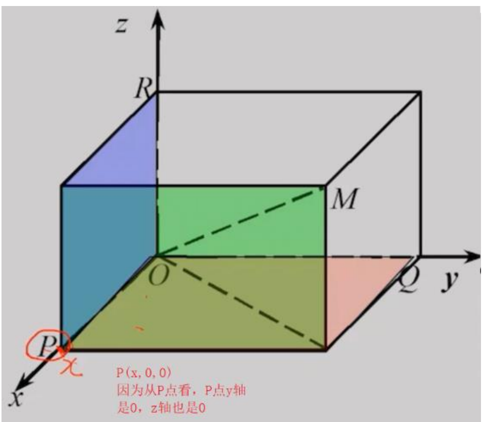




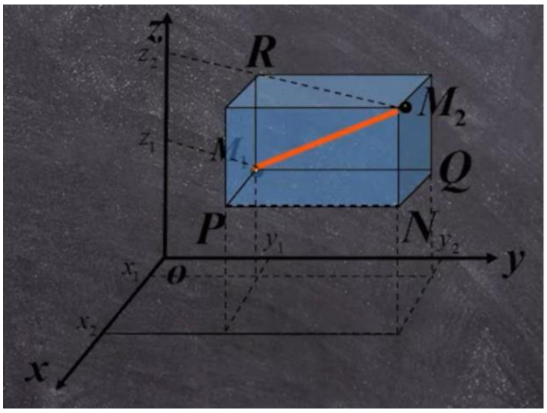






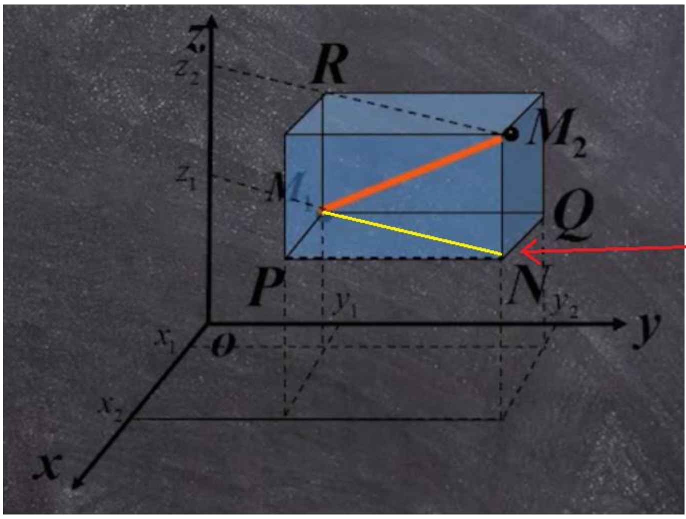


空间两点间距离公式



例：M1(x1, y1, z1)　M2(x2, y2, z2)

求M1点到M2点线段的距离

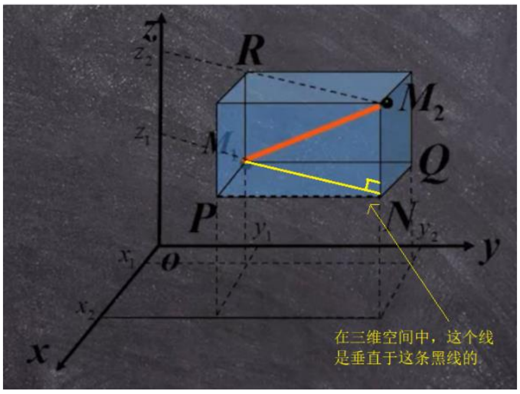


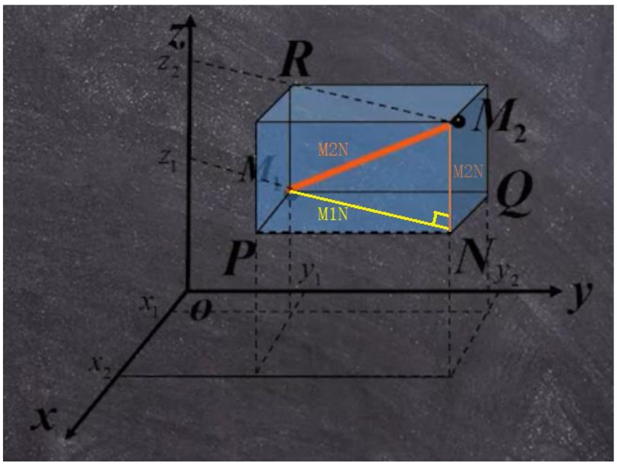
例：M1(x1, y1, z1)　M2(x2, y2, z2)

求M1点到M2点线段的距离

我们求M1, M2的距离需要借助其它的方式来求

我画一个对角线，让
M1M2变成三角形关系





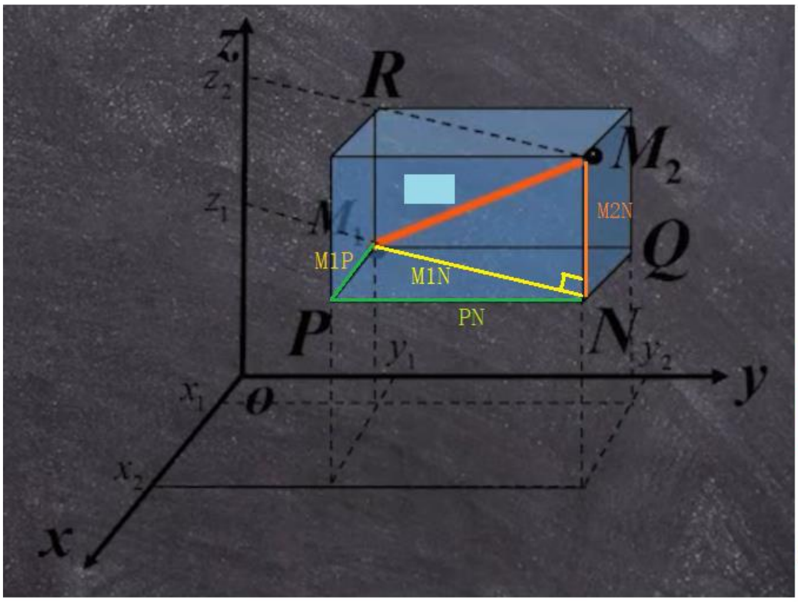
例：M1(x1, y1, z1)　M2(x2, y2, z2)

求M1点到M2点线段的距离

根据勾股定律

M1M2这条线 $= |M1M2|^2 = |M1N|^2 + |M2N|^2$

这样就求出M1M2的距离了



例：M1(x1, y1, z1)　M2(x2, y2, z2)

求M1点到M2点线段的距离

根据勾股定律

M1M2这条线 $= |M1M2|^2 = |M1N|^2 + |M2N|^2$

另一种方式，→ $= |M1P|^2 + |PN|^2 + |M2N|^2$

线用MIP和PN求MIN边，再用MIN和M2N求M1M2

$M1P = (x2 - x1)^2$

$PN = (y2 - y1)^2$

$M2N = (z2 - z1)^2$

所以 $M1M2^2 = (x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2$

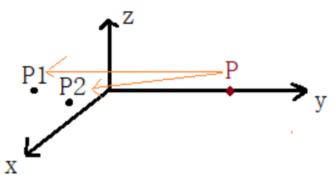
M1M2距离d $= \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2}$

例子：求两点P1(1, 2, 0)，P2(1, -2, 3)之间的距离

$$|P1P2| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 + (3 - 0)^2}$$

$$= 5$$

例子2：设点P在y轴上，它到P1(2, 0, 3)的距离为到点P2(1, 0, 1)距离的 $\sqrt{6}$ 倍，求点P坐标



先假设P(0, y, 0)　这个P我们假设只有1个y坐标不能确定，x和z都默认假设为0

$|PP1| = P1(2,0,3)^2 - P(0,y,0)^2$

$P1(2,0,3)^2$

减

$P(0,y,0)^2$

这是P到P1距离 $= \sqrt{2^2 + y^2 + 3^2} = \sqrt{13 + y^2}$

$|PP2| = \sqrt{1 + y^2 + 1} = \sqrt{2 + y^2}$

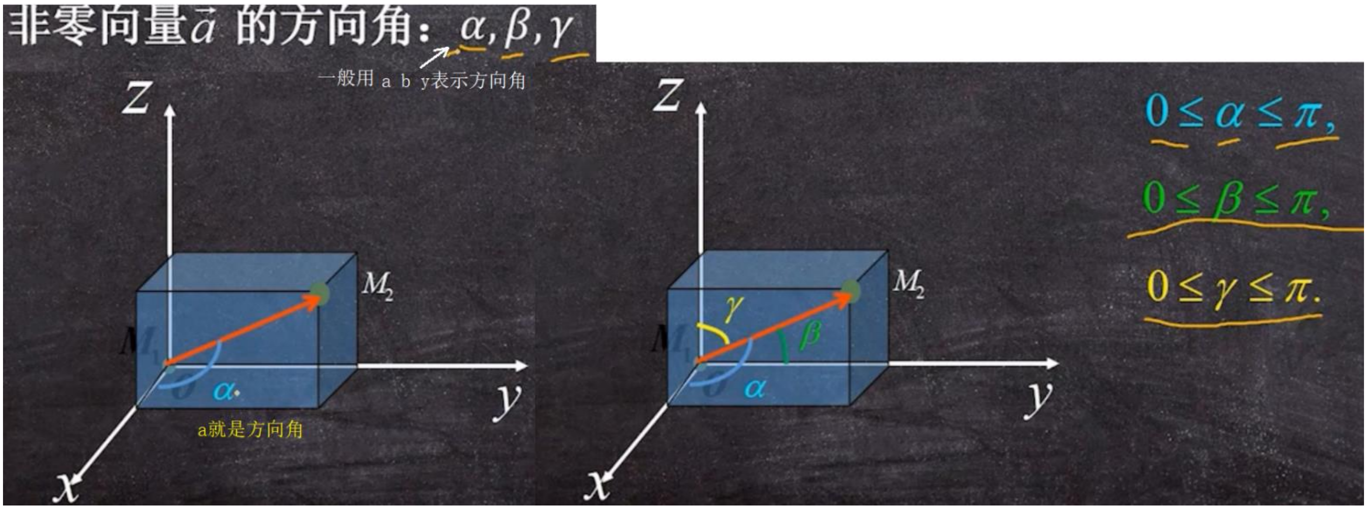
$\sqrt{13 + y^2} = \sqrt{6} * \sqrt{2 + y^2}$

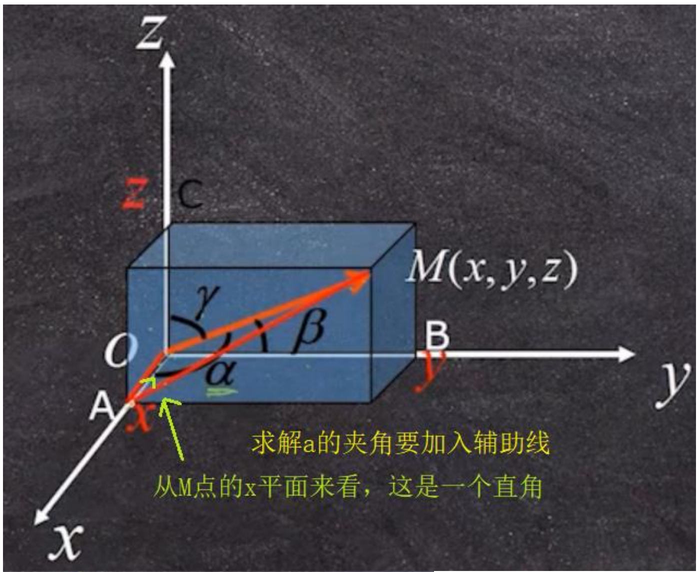
$y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　$P(0, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$ 或 $P(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$

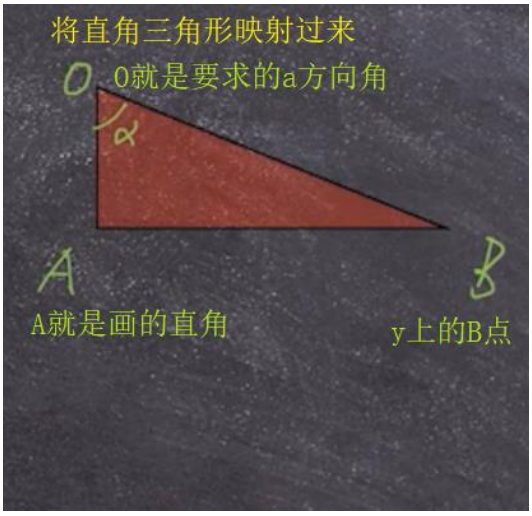
方向余弦

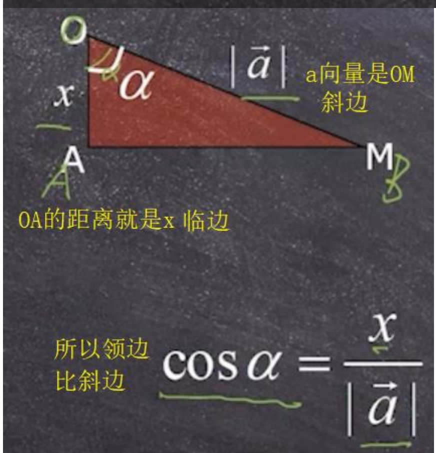
方向角

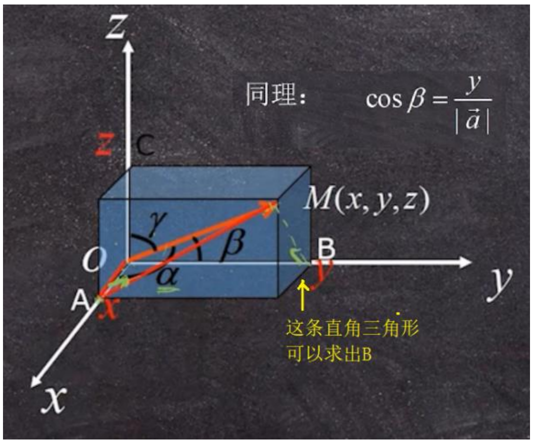
非零向量与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.

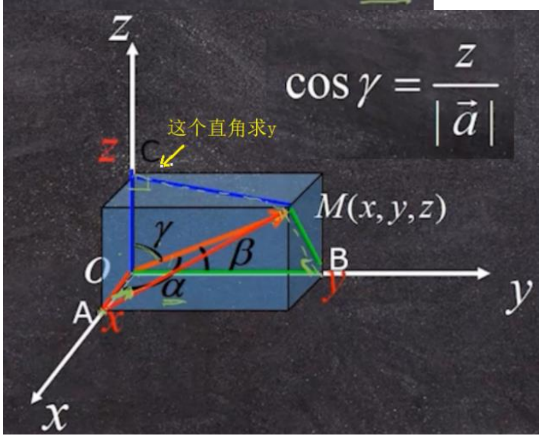

非零向量$\vec{a}$ 的方向角：α,β,γ
一般用 a b γ表示方向角
a就是方向角
$0\le\alpha\le\pi,$
$0\le\beta\le\pi,$
$0\le\gamma\le\pi.$
M_2
z
y
x


$M(x,y,z)$
求解a的夹角要加入辅助线
从M点的x平面来看，这是一个直角
O
A
B
C
z
y
x


将直角三角形映射过来
O就是要求的a方向角
A就是画的直角
y上的B点


a向量是OM
斜边
OA的距离就是x 临边
所以领边
比斜边
$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}$


同理：
$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}$
$M(x,y,z)$
这条直角三角形
可以求出B


$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}$
这个直角求γ
$M(x,y,z)$

方向余弦的计算

根据前面的图，来算方向余弦

由于 $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

这个模长就是O(0,0,0) - M(x, y, z) 得到

然后把模长代入公式

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

方向余弦通常用来表示向量的方向.

由于

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

可得 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

这三个方向余弦相加等于1，记住，这是定理，不用去推导为什么

这个定理用在已知其中两个方向余弦，求第3个方向余弦就用这个定理

例如已知 $\cos^2 a$ ， $\cos^2 B$ 求$\cos^2 y$

设$\boldsymbol{a}^{\circ}$是与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量 a向量对应的单位向量

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\}$$

$$= \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角．

解:

先计算M1M2向量对应的分向量坐标，一般是终点坐标 - 起点坐标

$$\overrightarrow{M1M2} = \{1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2}\} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$$

模长 $|\overrightarrow{M1M2}| = \sqrt{(1-2)^2+(3-2)^2+(0-\sqrt{2})^2} = 2$

方向余弦 $\cos a = \frac{\text{分向量}}{\text{模长}} = \frac{-1}{2}$　$\cos B = \frac{1}{2}$　$\cos y = \frac{-\sqrt{2}}{2}$　看来方向余弦每个方向都是/模长

方向角 $a = \frac{2\pi}{3}$　$B = \frac{\pi}{3}$　$y = \frac{3\pi}{4}$

单位向量的计算方法

还是上面一题 M1 $(2,2,\sqrt{2})$ 和 M2 $(1,3,0)$ 计算M1M2单位向量

单位向量 $\overrightarrow{M^0} = \frac{\overrightarrow{M1M2}}{|\overrightarrow{M1M2}|}$　向量M1M2 这种就是用M2 - M1得到　M1M2向量的模长

$$\begin{array}{r} M2(1,3,0) \\ -\ M1(2,2,\sqrt{2}) \end{array}$$

M2减M1

$= (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2})$

$\overrightarrow{M1M2} = (-1, 1, -\sqrt{2})$

现在有M1M2向量了，再来算算向量的模长

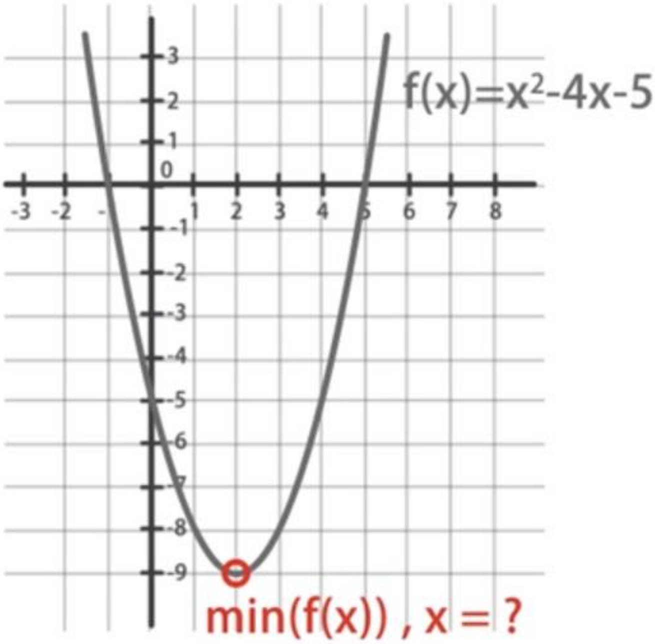
模长 $|\overrightarrow{M1M2}| = \sqrt{(1-2)^2+(3-2)^2+(0-\sqrt{2})^2} = 2$

将M1M2的每个数 / 模长 也就是 -1 / 2, 1/2, $-\sqrt{2}/2$ $= \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ 这就是单位向量

$\overrightarrow{M^0} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ 感觉和方向余弦很像

梯度下降算法

一元梯度下降



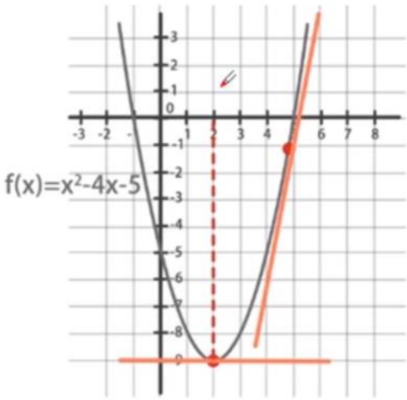
$$\nabla f(x)=f'(x)$$

$$f'(x)=2x-4$$

梯度下降一般是 在计算出f'(x) = 0的时候，此时x取值是多少

梯度下降一般是以负梯度的方向来决定每一次x的变化方向。

例如：当x = 2的时候，f'(x) = 0，梯度计算结束



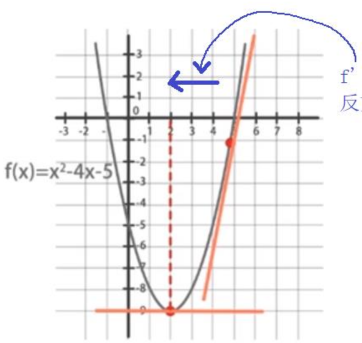
$f'(x)=2x-4$

$2x-4=0$

$x=2$ → $\min(f(x))$

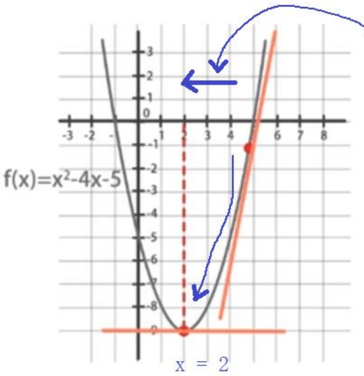
这是我们已知的情况，实际情况你是不知道x=2时 f'(x) = 0的

例如，x = 5时，f'(x) = 2*5 - 4 = 6，x向导数的反方向，即x轴的**负方向**移动。



f'(x) = 6，我们就要沿着x = 6的反方向移动

例如，x = 5时，f’ (x) = 2*5 - 4 = 6，x向导数的反方向，即x轴的**负方向**移动。

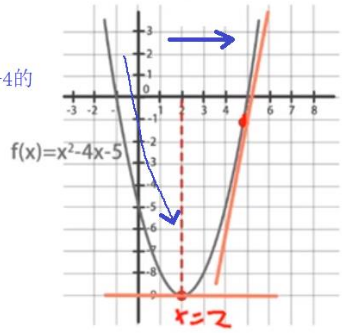


f’(x) = 6，我们就要沿着x = 6的反方向移动

我一点一点的向反方向循环移动发现在f’(x) = 0时，x得到了2，这就是我得到的x结论

x = 0时，f’ (x) = 0 - 4 = -4，x向导数的反方向，即x轴的**正方向**移动。

f’(x) = -4
那我们要从-4的反方向移动

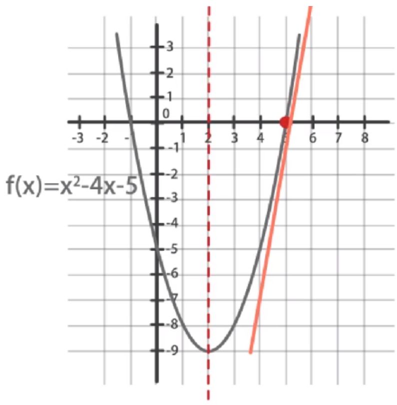


因为-4 在 x=2 极值点左侧，所以反方向移动，就要从左边的曲线开始移动。

x = 2时，f’ (x) = 2*2 - 4 = 0，x不再移动，这时f(x)取得**最小值**。

因为x=2 已经让f’(x) = 0了 所以就不用再移动了

梯度下降迭代过程



初始值是 x=5

$\nabla f(x)=f'(x)=2x-4$

计算x=5位置的梯度 $=10-4$

$=6$

所以要使x沿着6的反方向移动

也就是说重新对x赋值

$x=5 \Rightarrow x=5-\alpha*6$

这里的 $\alpha*6$ 就是x点向反方向移动的一小步

$x=5 \Rightarrow x=5-\underline{\alpha}*6$

学习速率

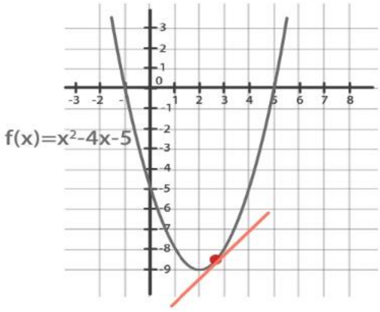
通过人为设置a的大小来决定用多大幅度反方向移动x点

$x=x-\alpha*f'(x)$

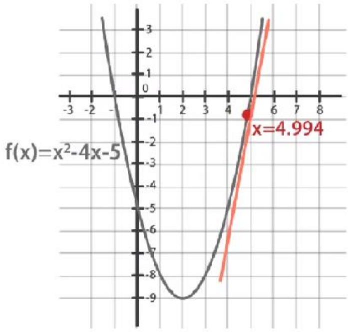
在迭代循环的过程中a不会变化

$$x=x-\alpha*f'(x)$$

虽然a不会变



但是梯度f'(x)会越来越接近于0



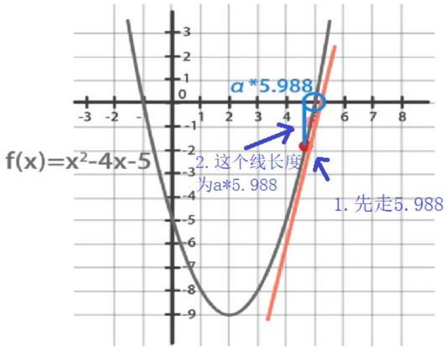
第1次迭代

$\alpha=0.001$

$x=5-\alpha*6$

$=5-0.006$

$=4.994$



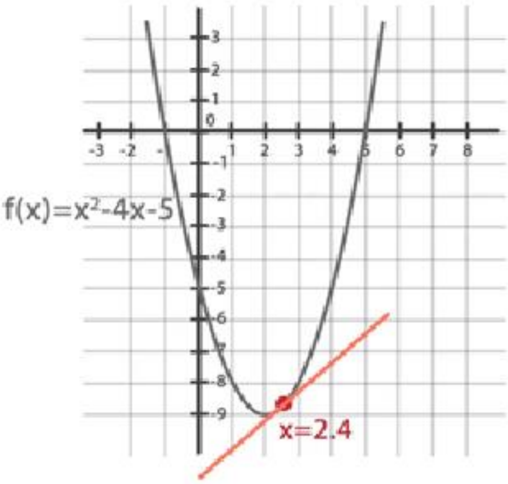
第2次迭代

$x=4.994$

$\nabla f(x)=2x-4$

$=9.988-4$

$=5.988$



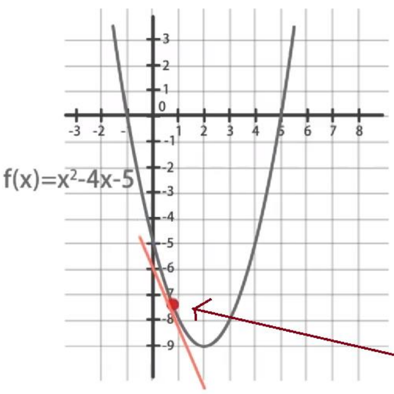
$x=2.4$

$\nabla f(x)=2x-4$

$=4.8-4$

$=0.8$

当x = 2.4的时候，f'(x)梯度就接近于0了



如果x = 0

$x=0$

$\nabla f(x)=f'(x)=2x-4$

$=0-4$

梯度得到负数 $=\boxed{-4}$

那么就是在曲线左边，极值点线下移动

$$f(x)=x^2-4x-5$$

$$f'(x)=2x-4$$

我们用计算机来计算f'(x) = x^2 - 4x - 5
这个函数梯度

我们设置a = 0.001

进入循环迭代10次

0 iteration x = 0.000000 gradient(x) = -4.000000
1 iteration x = 0.004000 gradient(x) = -3.992000
2 iteration x = 0.007992 gradient(x) = -3.984016
3 iteration x = 0.011976 gradient(x) = -3.976048
4 iteration x = 0.015952 gradient(x) = -3.968096
5 iteration x = 0.019920 gradient(x) = -3.960160
6 iteration x = 0.023880 gradient(x) = -3.952239
7 iteration x = 0.027833 gradient(x) = -3.944335
8 iteration x = 0.031777 gradient(x) = -3.936446
9 iteration x = 0.035713 gradient(x) = -3.928573

每一次迭代x向正方向走一小步，但是10次之后f'(X) = -3.928573
梯度没有达到极小值

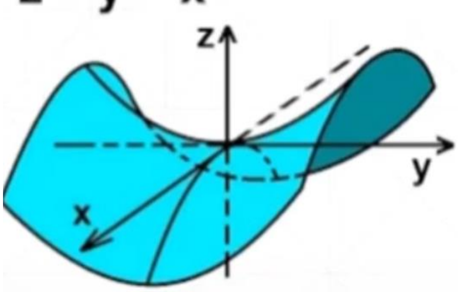
那么我们迭代10000次

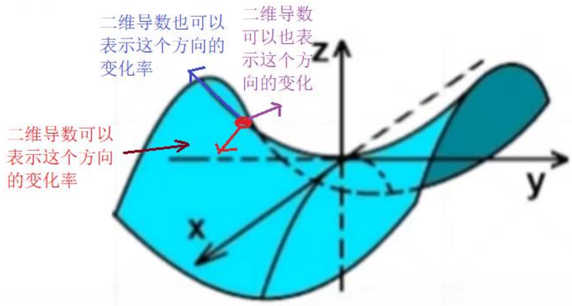
9990 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9991 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9992 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9993 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9994 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9995 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9996 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9997 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9998 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000
9999 iteration x = 2.000000 gradient(x) = -0.000000

我们发现 x = 2.00000的时候f'(x) = 0，迭代完成，x=2.0是极小值

二元梯度下降

$$z = y^2 - x^2$$





梯度, gradient

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

梯度就是对每个自变量进行偏微分(偏导)
梯度就是所有偏微分的一个向量

例如 ： z = y^2 - x^2 一共有两个偏微分

对x偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$ = - 2x

对y的偏微分 $\frac{\partial f}{\partial y}$ = 2y

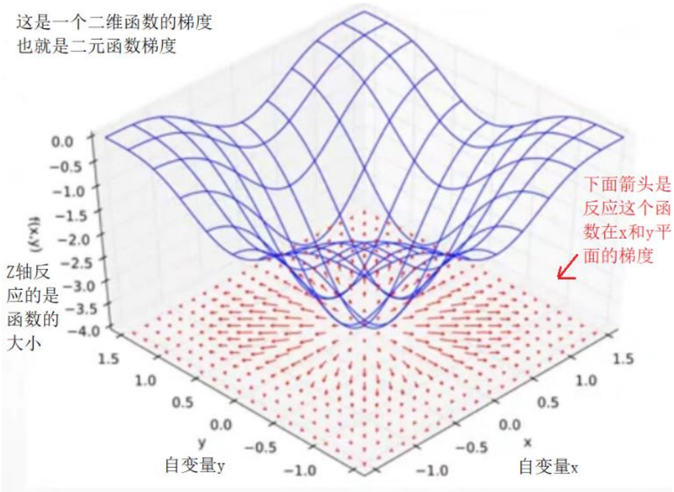
∇ = (-2x ， 2y) 所以梯度就是这样

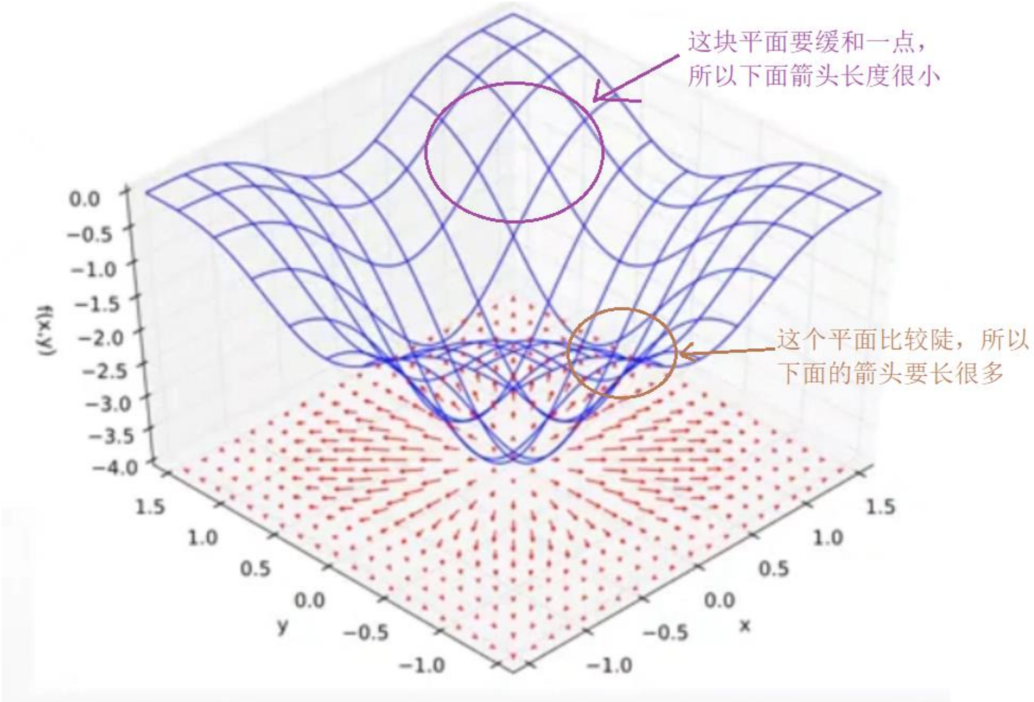
$\nabla_{(0,0)}$ =（0 ， 0） 当x = 0，y=0 专业术语叫0驻点，梯度为0

$\nabla_{(1,1)}$ = (-2 ， 2)

当x = 1，y=1，梯度就是 (-2 ， 2)

所以梯度得到的是一个向量，而不是标量

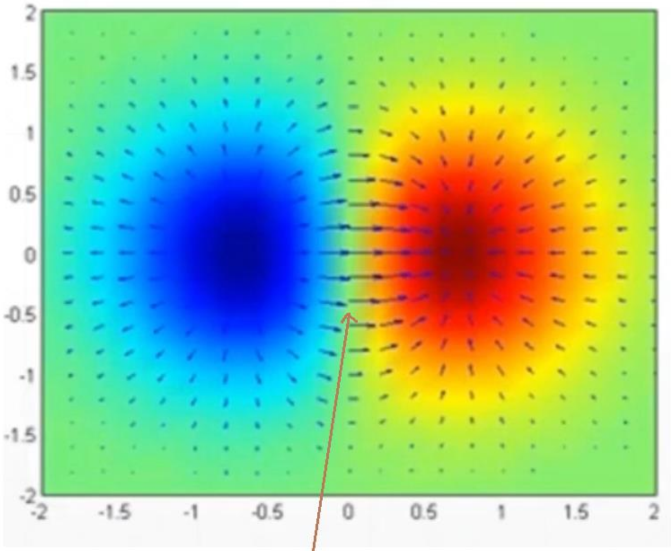




1. 梯度长度反应了函数变化趋势
2. 梯度的方向，表示从中间最小点，向外扩展，也就是朝着函数值越来越大的方向走

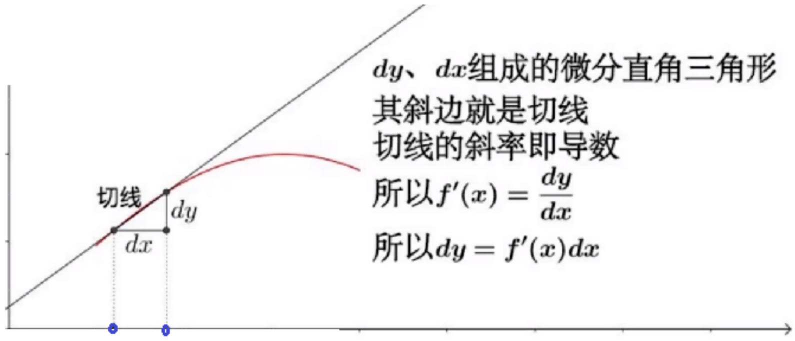
将三维转换成二维色谱图来分析

蓝色代表比较小的值
红色代表比较大的值



中间的箭头比较长，
方向是从蓝色到红色，也就是极小值指向一个极大值

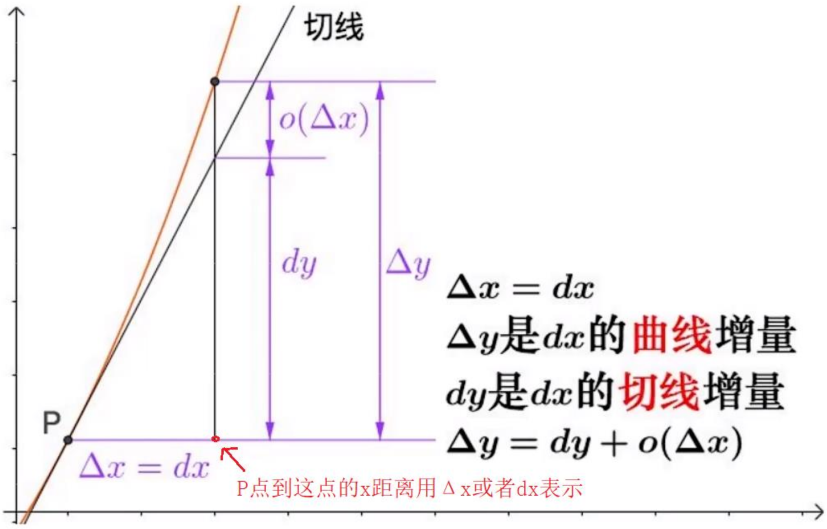
微积分简单计算



$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ 这是微分

$dy=f'(x)dx=\frac{dy}{dx}dx$ （dx和分母dx相约，就剩dy）

把所有点的微分加起来就是积分



这里把dy和dx都放得比较大，其实dx和dy都是微分，接近于0的很小数值

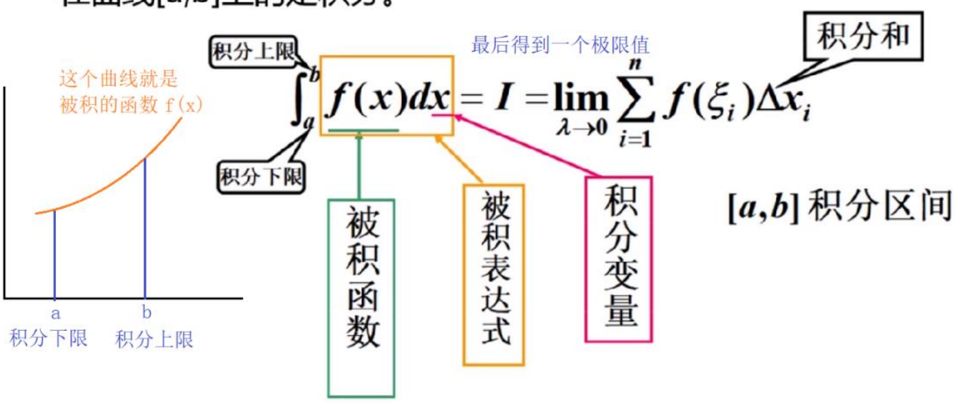
$$\lim_{\Delta x\to 0} dy=0,\ \lim_{\Delta x\to 0} dx=0$$

定积分

当Δx趋近于0 每一小块Δx都很小

如果我算出来的积分总和总是趋近于I值

当 $\|\Delta x\|\to 0$时，总和S总是趋于确定的极限I，则称极限I为函数 $f(x)$ 在曲线[a,b]上的定积分。



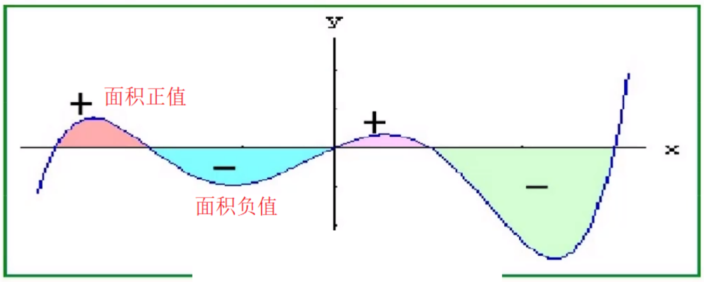
定积分的几何含义

面积的正负值：

$$f(x)>0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$$ 得到面积为正值

$$f(x)<0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$$ 得到面积为负值

代数和，上方为正，下方为负。



牛顿—莱布尼茨公式 这是其中一种解定积分的方法，暂时称为方法1

如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上的一个原函数则：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$\int_a^b x^2\,dx$ = 多少?

x^2 是谁的导数?

$f'(x) = x^2$ 这是求导之后的值，那么求导之前的值呢?

我们前面讲的求导 $ax^{a-1} = x^2$

a − 1 = 2次方 ，那么a应该 = 3

那么a的常数项如何做出1呢?

$\frac{1}{3}x^3$ 这种原函数求导才能得到 x^2

现在原函数有了，使用牛顿-莱布尼茨公式求上面的积分

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$$

再来一题

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x + \sin x - 1)dx.$$

积分一般都是导数，所以要反导，把原函数还原回来

求导公式

$\frac{d}{dx}$ sinX 导数=cosX

$\frac{d}{dx}$ cosX 导数= -sinX

原函数如下

$$原式 = [2\sin x - \cos x - x]$$

因为 $\frac{\pi}{2}$ 属于牛莱公式的b，所以将其代入原函数b = $[2\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}] = 2 - 90$

因为0下限属于a ，将0代入x

a = $[2\sin 0 - \cos 0 - 0] = 0 - 1 - 0$

最后 b − a = $(2 - 90) - (-1) = 3 - \frac{\pi}{2}$

所以 $$原式 = [2\sin x - \cos x - x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 - \frac{\pi}{2}.$$

分段定积分求法

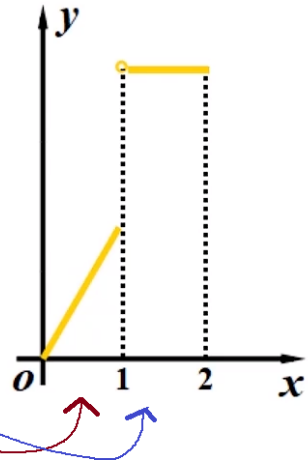
设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$.

在$[1,2]$上规定当$x=1$时，$f(x)=5$，

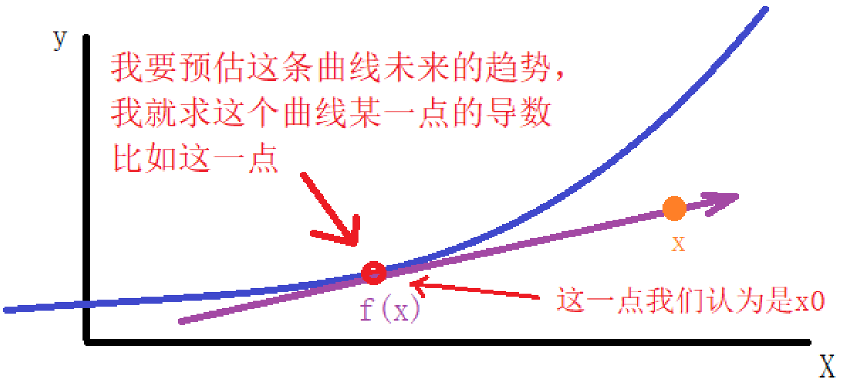
原式 $=\underline{\int_0^1 2xdx}+\underline{\int_1^2 5dx}$

1到2区域面积

0到1区域



泰勒公式



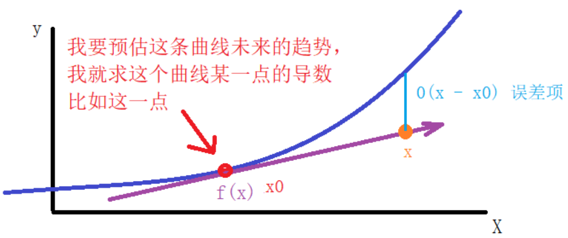
$$f(x) = f(x0) + \underline{f'(x0)}\,\underline{(x - x0)}$$

x0点的斜率 沿着x0点斜率走了x距离

最后加上起点x0 得到移动这个x点的距离

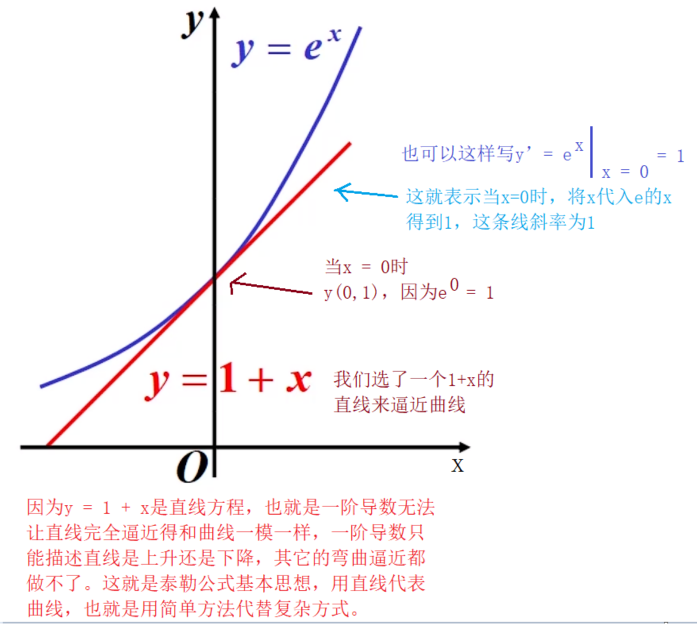
但是奇怪的是x的点并没有落在曲线上移动，而是沿着斜率直线移动

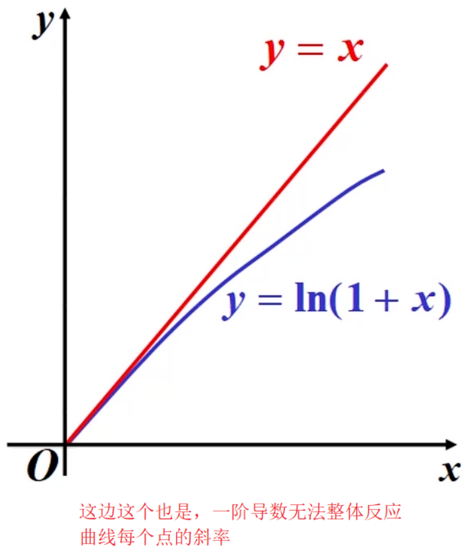
这就是泰勒公式要解决的问题



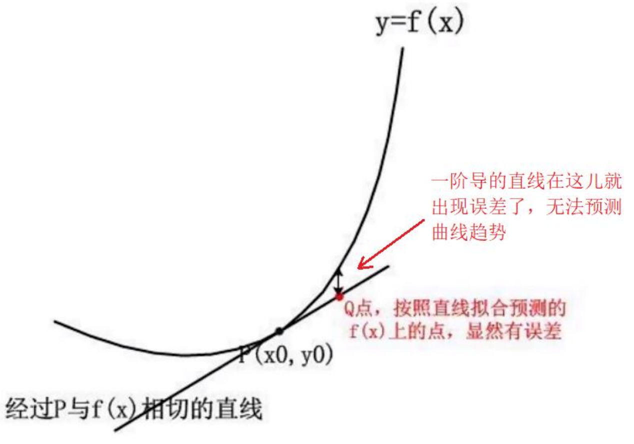
$$f(x) = f(x0) + f'(x0)(x - x0) + \underline{0(x - x0)}$$

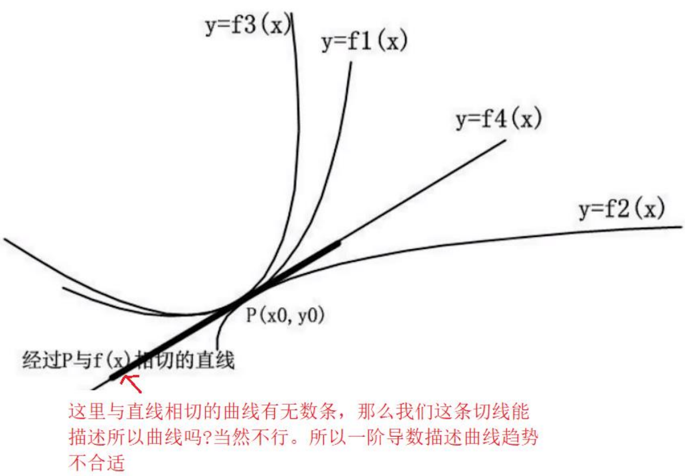
这就是x移动之后离曲线远的误差修正项

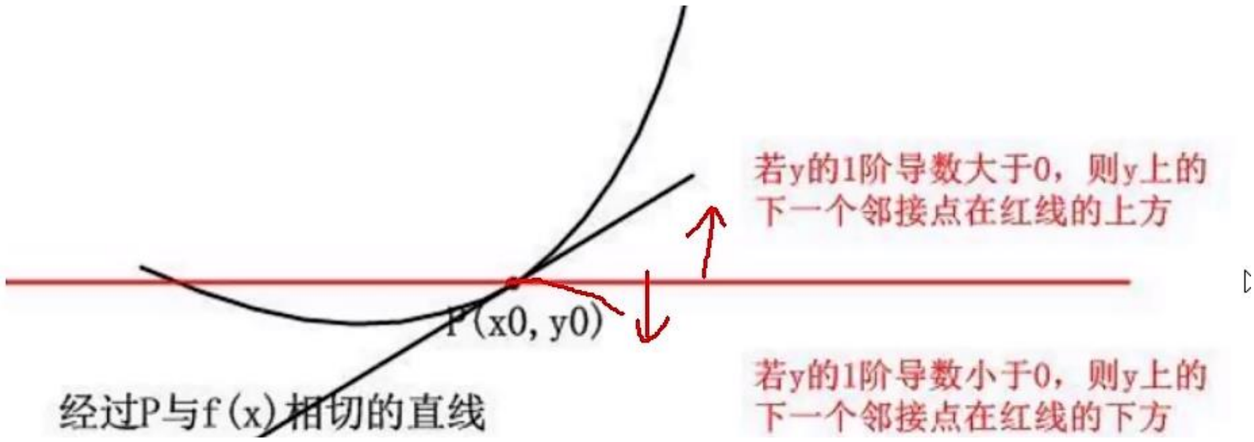




只用一阶导数看起来有点不准呀，能不能再利用一些呢？







一阶导数的直线只能判断曲线是上升还是下降。

如果在x0点相交 $P_n(x_0) = f(x_0)$

先确保我预测的Pn(x0)点 = 曲线上的f(x0)点

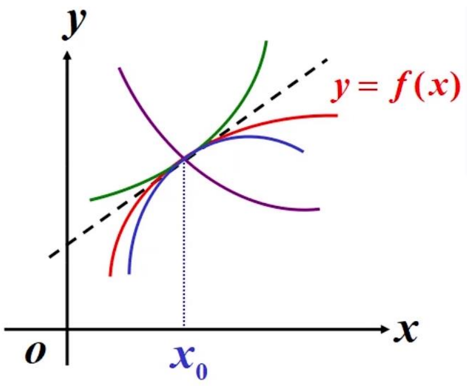
如果有相同的切线 $P_n'(x_0) = f'(x_0)$

然后我用一阶导计算的这条线趋势 = 图中曲线趋势

如果弯曲方向相同 $P_n''(x_0) = f''(x_0)$

然后我用二阶导数计算的弯曲方向 = 图纸曲线的弯曲方向

然后后面的3,4,5,6阶导都要符合上面这种思想要求



泰勒多项式

泰勒多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

我们选择曲线上的一点作为f(x0)

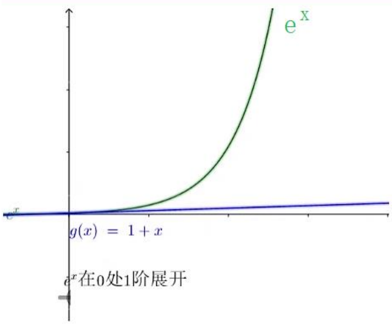
这是阶乘

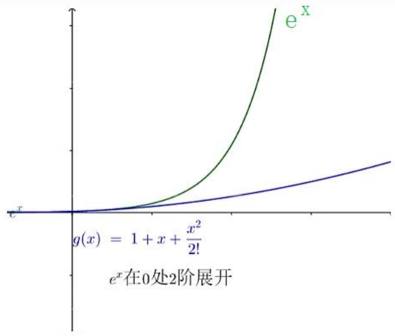
为了方便计算，我们让x0 = 0

麦克劳林公式

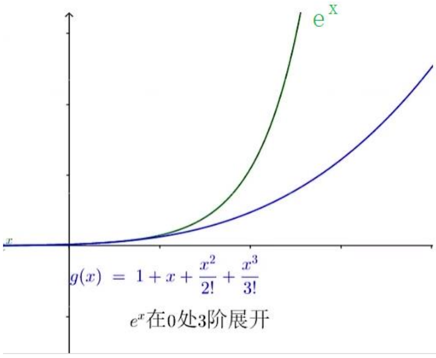
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

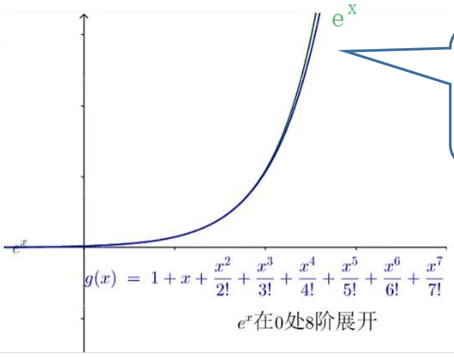
近似可得：$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$





这就是泰勒公式的应用



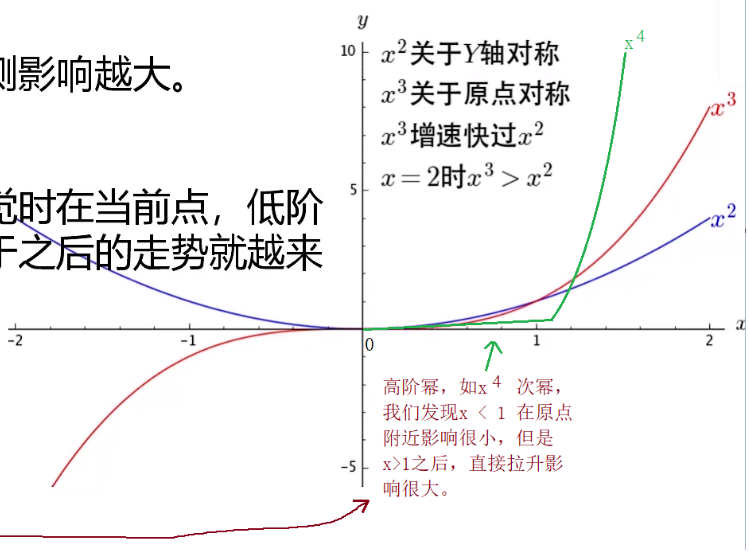


在传感器非线性中，如果有这种曲线的非线性误差，可以用泰勒方式补偿

阶数越高增长速度越快。

观察可发现，越高次项在越偏右侧影响越大。

对于一个复杂函数，给我们的感觉时在当前点，低阶项能更好的描述当前点附近，对于之后的走势就越来越依靠高阶的了。



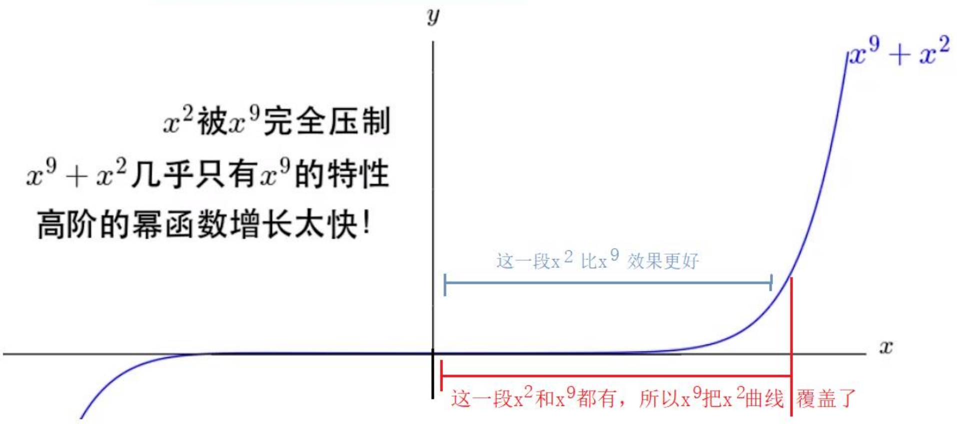
我们再来看看分母阶乘的作用

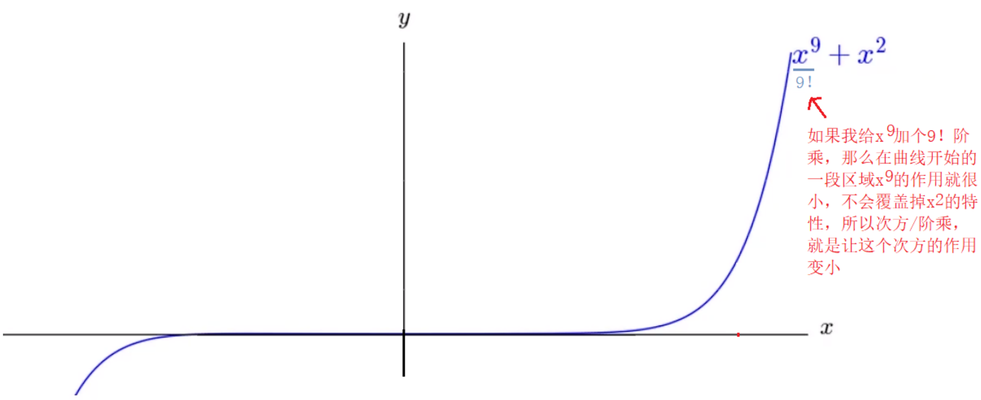
近似可得：$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

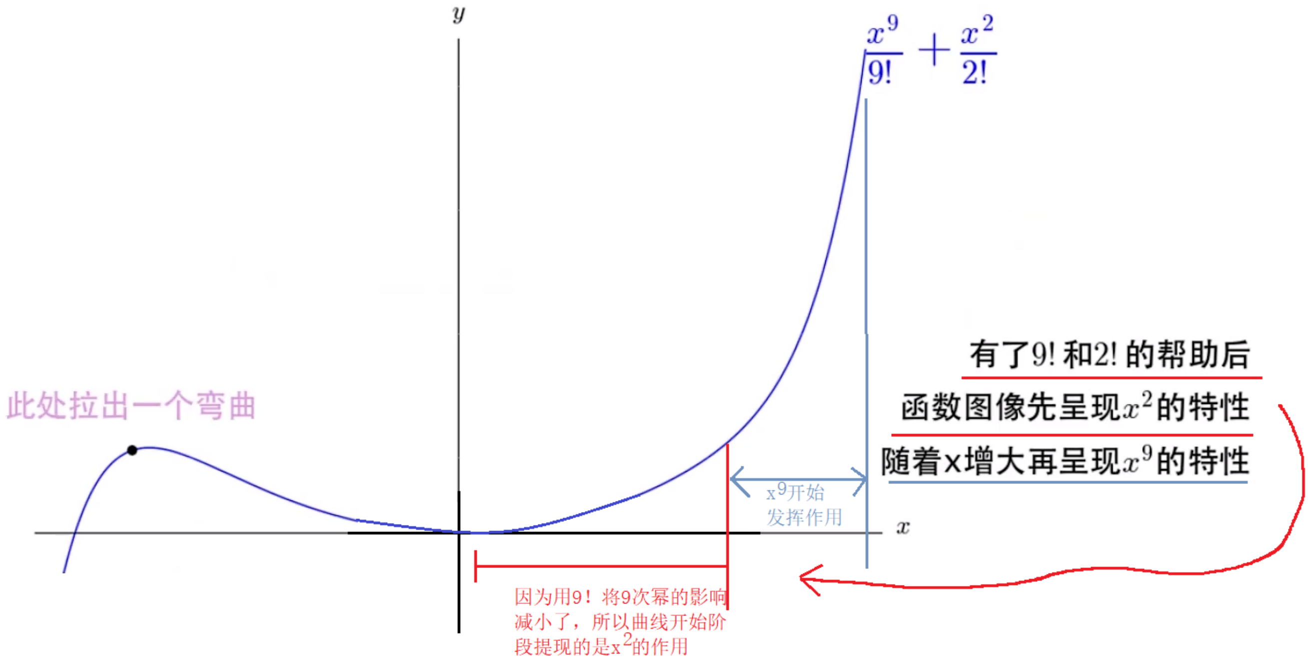
这个阶乘有什么用?

如果把9次的和2次的直接放在一起，那2次的就不用玩了。

但是在开始的时候应该是2次的效果更好，之后才是慢慢轮到9次的呀！

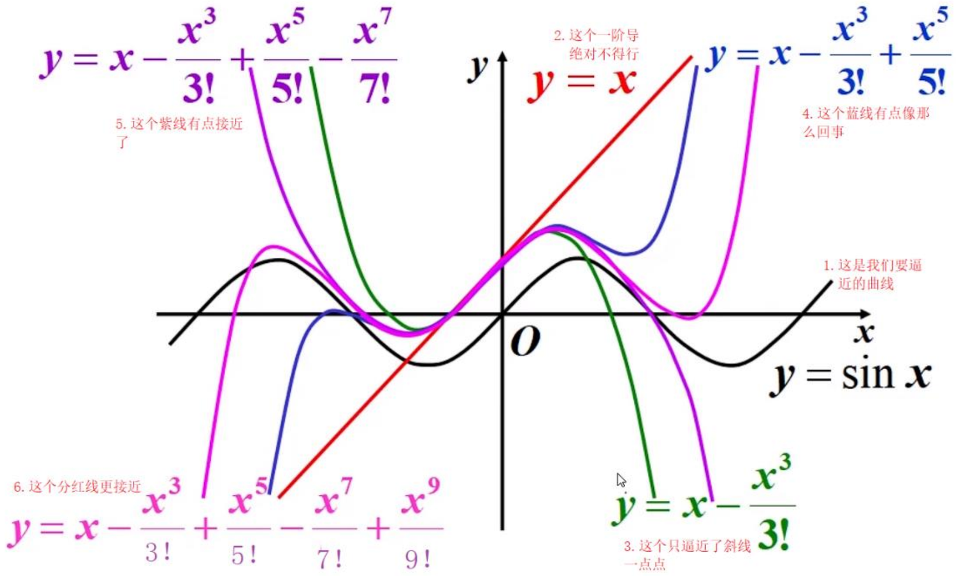






✔ 多项式逼近

✎ 逼近 $\sin x$



例1：求函数 $f(x)=e^x$ 的n阶麦克劳林展开式.

将麦克劳林公式带进去 ✎ 近似可得：$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

解：因为 $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$，

所以 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$

故

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

$$+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

例2：求函数 $f(x)=\sin x$ 的n阶麦克劳林展开式.

解：因为 $f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=-\cos x,$

一阶导 也就是一次幂　二阶导 也就是二次幂　三阶导 也就是三次幂

$$f^{(4)}(x)=\sin x,\cdots,f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

所以 $$f^{(n+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\cdot\pi\right),$$

令$n=2m$，于是有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $$R_{2m}(x)=\frac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1)$$

这种泰勒公式能给我解决什么问题呢?，在解决问题之前我们看看导函数的，零点，驻点，极值点，拐点

拉格朗日乘子法

- 如何求极值?
  - 给个函数：$z=f(x,y)$ 如何求其极值点呢?
  - 简单来说直接求它的偏导不就OK啦嘛

$$f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0$$

对x求偏导，然后人为让偏导=0　对y求偏导，然后人为让偏导=0

这种二元的函数求极值，就是求偏导

最后解x和y的方程组就是了

  - 现在问题难度加大了，如果再加上约束条件呢？ 面积固定，求体积最大=?

$$V(x,y,z)=xyz$$ 现在主要的是如何对三维(三元)函数求极值点

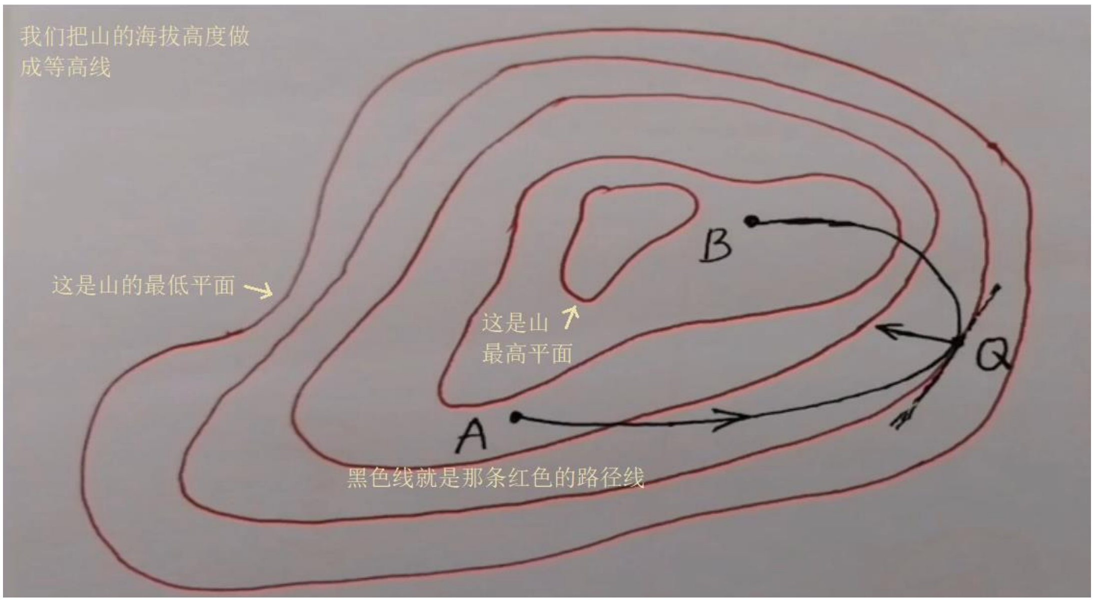
$$2xy+2yz+2zx=S$$ S是一个常数　现在要求V(x,y,z)的极值，同时伴随着这个约束条件

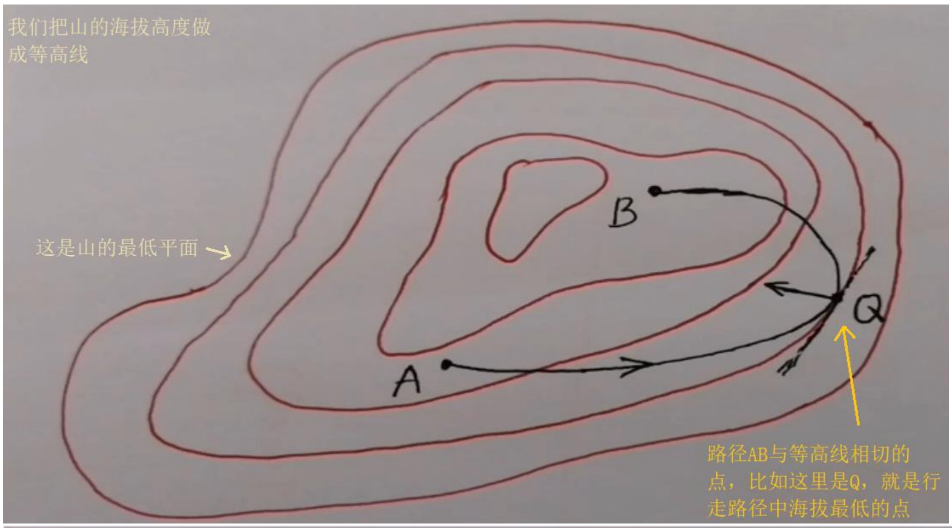
拉格朗日乘子法，就是解决自变量收到特定约束，而且自变量比较多的应用场景，求极值。

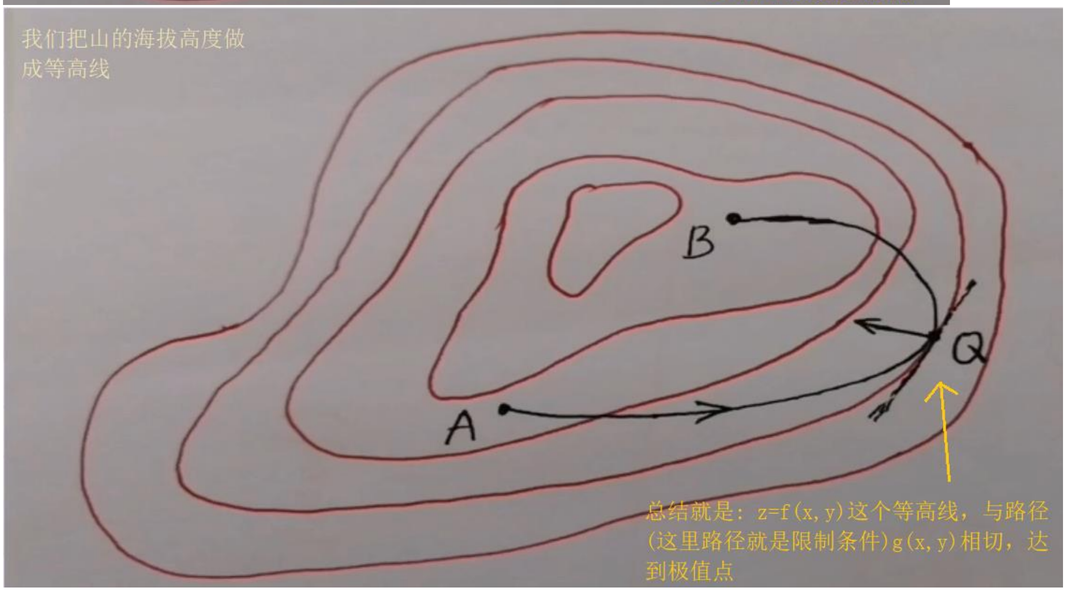
1. 我们先把山的表面看成一个二元函数图像，也就是一个曲面 z = f(x,y)

2. 将你行走的红色唯一路径看成一条曲线 g(x,y) = 0

3. 你行走过程中，经历海平面最低点，等价于函数z = f(x,y) 在限制条件g(x,y)=0 情况下的极小值


我们把山的海拔高度做
成等高线
这是山的最低平面
B
这是山
最高平面
Q
A
黑色线就是那条红色的路径线


我们把山的海拔高度做
成等高线
这是山的最低平面
B
Q
A
路径AB与等高线相切的
点，比如这里是Q，就是行
走路径中海拔最低的点


我们把山的海拔高度做
成等高线
B
Q
A
总结就是：z=f(x,y)这个等高线，与路径
(这里路径就是限制条件)g(x,y)相切，达
到极值点

拉格朗日乘子法(乘数法)： 函数z=f(x, y) 在约束条件g(x, y)=0下，可能产生的极值点

$$\underbrace{L(x,y)}_{\text{极值点}} = \underbrace{f(x,y)}_{\text{山平面}} + \underbrace{\lambda}_{\text{拉格朗日乘数}} g(x,y)$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 & \text{对x求偏导} \\ f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0 & \text{对y求偏导} \\ g(x,y) = 0 & \text{约束条件} \end{cases}$$

最后解方程，得到极值点坐标(x, y)

拉格朗日乘子法适合自变量多余两个以上的情况下使用

函数: $u = f(x,y,z,t)$ 在条件 $\varphi(x,y,z,t)=0$，$\psi(x,y,z,t)=0$ 下的极值。

构造函数: $F(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) + \underbrace{\lambda_1\varphi(x,y,z,t)}_{\text{人为加入}\lambda\text{ 1个约束条件}} + \underbrace{\lambda_2\psi(x,y,z,t)}_{\text{人为加入}\lambda\text{ 2个约束条件}}$

人为构造的函数

实例

函数: $u = x^3y^2z$ 约束条件: x, y, z之和为12，求其最大值。

约束条件是12，就是x+y+z的值

构造函数: $F(x,y,z) = x^3y^2z + \lambda(x+y+z-12)$

构造的时候必须让等式右边为0，(x+y+z)=12 变成 x+y+z - 12 = 0

分别求偏导:

$$\begin{cases} F'_x = 3x^2y^2z + \lambda = 0 & \text{对x求偏导} \\ F'_y = 2x^3yz + \lambda = 0 & \text{对y求偏导} \\ F'_z = x^3y^2 + \lambda = 0 & \text{对z求偏导} \\ x + y + z = 12 & \text{还原约束条件} \end{cases}$$

唯一驻点 (6,4,2)

解方程组后得到

$u_{max} = 6^3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 6912$ 最后将6，4，2代入 $u = x^3y^2z$ = 6912

不定积分

如果我知道了函数的导数公式，那么我能不能知道这个导数的原函数呢?
不定积分就是将函数导数是什么转换成原函数

例如：如果有瞬时速度的计算公式，可不可以找到时间和位移的关系?

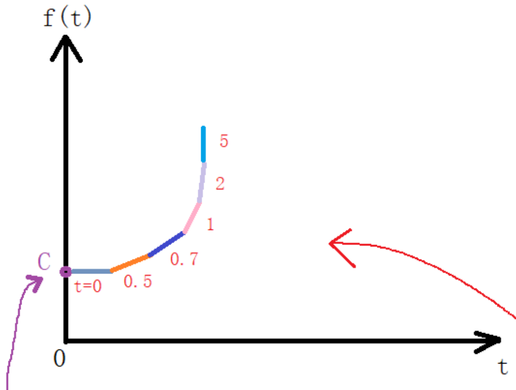
$f(t) = ?$ 我们不知道这个函数是干什么的?

$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) = t^2$ 但是我们知道这个函数的导数

时间设置	测试得到的数据	预估斜率
t	f'(t) 也就是 t^2	切线斜率
0	0	
0.5	0.25	
0.7	0.49	
1	1	
2	4	
5	25	

加入我们做某项物理实验，得到了这个规律

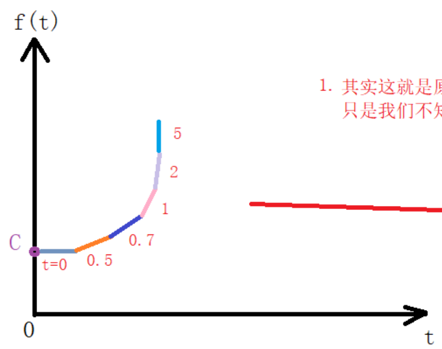
这个瞬时速度就是原函数在某个时间点上，切线的斜率是多少。



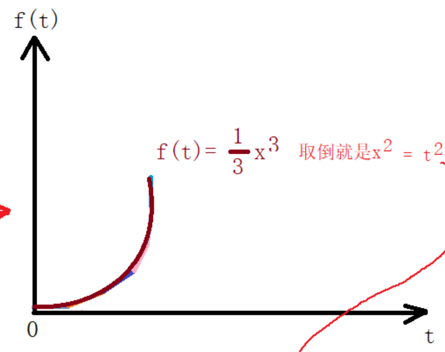
时间设置	测试得到的数据	预估斜率
t	f'(t) 也就是 t^2	切线斜率
0	0	
0.5	0.25	
0.7	0.49	
1	1	
2	4	
5	25	

因为我们不知道原函数是什么公式，所以只有随意在f(t)上找一点，记录为C

这就是t每一个时间段的斜率，连接起来



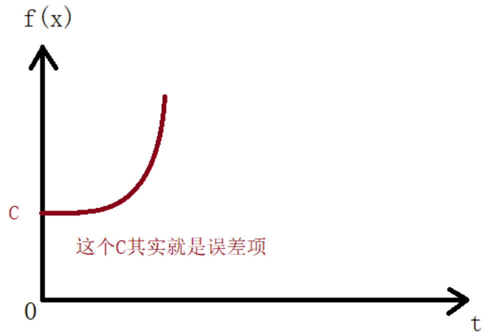
1. 其实这就是原函数，只是我们不知道而已

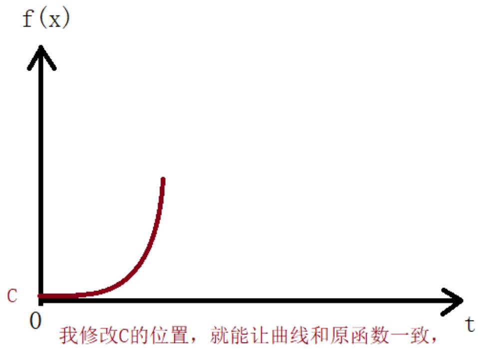


$f(t) = \frac{1}{3}x^3$ 取倒就是$x^2 = t^2$

2. 所以我根据实验结果，先做成线段，然后连接起来。
因为我们不知道原函数，所以C就随意区一点

时间设置	测试得到的数据	预估斜率
t	f'(t) 也就是 t^2	切线斜率
0	0	
0.5	0.25	

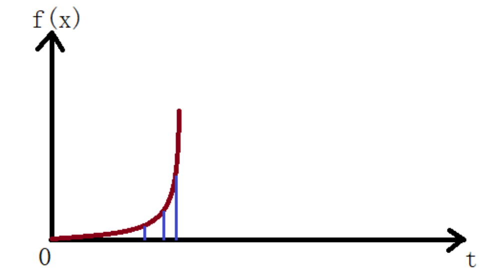




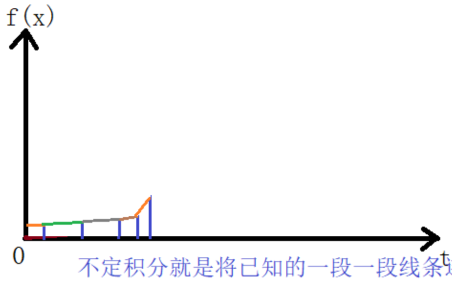
我修改C的位置，就能让曲线和原函数一致，
所以在不定积分里面C是一个常数

f(t) + C

f'(t)导数图像和原函数其实是一样的，只是截距没对，所以+C补偿解决，这样就是原函数图像了



我们在知道原函数的情况下，我们是将曲线变成一段一段的，求它每个线段的斜率

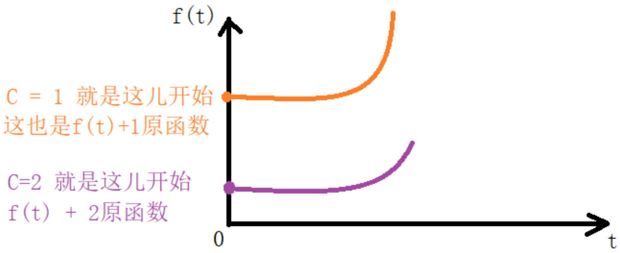


不定积分就是将已知的一段一段线条连接起来形成原函数曲线

$$\int \underbrace{f'(t)}_{\text{原函数的导数}}\,dt = \underbrace{f(t) + C}_{\text{这整个是原函数}} \leftarrow \text{任意常数}$$

不定积分就是已知导数求出原函数(求出的原函数不是唯一的)

不定积分求出的原函数为什么不是唯一的？其实这就和C有关系



所以不定积分导数求出的原函数是曲线形状一样，但是开始的位置C不一样

F(x) 原函数

$F'(x) = \underset{\text{求导}}{f(x)}$

$\int f(x)dx = F(x) + C$

不定积分基本公式

① $\int x^u dx$ 求导 $(\frac{1}{u+1}x^{u+1})' = x^u \quad (u \neq -1)$

所以 $\int x^u dx = \frac{1}{u+1}x^{u+1} + C$

② $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

③ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

④ $\int e^x dx = e^x + C$

三角函数不定积分求导公式

三角函数求导公式 与不定积分关系

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$ 三角求导

⑤ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ ⑥ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$ 三角求导

⑦ $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$ ⑧ $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

$(\sec x)' = \sec x * \tan x$ $\qquad (\csc x)' = -\csc * \cot x$

⑨ $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$ ⑩ $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

反三角函数不定积分

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (\mathrm{arc}\ \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

这两种反三角函数的不定积分都是下面这种

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \mathrm{arc}\ \sin x + C = -\mathrm{arc}\ \cos x + C$$

$$(\mathrm{arc}\ \tan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (\mathrm{arc}\ \cot x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \mathrm{arc}\ \tan x + C = -\mathrm{arc}\ \tan x + C$$

所以这种反三角函数的不定积分，不管你算出来是负的还是正的，都是一样的结果，只是表现形式不一样

不定积分运算法则

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k(fx)dx = k\int f(x)dx$$

常数和函数求积分
常数k是与dx无关的，所以
常数可以放在积分符号外边

积分运算只有加减，没有乘法和除法运算法则

所以一旦遇到乘法或者除法的时候，一定要想办法将它转换成加法或者减法

例：$\int (x^2 - 3)dx$ 括号里面的数分解

$= \int x^2 dx - 3\int dx$

就是这种形式

$\int x^u dx$ 但是u ≠ -1，不然就是不是这个公式来计算

$\frac{1}{u+1}x^{u+1}$

$(x')=1$ 求导

$3\int 1dx$

$\int 1dx = x + C$

$= 3 * x + C$ （常数不写）

$= 3x$

所以 $= \int x^2 dx - 3\int dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$

$$\int (x^2 - 3)dx$$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$ 这个结论对不对，我们直接将 $\frac{1}{3}x^3 - 3x + C$ 求导

得到 $x^2 - 3$ 证明不定积分计算正确

例2：$\int x(x-1)dx$

这是个乘法，只有积分
内部先做乘除。然后再
积分

$\int (x^2 - 1)dx$ 内部先做了乘法

$= \int x^2 dx - \int x\, dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$

例3：$\int \frac{x^3 - x - 1}{x^2}dx$ 这是除法，除法在积分也是没有运算法则，先内部进行除法，内部一项一项除开

$\int (1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})dx$

x / x^2　　$1 / x^2$

$= \int dx - \int \frac{1}{x}dx - \int x^{-2}dx$

1求积分
1就不写了

有积分公式

将 $\frac{1}{x^2}$ 改成 x^{-2} 这样就有积分公式了

$= x - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

例4：$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$ 将1 变成 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$= \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x})dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

先分解

$\frac{1}{\cos x} * \frac{1}{\cos x}$ 我们知道 $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

我就做成 $\sec x * \sec x = \sec^2 x$

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

$\frac{1}{\sin x} = \csc x$

$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

$= \tan x - \cot x + C$

不定积分凑微分法

不定积分凑微分法

$\int (\underline{2x-1})^{10}dx$ 凑微分法主要用于被积函数为复合函数的地方，比如(2x − 1) 无法分解成积分公式可以运算的形式，就用凑微分法

$\int f(\square)\,dx$ 我将复合函数做成整体，用 $\square$ 表示
这种不定积分无法套用公式直接求解

$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)}_{\text{反求导得原函数}} + C$ 因为基本积分公式是这样

$\int f(\square)\,d\square = F(\square) + C$ 我们用框框将x里面的复合函数看成一个整体

例1 $\int (2x-1)^{10}dx$ 我们直接想到 $\int x^{10}$ 这种形式，将(2x-1)当做x

就得到对应的积分公式 $\int x^{10}dx = \frac{1}{11}x^{11} + C$

将积分公式里面的被积(符合函数看成整体方框) $\int \square^{10}d\square = \frac{1}{11}\square^{11} + C$

$\int (2x-1)^{10}\underbrace{d(2x-1)}_{\text{凑微分}}$

$\int (2x-1)^{10}\frac{d(2x-1)}{2}$ 将凑微分项(2x − 1)求导 = 2
这其实就是算的d(2x − 1)这个整体的微分

$\int (2x-1)^{10}\,\underline{2dx}$ 也就是整体和前面dx比较
d(2x − 1) 与 dx进行比较 $\int (2x-1)^{10}\,\underline{dx}$

所以微分 = 导数 ＊ 自变量的微分
= 2 ＊ dx

$\int (2x-1)^{10}\,\underline{dx} \qquad \underline{2dx}$

凑微分项= 原公式微分项 我们必须让2dx 等于原公式的dx

$$\int (2x-1)^{10}\frac{1}{2}2dx$$

我只有在2dx前面 $* \frac{1}{2}$ ，将2约掉
但是 $\frac{1}{2}$ 是个常数，所以要放在积分符号前面，所有常数都要放积分符号前面，这是规则

$$\frac{1}{2}\int (\underline{2x-1})^{10}\,2dx$$

求导 $\frac{1}{11}(2x-1)^{11} + C$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{11}(2x-1)^{11} + C$$

$$= \frac{1}{22}(2x-1)^{11} + C$$

$\int f(x)\,dx = \int f(\square)\,d\square$ 凑微分法的要求

如果要使用这个公式，必须要求 $d\square = kdx$
也就是凑微分项求出来是个常数倍
如果凑微分求导结果不是常数倍就不能用凑微分法

$\int (\underline{2x-1})^{10}dx$

也就是整个整体必须是一次函数，才能用凑微分法

如果是 $\int (\underline{2x^2}-1)^{10}dx$ 这种就不是一次函数，是二次函数，就不能用凑微分法

例2: $\int e^{-3x}dx$ 积分运算公式 $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

我们可以将以上原始做成 $\int e^{\square}d\square = e^{\square} + C$ 正好 -3x是一次函数，可以凑微分

$\int e^{-3x}dx$

$= \int e^{-3x}\,\underline{d(-3x)}$ 求导-3

dx
d(−3x) 比较，要求这两个相等

$= -\frac{1}{3}\int e^{-3x}3dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$

例4:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx$$

我们知道凑微分，整体必须是一次函数，如果把根号看成整体是不行的

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx$$

只有把根号里面看成一个整体然后用 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$

$= 2\sqrt{x} + C$

$$= \int (4-3x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int (4-3x)^{-\frac{1}{2}}d(4-3x)$$

$$= -\frac{1}{3} * 2(4-3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

例3:

$$\int \frac{1}{4-3x}dx$$

积分公式 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$= \int \frac{1}{4-3x}d(4-3x)$$

当做x

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{4-3x}3dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|4-3x| + C$$

下面再巩固下凑微分法

不定积分凑微分法

dx 做成 $\frac{1}{A} * d(\underline{A}x + \underline{B})$

常数 常数

$$\int \cos(3x+5)dx$$

我们发现cos3x + cos5 没有办法做不定积分求解，积分表里面没有这种写法所以不能这样直接去分解cos(3x + 5)

$$= \int \cos(3x+5)\ d(3x+5)$$

$d(\underline{A}x + \underline{B})$

$$= \frac{1}{3}\int \cos(3x+5)\ d(3x+5)$$

d(3x + 5)求导 (3x + 5)' dx = 3dx

$\frac{1}{A} * d(\underline{A}x + \underline{B})$

$$= \frac{1}{3}\int \cos(3x+5)\ 3dx$$

$$\int \frac{1}{3x+1}dx$$

如果将其看成 $\int \frac{1}{x}dx$

就能得到 $= \ln|x| + C$

$$\int \frac{1}{3x+1}dx$$

$$\int \frac{1}{3x+1}d(3x+1)$$

求导(3x + 1)'=3

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}3d$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+1|\ \cancel{\frac{1}{3}}\cancel{3}d$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$$

分部积分法

分部积分法

$$\int \ln x\, dx$$

lnx没有在积分表里面找到求导的公式，怎么办呢?

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

分部计算法公式

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{v}$$

$$= \underbrace{\ln x}_{u} * \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x\,d}_{vd}\, \underbrace{\ln x}_{u}$$

我们使这个u变成dx结尾的式子

lnx 求导 $\frac{1}{x}$ dx

$$= x \ln x - \int x * \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x\ln x - \int 1dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

原函数

分部积分法

$$\int \arctan x\ dx$$

$$\int \underbrace{\arctan x}_{u}\ \underbrace{dx}_{v}$$

$$= \arctan x * x - \int x\,d\ \underbrace{\arctan x}_{求微分}$$

只要这儿没有dx，就要想办法求微分做成dx

arctanx 求导 $\frac{1}{1+x}$ dx

$$= x \arctan x - \underline{\int x * \frac{1}{1+x^2}\, dx}$$

用凑微分法 将x和dx合并

$xdx = d(\frac{1}{2}x^2)$

$$= x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2}\, \underline{d(\frac{1}{2}x^2)}$$

想办法让着一段变成$1+x^2$

因为$\frac{1}{2}$是系数，将其拿到积分号前

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, \underline{d(x^2+1)}$$

直接在微分里面+1 微分结果是不变的，因为1是常数，求导为0

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

不定积分换元法

换元法(根式换元法)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$$ 有没有更好的方法去掉根号求解?

换元公式 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$　令 $\sqrt[n]{ax+b} = t$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$$

令 $\sqrt{2x+1} = t$　要将根号里面的x解算出来

这个t就是公式　两边取平方，取出根号

$2x+1 = t^2$　　$x = \frac{t^2-1}{2}$　一样的

现在x换成了t运算　　$x = \frac{1}{2}(t^2-1)$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$$ 现在又要来解决dx运算 就是对 $\frac{1}{2}(t^2-1)$ 括号里面的t求导 $x = \frac{1}{2}2t = t$

那么dx = t

微分是函数的导数 * 自变量的微分
也就是自变量t * dt

dx = tdt

原式 $= \int \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t} * tdt$

通过换元之后积分式就没有根号了

$$\int \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t} * tdt$$

将 $\frac{1}{2}$ 常数拿到积分符号前面

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(t^2-1)}{\cancel{t}} * \cancel{t}dt = \frac{1}{2}\int (t^2-1)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\frac{1}{3}t^3} - \underline{t}\right) + C$$

因为积分是关于x的被积函数，所以我们要把t写回x函数形式

$$= \underline{\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}} - \underline{\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}} + C$$

三角代换法

换元法(三角换元法)

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$　　$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

定积分计算

我们知道，不定积分就是求导函数的逆运算

例：sinx 求导

$(\sin x)' = \cos x$ sinx求导就是cosx

那么cosx是谁求导得到的呢?

$\int \cos x \, dx = \sin x$

这就表示cosx 到底是谁求导得到的? 当然是sinx求导得到的cosx

$\int \cos x \, dx$ 这种表示sinx求导不完全正确

比如以前是sinx + 2 求导也是cosx

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$ 所以加上C这个常数才对，证明你原函数可能是sinx +2 或者sinx +4

求导公式

$(kx)' = k$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\int k dx = kx + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

牛顿-莱布尼茨公式定积分用法

$\int_a^b k dx = (kb + C) - (ka + C)$

$= kb - ka$ 常数抵消

$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} + C - \frac{a^{n+1}}{n+1} + C$

其实定积分就是采用不定积分的积分公式，然后再用牛顿-莱布尼茨公式相减就对了

定积分实际运算

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0$$

$$= e - 1$$

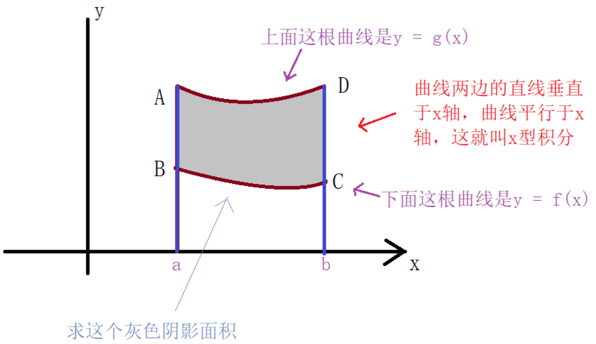
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$$

先求逆导

再写上下限

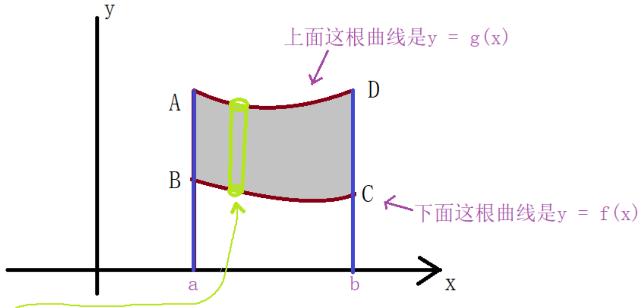
$= 0 - (-1) = 1$

定积分求图形面积



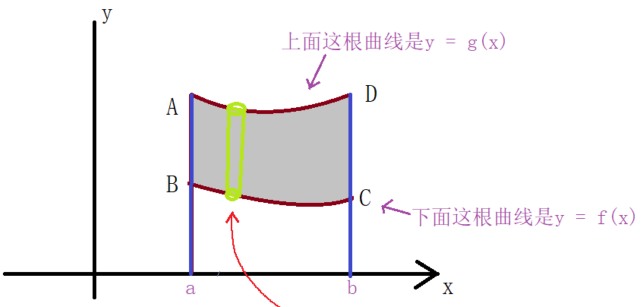
S(阴影面积) = $\int_a^b$

从a到b就是阴影面积
因为是x型，所以是对x积分，就是dx



什么叫对x积分?
就是a到b的面积是沿着x方向计算的
然后取极小的x宽度做积分 所以用d+x表示

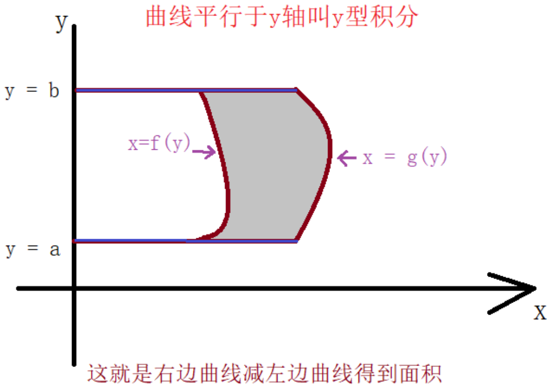
S(阴影面积) = $\int_a^b \quad dx$



S(阴影面积) = $\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$

意思就是确定一个x的位置，比如这儿，然后上边曲线取一点，下边曲线取一点，然后相减，得到这一溜的面积

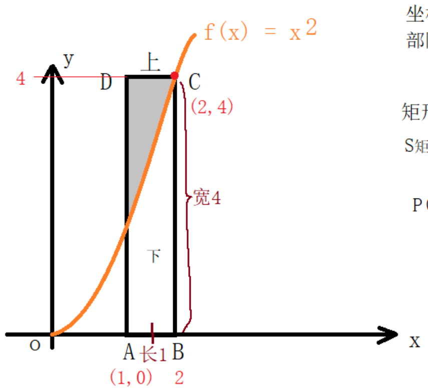
曲线平行于y轴叫y型积分



这就是右边曲线减左边曲线得到面积

S(阴影面积) = $\int_a^b \left[g(y) - f(y)\right] dy$

例1:



坐标点A(1, 0)，坐标点C(2, 4)，函数f(x) = x^2，若在矩形内部随机取一点，则此点取自阴影部分的概率等于?

矩形面积 = 长 * 宽 = 1 * 4 = 4

$S_{矩ABCD}$ = 4

P(概率) = $\dfrac{S_{阴影面积}}{S_{矩ABCD}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{4} = \dfrac{5}{12}$

$S_{阴影面积} = \int_1^2 (4 - x^2)\, dx$

意思就是矩形上边 = 4，减去曲线就是x^2，得到阴影面积

解方程 $\int_1^2 (4 - x^2)\, dx$

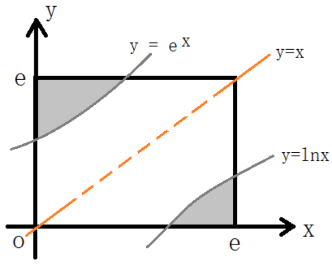
4的原函数就是4x，就是求反导 | x^2 原函数就是 $\frac{x^3}{3}$

$$\int_1^2 (4 - x^2)\, dx$$

$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \underbrace{\left(8 - \frac{8}{3}\right)}_{上限2代入} - \underbrace{\left(4 - \frac{1}{3}\right)}_{下限1代入} = \frac{5}{3}$$

$S_{阴影面积} = \frac{5}{3}$

例2　　这是一个边长为e的正方形，在正方形中随机撒一粒黄豆，则黄豆落在阴影部分的概率为?

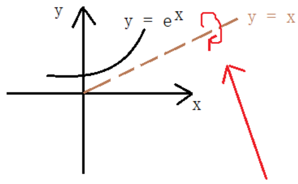


S正(正方形面积) = 长*宽 = e * e = e^2

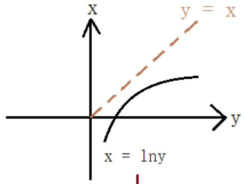
因为阴影y = e^x和y=lnx是对称的，也就是y=lnx是y = e^x的反函数

因为两个面积大小相识，我们就求一边的面积就行了

反函数

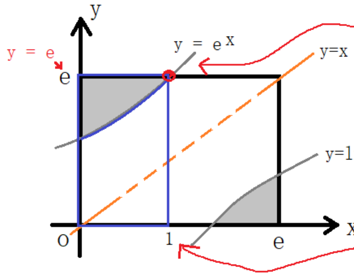


如果我将曲线，以y=x直线为中心，对称旋转180度这就形成了反函数



其实就是y = e^x

x = lny 就是y = e^x的反函数，反函数就是曲线的对称面



我们计算蓝色矩形框的面积，和上下边界的曲线

这个点是e^x和y=e的交点

所以直接联立两个方程，求出x

$\begin{cases} y = e^x \\ y = e \end{cases}$　x = 1

所以 s阴 = $2*\int_0^1 (e - e^x)\,dx$

这就是方形上边y = e 减去下边曲线e^x 得到上边阴影面积

这个2是算上第2个阴影的面积 ，如果只算一边阴影，不需要乘2

$$\int_0^1 (e - e^x)\,dx = (ex - e^x)\Big|_0^1 = \underbrace{(e - e)}_{\text{上限1代入}} - \underbrace{(0 - e^0)}_{\text{下限0代入}} = 1$$

e作为常数 原函数就是ex

如果加入对称边的阴影就是2倍

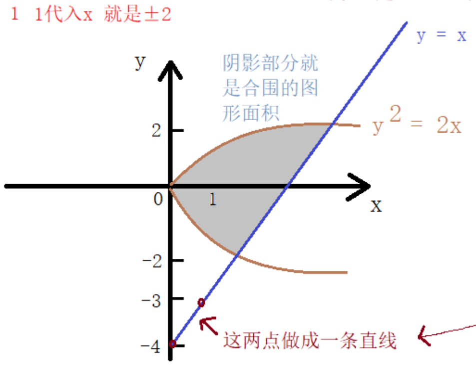
$$2*\int_0^1 (e - e^x)\,dx = (ex - e^x)\Big|_0^1 = 2[(e - e) - (0 - e^0)] = 2$$

例3: $y^2= 2x$, y = x - 4，求这两公式合围的图形面积

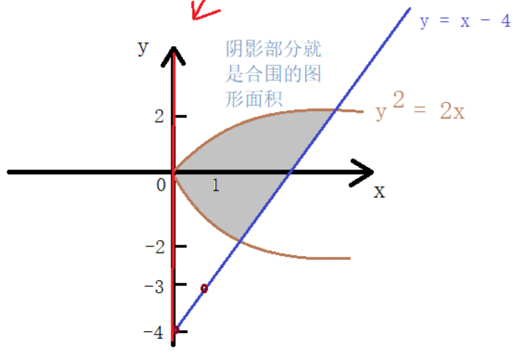
这就是开口向右的抛物线

如x = 1 1代入x 就是±2

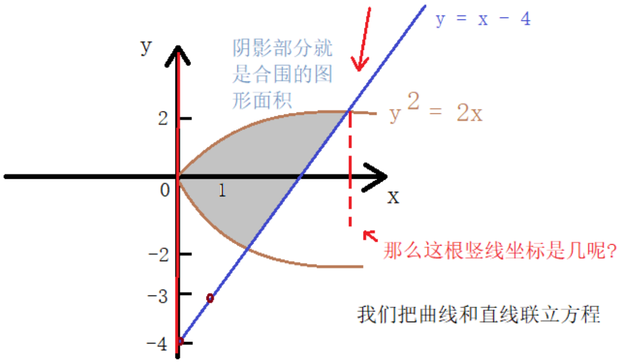
0代入x是 -4 ，1代入x是 -3



1. 先找图形最左边的边界，就是x = 0 这个边界



2. 当x用来做，再找右边的边界
就是阴影部分结尾的右边界



我们把曲线和直线联立方程

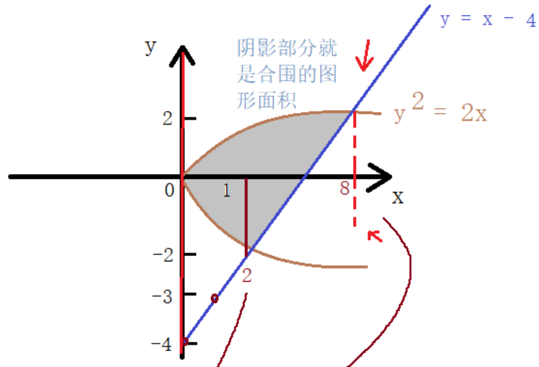
$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$= (x - 4)^2 = 2y$$

因式子分解 = $\dfrac{x^2 - 10x + 16 = 0}{(x - 2)(x - 8)}$

所以就有2和8两个点

3. 联立方程结果



$$\boxed{\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}}$$

$$= (x - 4)^2 = 2y$$

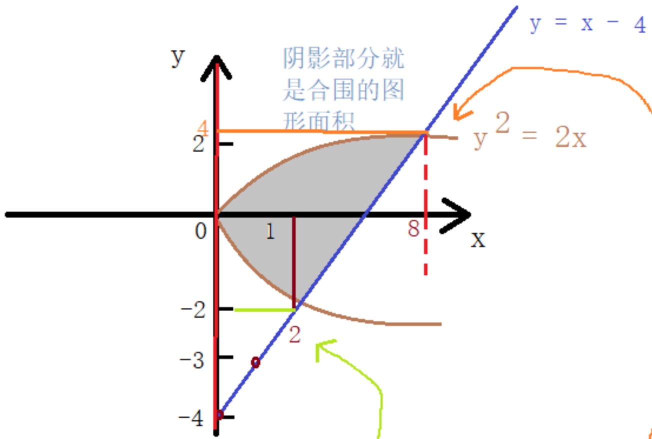
因式子分解 = $\dfrac{x^2 - 10x + 16 = 0}{(x - 2)(x - 8)}$

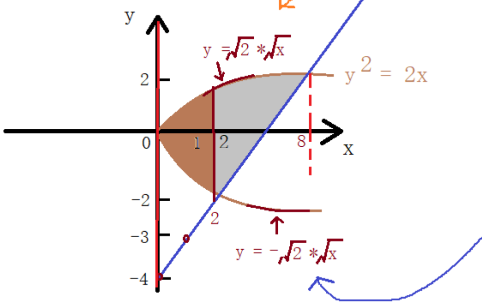
所以就有2和8两个点

我们将这个两个 x 点 2 和8 代入联立方程，
得到两个点y坐标

$y^2 = 2x$ 代入$x = 2$
$y = -2$

$y = x - 4$ 代入$x = 8$
$y = 4$





$y^2 = 2x$ 等同于 $y = \pm\sqrt{2x}$ 等同于 $\pm\sqrt{2} * \sqrt{x}$

我们用分段函数先算第一部分阴影，就是$x = 0$ 到$x = 2$范围

在$x = 0$~2范围上方曲线减去下方曲线得到第一部分阴影面积

$$S = \int_0^2 \Big[\underbrace{\sqrt{2} * \sqrt{x}}_{\text{上方曲线}} - \underbrace{(-\sqrt{2} * \sqrt{x})}_{\text{下方曲线}}\Big]dx + \int_2^8 \Big[\underbrace{\sqrt{2} * \sqrt{x}}_{\text{上方曲线}} - \underbrace{(x - 4)}_{\text{下方直线}}\Big]dx$$

灰色部分的阴影面积

$$= \int_0^2 2\sqrt{2}\sqrt{x}\,dx$$

常数是可以提到积分前
积分内部只留未知数和公式

$$= 2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^8 (\sqrt{2} - x^{\frac{1}{2}} - x + 4)\,dx$$

原函数是指数+1

$$= \underbrace{2\sqrt{2} * \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2}_{\text{再用牛莱公式进行计算}} + \underbrace{\left(\sqrt{2} * \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^8}_{\text{用牛莱公式进行计算}}$$

$$\text{原函数} = 2\sqrt{2} * \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\sqrt{2} * \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^8$$

$$= 2\sqrt{2} * \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2$$

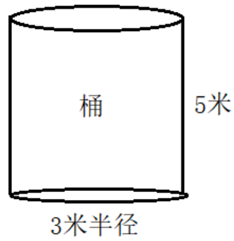
要取消 $\frac{3}{2}$ 就要乘以 $\frac{2}{3}$ 所以可以把 $\frac{3}{2}$ 放在前面 $* \frac{2}{3}$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} * \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} * x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^8$$

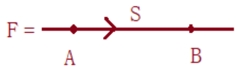
最后 = 18

定积分物理应用

一个圆柱桶高5米，底部圆半径为3米，桶内装满水，请问下要把桶内的水全部吸出，需要做多少功?

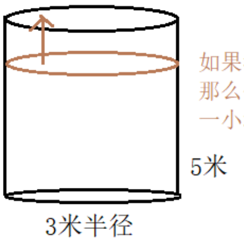


一个恒等不变的力，作用一个质点，运动的距离，从A点到B点运动距离为 S

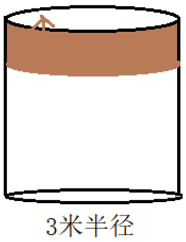


力的方向和移动方向一致

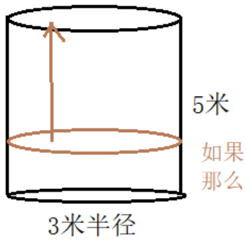
这时候做的功 = W = F(力) * S(位移)



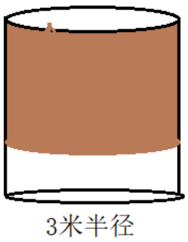
如果我要吸这一块的水，那么位移就是箭头长度这一小块



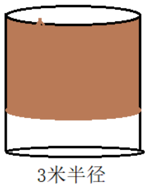
也就是这一块



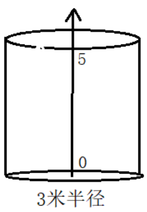
如果吸更下边的这一块 那么位移距离就更长



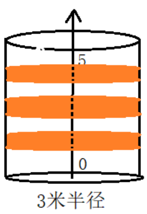
也就是这一块



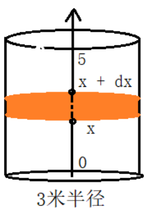
这就证明了吸水桶里面不同位置的水，做的功是不一样的



我将这个桶0 ~ 5米高度进行分割



现在将水分成一小块一小块



我现在随便拿一块计算 上面这点为x + dx

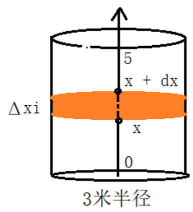
这个点为x

所以我们要先求出这一小块薄片的重力

为什么？
因为吸这一小块水的力就是这块小薄片的重力

G(重力) = m(质量) * g(加速度)

g = 9.8



这一小块薄片质量Δmi

$\Delta mi = \underset{密度}{\rho} * \underset{体积}{V} = \rho * \pi 3^2 * \underbrace{(x + dx)}_{薄片厚度}$

这个薄片就是圆柱体，所以的薄片底部圆面积是 $\pi 3^2$

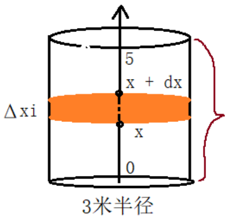
$\Delta xi = (x + dx)$

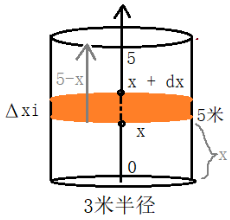
我们将薄片厚度改成

这个底部圆半径是3，所以底面积就是 $\pi 3^2$

(薄片重力) $\Delta Gi = \rho * \pi 3^2 * \Delta xi * g$

薄片重力有了之后，如果我将这个薄片的水吸出去，那么这个薄片水到桶出口的位移是多长呢?





薄片是从x位置开始吸，

所以这段吸出去的距离(位移) = 5 - x

薄片吸出去需要的功 $dW = \rho * \pi 3^2 * \Delta xi * g * \underbrace{(5 - x)}_{位移}$ 这是功的微元

(薄片重力) $\Delta Gi = \rho * \pi 3^2 * \Delta xi * g$

请问下这个功是从谁到谁分隔的?
这个桶分解了很多层薄片，所以是0 ~ 5米分隔

Δxi 现在就是dx 就是一小块薄片

$$W = \int_0^5 \rho * \pi 3^2 * g * (5 - x)\, dx$$

这就是功的微元，在0~5范围积分，就是总的功
这个总功就是将桶里面水吸完的功

水的密度为 $\rho = 1$

$$W = \int_0^5 \rho * \pi 3^2 * g * (5 - x)\, dx$$

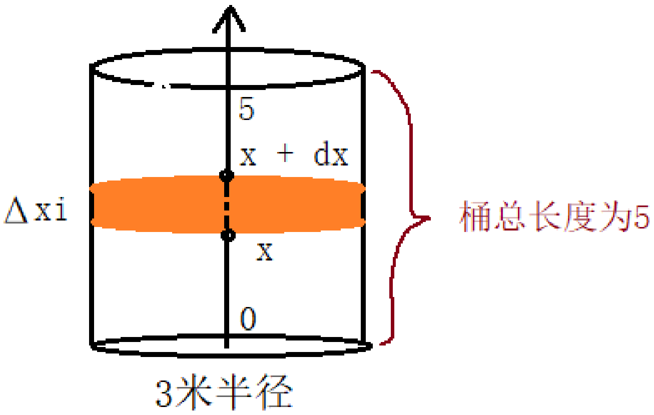
$$= \int_0^5 1 * \pi * 9 * 9.8 * (5 - x) * dx$$

常数提到积分前

$$= 1 * \pi * 9 * 9.8 \int_0^5 \underline{(5 - x)} * dx$$

5原函数是5x　这一段用牛莱公式求　x原函数 $\frac{1}{2}x^2$

$$= 1 * \pi * 9 * 9.8 \left[\left(5x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^5 \right]$$



$$= 1 * \pi * 9 * 9.8 \left[\left(5x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^5 \right]$$

传入上限5 $= 1 * \pi * 9 * 9.8 * \left[\left(5 * 5 - \frac{1}{2}5^2\right) - \right.$ ....

传入下限0 $= 1 * \pi * 9 * 9.8 * \left[\underbrace{\left(5 * 5 - \frac{1}{2}5^2\right)}_{上限} - \underbrace{\left(5 * 0 - \frac{1}{2}0^2\right)}_{下限} \right]$

= 3461.85(KJ)
≈3462(Kj)

吸出0~5米的水总共的功为3462KJ

复数运算

复数加法

这种有 i 的就是复数

$a+bi \quad c+di$

复数和我们一般的加减乘除计算数字的方法不一样，复数计算出的结果是两个

比如 a+bi ， a 是实部，bi 是虚部，虚部后面都要跟个 i

$a+bi = z1$

我们把 a+bi 赋值给变量 z1

$c+di = z2$

我们把 c+di 赋值给变量 z2

$z1+z2 = \underline{(a+bi)} + \underline{(c+di)}$

z1+z2 就相当于(a+bi)+(c+di)

$=(a+c) +(b+d)i$

把红线部分的实部变量 a 与绿线部分的实部变量 c 相加，虚部 bi 和虚部 di 相加

就成了这样，这样算出来的结果就是复数的结果

比如$(5+2i) + (3-7i)$

$=(5+3) + (2-7)i$

$= 8 - 5i$

比如(5+2i) + (3-7i) = 8-5i，复数加减乘除计算出的结果，也一定是复数

复数减法

$(2-3i)-(6-18i)$

复数减法和复数加法一样，实部和实部相减，虚部和虚部相减

$=2-6 - 3i+18i$

这里为什么是+18i，我们知道-(6-18i)把这个式子括号展开就是-6 和+18i，负负得正

$=4-15i$

复数乘法

$(1-3i)(2+5i)$

我们用第一项(1-3i)去乘第二项的实部 2

我们用第一项(1-3i)去乘第二项的虚部 5i

$\underline{(1-3i)}(2+5i) \qquad \underline{(1-3i)}(2+5i)$

$2(1-3i) \qquad +5i(1-3i)$

$=2(1-3i) + 5i(1-3i)$

得到这样一个等式

$= 2 - 6i +5i -15i^2$

这里的-15i 平方，这 i 平方等于-1，所以-15i 平方=-15 * -1

这个 i 平方等于-1 请看右边

$i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^3 = i^2 x\ i = -1\ x\ i = -i$

$i^4 = i\ x\ i^3 = i\ x\ -i = (-1)(i)(i) = 1$

$= 2-6i + 5i + 15$

$= 17 - i$

还有一种计算复数乘法的方法

$$(1-3i)(2+5i)$$
$$=1 \times 2 + 1 \times 5i - 3i \times 2 - 3i \times 5i$$
$$=2 + 5i - 6i + 15$$
$$= 17 - i$$

左边实部乘 2+5i 项，左边虚部乘 2+5i 项

复数除法

复数除法运算要用到共轭复数

7 - 5i 的共轭复数是多少？

7-5i 的共轭复数为7 + 5i

共轭复数就是复数实部不变，虚部取反

$$\overline{(7-5i)} = 7 + 5i$$

有人喜欢在复数上面打一横杠来表示该复数取共轭复数

$$z = 7 - 5i$$

也有人喜欢把复数赋值给变量

$$\bar{z} = 7+5i$$

再变量上打一横杠来取该复数的共轭复数

注意共轭复数是相互的。7+5i 是 7-5i 的共轭复数，但是 7-5i 也是 7+5i 的共轭复数

共轭复数有什么用?

$$(7-5i)(7+5i)$$
$$=49 + 35i - 35i + 25$$
$$= 74$$

我觉得共轭复数就是把 7-5i 虚部去掉的一种方法

下面我们来计算复数除法

$$(6+3i)\div(7-5i)$$

我们把(6+3i)/(7-5i)写成这样

$$\frac{(6+3i)}{7-5i}$$

复数除法规则是要把分母变成实数，所以用共轭复数去将分母的虚部去掉

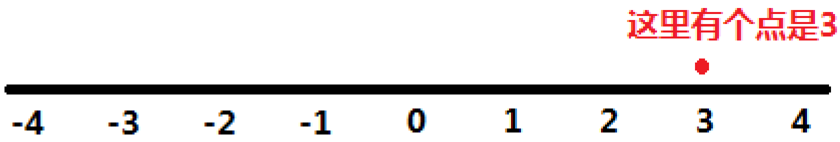
$$= \frac{(6+3i)}{7-5i} \times \frac{7+5i}{7+5i} = \frac{42 + 30i + 21i - 15}{49 + 35i - 35i + 25} = \frac{27 + 51i}{74}$$

最后就得到这个是数

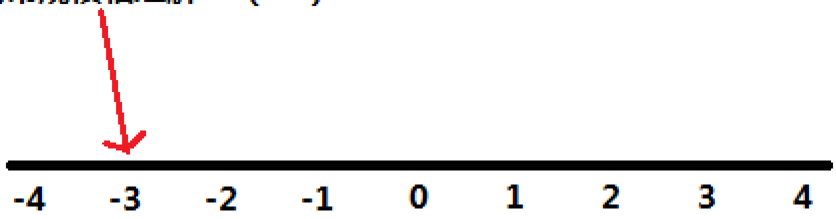
$$= \frac{27}{74} + \frac{51}{74} i$$

这就是复数除法最后结果，一个实部和一个虚部

复数在复平面使用



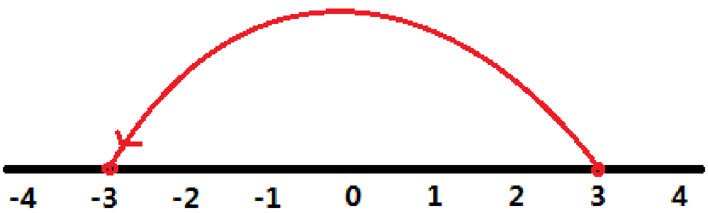
我们常规横轴理解3x（-1） = -3



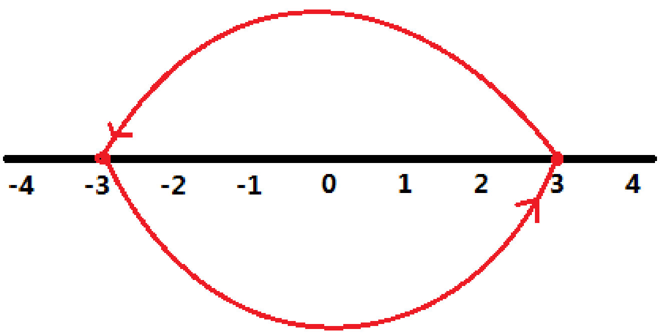
加减法代表数组在横轴上的左右平移

那么如果加入乘法又代表什么呢?

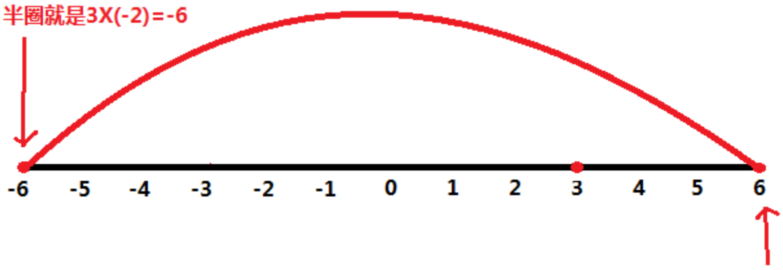
3 X（-1） = -3
如果乘以-1 代表x轴旋
转了半圈



-3X(-1)=3
-3再乘以-1就是再转
半圈

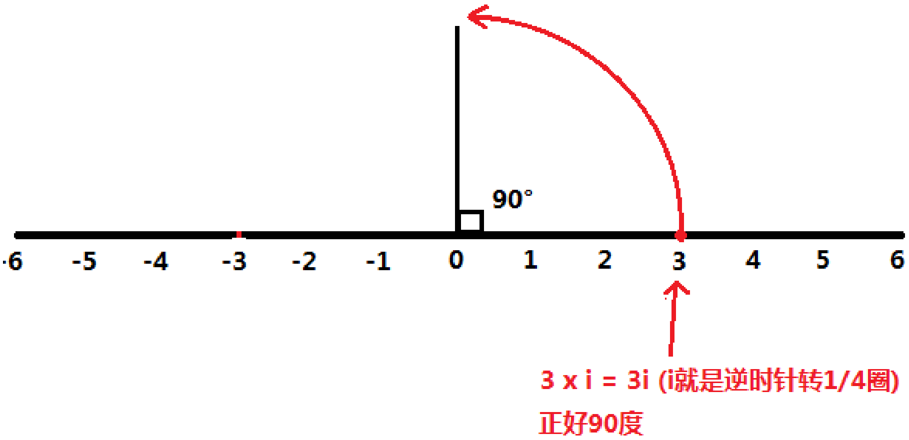


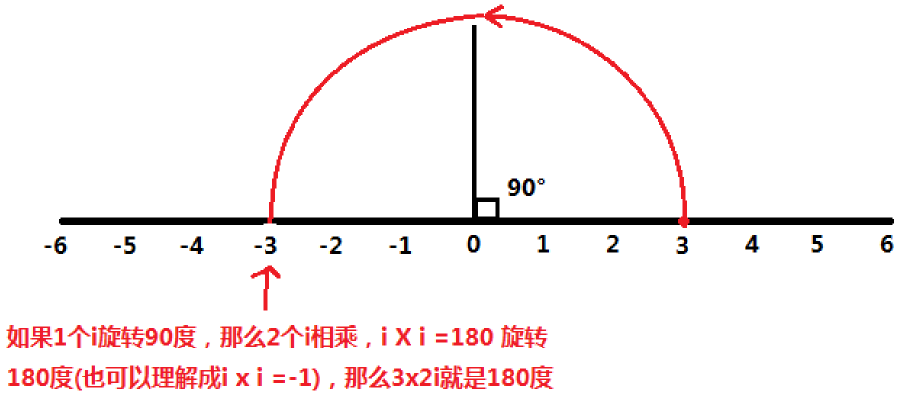
变成6之后在用符号转
半圈就是3X(-2)=-6

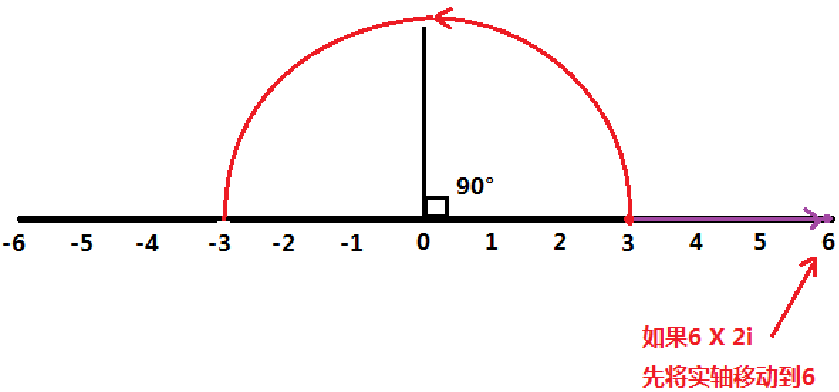


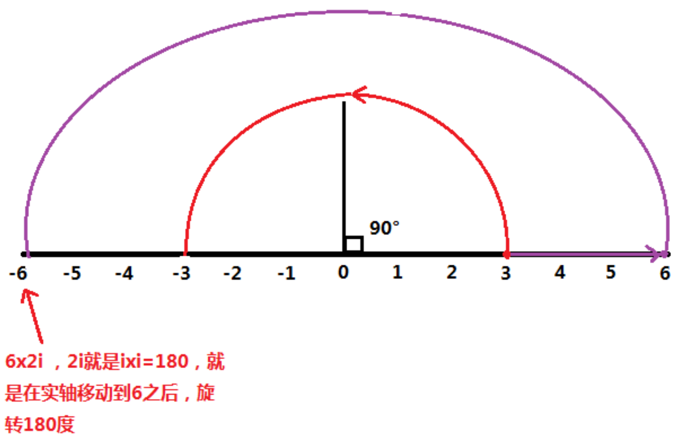
如果是3X（-2）
就是先让实轴变成6(3 X 2)=6 负号不管

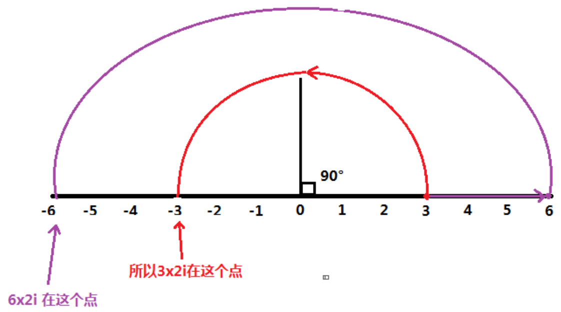
如果加入虚轴 i 呢?

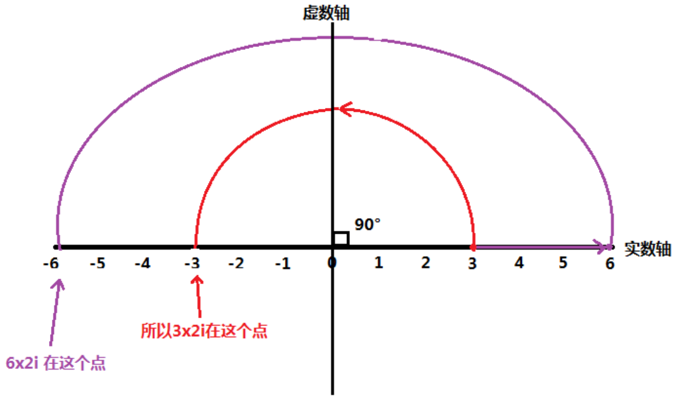

90°
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
3 x i = 3i (i就是逆时针转1/4圈)
正好90度


90°
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
如果1个i旋转90度，那么2个i相乘，i X i =180 旋转
180度(也可以理解成i x i =-1)，那么3x2i就是180度


90°
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
如果6 X 2i
先将实轴移动到6

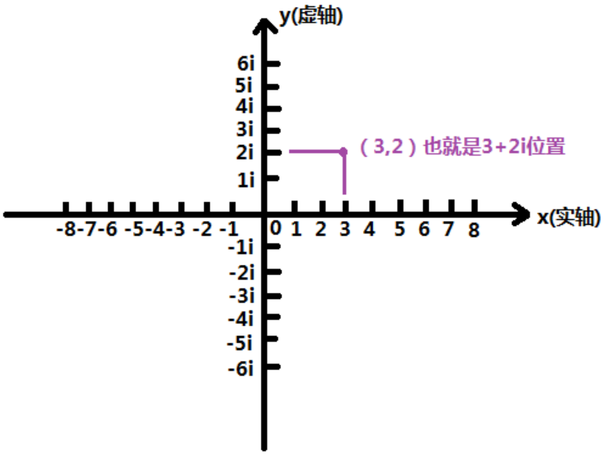

90°
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
6x2i ，2i就是ixi=180，就
是在实轴移动到6之后，旋
转180度

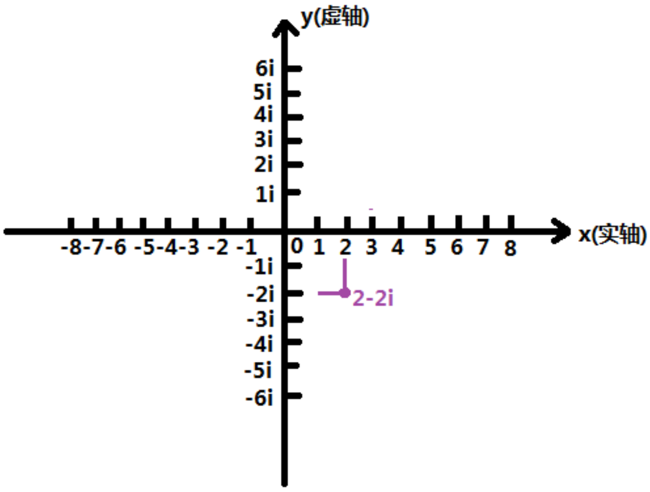


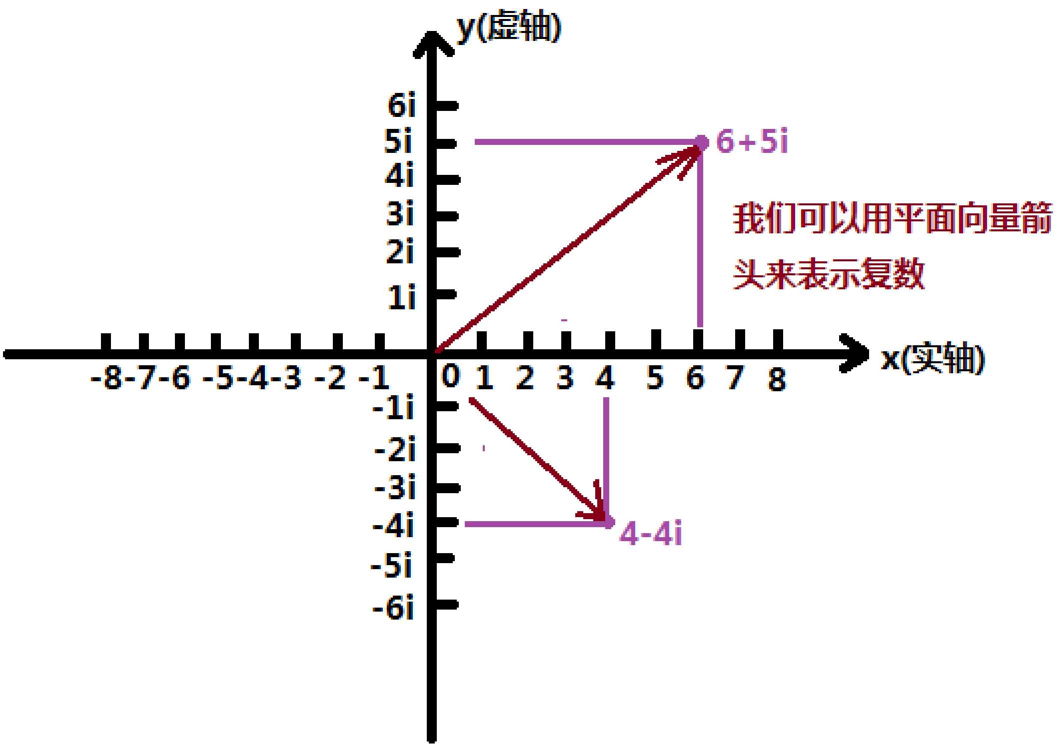


所以虚数轴，实数轴就是这么来的。

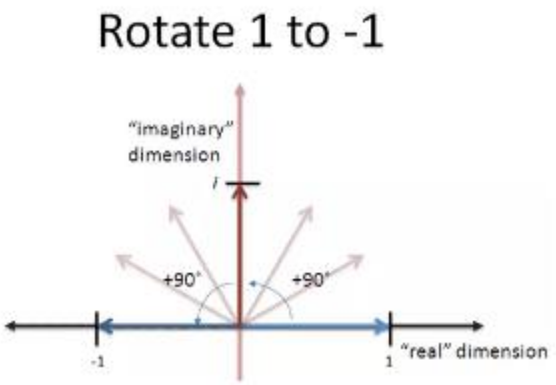
一般复数就有a+bi 这样的格式写法
比如3+2i在复平面坐标什么位置呢？





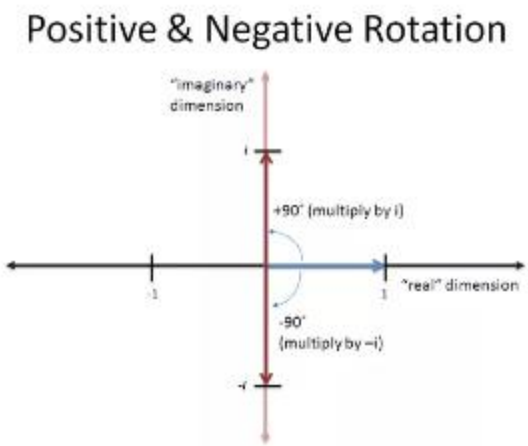


所以在电子学复平面中，1 个 i 表示实轴逆时针旋转 90 度，如果是 i*i 就是实轴逆时针旋转 180 度也就是-1



如果我想顺时针实轴旋转 90 度呢?

答案是乘以-i 就行了



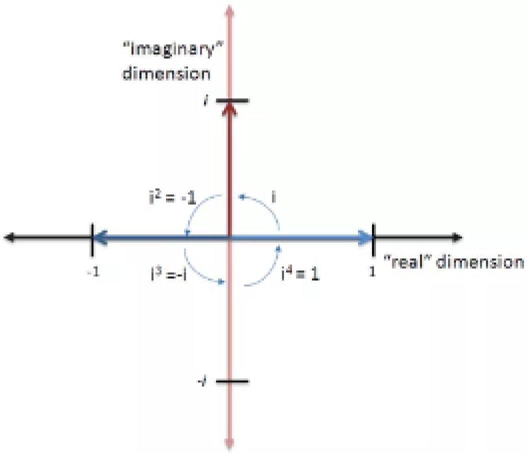
而且如果乘以两次-i，和乘以两次 i 一样，得到的也是-1。

如果分别乘以0次、1次、2次、3次、4次、5次i，可以得到：

$$1, i, i^2, i^3, i^4, i^5$$

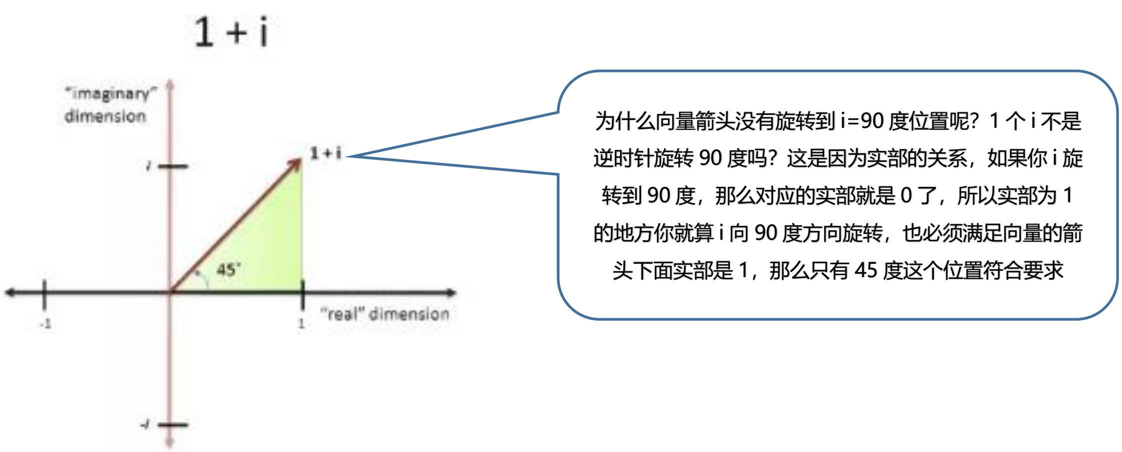
可以得到以下结论：

- 1=1（毫无疑问）
- $i = i$（感觉是句废话）
- $i^2=-1$（上面已经说明了原因）
- $i^3=(i \cdot i) \cdot i=-1 \cdot i=-i$（三次逆时针旋转90°，相当于顺时针旋转90°）
- $i^4=(i \cdot i) \cdot (i \cdot i)=-1 \cdot -1=1$（四次逆时针旋转90°，回到初始位置，循环结束）
- $i^5= i^4 \cdot i=i$（开始下一循环，逆时针旋转90°）



复数=实部+i·虚部。例如，一个**复数** Z 的实部为 1，虚部也为 1，则可以得到复数 Z =1+i。

复数 Z 可以看作是复平面上的点(1,i)，如下图。即沿着实轴方向前进 1，沿着虚轴方向再前进 1，



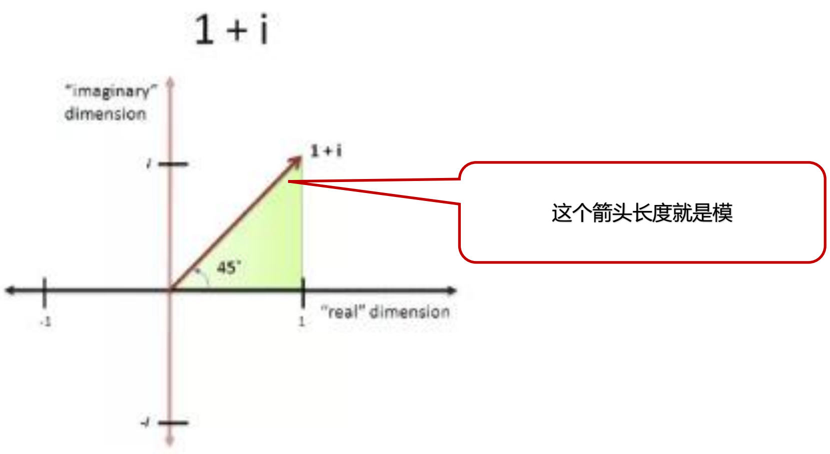
为了描述复平面上的任意一点，可以写成更为普遍的形式：

$$Z = a + bi$$

a 和 b 分别称为**复数 Z** 的**实部**和**虚部**。

而 Z 的长度或"模(Modulus)"为 Z 点到复平面圆心处的距离

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

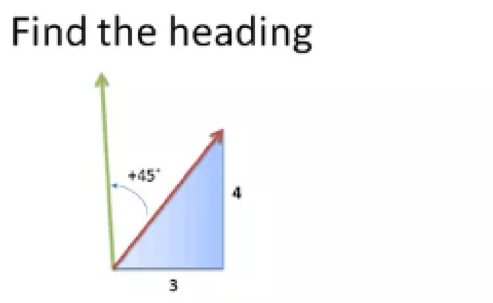


Z 的幅角为

$$arg(Z) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), & a > 0 \\ \pm\frac{\pi}{2}, & a = 0, b \neq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & a < 0, b > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi, & a < 0, b < 0 \\ \pi, & a < 0, b = 0 \end{cases}$$

下面举个例子，用到复数加减法，可以看前面的复数加减运算：

假设我们在一艘帆船上，现在帆船的航向是东北向，且每向东前进 3 个单位就会向北前进 4 个单位，如果现在想改变航向，使其沿逆时针方向旋转 45°，那新的航向是怎么样的？



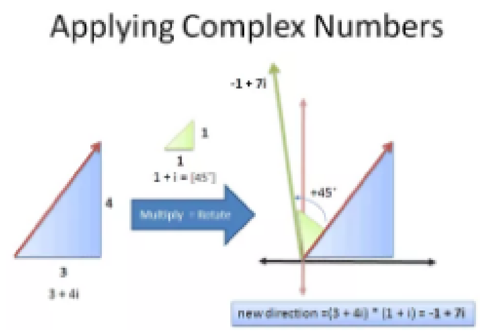
(图片来源: betterexplained)

如果放在复平面上，船的位置在圆心处，那么当前的航向可以直接用复数表示，即3+4i。如果想逆时针转45°可以让该复数与1+i相乘，因为1+i的幅角正好等于45°。

计算过程为：

$$
\begin{aligned}
(3+4i)\cdot(1+i) &= 3+3i+4i+4i^2 \\
&= 3+7i \qquad +4(-1) \\
&= -1+7i
\end{aligned}
$$

画出图就很直观了，新的航向是每向西前进1个单位就会向北前进7个单位。



(图片来源: betterexplained)

幅角为$\tan^{-1}(7/-1)=98.13°$。

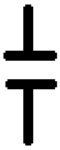
注意，如果要保持航速不变的话还需要在上面计算结果的基础上再除以根号 2，因为复数 1+i 的模为根号 2。

所以复数自带**旋转属性**、有**大小**、有**方向**

电容特性

Q电荷大小

V电容两端电压

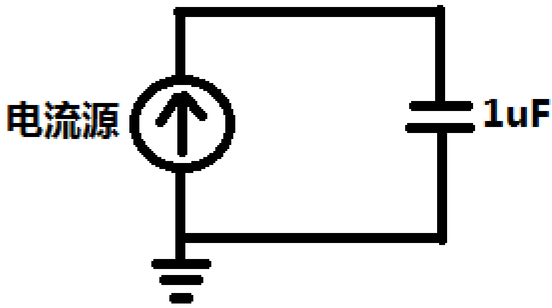


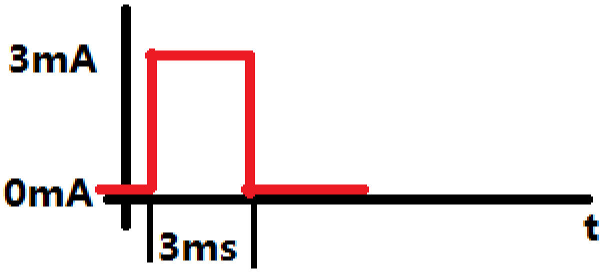
C电容大小

Q=CV

电容电荷大小就是电容两端电压 X 电容量大小

我们来计算电容充电时间





电流源输出电流

$$i=C\frac{dv}{dt}$$

dv是电容上变化电压

dt是电容上电压变化时间

C是电容量

i是给电容充电的电流

电容上的电压

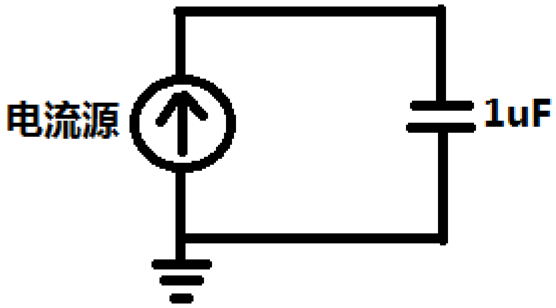
1.这个公式说明了给电容一个固定充电电流，电容两端的电压随着电流充电的时间在变化

2.如果我给电容一个固定的电流信号 3mA，充电 3 毫秒，那么电容的电压用 I=C（dv/dt）公式很难算出一个确定值

那我们需要另外一个公式

$$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}} = \boxed{U(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+V0}$$

这两个公式是一个意思，但是这个公式可以定量计算电容的充电时间和电容的电压



$$U(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt+V0$$

这是常量，不管电容充不充电都是 0

v0 是电容初始电压

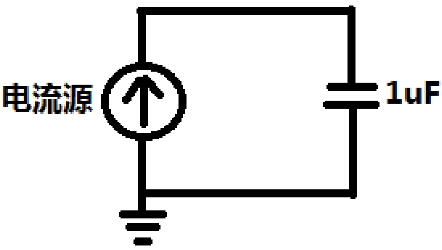
i(t)是当前时刻给电容充电的电流

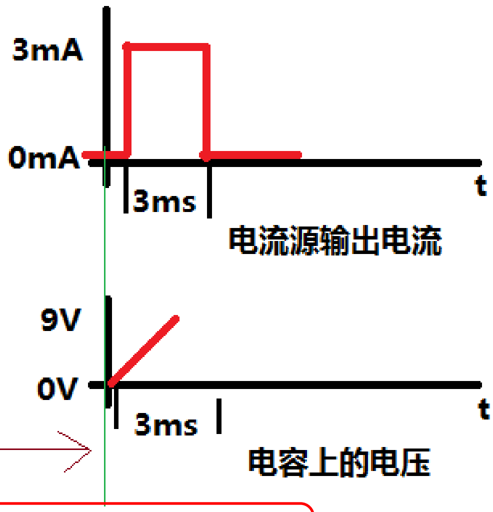
t是给电容充电的时间

C是电容量

U(t)是电容两端电压

下面我们来开始计算





$$U(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt+V0$$

在初始化时刻电容两端的电压

$$U(t)=\frac{1}{1uF}\int_0^0 0dt+0$$

给电容充电时间为 0ms

$$U(t)=\frac{1}{1uF}0mA\int_0^0 dt$$

因为是初始时刻电流源电流也为 0

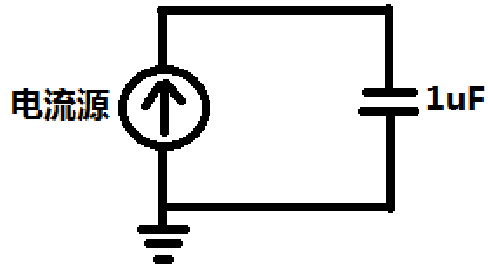
$$U(t)=\frac{1}{1uF}0mA\times 0$$

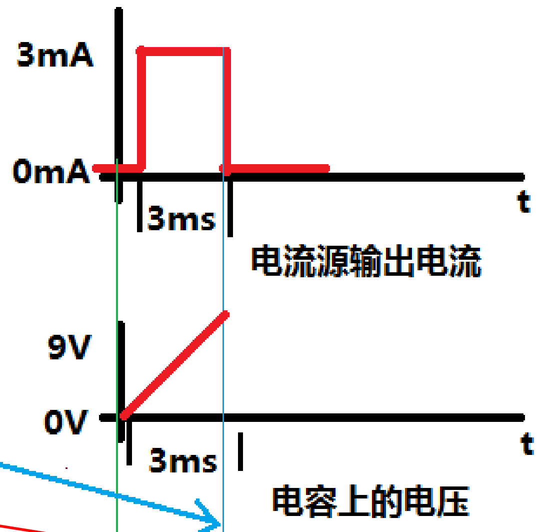
把电流源电流参数放到积分前面就是，这是套路你记住就是

$$U(t)=0V$$

电容两端电压U(t)=0V

把 t 时间也乘进来，积分符号和 dt 就直接取消





$$U(t)=\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt+V0$$

在电流源以3mA给电容充电3ms后

$$U(t)=\frac{1}{1uF}\int_{0}^{3ms} 3mA\ dt+0$$

$$U(t)=\frac{1}{0.000001F}\ X\ 3mA\int_{0}^{3ms} dt$$

$$U(t)=\frac{3mA}{0.000001F}\ X\ 3ms$$

$$U(t)=\frac{0.003}{0.000001}\ X\ 0.003$$

$$U(t)=9$$

电流源给电容充电时间为 3ms

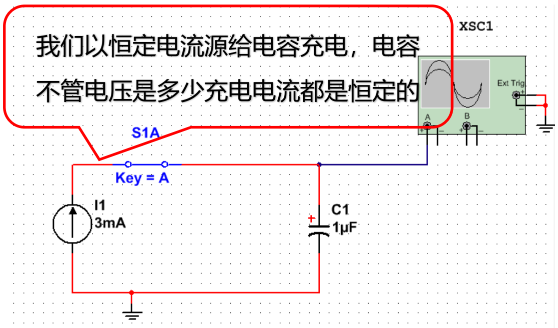
充电电流为 3mA

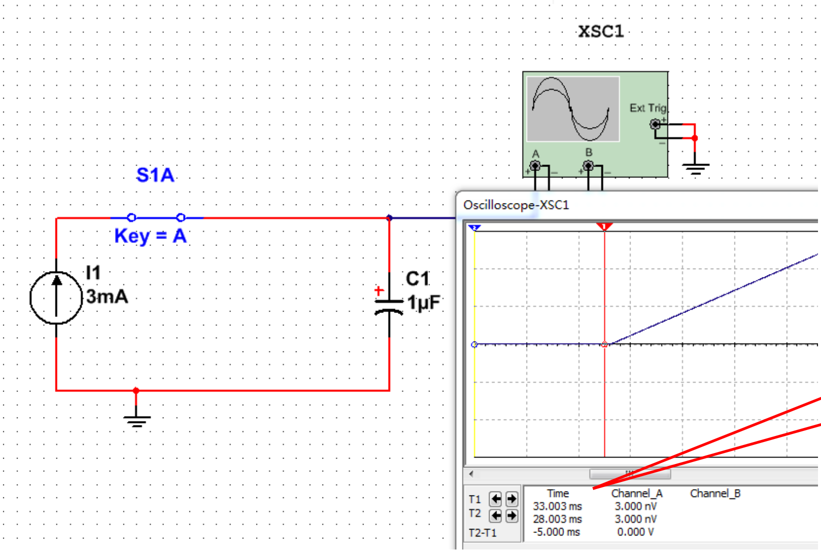
计算方法按照上面套

电容经过电流源3mA充电3ms得到9V的电压 U(t)=9V

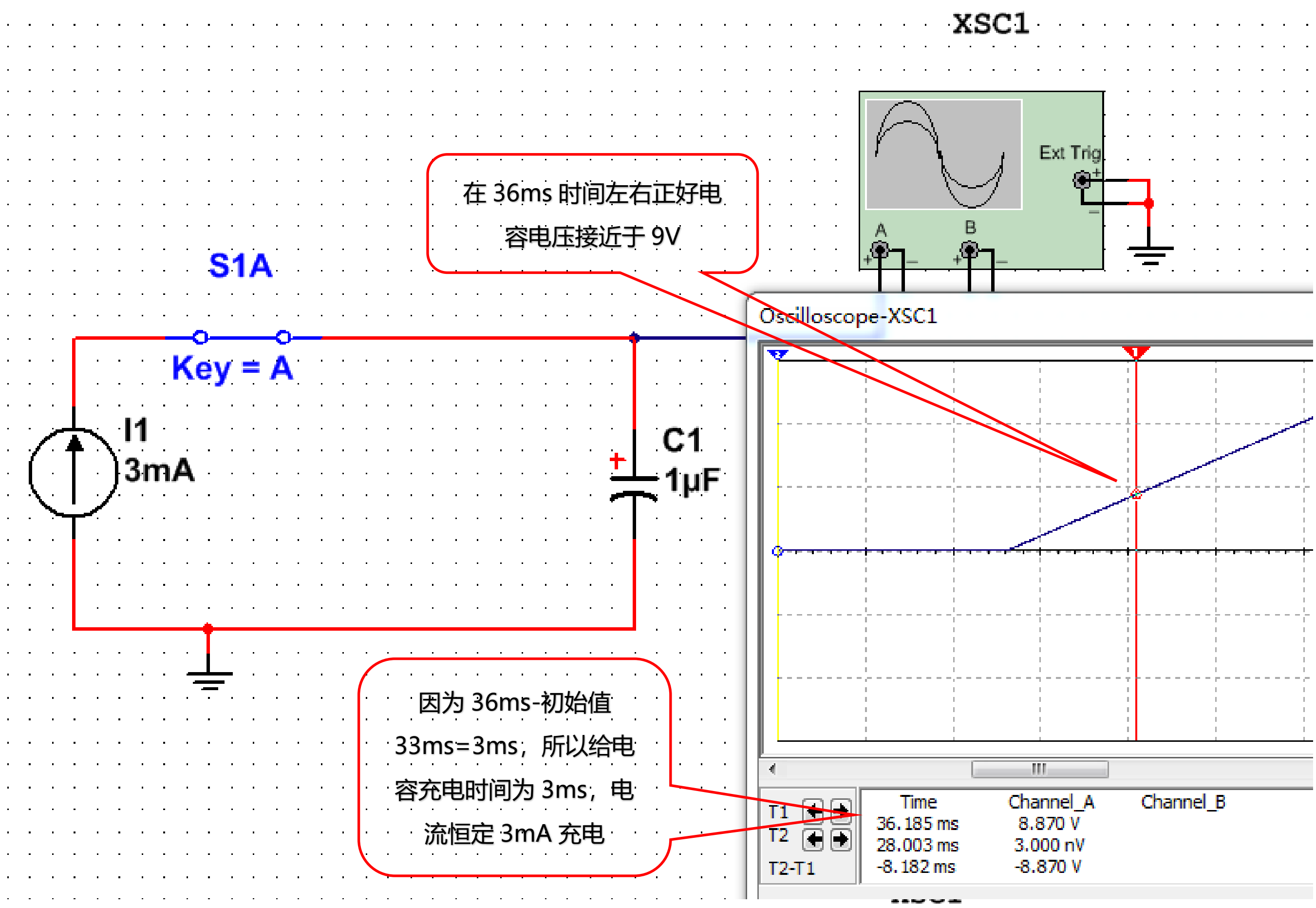
我们下面实际仿真测试下

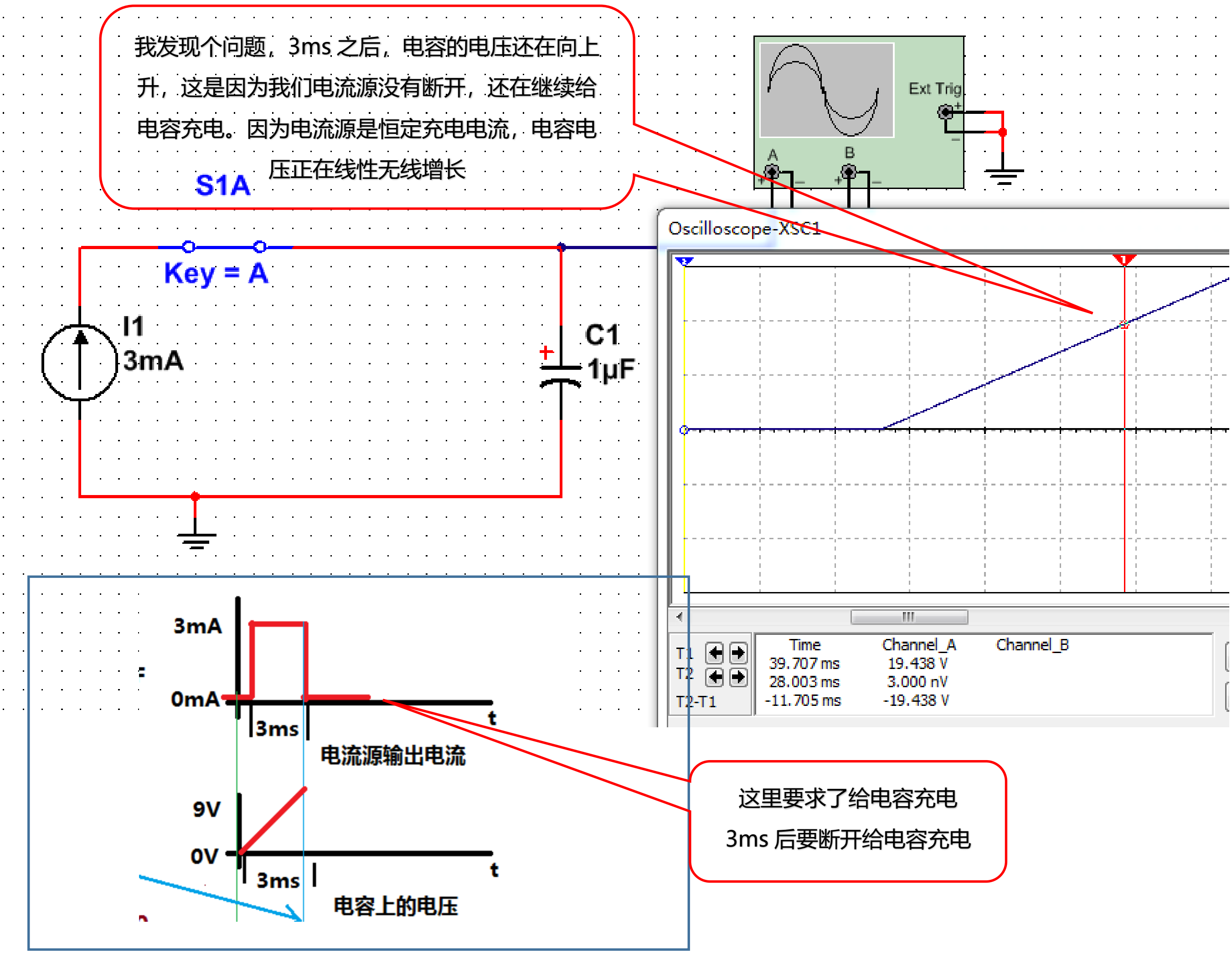
我们以恒定电流源给电容充电，电容不管电压是多少充电电流都是恒定的

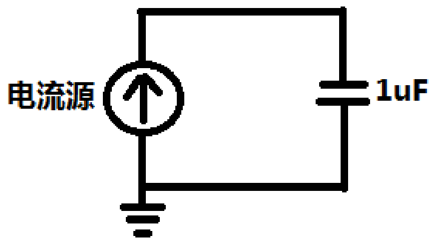


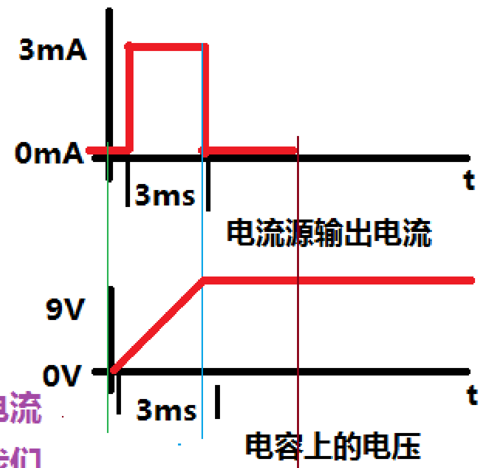


33ms 我们认为是给电容充电时开始时间


XSC1
在 36ms 时间左右正好电容电压接近于 9V
S1A
Key = A
I1
3mA
C1
1µF
Ext Trig
A
B
Oscilloscope-XSC1
因为 36ms-初始值 33ms=3ms，所以给电容充电时间为 3ms，电流恒定 3mA 充电
T1
T2
T2-T1
Time
36.185 ms
28.003 ms
-8.182 ms
Channel_A
8.870 V
3.000 nV
-8.870 V
Channel_B


我发现个问题，3ms 之后，电容的电压还在向上升，这是因为我们电流源没有断开，还在继续给电容充电。因为电流源是恒定充电电流，电容电压正在线性无线增长
S1A
Key = A
I1
3mA
C1
1µF
Ext Trig
A
B
Oscilloscope-XSC1
T1
T2
T2-T1
Time
39.707 ms
28.003 ms
-11.705 ms
Channel_A
19.438 V
3.000 nV
-19.438 V
Channel_B
3mA
0mA
3ms
t
电流源输出电流
9V
0V
3ms
t
电容上的电压
这里要求了给电容充电 3ms 后要断开给电容充电





$$U(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt+V0$$

充电3ms电容达到9V，我们发现不控制电流源输出，电容会无限充电到几KV，所以我们3ms后断开电流源看看电容的电压是多少

$$U(t)=\frac{1}{1uF}\int_{3ms}^{+\infty}0dt+9V$$

$$U(t)=\frac{1}{1uF}0\int_{3ms}^{+\infty}+9V$$

$$U(t)=\frac{0}{1uF}X+\infty+9V$$

$$U(t)=0+9V$$

$$U(t)=9V$$

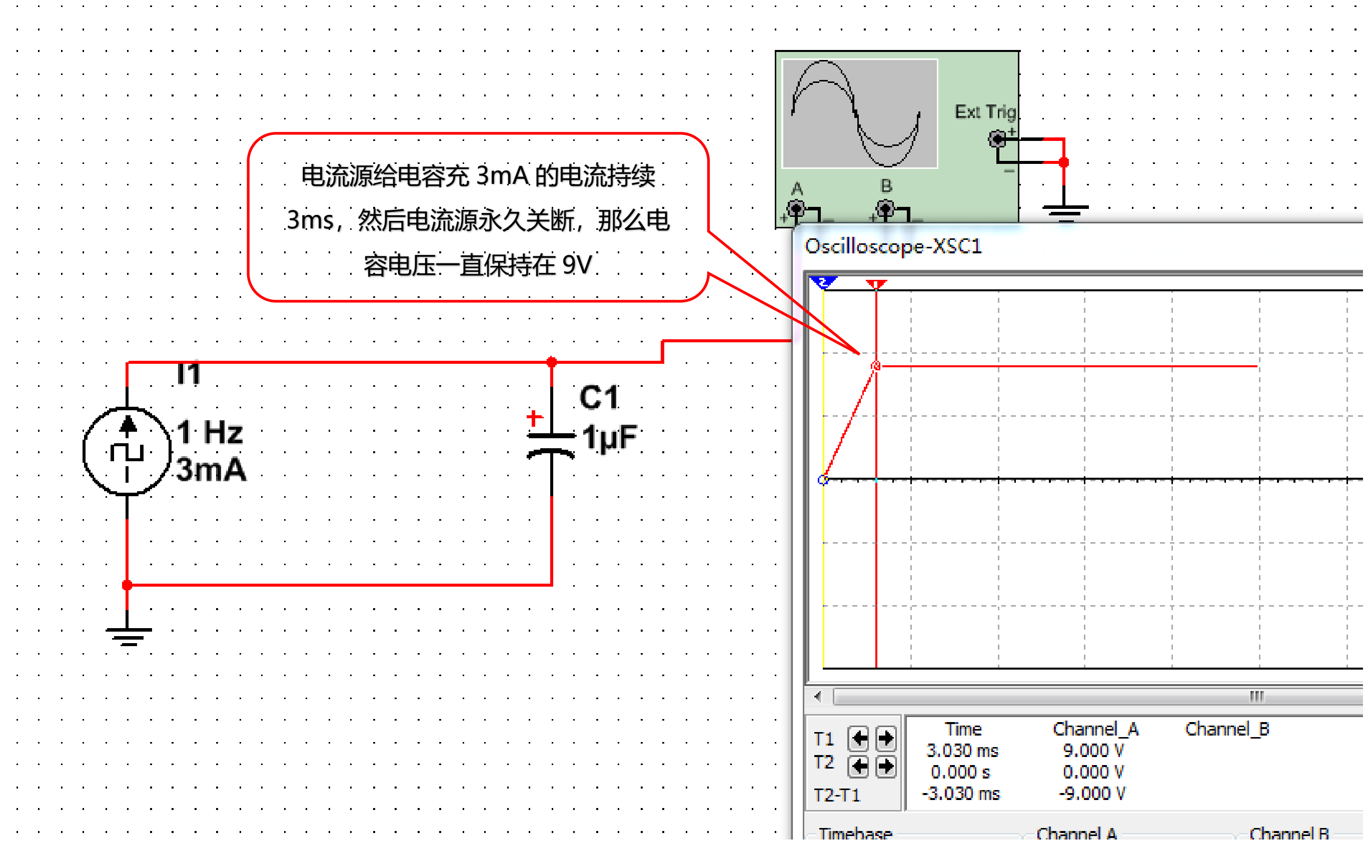
3ms 之后得时间我们要求的是电流源一直不输出，所以就是无穷大的断开时间

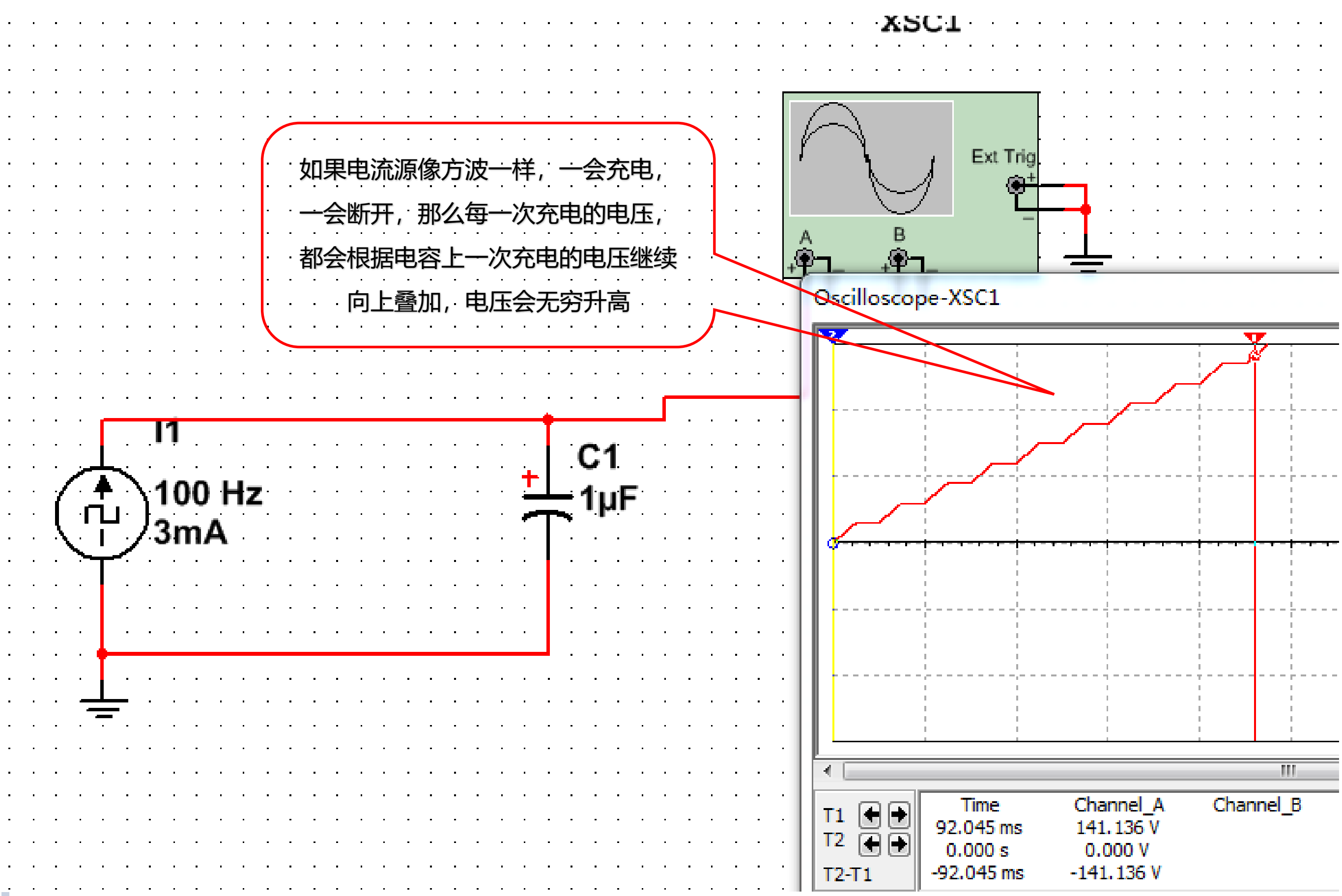
因为是计算 3ms 之后得电容电压，所以这里的起始时间就是 3ms 了

因为电流源断开，所以给电容充电电流是 0

因为 3ms 时间的时候电容电压是 9V 所以这里写当前电压

最好计算出来的结果，3ms 之后，电流源不给电容供电流，电容保持在 9V





电流源给电容充电3ms，3mA $U(t)=\frac{1}{1uF}\int_{0}^{3ms}3mAdt+0V$ 电容两端电压=9V

电流源关闭电容充电3ms，0mA $U(t)=\frac{1}{1uf}\int_{3ms}^{6ms}0mAdt+9V$ 电容两端电压=9V

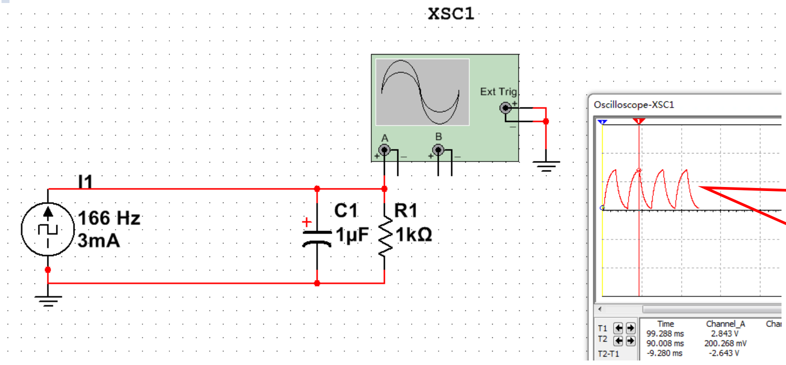
电流源再给电容充电3ms，3mA $U(t)=\frac{1}{1uF}\int_{6ms}^{9ms}3mAdt+9V$ 电容两端电压=18V

电流源关闭电容充电3ms，3mA $U(t)=\frac{1}{1uF}\int_{9ms}^{12ms}0mAdt+18V$ 电容两端电压 = 18V

因为每次都是在上一次电容电压的基础上给电容再次充电，所以电压会越来越高，因为电容没有地方去释放前一次充电的电流

.
.
.
.

电流源一直以方波的形式3ms开3ms断给循环电容充电

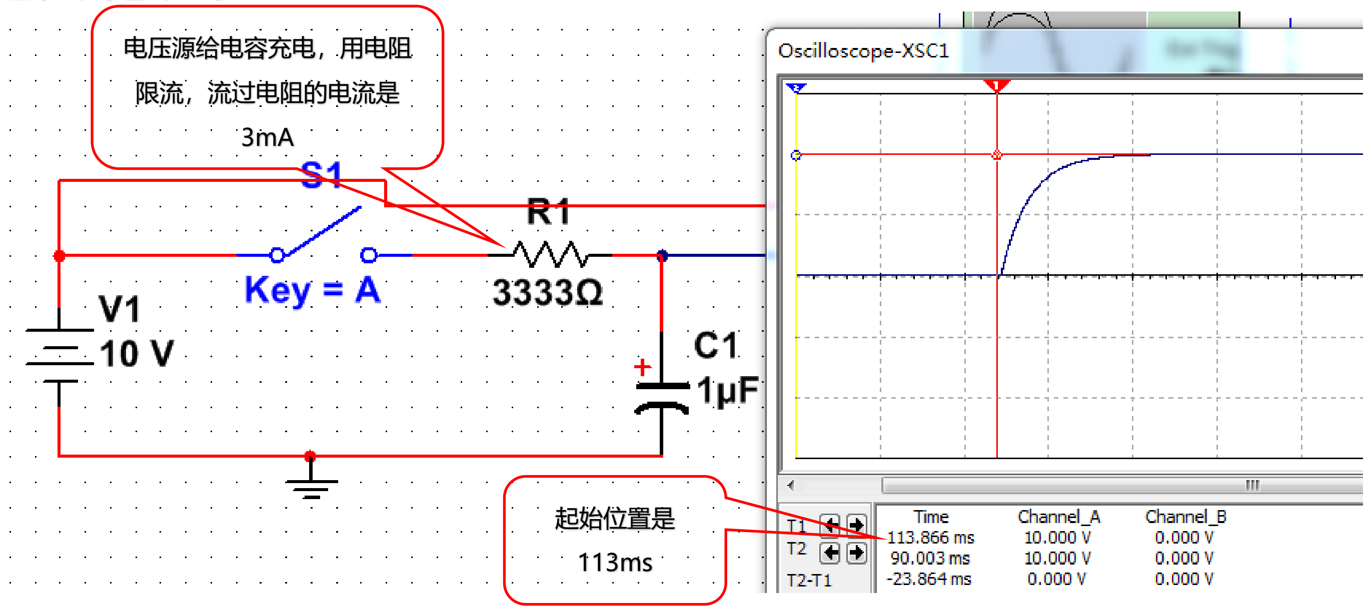


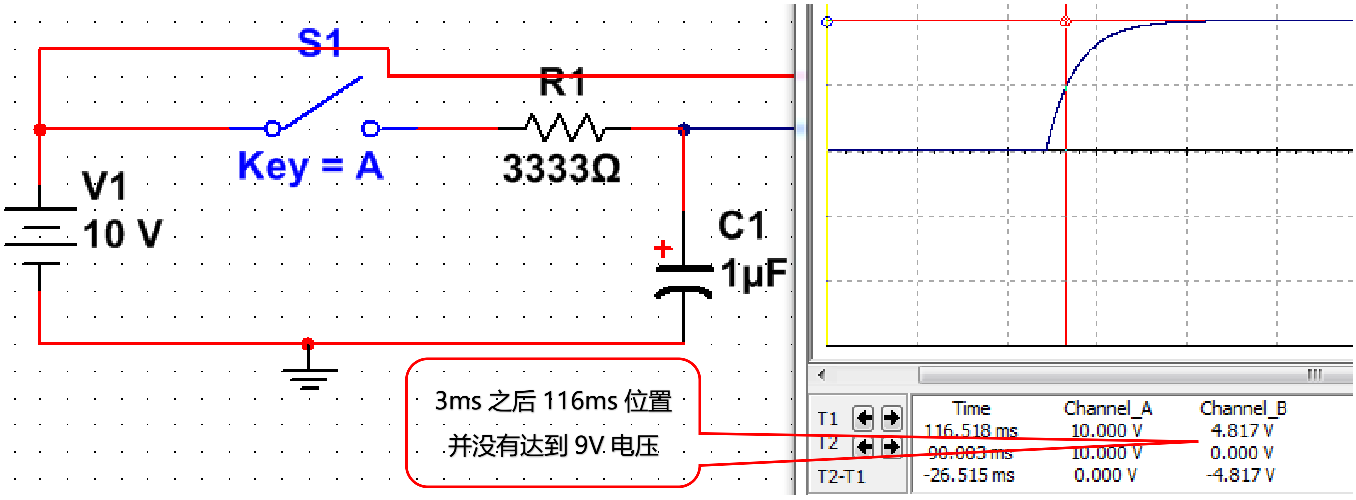
在电容旁边加个负载，在电流源低电平不给电容充电的时候电容的电流向负载释放消耗掉，这样电容电压就不会无限升高。用负载电阻大小来调整电容的电压波动值

如果用电压源给电容充电

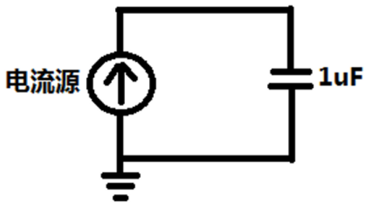
$$U(t)=\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt+V0$$

这个公式还成立吗?





这是因为电压源给电容充电，电容电压上升的时候，在电阻 R1 上面会产生压降，V1-电容上升电压=R1 的压降，所以 R1 的压降在不断的变化，导致了给电容充电的电流在不断的变化

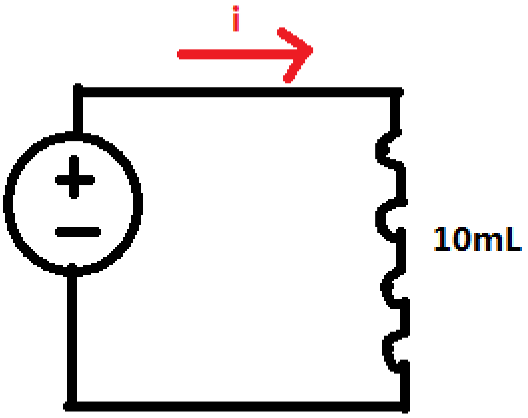


$$U(t)=\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt+V0$$

所以这个积分公式只适用于恒流源，不适用于恒压源计算电容充电时间。但是恒压源可以让电容充电后的电压限定在电压源范围，不会是电容的电压无限增大。当然现在的恒流源设备也有限定电压大小的功能。

在我 hardware _designer_ base 文档中有恒压源给电容充电的公式

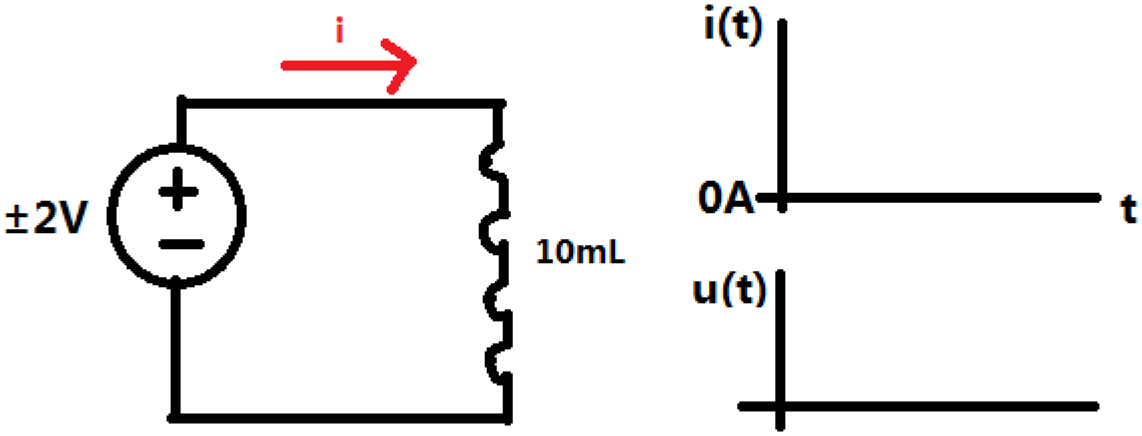
电感特性



$$U_L = L\frac{di}{dt} = i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t U\,d\tau + i(0)$$

这个微分公式是说明电感两端的电压与电流的变化成正比

因为微分公式不是很好计算，所以我们用积分来计算电感每时每刻的电流



i是电感的电流

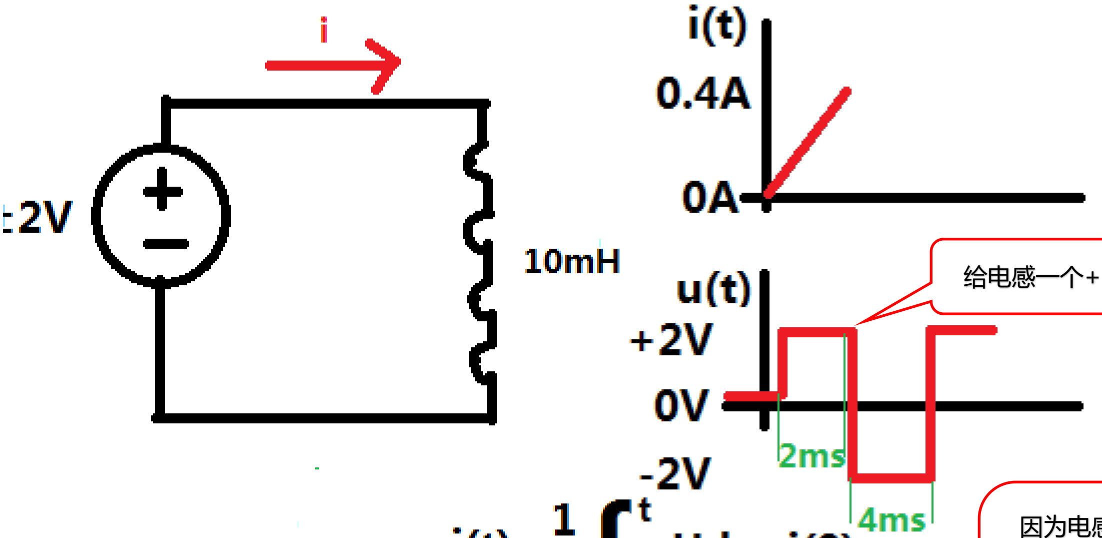
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t U\,d\tau + i(0)$$

L是电感大小

U是施加在电感上的电压

i(0)是电感起始0时刻的电流

t是电压加载在电感上的时间是好久



给电感一个+2V 的电压持续 2ms

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{0}^{t} U d\tau+i(0)$$

因为电感是第一次加电压，所以电感的起始电流(当前时刻电流)也就是 0ms 时刻的电流为 0A

电感施加+2V 电压持续时间为 2ms

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{0}^{2ms} 2V d\tau+0$$

给电感施加的电压为+2V

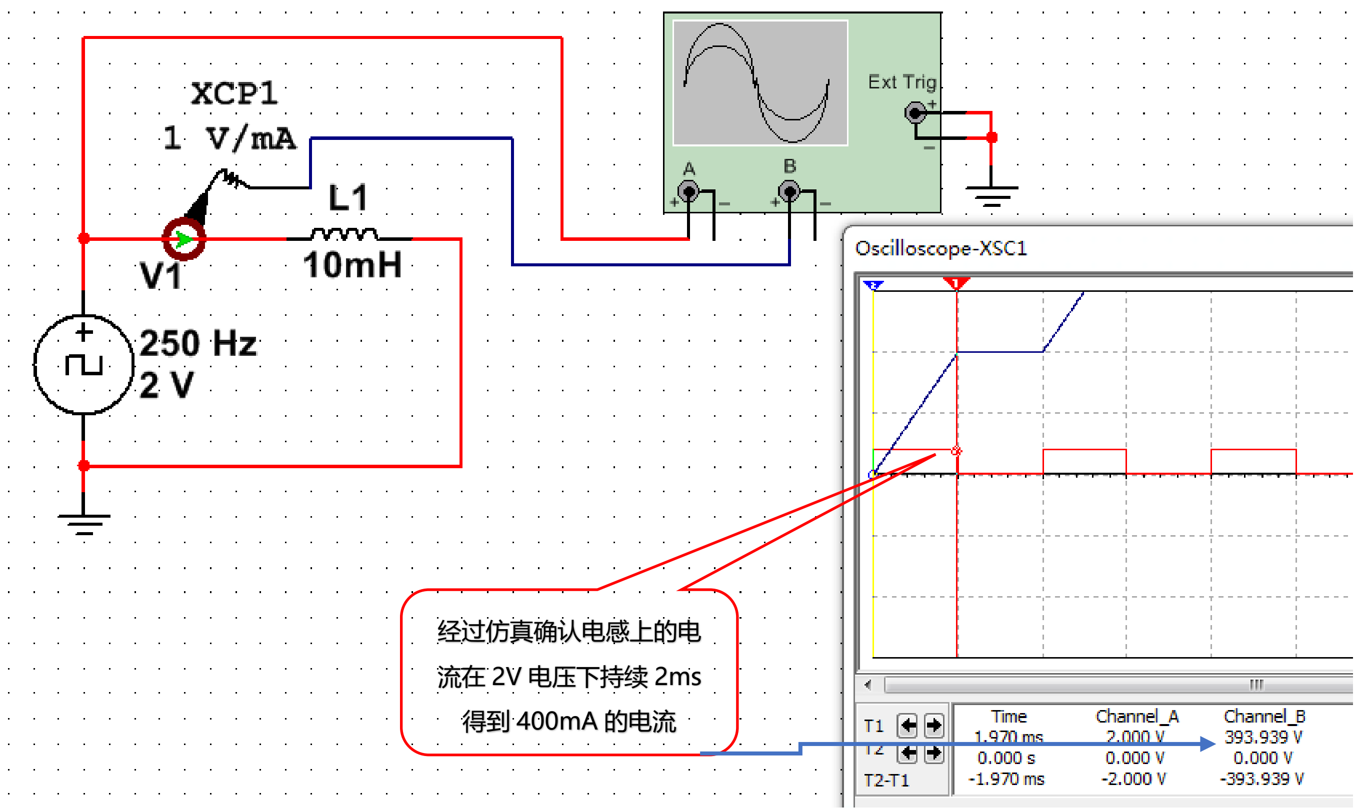
$$i(t)=\frac{1}{10mH}\,2V\int_{0}^{2ms}$$

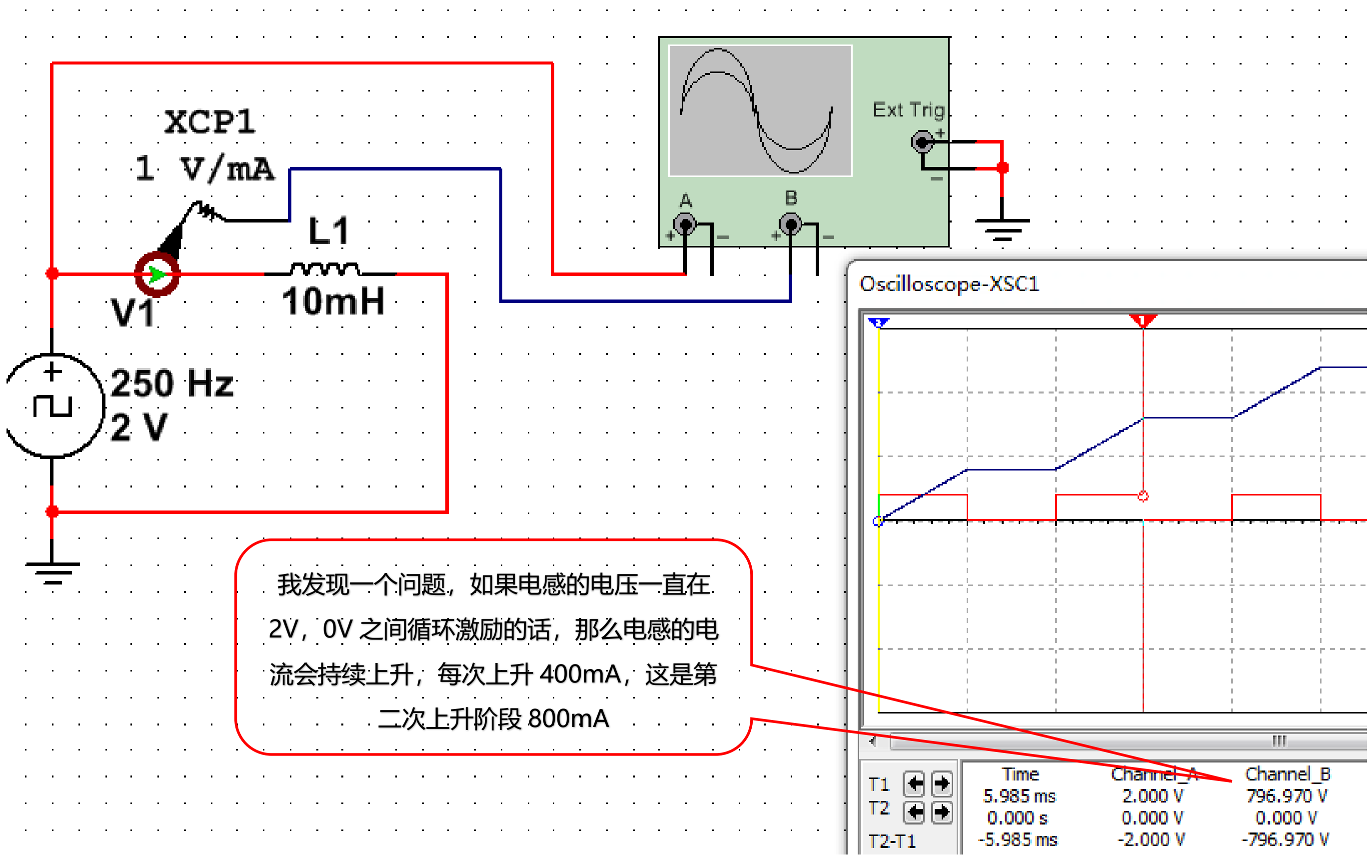
$$i(t)=\frac{2V}{10mH}\times 2ms$$

前面电容章节讲了积分的计算套路

$$i(t)=0.4A$$

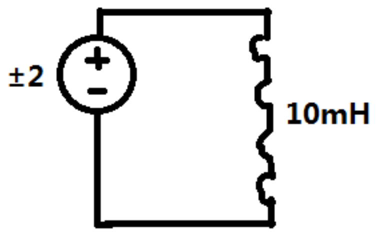
第一次施加 2V 电压给电感 2ms 之久，电感 2ms 后电流 0.4A

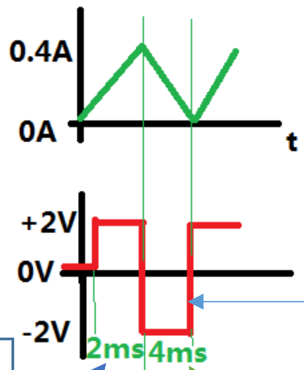




$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{0}^{t} U d\tau+i(0)$$

这样的上升斜率符合公式要求





$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{0}^{t} U d\tau+i(0)$$

4n

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{0}^{2ms} 2V d\tau+0$$

$$i(t)=\frac{1}{10mH}\,2V\int_{0}^{2ms}$$

$$i(t)=\frac{2V}{10mH}\ X\ 2ms$$

$$i(t)=0.4A$$

t 是低电平结束时间 4ms

-2V 是方波 2ms 后输出的波形

$$i(t)=\frac{1}{10mH}\int_{2ms}^{t} -2V d\tau+0.4A$$

2ms 是当前方波低电平开始时间

$$i(t)=\frac{1}{10mH}\,-2V\int_{2ms}^{t} +0.4A$$

$$i(t)=\frac{-2V}{10mH}\int_{2ms}^{4ms} +0.4A$$

0.4A 是电感经过 2ms 高电平+2V 得到的当前电流

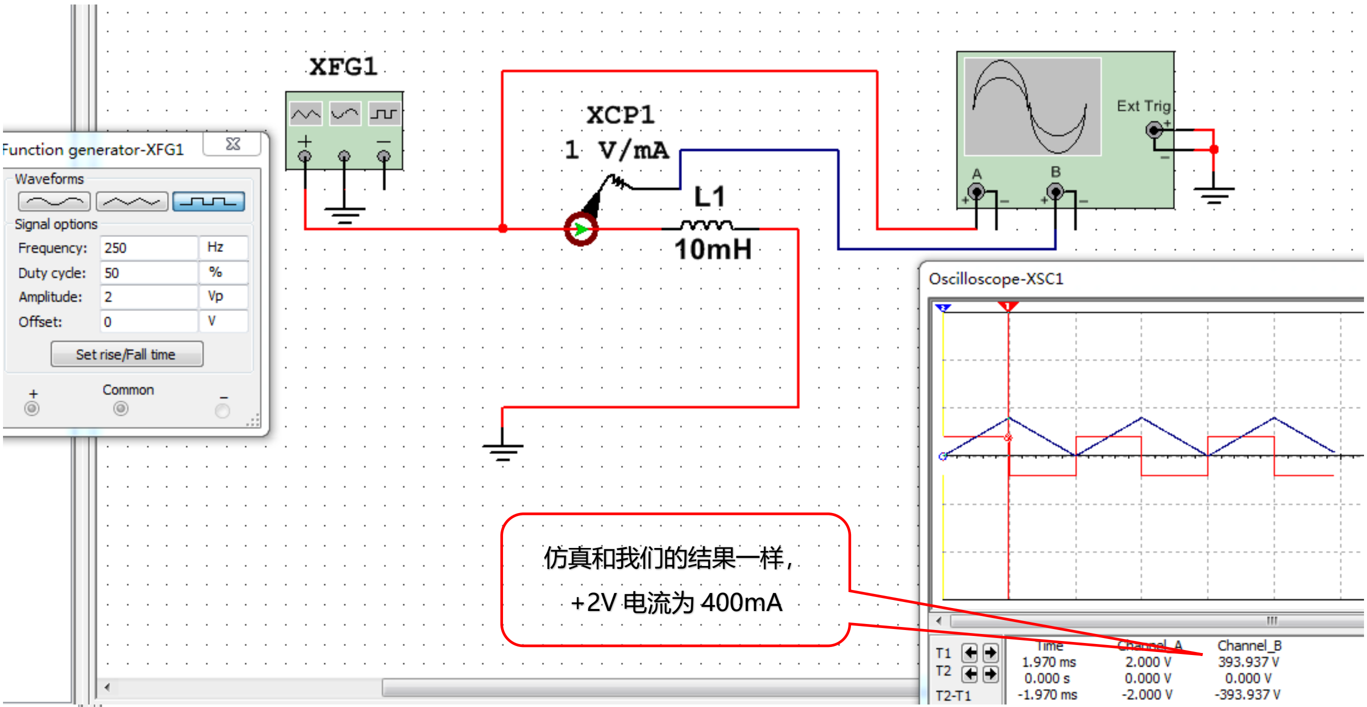
$$i(t)=\frac{-2V}{10mH}\ X\ 2ms\ +0.4$$

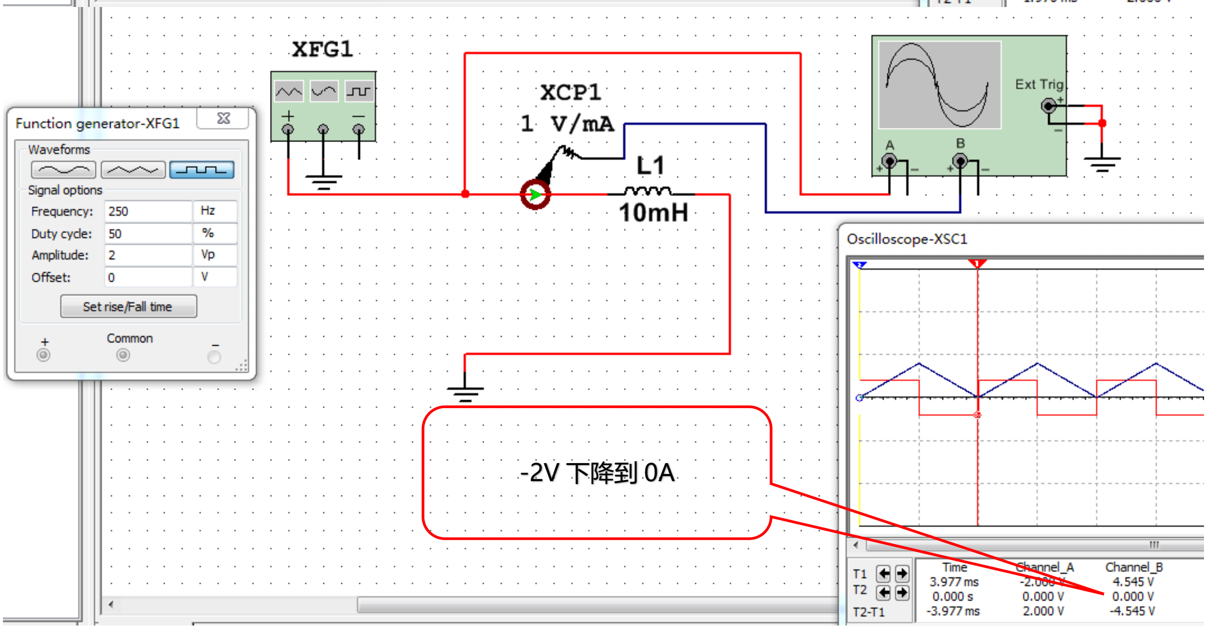
$$i(t)=-0.4+0.4$$

$$it(t)=0A$$

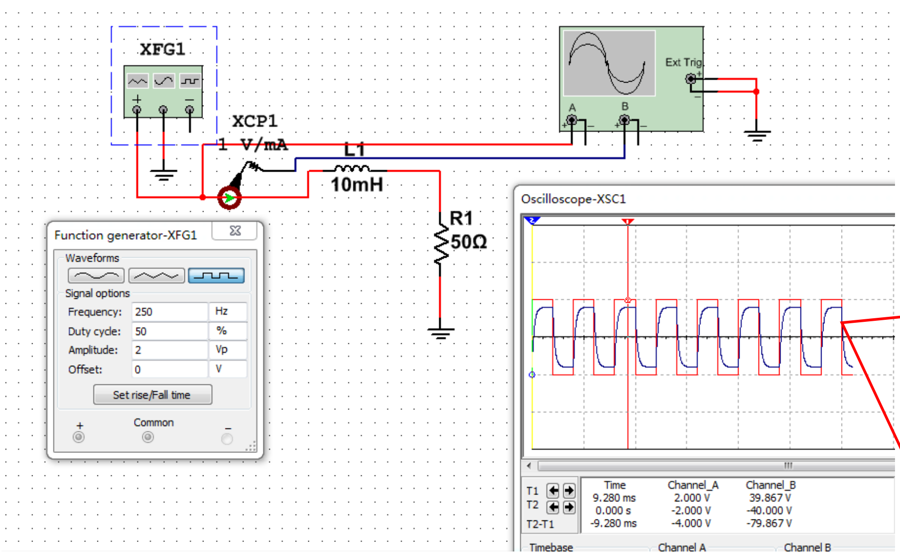
这个 2ms 是积分上限 4ms - 积分下线 2ms

最后得到电感电流在 4ms 时间后是 0A





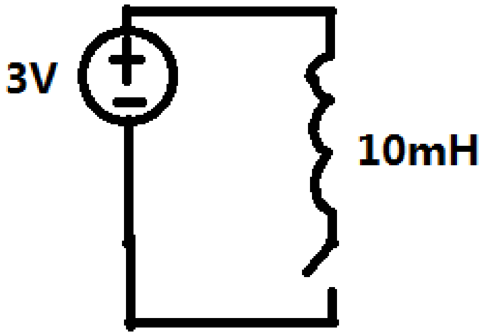
如此循环，电感电流就是个三角波

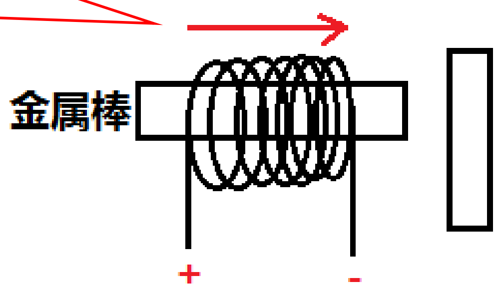


在电感后面没加负载的情况下电感对地短路，电感的电流是直接按照积分公式向上升的。但是电感后面加了负载，那么电感电流就是根据输入电压/负载电阻得到的，所以电感加负载，电感就得等效为短路了，电感电流就是输入电压和负载的关系，用欧姆定律计算就可以了

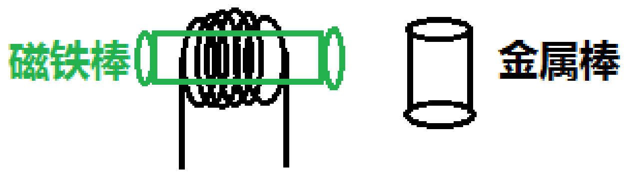
电感的感应电动势(电感电压反冲)

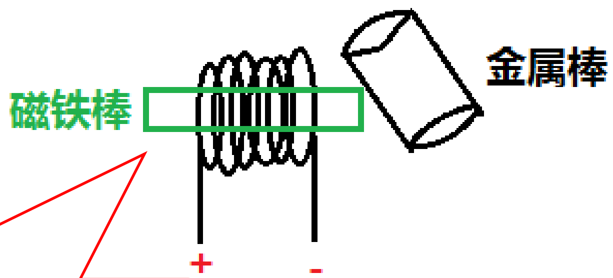
这种电感加开关的电路可以用在门铃，给电感通道，电感线圈里面的金属棒会悬浮起来，前后移动，向前移动还是向后移动，看线圈电压方向



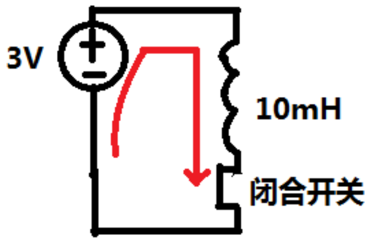


电感反冲电压只有在电感电流突然变化很大才会产生，比如我开关闭合，电感电流正常流动，突然哪天我将开关断开，电感电流与地形成不了回路，那么电感电流急剧下降，电感会产生反冲电压





还有就是用在继电器上，电感线圈通电，线圈里面的磁棒会吸合外部的金属棒，也可能是弹开外部的金属棒，试一下我不太清楚



$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t U d\tau + I0$$

开关闭合瞬间初始电流为 0

$$i(t) = \frac{1}{10mH} \text{ x} 3V \int_0^t dt + 0$$

3V 电压加载给电感

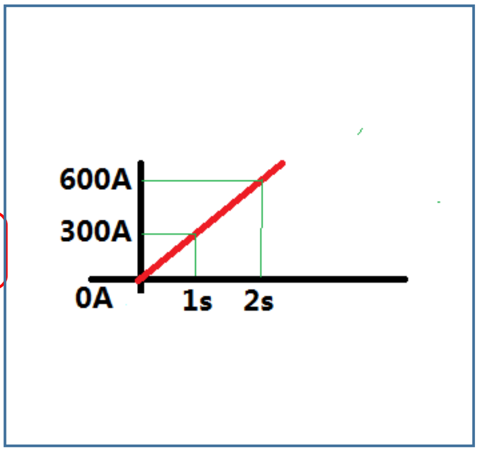
$$i(t) = \frac{3V}{10mH}\int_0^{1s}$$

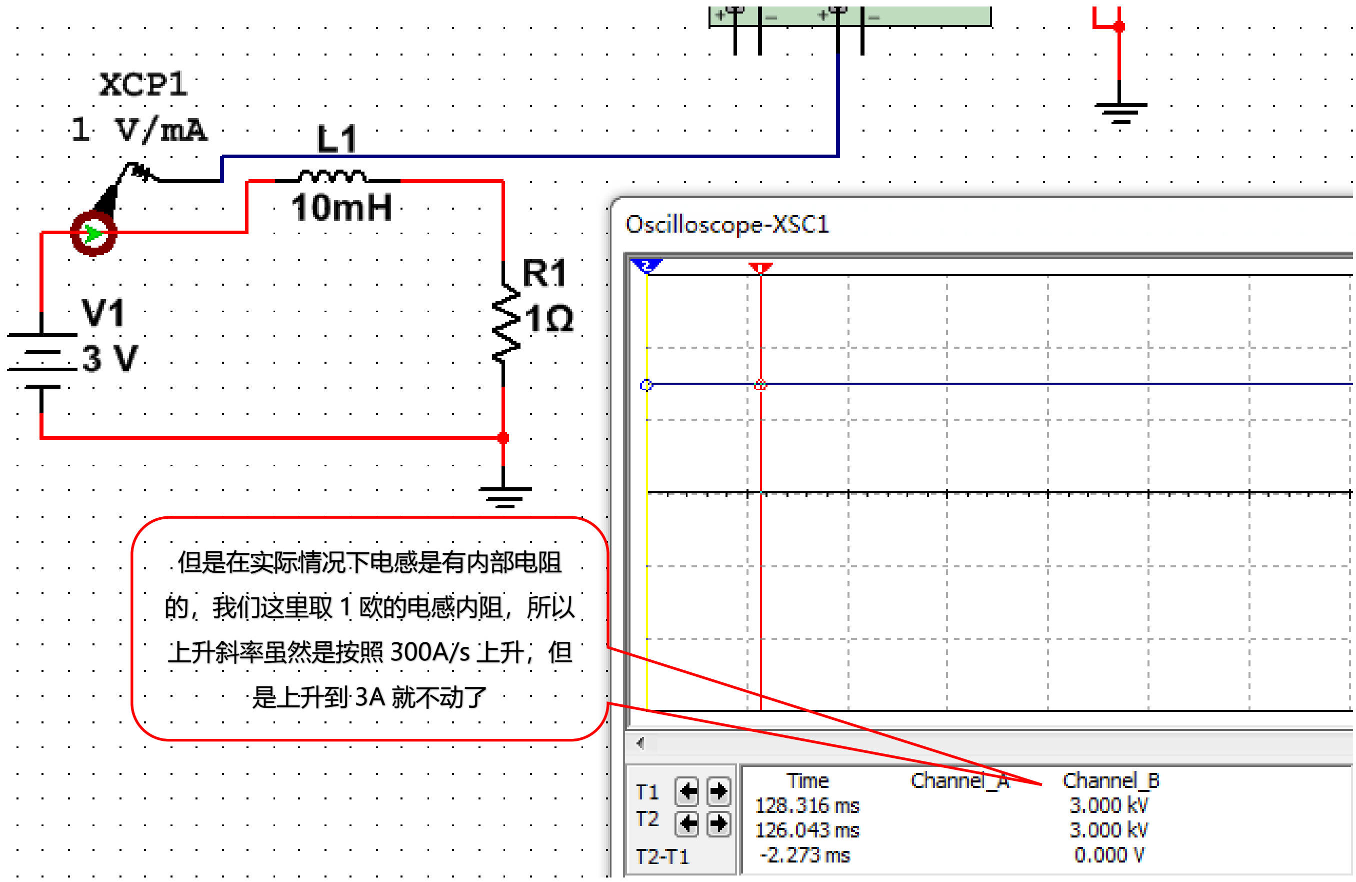
3V 给电感通电 1s

$$i(t) = \frac{3V}{10mH} \text{ x } 1s$$

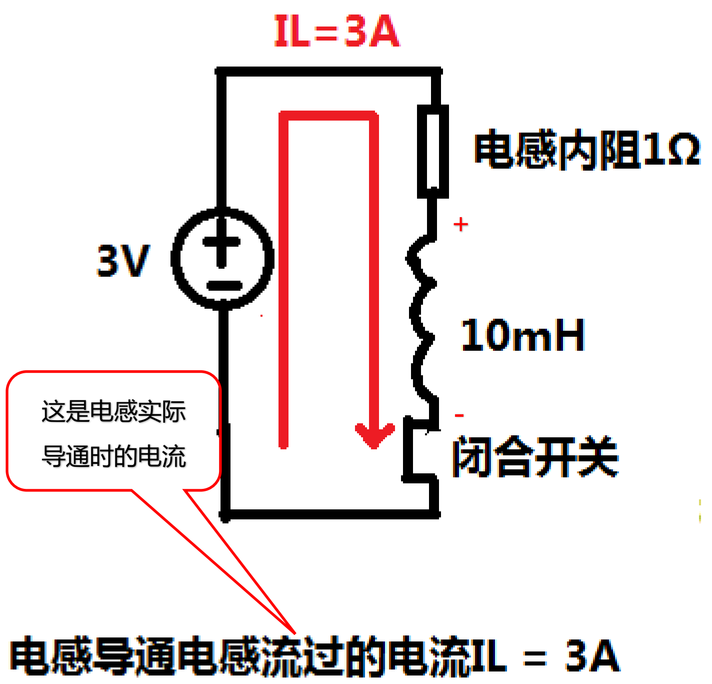
$$i(t) = 300A/s$$

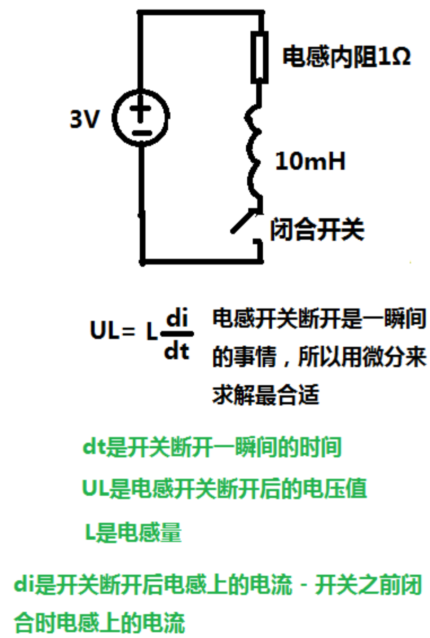
电感的电流上升斜率是 1 秒 300A，如果我不断开开关，电感是每秒 300A 电流增加



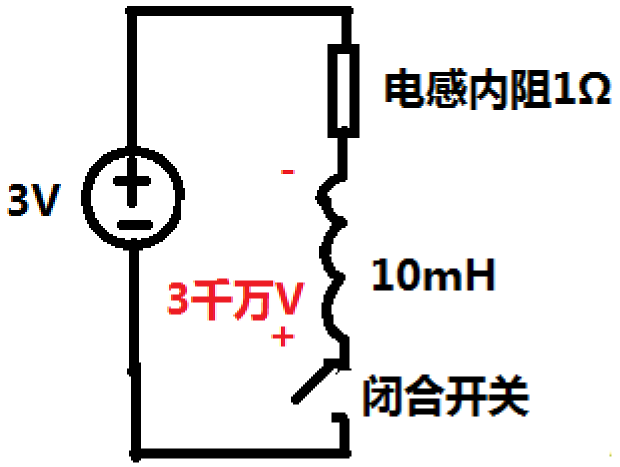


现在我们来看电感上面开关断开后的情况





下面我们来粗略计算一下



$$UL = L\frac{di}{dt}$$

开关断开后，电感电流设为 0V

$di = 0 - 3A$

减去开关闭合时候电感持续的电流 3A

$dt = 1ns$

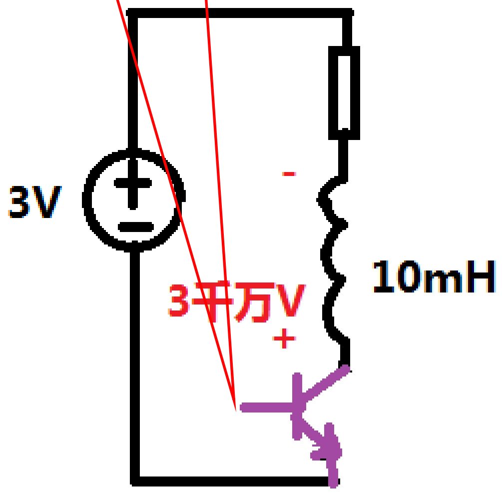
$L = 10mH$

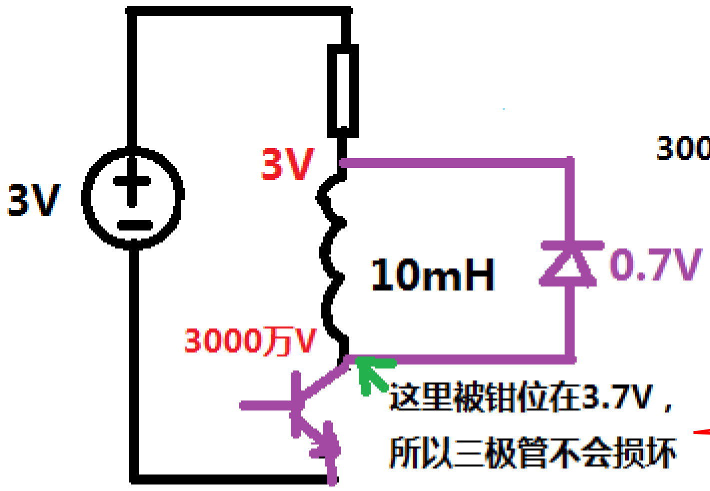
$$UL = 10mH\frac{-3}{0.000000001}$$

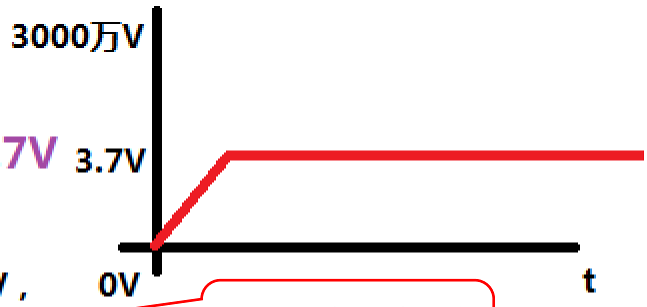
$UL = -30000000V$

得到 3 千万 V 反向电动势

3000 万 V，如果是开关还好说，如果这里是个三极管或者 MOSFET 管当开关就会被烧坏

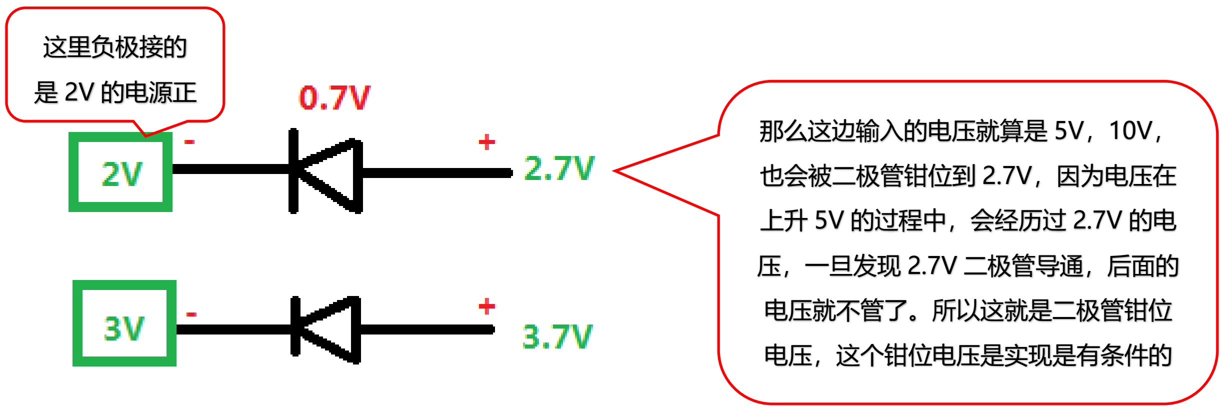




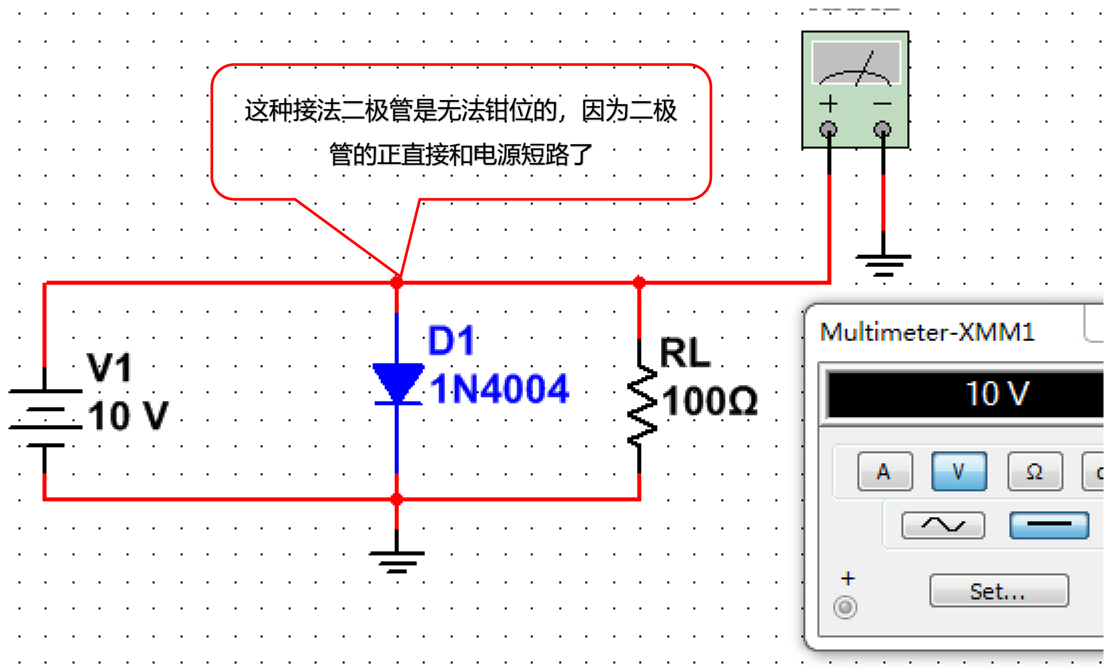


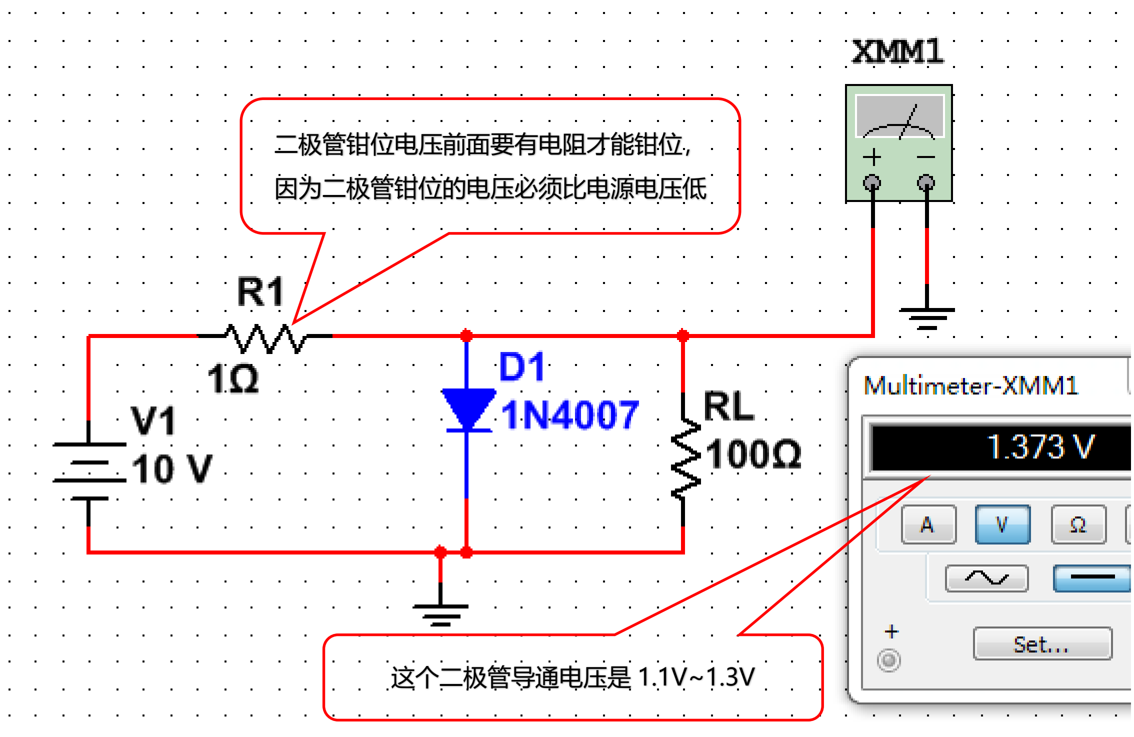
这个钳位电压是怎么被计算出来的？

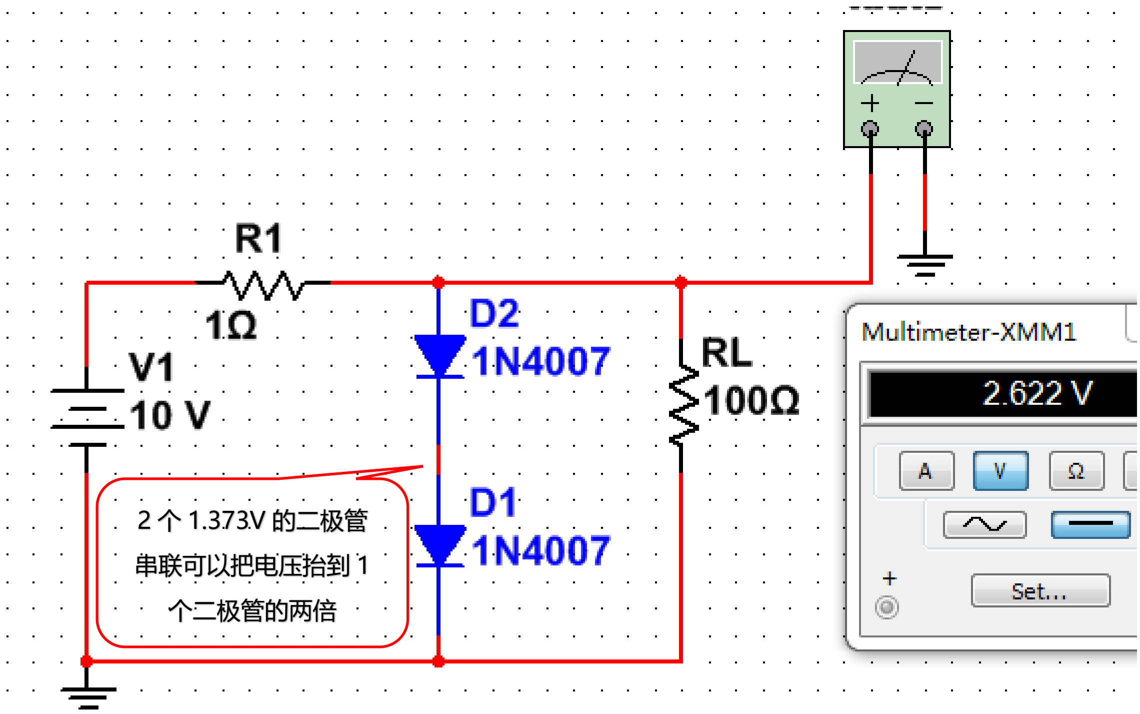
二极管钳位电压计算必须以二极管负极电压为参考，然后负极电压加上 0.7V，二极管导通，这个加上 0.7V 的电压就是二极管正极电压


这里负极接的是 2V 的电源正
0.7V
2V
-
+
2.7V
3V
-
+
3.7V
那么这边输入的电压就算是 5V，10V，也会被二极管钳位到 2.7V，因为电压在上升 5V 的过程中，会经历过 2.7V 的电压，一旦发现 2.7V 二极管导通，后面的电压就不管了。所以这就是二极管钳位电压，这个钳位电压是实现是有条件的

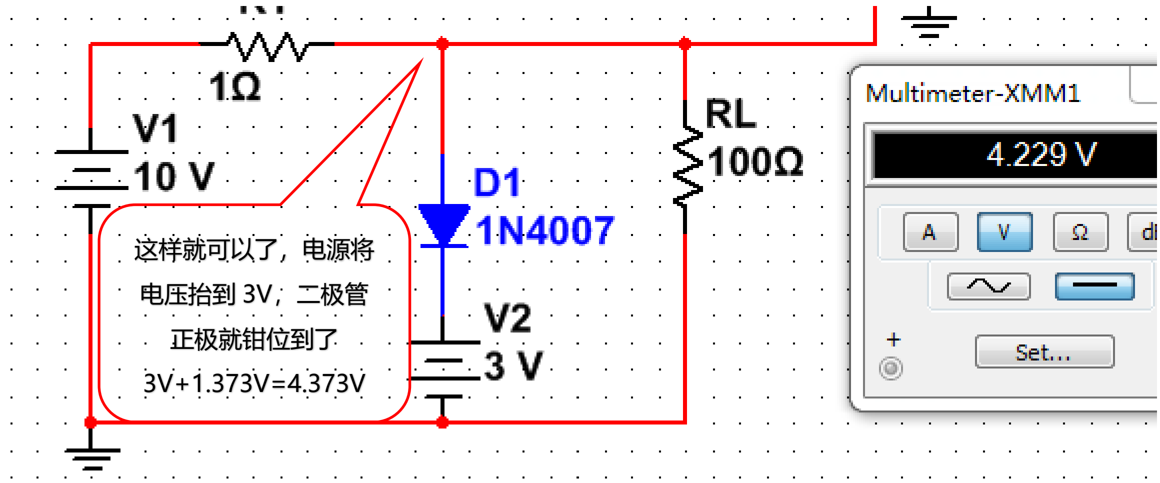
条件是什么?


这种接法二极管是无法钳位的，因为二极管的正直接和电源短路了
V1
10 V
D1
1N4004
RL
100Ω
Multimeter-XMM1
10 V
A
V
Ω
Set...


XMM1
二极管钳位电压前面要有电阻才能钳位，因为二极管钳位的电压必须比电源电压低
R1
1Ω
V1
10 V
D1
1N4007
RL
100Ω
Multimeter-XMM1
1.373 V
A
V
Ω
Set...
这个二极管导通电压是 1.1V~1.3V



这些都是二极管接地钳位方法，有没有不接地的钳位方法，比如我上面那个电感的反向电动势钳位



这里 4.229 的钳位电压是实际误差，这就是以电压为参考点二极管向上钳位的方法，和电感反向电动势钳位的思想一样

dBm 转换为 W（功率的计算方式）

通常用dBm表示功率的单位，dBm即是功率相对于1mW的值：

dBm = Power level = comparison relative to 1 mW

$$\text{dBm} = 10\log\frac{P\ (watts)}{0.001}$$

$$\underset{1\ \text{W}}{P_1} \longrightarrow \underset{30\ \text{dBm}}{P_{1'}}$$

$$\underset{10\ \text{W}}{P_1} \longrightarrow \underset{40\ \text{dBm}}{P_{1'}}$$

$$\text{dBm} = 10\log \times \frac{P}{0.001(1mW)}$$

30dbm等于多少W？

$$30\text{dbm} = 10\log X \frac{P}{0.001(1mW)}$$

$$\frac{30\text{dbm}}{10} = \log X \frac{P}{0.001(1mW)}$$

$$3 = \log X \frac{P}{0.001(1mW)}$$

因为log是10为底

$$所以10^3 = \frac{P}{0.001(1mW)}$$

P = 1000*0.001 = 1W

所以30dbm=1W

35dbm 等于多少 W

$$\text{dBm} = 10\log \times \frac{P}{0.001(1mW)}$$

$$35\text{dbm} = 10\log X \frac{p}{0.001}$$

$$\frac{35}{10} = \log X \frac{P}{0.001}$$

$$3.5 = \log X \frac{P}{0.001}$$

$$10^{3.5} = \frac{P}{0.001}$$

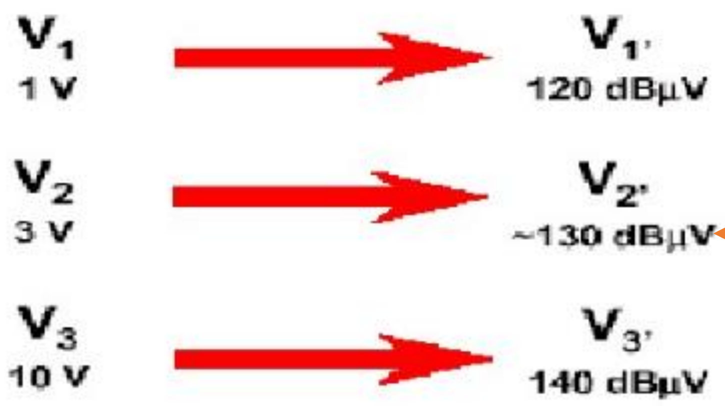
$$3162.277 = \frac{P}{0.001}$$

P = 3162.277 X 0.001= 3.16227W

dBuV 转换成电压，(dBuV 表示电压的大小)

通常用dBuV表示电压的大小，dBuV即是电压相对于1uV的值：

$$dB\mu V = 20\log\frac{V\ (volts)}{10^{-6}}$$



$$dBuv = 20\log\frac{V}{0.000001(1uV)}$$

120dBuV等于多少V？

$$120dBuV = 20\log\frac{V}{0.000001(1uV)}$$

$$\frac{120}{20} = \log \times \frac{V}{0.000001(1uV)}$$

$$6 = \log \times \frac{V}{0.000001(1uV)}$$

$$10^6 = \frac{V}{0.000001(1uV)}$$

1000000 X 0.000001=1V

120dBuv = 1V电压

130dBuV 等于多少V？

$$dBuv = 20\log\frac{V}{0.000001(1uV)}$$

$$130 = 20\log\frac{V}{0.000001(1uV)}$$

$$\frac{130}{20} = \log\frac{V}{0.000001(1uV)}$$

$$6.5 = \log\frac{V}{0.000001(1uV)}$$

$$10^{6.5} = \frac{V}{0.000001(1uV)}$$

上面的 3V
只是个大概

3162277.66 X 0.000001 = 3.16227V

精确的应该是130dBuV = 3.16227V

dBv(也就简称为 dB)换算成电压

$$dBV = 20\log\frac{V}{1}$$ ←因为dBV就是以1V为基准，所以这里就是1

例如:30dB是多少电压

$$30dB = 20\log\frac{V}{1}$$

$$\frac{30}{20} = \log\frac{V}{1}$$

$$1.5 = \log\frac{V}{1}$$

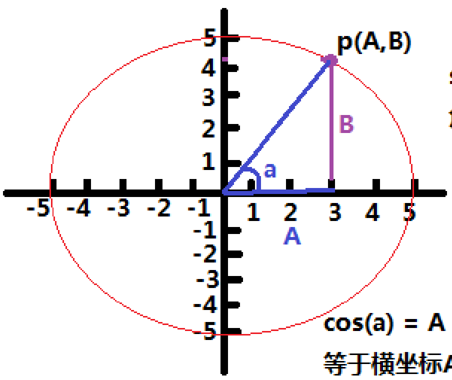
因为log默认是10为底

$$10^{1.5} = \frac{V}{1}$$

$$V=31.622 \times 1$$

$$V=31.622V$$

三角函数 tan 正切函数



sin(a) = B ，

角a的sin值等于纵坐标B

cos(a) = A 角a的cos

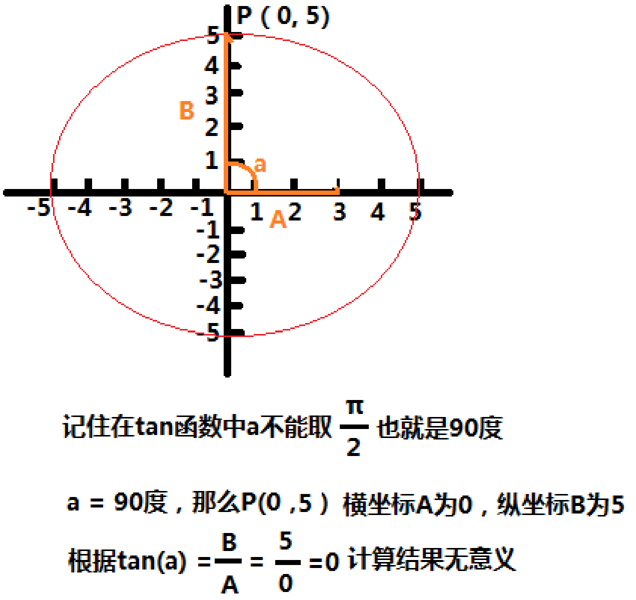
等于横坐标A

tan(a) = a对边比领边

也就是$\tan(a) = \frac{B}{A}$

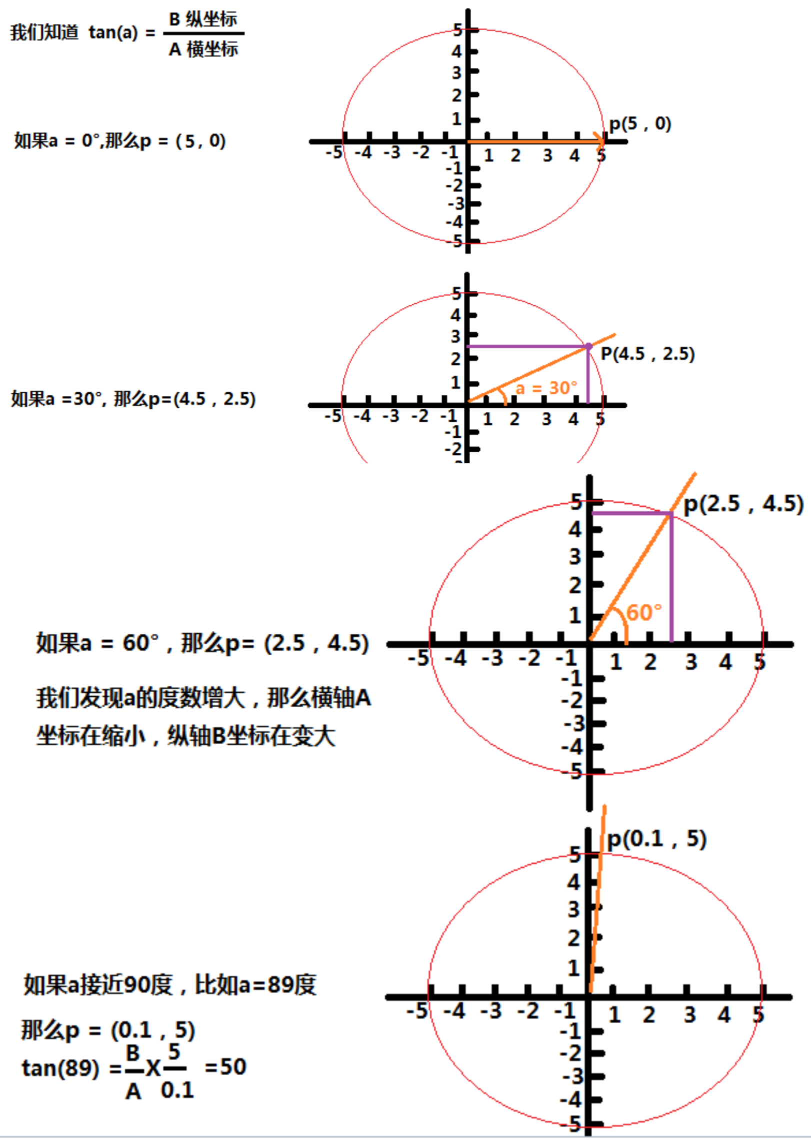
也可以用初中学的$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$ 也就是$\frac{B}{A}$

所以tan(a) 就是点p的纵坐标B/横坐标A



所以 tan 的 a 不能等于 90 度，也不能等于-90 度，因为这两个度数横坐标 A 都是 0，没有意义。

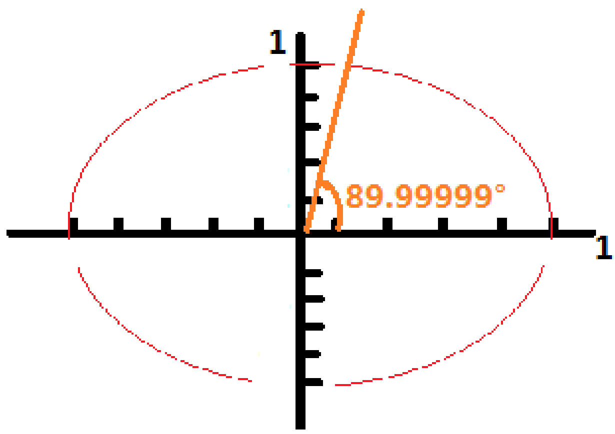
正切函数的曲线形式



如果 a 无穷接近于 90 度，那么 B 轴数组趋近于无穷大。

如果还不理解，看下图

如果用归一化的方式，a无限趋近于90度，那么y(B)轴就无限接近于1，x(A)轴就无限趋近于0，



比如a = 89.99999

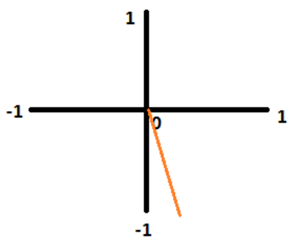
B=0.99999

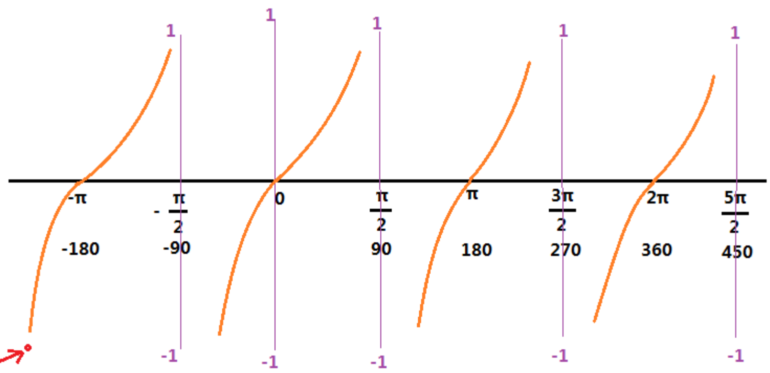
A= 0.00001

$$\tan(89.99999) = \frac{0.99999}{0.00001} = 99999$$

这样下去就是无穷大的数

用归一化的方式来表示tan坐标



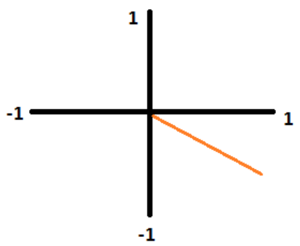


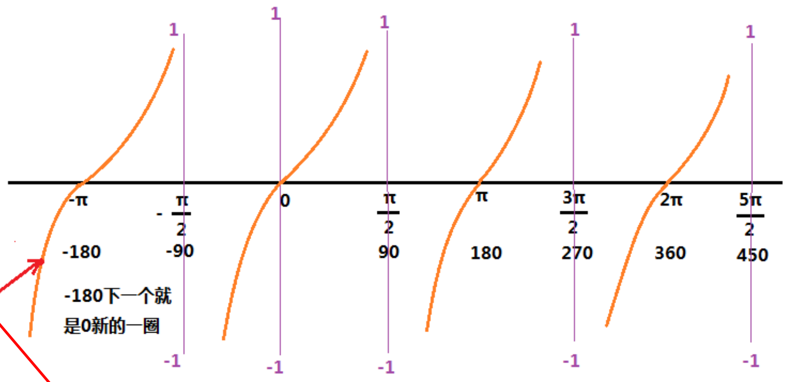
a=290，p=(0.3,-0.8)

tan(290) = -0.8/0.3 = -2.6

-2.6超出了我表示tan曲线范围，但是你下面继续看我增加a的角度

用归一化方式来表示tan坐标

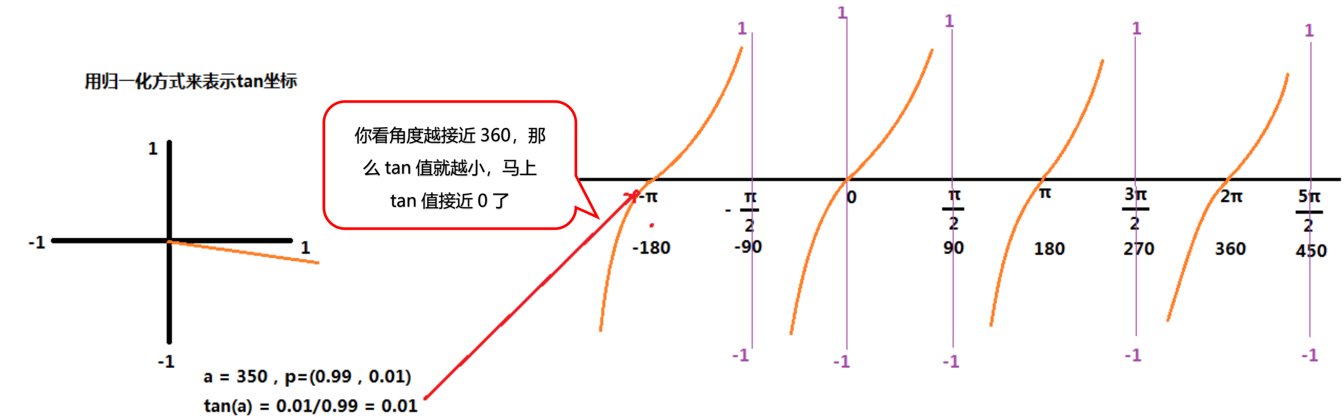




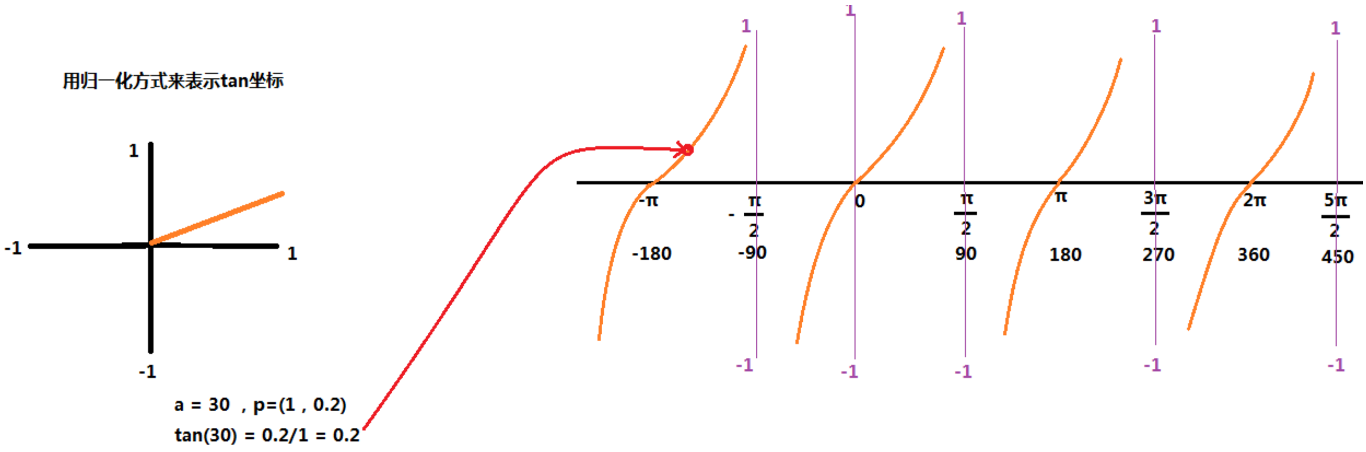
a = 330，p = (0.7，-0.4)

tan(a) = -0.4/0.7 = 0.57

你看角度越接近 360，那么 tan 值就越小



如果继续向上旋转呢?



归一化是什么意思?

归一化是简化计算方式，尤其是数字太大用在坐标图上写不下，或者计算起来写太多字，所以用归一化来计算，将计算结果反归一化还原。也就是将数据按比例缩小便于计算。

比如数字0~1000 归一化成0~1

也就是0 归一化成 0

1归一化成	**0.001**
2归一化成	**0.002**
10归一化成	**0.010**
100归一化成	**0.100**
1000归一化成	**1**

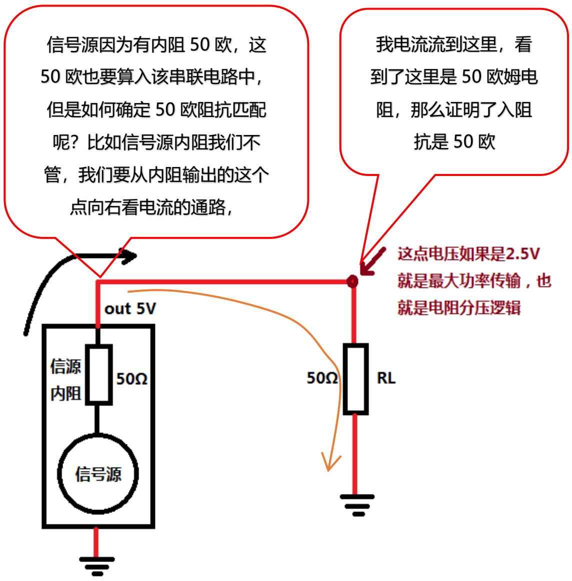
所以数字按比例缩小1000倍

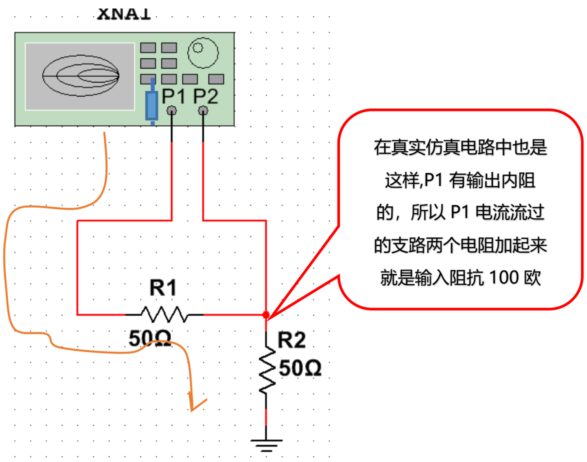
归一化方式还可以用在特征阻抗的史密斯圆图计算上，看下面的史密斯圆图计算方法

阻抗匹配，史密斯圆图计算

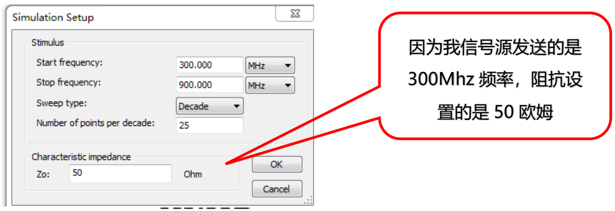
需要前面复数的知识，归一化知识。

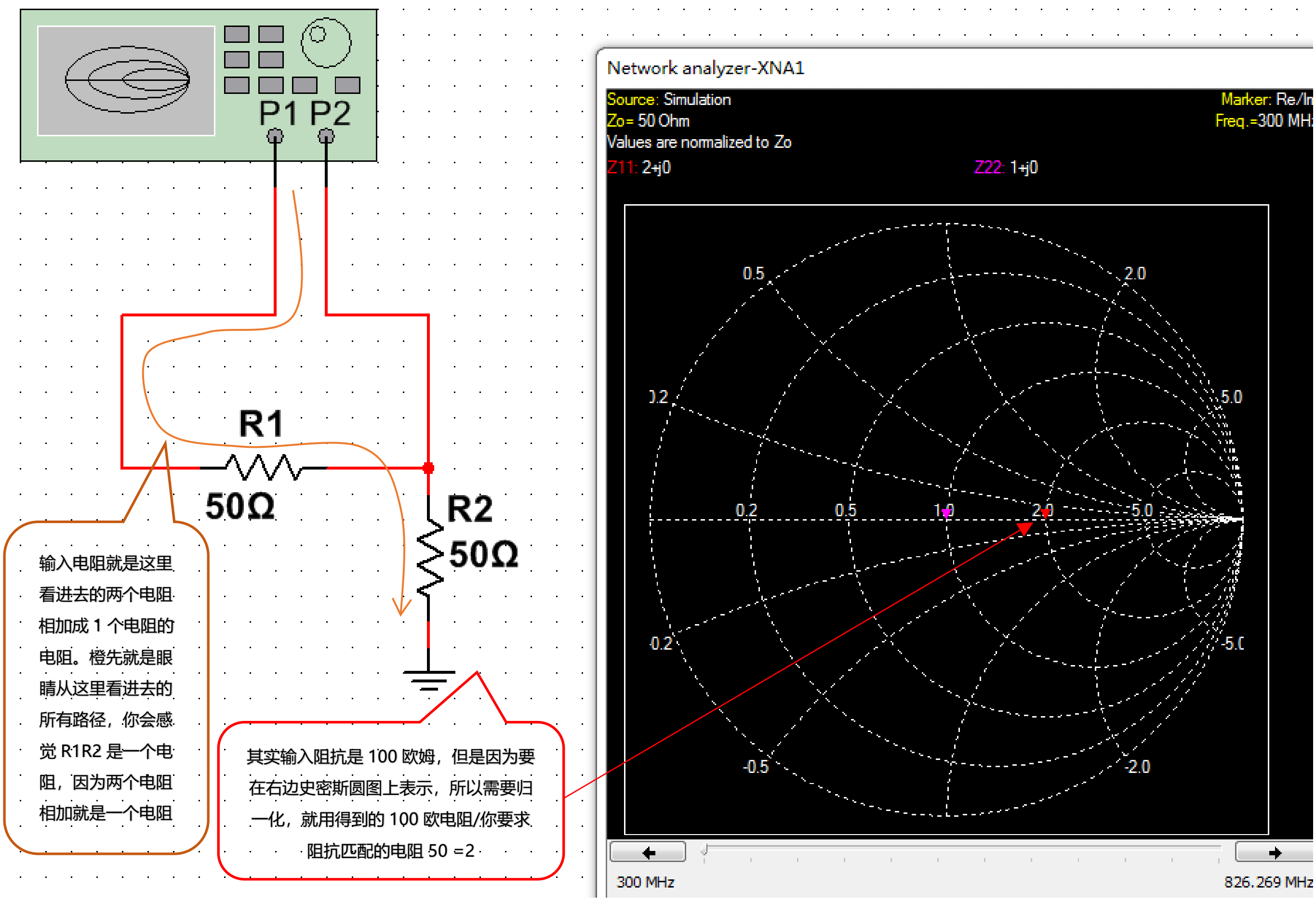
什么是输入电阻？



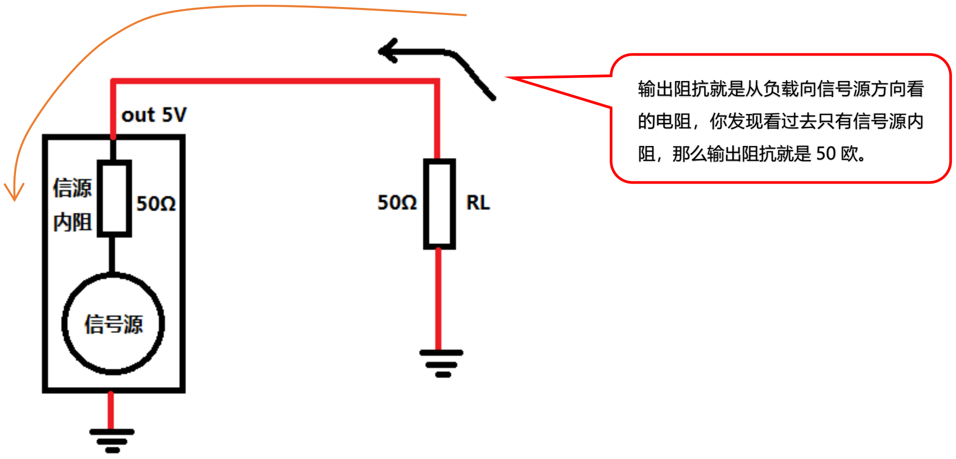


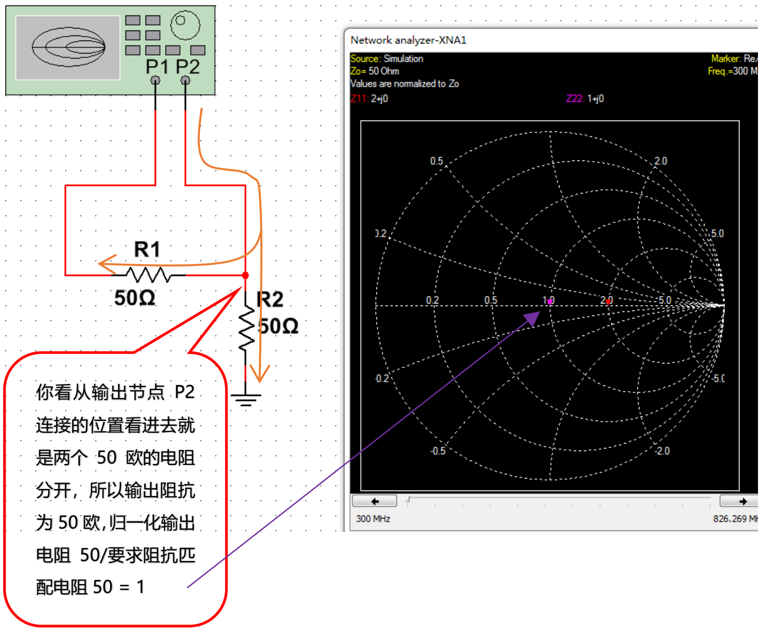
输入阻抗就是信号源电流流入负载时，电流看到的阻抗。



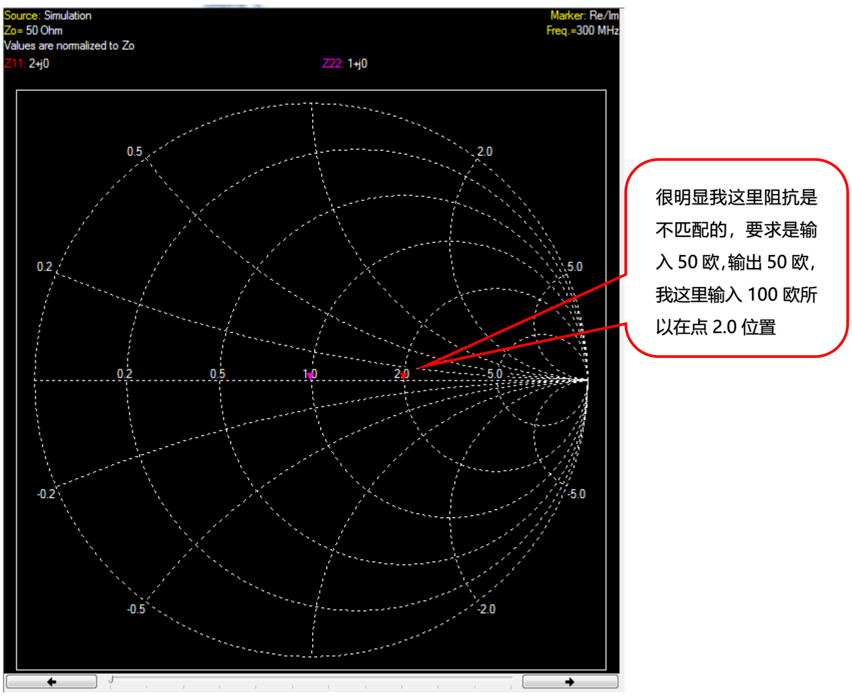


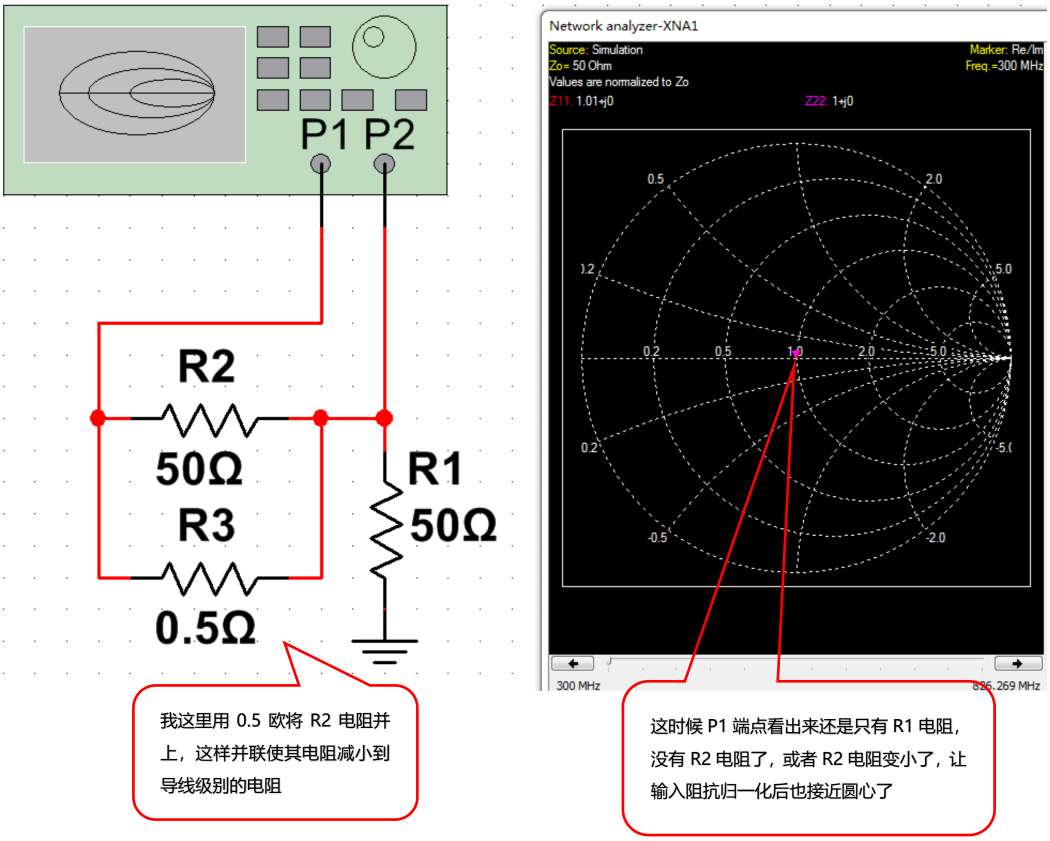
那么输出阻抗呢?





这就是阻抗匹配，要求所有输入输出电阻都要落到圆心 1 的位置





这是用电阻做的阻抗实验，实际上阻抗匹配的输入阻抗失由电阻，电容，电感综合计算出来的，输出阻抗也是由电阻，电容，电感综合计算出来的。

打个比方:

先确定工作频率，比如300Mhz

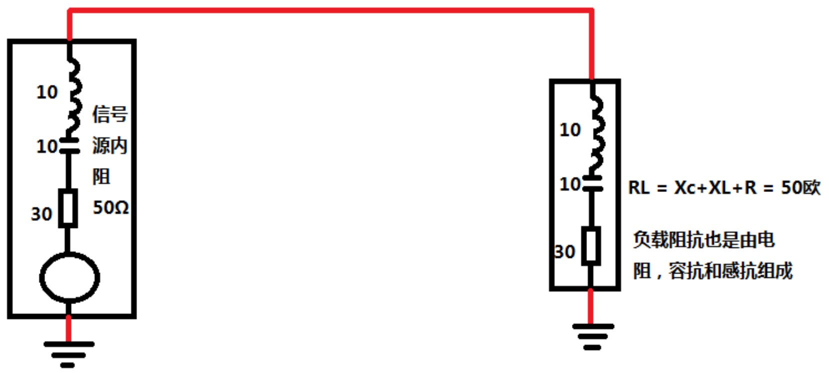
这是信号源 内 阻抗是:

容抗1/2πfc = Xc = 10Ω

感抗2πfL = XL = 10Ω

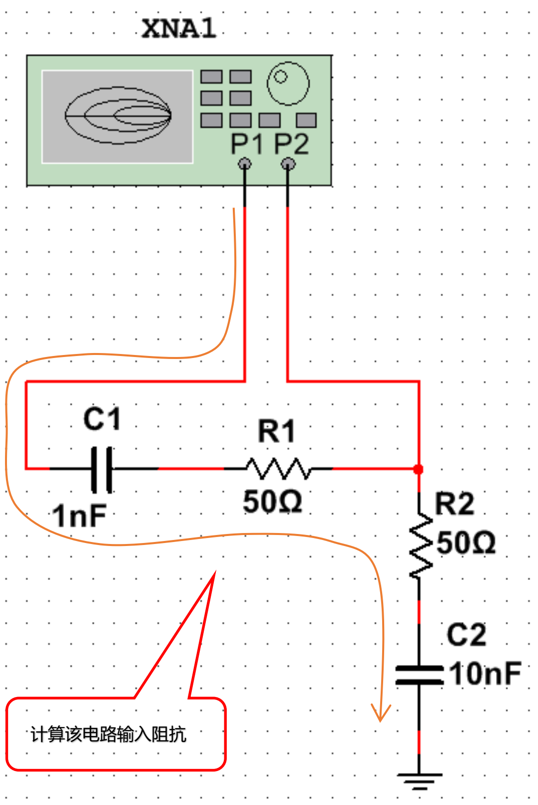
电阻R = 30Ω

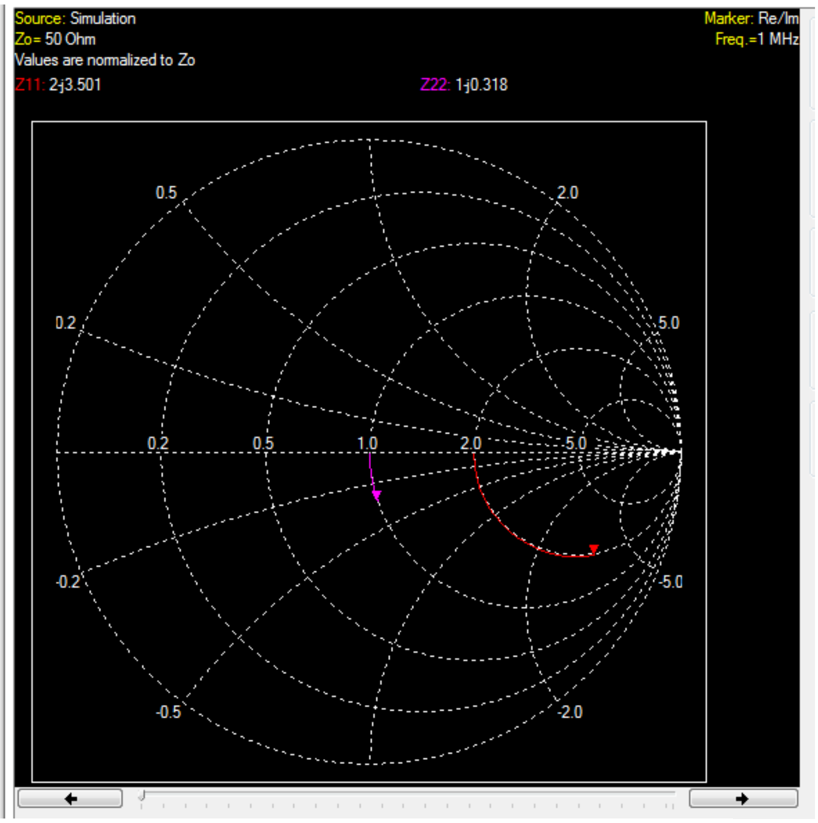
信号源内阻Ri = Xc+XL+R = 10+10+30 = 50 Ω



所以计算阻抗必须要有频率，不同的频率下，阻抗是不一样的。

输入阻抗计算





确认频率为1M

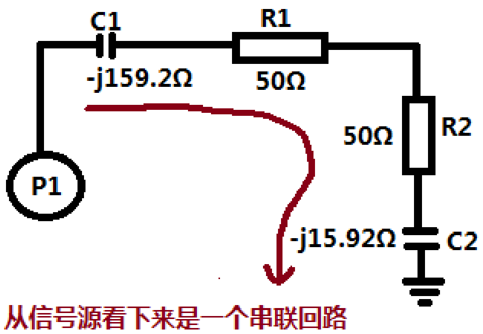
C1=1nF $\quad C1\ 容抗 = \dfrac{1}{2\pi fc} = \dfrac{1}{6.28 \times 1000000 \times 0.000000001} = 159.2 \qquad C1 = Xc = 159.2\Omega$

C2 = 10nF $\quad C2容抗 = \dfrac{1}{2\pi fc} = \dfrac{1}{6.28 \times 1000000 \times 0.00000001} = 15.92 \qquad C2 = Xc = 15.92\Omega$

现在可以确认的是:

- **C1 = 159.2Ω**
- **C2 = 15.92Ω**
- **R1 = 50Ω**
- **R2 = 50Ω**

等效电路输入阻抗:



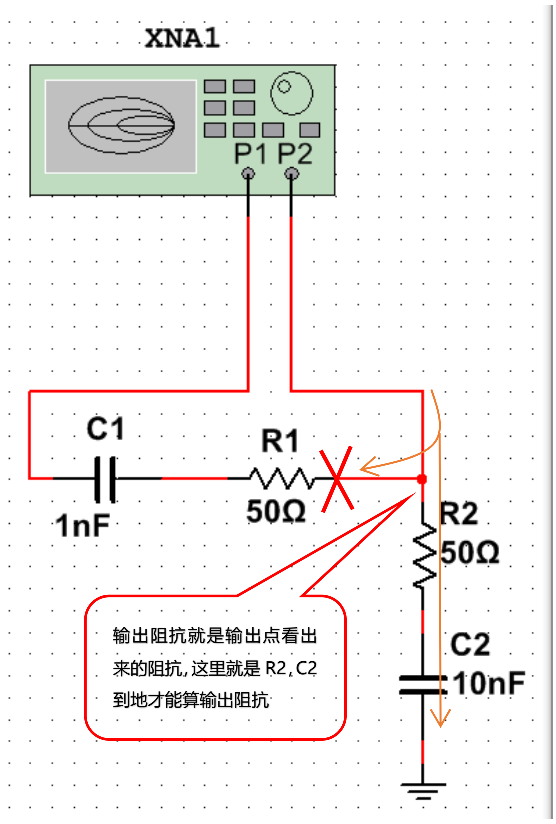
输入阻抗 = C1(Xc)+R1+R2+C2(Xc)
= -j159.2+50+50+(-j15.92)
= -j175.12+100
= 100 - j175.12

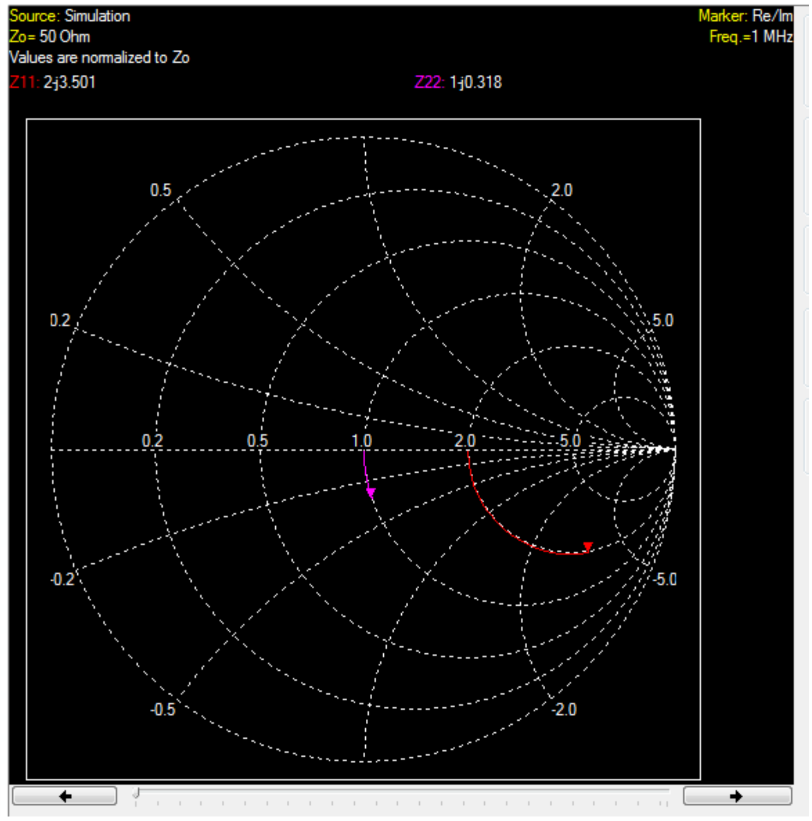
然后实部和虚部归一化，我这里特征阻抗要求是50Ω

2 = 100/50
-j3.504 = -j175.12/50
所以输入阻抗 = 2-j3.504

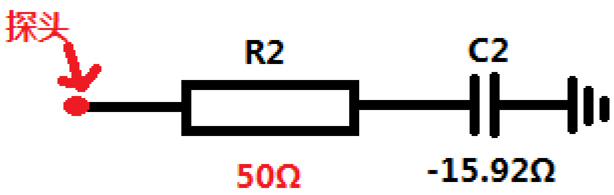
输入阻抗计算出来了，和仿真的 z11 相符。

输出阻抗计算





输出阻抗等效电路模型



输出阻抗 = R2 + C2 = 50 + (-j15.92) = 50-j15.92

归一化 R = 50/50 =1

C =-j15.92/50 = -j0.3184

所以输出阻抗是1-j0.3184

计算结果和仿真相近，正确。

复数还有一种表示方法，极坐标表示法

计算 5∠47° + 10∠-25° = ?

像这种有角度表示的复数我们要进行分解

比如 9.5∠73° 这就是一个数

分解为9.5cos73°+j9.5sin73°

所以 9.5∠73° = 9.5cos73° + j9.5sin73°

=9.5 x 0.292 + j9.5 x 0.956

=2.774 + j9.082

这就是9.5∠73°的复数结果2.774 + j9.082

9.5∠73°=2.774 + j9.082

下面回过头来计算 5∠47° + 10∠-25° = ?

5∠47° + 10∠-25°　　　**∠-25 负号放在sin前面**

=5 x cos47°+j5xsin47° + 10 x cos25° - 10xsin25°

=(3.405 + j3.655) + (9.063-j4.22)

=12.468-j0.565

这就是数字加角度的复数运算，最后结果是个复数。如果你想把最后结果换成数和角度表示，那么看下面如何进行复数到角度的逆运算。

我们先说如何将代数形式的复数转换成极坐标形式

F = -20-j40 将其转换成极坐标形式

$F = \sqrt{a^2 + b^2}$ = 模值

$F = \sqrt{(-20)^2 + (-40)^2}$ = 44.7 这是模 也就是模值

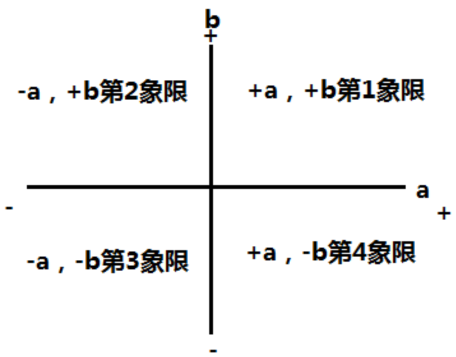
因为(-20) + (-40) 也就是-a + -b是在第3象限

第3象线 辐角(相位角) = θ = arctan $\frac{-b}{-a}$ +180°

所以θ=arctan $\frac{-40}{-20}$ +180° = 63.4°+180° = 243.4°

F=44.7∠234.4°

也就是F模为44.7 辐角(相位角)为234.4度



有了模和辐角的知识我们来计算(3.405+j3.655)怎么转换成 5∠47°

$$3.405+j3.655$$

$$a = 3.405$$

$$b = 3.655$$

$$F = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$F = \sqrt{3.405^2 + 3.655^2}$$

$$= 4.995 \approx 5$$

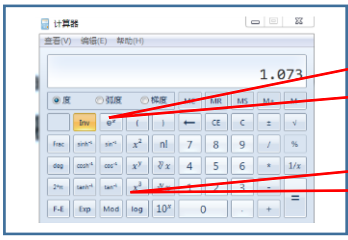
$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$

这是+a +b =也就是+3.405 + j3.655在第1象限辐角公式

$$= \arctan \frac{3.655}{3.405}$$

$$= \arctan 1.073$$

$$= 47.02$$



点击 Inv 所有的正弦 sin，余弦 cos，正切 tan 会变成反 arcsin，反 arccos 和反正切 arctan

然 后 点 击 tan-1 就 是 arctan1.073 的值

模和辐角是 4.995∠47.02，计算近视没有问题。

极坐标复数乘除法

复数极坐标乘法就是 模相乘，辐角相加

$$F_1 F_2 = |F_1| \angle\theta_1 \bullet |F_2| \angle\theta_2$$

$$= |F_1||F_2| \quad \angle\theta_1+\theta_2$$

$$= F\angle\theta$$

极坐标形式除法就是模相除，辐角相减

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1|\angle\theta_1}{|F_2|\angle\theta_2} = \frac{|F_1|}{|F_2|}\angle\theta_1 - \theta_2$$

如果我想用模和辐角逆相运算，得到模和辐角的代数形式(a+bi)这种实部虚部的算式。

$$a = |F| \cos\theta$$

$$b = |F| \sin\theta$$

$$3.405+j3.655$$

模辐角是$4.995\angle 47.02°$

如果用辐角和模反算代数实部虚部

$$a = |F|\cos\theta = 4.995 \times \cos 47.02 = 3.405$$

$$b = |F|\sin\theta = 4.995 \times \sin 47.02 = 3.654$$

$a+bj = 3.405+j3.654$ 接近$3.405+j3.655$

这就是模和辐角逆运算成实部和虚部

复数的指数形式

$$a = |Z|\cos\theta$$

$$b = |Z|\sin\theta$$

因为复数实部和虚部关系 $a+bi$ 所以可以像下面这样写

$$z = |Z|\cos\theta + |Z|\sin\theta i$$

我再将公共模部分提取出来

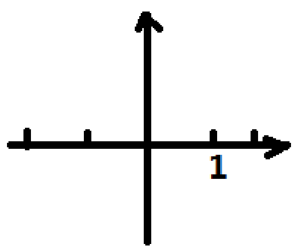
$z = |Z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ 其实$(\cos\theta+i\sin\theta)$是欧拉公式 $e^{i\theta}$

$$z = |Z|\, e^{i\theta}$$

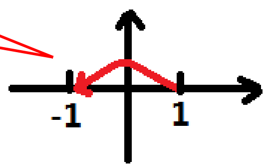
例如: $|Z| = 1$ 也就是模为1

$\theta = \pi = 180°$

$Z = e^{i\pi} = -1$ 相当于



因为 Z=1，模等于 1，经过 e-iπ 计算之后，1 旋转 180 度达到-1 了



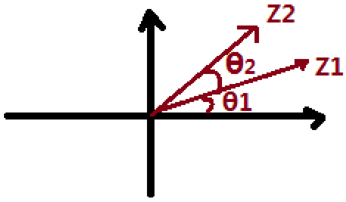
复数指数的乘法计算

$z_1 = |Z_1|e^{i\theta_1}$

$z_2 = |Z_2|e^{i\theta_2}$

$z_1 x z_2 = |Z_1||Z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ 指数与指数相乘，就是实数相乘，指数相加

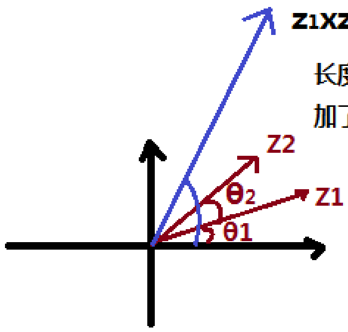
这样一来本来Z_1Z_2原来是这样子的



z2的长度是Z2，辐角是θ_2

z1的长度是Z1，辐角是θ_1

$z_1 x z_2 = |Z_1||Z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ 经过复指数相乘



$z_1 x z_2 = |Z_1||Z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

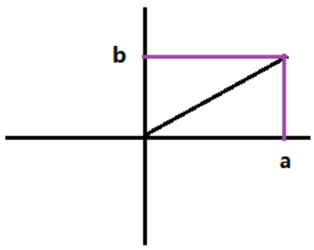
长度增加了z1和z2长度之和，然后辐角增加了$\theta_1\theta_2$之和，长度和幅度都变大了

复指数除法就是模相除法，指数相减，这里就不演示了。

共轭复数到坐标系上的表示

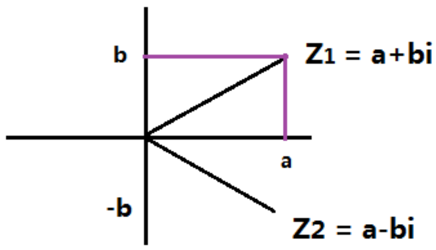
前面章节讲过共轭复数的计算方法，现在在坐标图形上演示一下

$Z_1 = a+bi$



$Z_1 = \overline{Z_2}$ Z1与Z2共轭

$Z_2 = a-bi$



共轭就是a+bi曲线的
对称下半轴方向 相位发生镜像反转

$$z = |Z|e^{i\theta}$$

$$\overline{z} = |Z|e^{-i\theta}$$

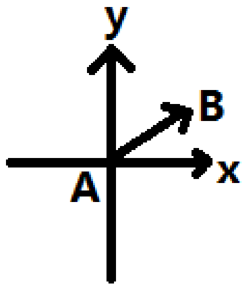
复指数共轭

向量使用

向量的几何表示法

向量的代数表示法

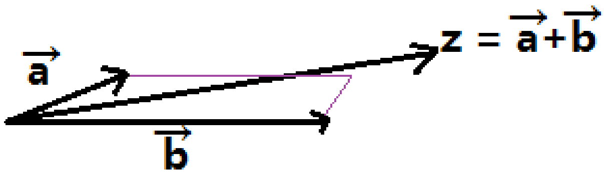
$\vec{a}$



这表示向量从A到B

向量加法:

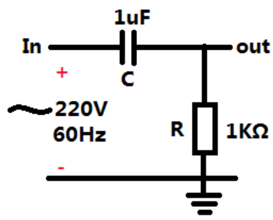
$\vec{a} + \vec{b}$



这条长度就是a向量长度加b向量长度

阻容串联电路

需要使用，向量，复数，这些知识



该电路对交流信号的电压衰减是多少呢？输入电流是多少？

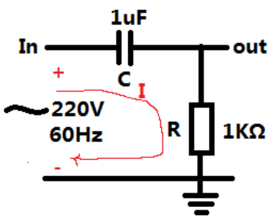
$Xc = \frac{1}{2\pi fc} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 60 \times 0.000001F} = 2\,653.92\Omega$ 容抗是2653.92Ω

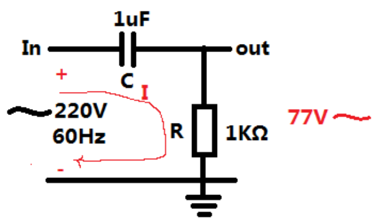
那么输入阻抗是多少呢？

$Zin = \vec{Xc} + \vec{R}$ 注意RC滤波分压电路输入阻抗不是我们以前认为的Xc+R这样计算，而是Xc向量+R向量计算

$Zin = \vec{Xc} + \vec{R} = \sqrt{Xc^2 + R^2} = \sqrt{2653.92^2 + 1000^2} = 2836.069$

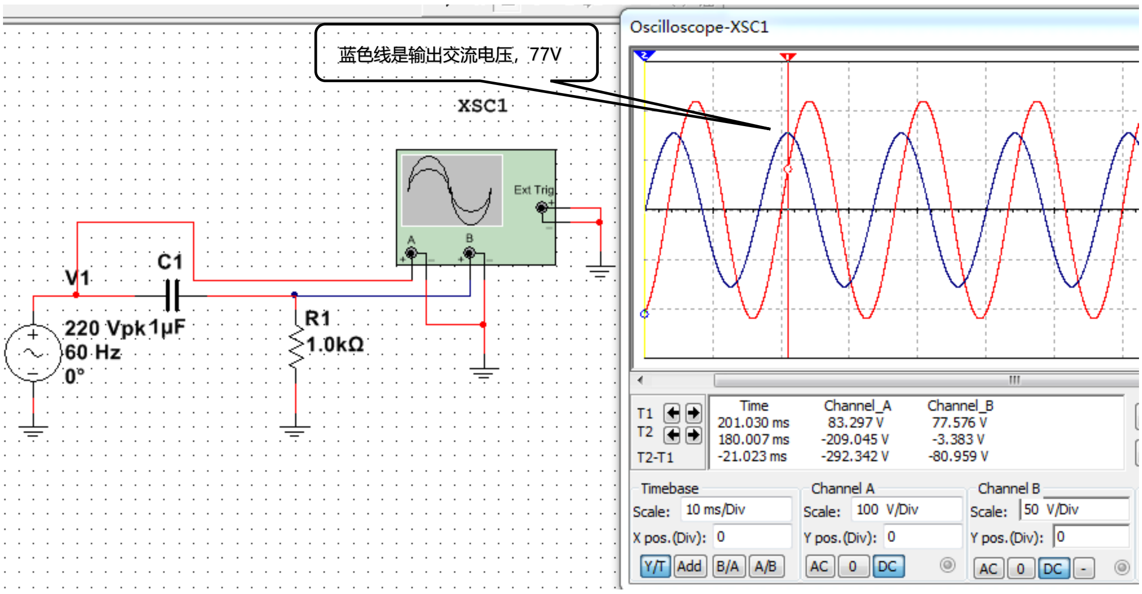
$I = \frac{220V}{Zin} = \frac{220}{2836} = 77mA$



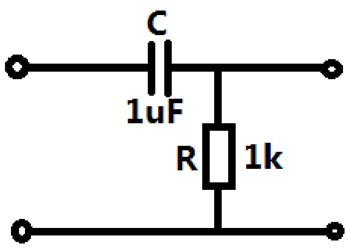


输出电压out = I x R = 77mA x 1000 = 77V

下面我们仿真试一下



阻容滤波电路



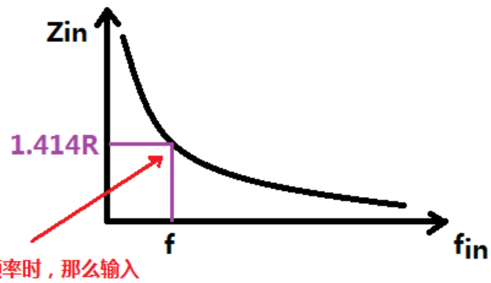
$$Zin = \vec{Xc} + \vec{R} = \frac{1}{2\pi fc} + \vec{R}$$

当输入信号频率等于1/2πRC的时候，电路容抗的模和电阻阻值相等

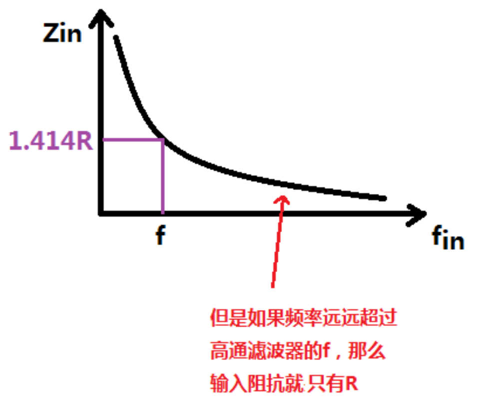
$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$ **转折频率**

当输入信号频率等于1/2πRC算出来的f时 $Zin = \vec{Xc}(R) + \vec{R} = \sqrt{Xc^2 + R^2} = \sqrt{2}R$

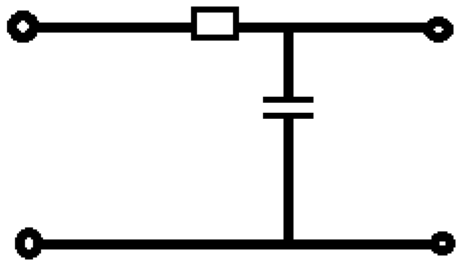
$Zin = \vec{Xc}(R) + \vec{R} = \sqrt{Xc^2 + R^2} = \sqrt{2}R$



当信号处于f这个频率时，那么输入阻抗就是1.414R,所以我们要滤除的f这个频点，在这个位置只是电压衰减1.414倍的R，但不是全部滤除完

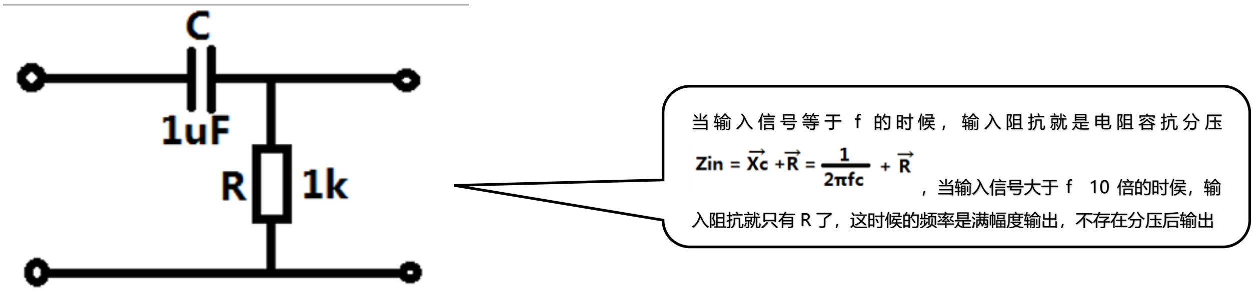


$$Zin = \vec{Xc} + \vec{R} = \cancel{\frac{1}{2\pi fc}} + \vec{R}$$



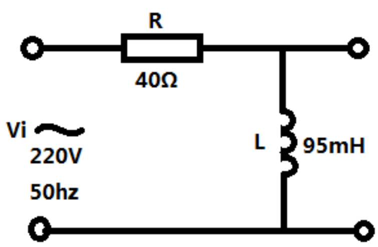
反过来就是低通滤波器，公式是一样的，就是反过来看而已

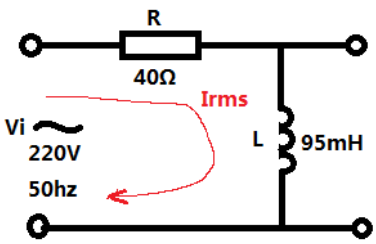
这个特征频率 f 到底是什么意义



所以你要设计完整通过某个信号的高通滤波器，那么特征频率 f 要设置低于这个信号 10 倍的频率。比如我要通过 100khz 的信号，我就要将 f 设置在 10khz 位置。

电阻电感串联电路





$$X_L = 2\pi fL$$

$$Zin = \vec{X_L} + \vec{R} = \sqrt{X_L^2 + R^2}$$

电感流过的电流

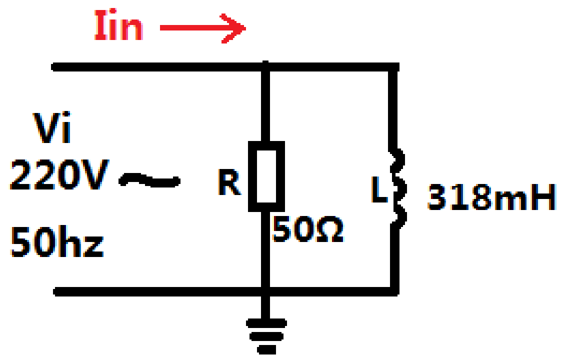
$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.095$$
$$= 29.83$$

$$Zin = \vec{X_L} + \vec{R} = \sqrt{29.83^2 + 40^2}$$
$$= 49.89$$

$$Irms = \frac{Vi}{Zin} = \frac{220V}{49.89} = 4.4A$$

和阻容串联计算差不多

电阻电感并联电路



$X_L = 2\pi f L = 100\Omega$

$Iin = \vec{I_R} + \vec{I_L}$ 原理还是KCL定律 总电流等于支路电流之和

只是这里注意是向量电流相加

$$\vec{I_R} = \sqrt{\left(\frac{Vin}{R}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{220}{50}\right)^2} = 4.4\,A$$

$$\vec{I_L} = \sqrt{\left(\frac{Vin}{XL}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{220}{100}\right)^2} = 2.2\,A$$

输入阻抗 $Z = Vin/(I_R+I_L) = 36.6\Omega$

不定积分计算案例 2

我们前几节的导数计算方式如下:

$$\frac{d}{dx}[\ x^2\ ] = 2x$$ 所以这条曲线任意一点的斜率为2x

也就是对x^2 求导 $= 2x$ (链式法则)

假设一开始我只知道2x

2x是谁的导数呢？

$$y = \int 2x\,dx$$ 不定积分就是求2x的反导函数

dx写在后面表示求导数的意思，前面加∫

就是求dx的反导

解法: $$\int Bx^n\,dx = B\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$ 公式(1)

如: $y = \int 2x\,dx$ 按照公式(1) ,先把x指数加1 ， 那么$2x = 2x^2$

$= 2\frac{1}{1+1}x^2$ 按照公式(1)，再把指数乘以导数，放在x前面 就是

x^2 的指数2，这个2已经是加过之后的指数了，

$= \frac{2}{2}x^2$ 将2放在x前面的分母，然后再分之1

$= x^2$ (这就是原函数)

$y = x^2$

多项式例子如下:

$$\int (3x^{-5} - 7x^3 + 3 - x^9)dx$$ 求该导函数的反导函数

$$= -\frac{3}{4}x^{-4} - \frac{7}{4}x^4 + 3x - \frac{1}{10}x^{10} + C$$ 这就是解出来的反导函数

常数可以是任意值，但是必须要有

$3x^0 = 1$ 常数加入x^0

$$\int Bx^n\,dx = B\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

按照公式 指数-5 + 1 得到 -4

将加了之后的指数，提前到x前当做分母

近年来石油消耗率呈现指数增长

增长指数为: 0.07

1970年初，石油消耗率大约为每年161亿桶

假设: R(t)表示从1970年起到第t年的石油消耗率

那么$R(t) = 161e^{0.07t}$ (亿桶)

使用 $R(t) = 161e^{0.07t}$ 这个公式计算从1970年到2010年，这40年的石油消耗总量?

解: 假设T(t)是石油消耗总量 (记住R(t)是石油消耗率，而不是石油消耗总量哦 ..)

1970~2010年石油消耗总量 既求T(40)

T(t)是石油消耗总量，那么T'(t)就是石油消耗总量的导函数，石油消耗率

前说了石油消耗率是R(t)，那么R(t) = T'(t) ，所以T(t)就是R(t)原函数

$$T(t) = \int R(t)dt = \int 161e^{0.07t}\,dt = \frac{161}{0.07}e^{0.07t} + C = 2300e^{0.07t} + C$$

如果T(0) = 0 得到C = -2300 。所以$T(t) = 2300(e^{0.07t} - 1)$

从1970~2010 这40年: $T(40) = 2300(e^{0.07\times 40} - 1) \approx 35523$(亿桶)