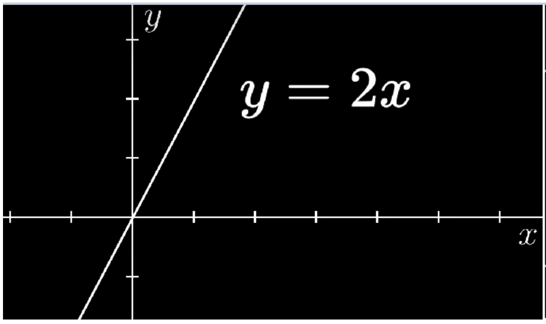
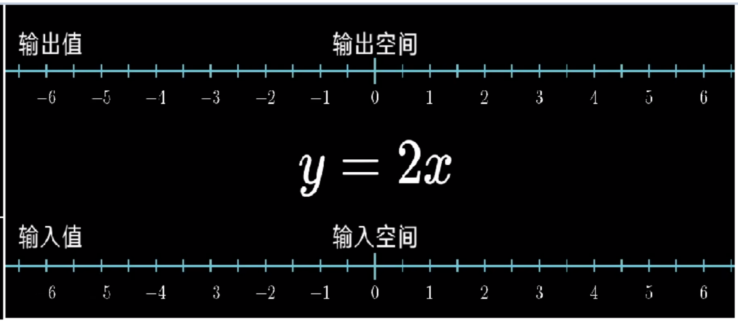
线性代数基础与算法应用

作者:向仔州

线性代数概念

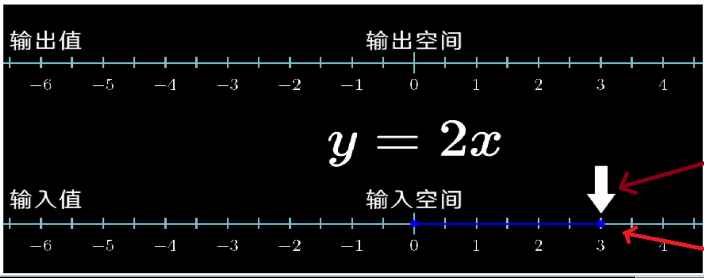




这是我们初中一维函数的样子

输入是x，输出是y，所以输入输出都是一维的值

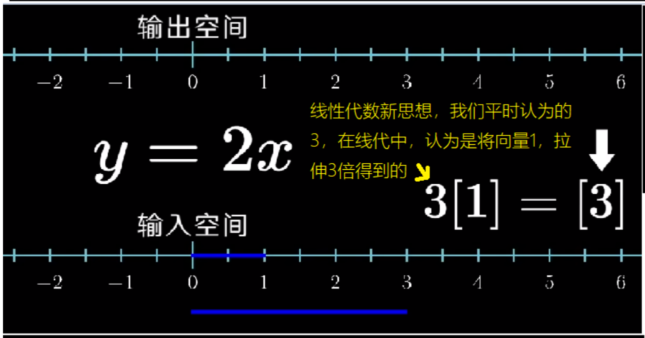
一维的线性函数，输入是直线，输出也是直线

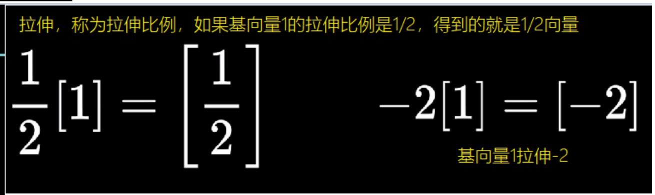


我在输入空间中随便找一个值3

如果把3这个点与原点连接起来，那么这个线段既有长度，也有方向。

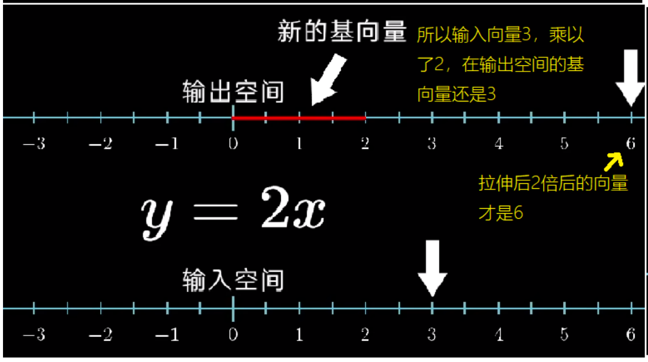
(这就是线性代数基本概念，长度和方向)

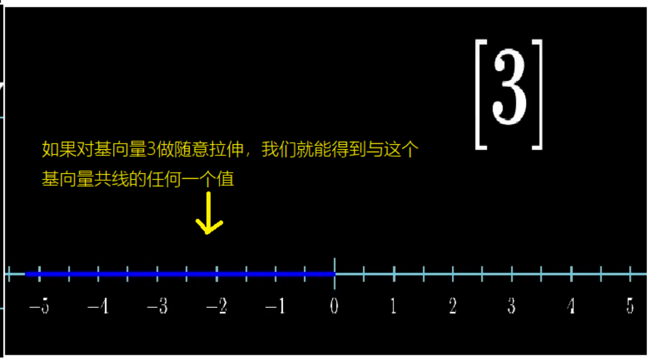




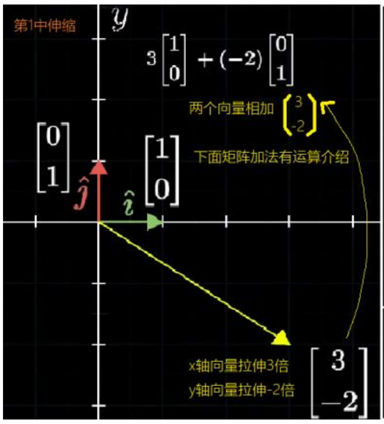
所以线性代数中，空间中的每个值，也就是空间中的每个向量，都是通过拉伸单位向量(基向量)得到的。

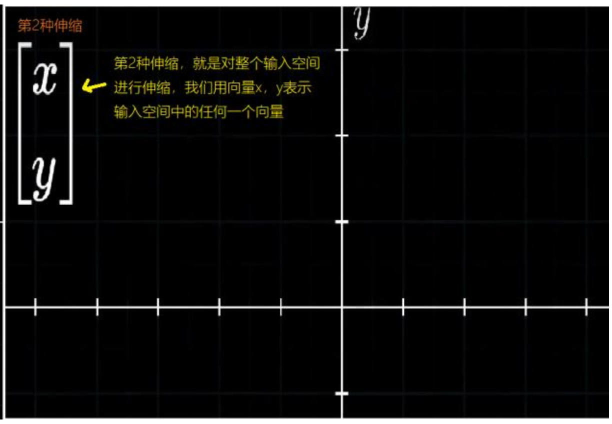
y=2x 这种一维空间中，就只有一个基向量

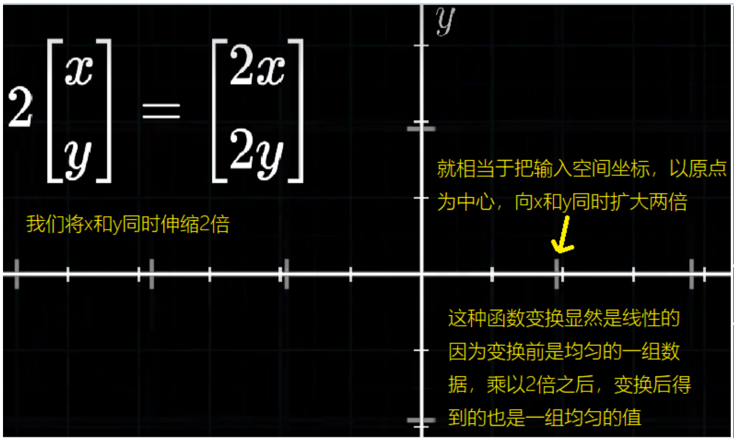


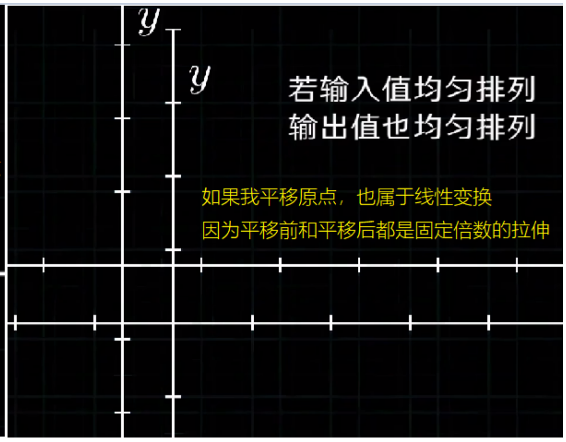


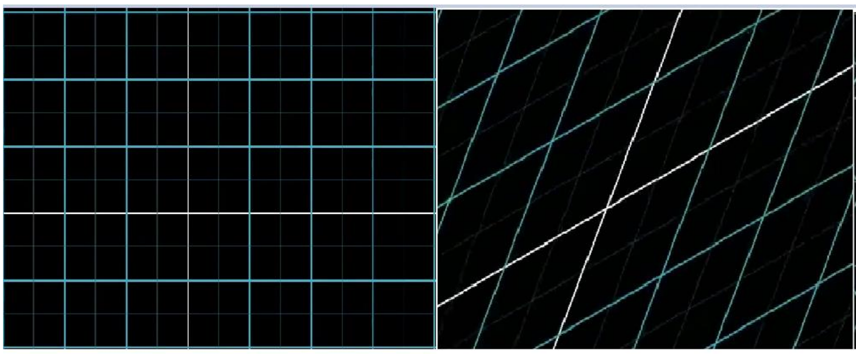
所以用任何数字，比如 a，乘以[3]向量，简写就是 a[3]。对 3 这个向量乘以的任何数 a，得到的就是这个向量的张成空间。



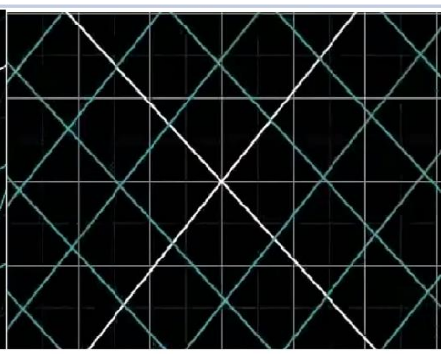




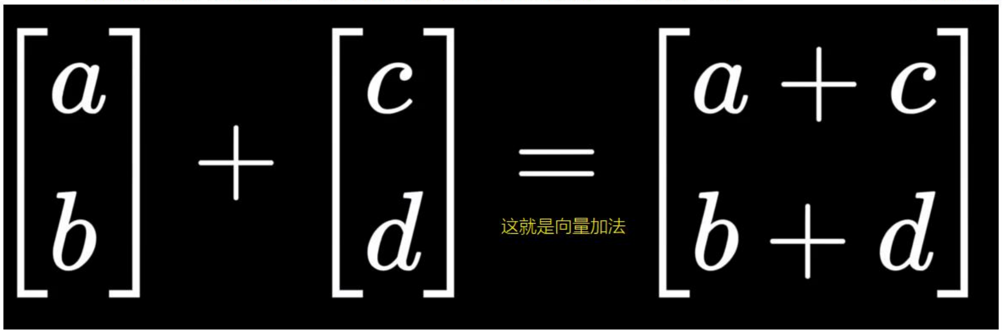


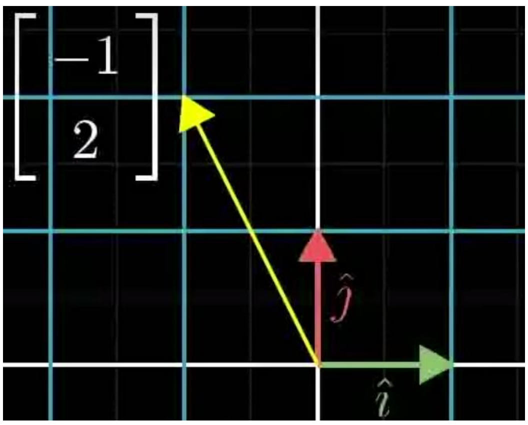


网格从正方形，变换成梯形，也是线性变换，因为梯形的变换比例每一格都是一样的

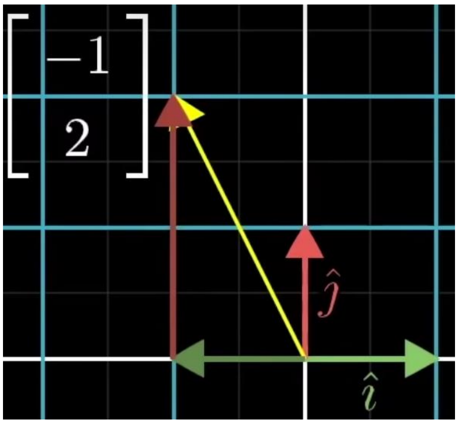


将网格长宽不变，进行旋转也是线性变换





红色绿色箭头是输入向量



黄色箭头输出向量，就是输入向量的拉伸

线性变换的流程

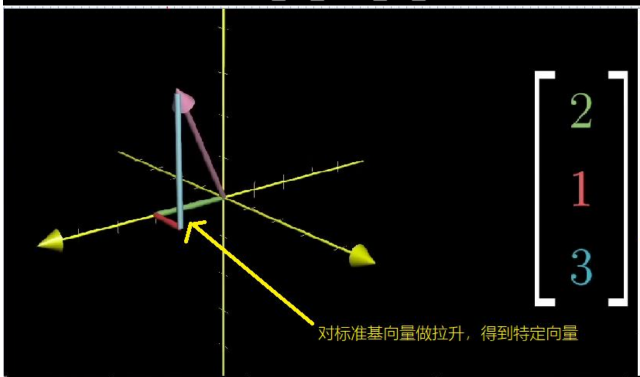
空间	基向量	拉伸	表达式	结果
输入空间	标准基向量 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	1.可以直接拉升标准基向量 $x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	可以写成这样，下面矩阵乘法有讲解 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$
2.如果把标准基向量1,0移动到3，-2 输出空间	新的基向量 $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$	3.把基向量0,1移动到2,1 $x\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3x+2y\\-2x+y\end{bmatrix}$

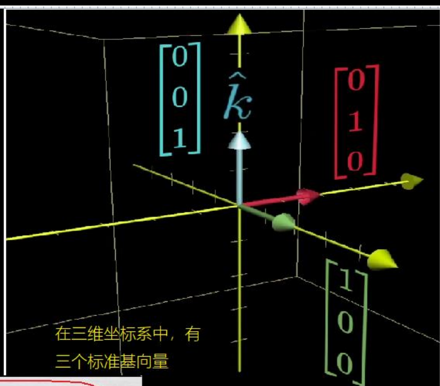
$$f(x)=2x$$ 一维的基向量只有一个

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}c\\d\end{matrix}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

二维的基向量有两个，变换前是 1 0
0 1





空间	基向量	拉伸	表达式	结果
输入空间	标准基向量 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	$x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$
输出空间	新的基向量 $\begin{bmatrix}0\\3\\6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}$	$x\begin{bmatrix}0\\3\\6\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\\6&7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0x+1y+2z\\3x+4y+5z\\6x+7y+8z\end{bmatrix}$

1.标准基向量就是把x轴，y轴，z轴向量进行拉升

2.新的基向量拉伸

矩阵加法

$$\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

这 2 行 3 列的矩阵，行是 5 1 2 ，列是 5 3 和二维数组类似

这个 A 就是这个矩阵标号，方便人认识

$$\underset{5\times2}{B}=\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 3 \\ 0 & 7 \\ -5 & 2 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

这是 5 行 2 列的矩阵 行是 1 ,-10，列是 1 ,2, 0, -5, 10

这个 B 就是这个矩阵的标号，方便人认识。

下面来看看为什么要 A 和 B 来做标号

A+B=? 表示的是矩阵的A+矩阵的B 等于多少

$$A+B\text{相当于}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 3 \\ 0 & 7 \\ -5 & 2 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

A 和 B 只是为了方便表示两个矩阵运算，其实就是两个矩阵相加

我们下面先来计算维度相同的矩阵加法运算

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

两个维度相同的矩阵相加，就是加每个矩阵的对应行列

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

比如我现在 A 矩阵的第 1 行第 1 列和 B 矩阵的第 1 行第 1 列相加，得到新矩阵的第 1 行第 1 列数

3+-7

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad +B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-7) & \\ & \end{pmatrix}$$

A 矩阵第 2 行第 2 列对应加 B 矩阵第 2 行第 2 列

-1+2

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad +B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-7) & -1+2\\ & \end{pmatrix}$$

后面都是一样的，以此类推

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad +B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-7) & -1+2\\ 2+3 & \end{pmatrix}$$

2+3

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad +B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-7) & -1+2\\ 2+3 & 0+5\end{pmatrix}$$

0+5

A+B 的结果就是这个

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad +B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-7) & -1+2\\ 2+3 & 0+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} = ?$$

矩阵乘法和矩阵加法不一样，不是两个矩阵行列一一对应相乘

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3} \\ 7 \quad 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}10 \\ 12\end{matrix}} & \begin{matrix}-8 \\ -2\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10 + 3 \times 12 & \\ & \end{pmatrix}$$

第一行乘第一列相加

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3} \\ 7 \quad 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{matrix}10 \\ 12\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-8 \\ -2\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10 + 3 \times 12 & 1 \times -8 + 3 \times -2 \\ & \end{pmatrix}$$

第一行乘第2列相加

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 3 \\ \boxed{7 \quad 5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}10 \\ 12\end{matrix}} & \begin{matrix}-8 \\ -2\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10 + 3 \times 12 & 1 \times -8 + 3 \times -2 \\ 7 \times 10 + 5 \times 12 & \end{pmatrix}$$

第2行乘第1列相加

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 3 \\ \boxed{7 \quad 5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{matrix}10 \\ 12\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-8 \\ -2\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10 + 3 \times 12 & 1 \times -8 + 3 \times -2 \\ 7 \times 10 + 5 \times 12 & 7 \times -8 + 5 \times -2 \end{pmatrix}$$

第2行乘第2列相加

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -13 \\ 130 & -66 \end{pmatrix}$$

-13 应该是-14，算错了

这就是矩阵基本乘法

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}} \times \underset{B}{\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 46 & -13 \\ 130 & -66 \end{pmatrix}}$$

矩阵A X B =C

那么矩阵B X A =C？矩阵反过来B乘以A能等于C吗？

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \times 1 + -8 \times 7 & 10 \times 3 + -8 \times 5 \\ 12 \times 1 + -2 \times 7 & 12 \times 3 + -2 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}} \times \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -46 & -10 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}$$

结果不等于C

$$\underset{2X3}{A}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \underset{3X2}{B}\begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix}$$

这种两个矩阵行列都不对称的形式可以相乘吗?

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\times-1+1\times0+2\times2 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\times-1+1\times0+2\times2 & 3\times3+1\times5+2\times5\\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\times-1+1\times0+2\times2 & 3\times3+1\times5+2\times5\\-2\times-1+0\times0+5\times2 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\times-1+1\times0+2\times2 & 3\times3+1\times5+2\times5\\-2\times-1+0\times0+5\times2 & -2\times3+0\times5+5\times5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 24\\12 & 19\end{bmatrix}$$

请问任何不同的行列式矩阵都可以相乘吗?

$$\underset{2X3}{A}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \underset{2x2}{B}\begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\end{bmatrix}$$

这种就不行

你自己试着计算就知道不行，你看第1行乘第1列，A矩阵第1行3个，B矩阵第1列两个，怎么可能相乘。

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 5\end{bmatrix}$$

? ?

一般为了方便都是从矩阵表达式来看可不可行

$A_{2X3} \times B_{3X2}$ **这种就可行**

因为内部两个都为3

$A_{2x3} \times B_{2x2}$ **这种不可行**

因为内部两个不相等，所以不行

$A_{3x5} \times B_{5x4}$ **这种可行**

因为内部两个相等，都为5，所以可行

高中二元方程两个未知量如何求解

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 & \text{式1} \\ -x_1 + 3x_2 = 3 & \text{式2} \end{cases}$$

求出x1和x2的值，如何求？

用高中学的代入替换法

$x_1 - 2x_2 = -1 \ + \ -x_1 + 3x_2 = 3$ 把两个式子加起来

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 - 2x_2 = -1 \\ + \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \\ = \\ x_2 = 2 \end{array}}$$

得到了x2 = 2

再把x2 = 2代入式1

$x_1 - 2x_2 = -1$

$x_1 - 2 * 2 = -1$

$x_1 - 4 = -1$

$x_1 = 4 - 1$

$x_1 = 3$

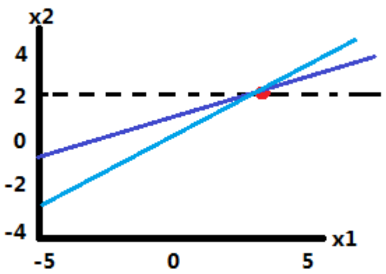
这样你把x1和x2代入式1，或者式3都能求出两边相等

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

把式1和式2加起来

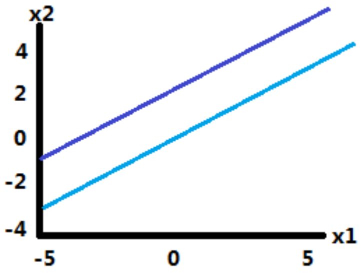
$$\begin{array}{c} x_1 - 2x_2 = -1 \\ + \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \\ = \\ 0x_1 + 0x_2 = 2 \end{array}$$

像这种得到的是0的方程就是矛盾方程，无解



$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

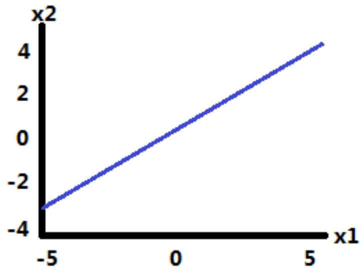
两条直线有交点，证明这两个方程组有解



$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 = -1 \\ -X_1 + 2X_2 = 3 \end{cases}$$

两条直线平行，证明则两个方程组无解

为什么平行是因为这两个方程的k值(斜率)是一样的，你把-x1+2x2 = 3 乘以-1 就得到 x1-2x2 = -3，证明斜率k和x1-2x2=-1是一样的，只是直线的坐标点不一样，所以平行



$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 = -1 \\ -X_1 + 2X_2 = 1 \end{cases}$$

这个方程有无数个解，两条直线重合

因为我把-x1+2x2=1乘以-1 就得到和上面x1-2x2=-1一样的结果，证明未知数有两个，但是约束条件只有1个等号右边的1或者-1

这个线段是怎么来的，怎么 x1 和 x2 的值就这么明确的知道了，然后做出了直线，这种就要看下面的一次方程

一次方程

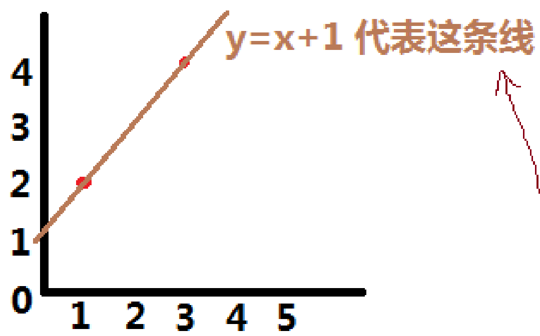
一次函数求解

公式:y=kx+b

如果是求k和b就必须要知道这条线的两个坐标点

比如 点1（1,2）

点2(3,4)



像这种两个点就要列出两个方程，一个点对应1个方程

$$\begin{cases} 2 = k*1+b & \text{（就是把点1代入y=kx+b）式1} \\ 4 = k*3+b & \text{(就是把点2代入y=kx+b) 式2} \end{cases}$$

坐标系直线上写明y=x+1就是这样来的

式1-式2

$$\begin{array}{l} 2=k*1+b \\ - \\ 4=k*3+b \\ k=1 \end{array}$$

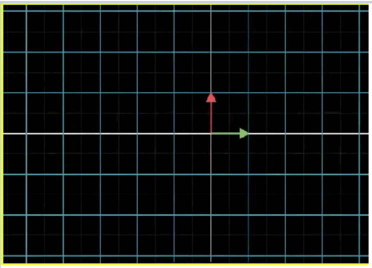
把k代入式1

$$\begin{array}{l} 2=k*1+b \\ 2=1*1+b \\ b=1 \end{array}$$

所以y=x+1

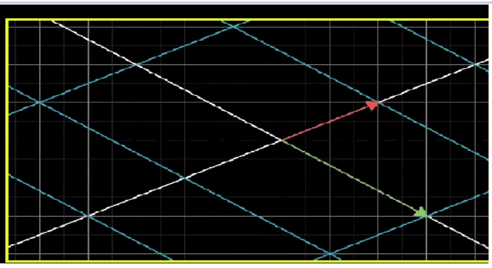
这就是已知直线，求斜率 k 和截距 b。

矩阵的逆

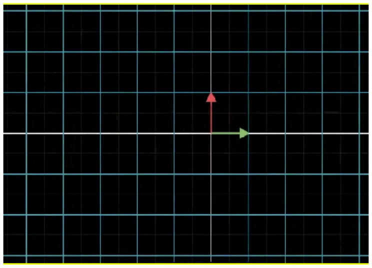


已知的二维矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$



对二维矩阵做了第一次变换



第二次变换要求把空间原封不动的转回来

这个变换回原先矩阵的方式叫逆矩阵

掰走的矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

这是变换后的矩阵

掰回来矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

这是变化回来的矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆矩阵写在左边　变换后的矩阵写在右边　得到一个什么都不变的矩阵

$$\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & ce + dg \\ af + bh & cf + dh \end{bmatrix}$$

矩阵求逆的公式

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

下面会用到矩阵求逆和单位矩阵，所以一定要先看后面章节的单位矩阵和矩阵的逆

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -6x+6y=6 \end{cases}$$

求解该两条直线方程的交点

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -6x+6y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} y &= -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \\ y &= x+1 \end{aligned}$$

我们求y，所以把y单独列出来，将y放在左边，所以运算结果为

人为设置x=0

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{7}{2}$$

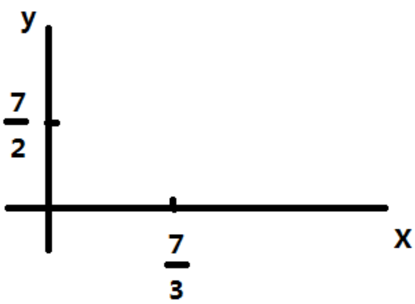
人为设置y=0

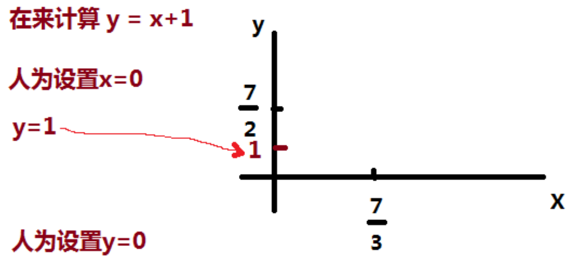
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

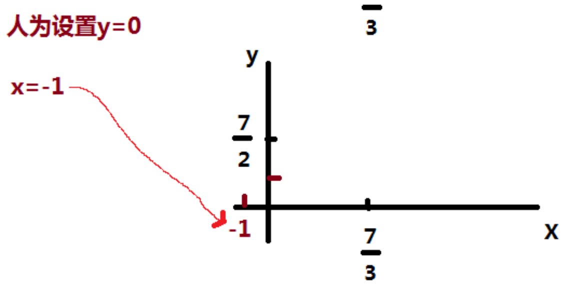
$$-\frac{3}{2}x = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{7}{2} \div \frac{3}{2}$$

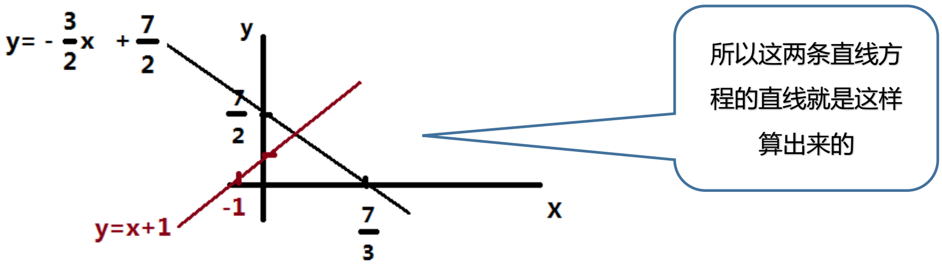
$$x = \frac{7}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

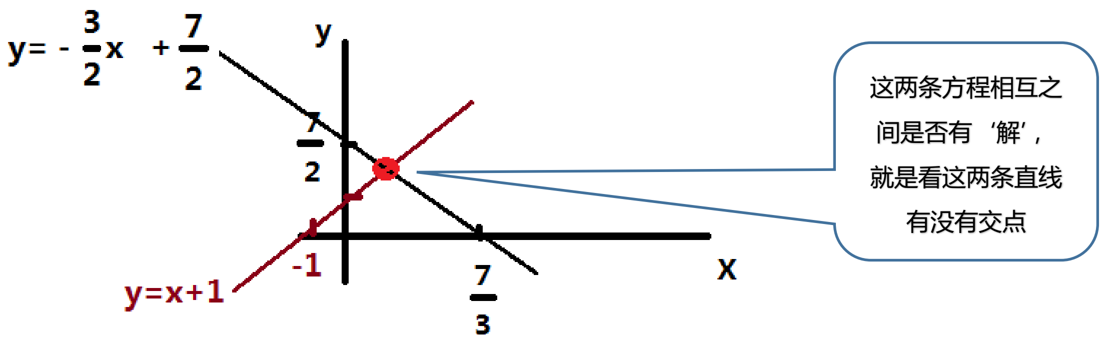






所以用刚才求出的两点画一条直线





这里两条线有交点，这个交点就是这两条直线方程的解。

那么这个交点坐标到底是多少呢？

$$\begin{cases}3x+2y=7\\-6x+6y=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\\y=x+1\end{cases}$$

因为$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$　　同时y又等于$y=x+1$

那么$-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}=x+1$

为了消除左边$-\frac{3}{2}x$，就必须人为在等号两边加入$+\frac{3}{2}x$

$$+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}=+\frac{3}{2}x+x+1$$

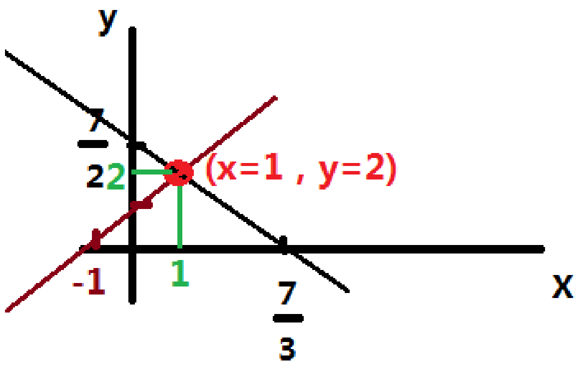
$$\boxed{\cancel{+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x}}+\frac{7}{2}=+\frac{3}{2}x+x+1$$

$\frac{7}{2}=+\frac{3}{2}x+x+1$　把x变成$\frac{2}{2}x$

$$\frac{7}{2}=+\frac{3}{2}x+\frac{2}{2}x+1$$

$\frac{7}{2}=\frac{5}{2}x+1$　两边同时减1

$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}x$　　最后x = 1，那么y=2



所以这个 x=1，y=2 的点就是两条直线的交点，也就是解。

我们也可以用矩阵来求，虽然两个直线方程用矩阵法没有代数的代入法来得简便，但是在一组很多个直线方程中，比如8组直线方程，这时候矩阵法绝对比代数法方便，现在先用矩阵做两组直线方程让大家熟悉下这个方式

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -6x+6y=6 \end{cases}$$ 求解该两条直线方程的交点

提取方程的系数获得矩阵，这个后面章节会讲，你可以马上浏览后面章节学习下，我这里不会写得很细

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}}\underset{B}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}=\underset{C}{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

所以结果为AxB=C

因为要求B中的x和y

那么等号两边都乘以A的逆，就可以把左边A矩阵消掉

$$A^{-1}A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$I\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$ I 是单位矩阵，我们知道单位矩阵乘以任何矩阵都等于矩阵本身

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$ 所以可以把 I 去掉

现在计算右边的A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{1}{18+12}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ad对调

bc对调

$$A^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$ 把A^{-1}带回方程

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

x=1，y=2，和我们代数代入法计算的结果一致

三元一次方程，如何求三个未知量

$$\begin{cases} x + y - z = 4 & 式1 \\ 2x - 3y + 2 = 3 & 式2 \\ -5x + 2y - 2z = 1 & 式3 \end{cases}$$

如何求出x，y，z的值

1.先把式2的2x消掉

将式1 的 $x+y-z=4$ 人为的乘以-2

$-2x-2y+2z=-8$

然后让 $-2x-2y+2z=-8$ 去加式2

$-2x-2y+2z=-8$

$+$

$2x-3y+2=3$

$=$

$-5y+3z=-5$ 变换后的式2

2.再把式3的-5x消掉

将式1的 $x+y-z=4$ 人为乘以+5

$5x+5y-5z = 20$

然后让 $5x+5y-5z=20$ 去加式3

$5x+5y-5z = 20$

$+$

$-5x+2y-2z=1$

$=$

$7y-7z=21$ 变换后的式3

$$\begin{cases} x+y-z=4 & \\ -5y+3z=-5 & 变换后式2 \\ 7y-7z=21 & 变换后式3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=4 & \\ -5y+3z=-5 & 变换后式2 \\ 7y-7z=21 & 变换后式3 \end{cases}$$

3.把变换后式2乘以7/5、然后加进变换后的式3,把7y消掉

$$-5y * \frac{7}{5} + 3z * \frac{7}{5} = -5 * \frac{7}{5}$$

$$-\cancel{5}y * \frac{7}{\cancel{5}} + 3z * \frac{7}{5} = -5 * \frac{7}{5}$$

$$-7y + z * \frac{21}{5} = \frac{35}{5}$$

$-7y + 4.2z = 7$ 将这个式子拿去加式3

$-7y+4.2x = 7$

$+$

$7y-7z = 21$ 变换后式3

$=$

$-2.8z = 14$

$z=14/2.8 = 5$

4.知道z之后拿去求变换后式2的y

$-5y+3z = -5$

$-5y+3*5=-5$

得到y 有了y和z就可以求出x了

$$\begin{cases} x+y-z=4 & \\ -5y+3z=-5 & 这就是方程最后的解 \\ -2.8z=14 & \end{cases}$$

矩阵初步变换，增广矩阵

$$3x_1+2x_2-2x_3 = -4$$

$$3x_1+3x_2-x_3 = -5$$

$$2x_1+2x_2-x_3 = 4$$

将线性方程组变成矩阵

就是将x1 x2 x3取消掉放到左边矩阵

将=号右边的数放一个矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

这种单独提取系数的矩阵叫系数矩阵

$$C=[A,b]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

在系数矩阵的基础上加了一列等号右边的数就叫做增广矩阵

$3x_1+2x_2-2x_3 = -4$ 式1

$3x_1+3x_2-x_3 = -5$ 式2

$2x_1+2x_2-x_3 = 4$ 式3

$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4$

$x_2 + x_3 = -1$ 式1乘以-1再加上式2的结果

$2/3x_2+1/3x_3 = 20/3$ 式1乘2/3加上式3的结果

$3x_1+2x_2-2x_3 = -4$ 式1

$3x_1+3x_2-x_3 = -5$ 式2

$2x_1+2x_2-x_3 = 4$ 式3

$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4$

$x_2 + x_3 = -1$ 式4

$2/3x_2+1/3x_3 = 20/3$ 式5

$3x_1 + 2x_2 - 2x_3=-4$

$x_2 + x_3= -1$

$-1/3x_3=22/3$ 式4乘-2/3在加上式5得到这行

以上这种代数消元的式子如何用矩阵来表示

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3 \end{bmatrix}$$

第1行乘-2/3加上第3行就得到这个矩阵的第3行

第1行乘-1，在加上第2行得到这个矩阵的第2行

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3 \end{bmatrix}$$

就得到这个矩阵

这行乘-2/3然后加上第3行

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2-2x_3 &= -4 \quad \text{式1} \\ 3x_1+3x_2-x_3 &= -5 \quad \text{式2} \\ 2x_1+2x_2-x_3 &= 4 \quad \text{式3} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_2 + x_3 &= -1 \quad \text{式4} \\ 2/3x_2+1/3x_3 &= 20/3 \quad \text{式5} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ -1/3x_3 &= 22/3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3 \end{bmatrix}$$

每一个矩阵都对应一个方程组，这就是每个方程组对应的增广矩阵

矩阵转置

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

转置就是将第1行写

在装置后的第1列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

第2行写在转

至后的第2列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

如果有第3行就转置后写在第3列

第n行转置后写在第n列

$(A^T)^T = A$ 转置的转置就是本身

$(A+B)^T = A + B$ 先加后转置和先转置再加是一样的

$(\lambda A)^T = \lambda A^T$ 数乘后转置和转置之后数乘是一样的

$(AB)^T = B^T A^T$ 本来是AB相乘，但是AB相乘后再转置就变成BA了

矩阵乘法: 矩阵变量本身的阵列不能变，但是两个变量AB先后顺序可以变

还有种矩阵，转置后还是他本身

$$A^T = A$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-2 \quad 3 \quad -1} \\ 3 \quad -6 \quad 7 \\ -1 \quad 7 \quad 10 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 7 \\ -1 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

你会发现这种矩阵转置之后按照第1行转置到第1列，

这种顺序转置下去，发现和转置前是一样的

这就是对称矩阵

矩阵分块

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & -1 \\ \hline 3 & -6 & 7 \\ -1 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

可以分单行

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & -1 \\ \hline 3 & -6 & 7 \\ \hline -1 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

可以分3行

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 7 \\ -1 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

可以分3列

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & -1 \\ \hline 3 & -6 & 7 \\ -1 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

矩阵分块有什么好处?

一个m*n的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \cdots & , a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots & , a_{mn} \end{bmatrix}$$ **可以看做** $$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}, \quad \cdots \quad , a_{1n}} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}, \quad \cdots \quad , a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{a_1} \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$ 第1行可以称为a1

$$\begin{bmatrix} a_{11}, \quad \cdots \quad , a_{1n} \\ \boxed{\vdots \quad \ddots \quad \vdots} \\ a_{m1}, \quad \cdots \quad , a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \boxed{\vdots} \\ a_m \end{bmatrix}$$ 第2行可以称为a2

$$\begin{bmatrix} a_{11}, \quad \cdots \quad , a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \boxed{a_{m1}, \quad \cdots \quad , a_{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \boxed{a_m} \end{bmatrix}$$ 第m行可以称为am

这就是每行分块

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \cdots & , a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots & , a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \cdots & , a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots & , a_{mn} \end{bmatrix} = [B1 \ldots\ldots Bn]$$ **第1列就是B1**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \cdots & , a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots & , a_{mn} \end{bmatrix} = [B1 \ldots\ldots Bn]$$ **第2列就是B2**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \cdots & , a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots & , a_{mn} \end{bmatrix} = [B1 \ldots\ldots Bn]$$ **第n列就是Bn**

这就是每列分块

所以这样表示 $a_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\cdots a_{1n}]$ **为行向量**

这样表示 $$Bn = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$ **为列向量**

这种分块方法有什么用?

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

将代数系数提取出来

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a1} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{a2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a3} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

我可以将系数分成4块，每块用a1-4表示

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a1} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{a2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a3} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

然后 $a_1 * x_1 = x_1 a_1$

$a_2 * x_2 = x_2 a_2$

$a_3 * x_3 = x_3 a_3$

$a_4 * x_4 = x_4 a_4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a1} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{a2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a3} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{a4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}}_{b}$$

等号右边的常数用b表示

所以 $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = b$

$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = b$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

这个矩阵的式子就是表示的这个代数，只是用不同的形式表示而已

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

这是代数形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

这是代数的矩阵形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{a1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{a2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{a3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}}_{b}$$

我将矩阵分块，然后用a变量来表示列，等号右边用b变量表示

$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$

用矩阵乘法得到这种线性代数式，这种式子就是代数的第3种形式

矩阵初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r1<->r2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵1 **矩阵2**

r1<->r2就是把矩阵1的第1行和第2行对调，变成矩阵2

这就是矩阵初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r3*7 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

矩阵1 **矩阵2**

r3*7就是矩阵1第3行乘7得到矩阵2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r2+5r1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

矩阵1 **矩阵2**

r2+5r1就是第2行加上5倍的第1行然后填入矩阵2的第2行。这种就是第1行没变，第3行没变，第2行变了

矩阵关系式

QA=B

意思就是A矩阵经过Q

矩阵变换变成了B矩阵

怎么理解这句话?

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

比如Q是这个矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Q就是单位矩阵(A)第2行

和第3行颠倒后的结果

$$QA = B$$

意思就是把 $A \xrightarrow{r2<->r3} B$

就是A矩阵把第2行第

3行对调以后就是B

矩阵的逆运算

单位矩阵

单位矩阵是什么？

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

这是二维

单位矩阵

形式

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

三行三列

三维单位矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

四行四列

四维单位

矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

单位矩阵的特点就是对角线都是1，斜着排列

单位矩阵就是任何一个矩阵去乘以单位矩阵，都等于它本身

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

$A \times I = A$ **看到没等于它本身**

I 就是单位矩阵的意思

这是怎么算的？ 其实就是矩阵乘法。

$$\begin{bmatrix}\boxed{1\ 3}\\ 5\ \ 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\boxed{1\ 3}\\ 5\ \ 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

$1\times1 + 3\times0 = 1$ $\qquad$ $1\times0 + 3\times0 = 3$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\ \ 3\\ \boxed{5\ 6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\ \ 3\\ \boxed{5\ 6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

$5\times1 + 6\times0 = 5$ $\qquad$ $5\times0 + 6\times1 = 6$

二维矩阵的逆

$$A \times A^{-1} = I$$

一个矩阵x它的逆矩阵，如果等于I，那么这两个矩阵互为逆矩阵

这里 ad 对角写反了，但是是 ad 相乘倒是没什么

$A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 那A的逆矩阵 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{3x(-5) - 2x(-4)} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{求}A^{-1} = \text{多少?}$$

这个 A 逆运算的分数对吗？下面证明

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} x A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 x \frac{5}{7} + -4 \frac{2}{7} & 3x - \frac{4}{7} + -4 x - \frac{3}{7} \\ 2x \frac{5}{7} + -5x \frac{2}{7} & 2x - \frac{4}{7} + -5 x - \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用矩阵乘法

这就是I

所以A^{-1}确实和A是互逆的

三维矩阵的逆

三维矩阵的逆

$$\underset{3x3}{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\cdots\cdots} \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

三维矩形的逆和二维矩阵类似，都需要这种余子式

$$\underset{3x3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{三维矩阵如何求余子式}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

把第1行第1列取消掉得到一个二维矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

把第1行第2列取消掉

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\\ & & \\ & & \end{matrix}\right.$$

取消第1行第3列得到

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}& & \end{matrix}\right.$$

取消第2行第1列得到

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}& \end{matrix}\right.$$

取消掉第2行第2列得到

以此类推得到下面这样

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{matrix}\right|$$

这是一个中间结果，然后我们要用余子式去解出中间结果

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{matrix}\right|$$

用前面学过的二维余子式去求 $ad - bc = \begin{pmatrix}a&b\\d&c\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\boxed{\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{matrix}\right| = \left|\quad\right|$$

ad - bc

2x1-1x1

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} & \boxed{\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}} & \begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2\times1-1\times1 & \overset{ad\ -\ bc}{0\times1-1\times1} \\ & \\ & \end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \boxed{\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}} \\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2\times1-1\times1 & 0\times1-1\times1 & \overset{ad\ -\ bc}{0\times1-2\times1} \\ && \\ && \end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} & \boxed{\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}} & \begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2\times1-1\times1 & \overset{ad\ -\ bc}{0\times1-1\times1} \\ & \\ & \end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \boxed{\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}} \\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2\times1-1\times1 & 0\times1-1\times1 & \overset{ad\ -\ bc}{0\times1-2\times1} \\ && \\ && \end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

这就得到了三维矩阵的余子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

三维余子式要转换成代数余子式

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$ **这是代数余子式的统用转换模板**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

就是让每个元素乘以对应的符号，如果负负就得正，负正得负....

这就是矩阵代数余子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} \xrightarrow{\text{转置}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

代数余子式 **变成了伴随矩阵**

现在来求A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$ **也就是** $\frac{1}{|A|} \times$ **伴随矩阵A**

|A| = a11*d11+a12*d12+a13*d13

这些a11，d11是什么意思呢？

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a11就是原矩阵的第1行第1列元素

a12就是原矩阵的第1行第2列元素

后面以此类推

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

代数余子式

d11就是代数余子式第1行第1列元素

d12就是代数余子式的第1行第2列元素

所以 |A| = a11*d11+a12*d12+a13*d13 = 1x1+0x1+0x-2=-1 所以 |A| = -1

所以|A| 就是原矩阵和代数余子式第 1 行相乘，相加

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) \quad \text{也就是} \quad \frac{1}{|A|} \times \text{伴随矩阵}A$$

$$= \frac{1}{-1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{这个矩阵就是A的逆}$$

下面可以证明A的逆是不是正确的

$$\underset{\text{原矩阵}}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times A^{-1} = \underset{\text{逆矩阵}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{得到了I，单位矩阵}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单位矩阵对角线没有错，证明了 A-1 就是原矩阵的逆。

像这种求多维矩阵的方法，遇到 4x4 矩阵，5x5 矩阵等等.....就相当麻烦了，下面介绍求多维矩阵的简易方法。其实用起来也不简易，只是比上面这种伴随矩阵方式好用。

高中消元法(待定系数法)求矩阵的逆

主要思想就是（矩阵本身A * 矩阵的逆A^{-1}= 单位矩阵E）

单位矩阵，前面有讲

$$A = \begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$$

求A^{-1}的逆

$$A * A^{-1} = E$$

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

人为设定9个变量当做逆变量

按照规则定义出单位矩阵

下面就用矩阵乘法方式，算出中间abcdefghi的值

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

第1行乘第1列

a -4d -3g = 1

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

b -4e -3h=0

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

c -5f -3i = 0

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

c -4f -3i = 0

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

-a +6d +4g = 0

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

a -5d -3g = 0

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

b -5e -3h = 1

以此类推

-b + 6e +4h = 0

-c + 6f + 4i = 1

这就得到了9个未知数，9个方程

$$\begin{cases}a -4d -3g = 1\\ a -5d -3g = 0\\ -a +6d +4g = 0\end{cases}$$

将3行第1列的数据放成一组

先解算这三个方程，这三个方程有个特点就是包含相同的a，d，g

① a -4d -3g = 1　可以随意用第1个方程减第2个方程

② a -5d -3g = 0　也可以用第2个方程减第3个方程

③ -a +6d +4g = 0　我用第1个

第1步:

(a - 4d -3g = 1) - (a -5d -3g = 0)

也就是

(a - 4d -3g = 1)

−

(a -5d -3g = 0)

= 0 +d + 0 = 1

所以 d = 1

第2步:

(a -5d -3g =0) - (-a +6d +4g =0)

得到 g = -1

第3步: 把d=1，g=-1代入第1个方程

(a - 4d -3g = 1)

得到 a = 2

$$\begin{cases}b -4e -3h=0\\ b -5e -3h = 1\\ -b + 6e +4h = 0\end{cases}$$

将3行2列的数据放成一组

得到e = -1，h = 2，b=2

$$\begin{cases}c -4f -3i = 0\\ c -5f -3i = 0\\ -c + 6f + 4i = 1\end{cases}$$

得到 f = 0，i=1，c=3

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix}a=2&b=2&c=3\\d=1&e=-1&f=0\\g=-1&h=2&i=1\end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

这个abcdefghi的结果就是A的逆运算

这种待定系数的方式就很简单，但是就是太繁琐，算多维矩阵，矩阵维数越多，越难得算。

在实在没得办法的情况下，可以考虑用这个待定系数方法。

初等变换法求矩阵逆

在用变换法求矩阵逆之前，我们看看什么是矩阵的初等变换

初等变换的几种方式

变换第1种

$$A = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \quad K=2\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&4&6\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

某一行乘以一个系数

意思就是当前这个矩阵，某一行 * 2得到了新的矩阵

我们就叫做，矩阵A经过了一次初等变换

$$A = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix}2&2&3\\8&5&6\\14&8&9\end{bmatrix}$$

某一列，乘以一个系数，也是初等变换

变换第2种

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\qquad K=2\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\quad 2\ 4\ 6\ \ + \quad=\begin{bmatrix}1&2&3\\4+2&5+4&6+6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&9&11\\7&8&9\end{bmatrix}$$

意思就是某一行 * 2，得到的数加到第2行。比如这儿就是第1行*2加到第2行，第1行不变
某一列的变化也可以这样做

变换第3种

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}$$

行与行之间可以互换

也可以进行列变换

计算方式如下:

$$(A|E)\longrightarrow(E|A)$$

矩阵 单位矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{bmatrix}$$

求A^{-1}的逆预算

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

选一个和A矩阵行列
对应的单位矩阵

单位矩阵

$$\begin{bmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

将A矩阵与单位矩阵横放在一起
后面计算必须用初等行变换，千万不能用列，因为矩
阵和单位矩阵是横放在一起的。

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{bmatrix}}\ \underset{E}{\begin{bmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{bmatrix}}$$

变换后得到的E

整个运算过程就是将A矩阵橙色的位置变成1，蓝色的位置变成0.从而导致E矩阵得到的数，就是A的逆

$$\begin{bmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

如果是这样放，那么就是 $\frac{A}{E}$ 如果求A的逆
你就只能做初等列变换，而不
是初等行变换

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ 求A^{-1}的逆预算

计算细节如下:

1.先将E合并到A

r3x3

2.矩阵第3行乘3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

r3x3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2\times3 & 3\times3 & 0\times3 & 0\times3 & 0\times3 & 1\times3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

得到第3行数据

我们的目的就是要把蓝色的圈变为0，橙色的圈变为1，你看在第3行的变化中，单位将矩阵E第3行已经变成了 0 0 3

r3 +2*2

3. 第2行全部乘2，再加第3行

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3\times2 & 0\times2 & -2\times2 & 0\times2 & 1\times2 & 0\times2 \\ -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

第2行先乘2得到一组行数据 $\boxed{6 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 2 \quad 0}$ +

再将这种数据加到第3行，但是第2行原数据是不变的哦

你看，这样有一个数就清0了

r1⟷r2

4.意思就是让第1行和第2行对调

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

对调之后，3就跑到E的左上角也就是1的位置，以前第2行的3也消除成0了

5.想办法把9消除掉

r3x2

第3行乘2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -8 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

r3 + 9r2

6.第2行乘9，再加第3行

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -8 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

+

9r2 $\boxed{0 \ -18 \ 9 \ 9 \ 0 \ 0}$

r1 + 2r3

7. 2*第3行加第1行

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

r2+r3 * -1

8. 3行/1加2行

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

这就是最终结果

9. 最终矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

这边有数字的都叫做1

这就是A^{-1}

$$所以\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & 9 & 12 \\ -8 & -4 & -6 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

有了这种初等变换法，我们下面试试求 4x4 矩阵的逆

4x4 矩阵求逆

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

用单位矩阵来做初等变换

$$(A|E) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

结合

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$r_1 - 2r_2$

1行减2乘2行赋值给r1

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$r_2 - r_1$

赋值给r2

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

r3 -r2

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

r2+r3

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

r1 + 5r2

r3 + 7r2

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 13 & 5 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 8 & 1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

r1-13r4

r2-3r4

r3-20r4

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -34 & 1 & -2 & 5 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -52 & 1 & -3 & 8 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

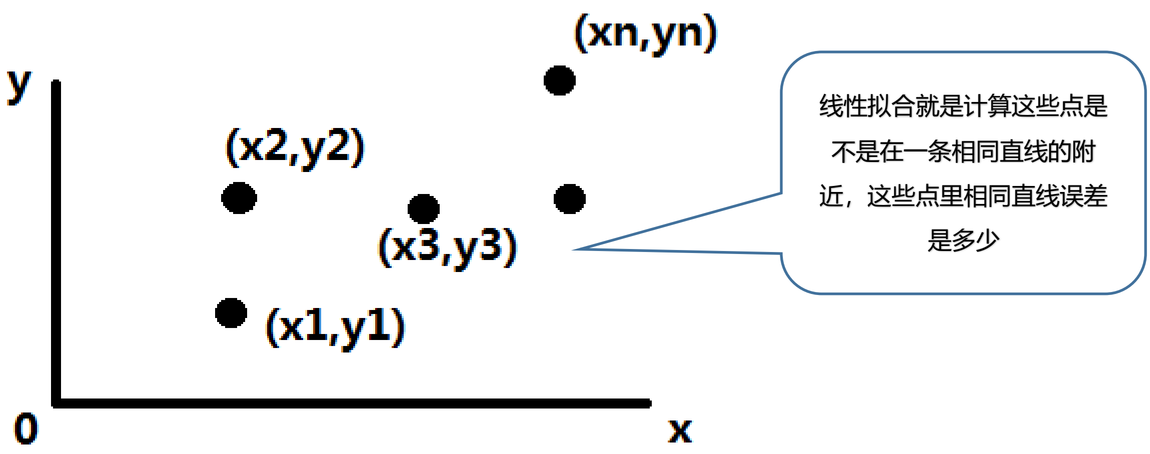
依次类推，最后得到

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{3}{55} & \frac{-8}{55} & \frac{21}{55} \end{array}\right]$$

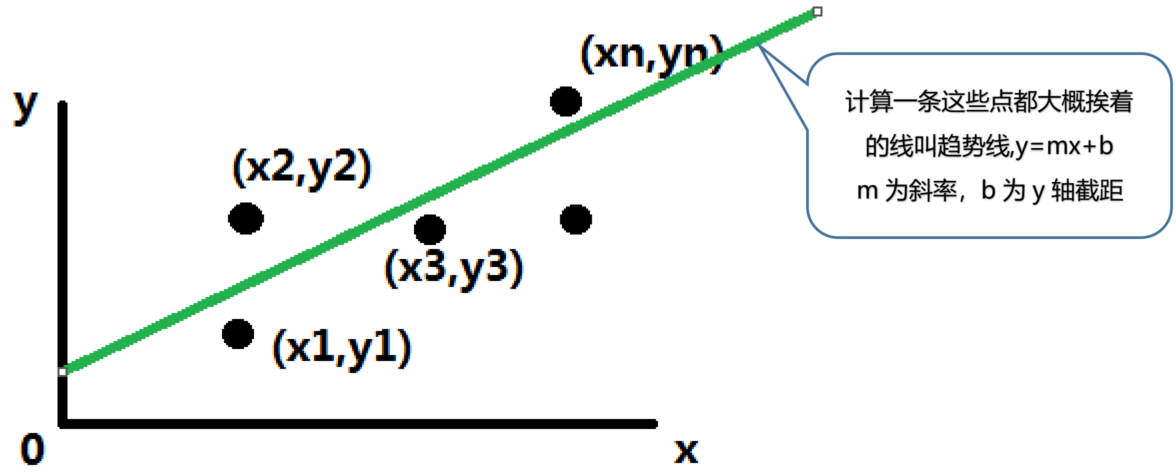
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{55} & \frac{-8}{55} & \frac{21}{55} \end{bmatrix}$$

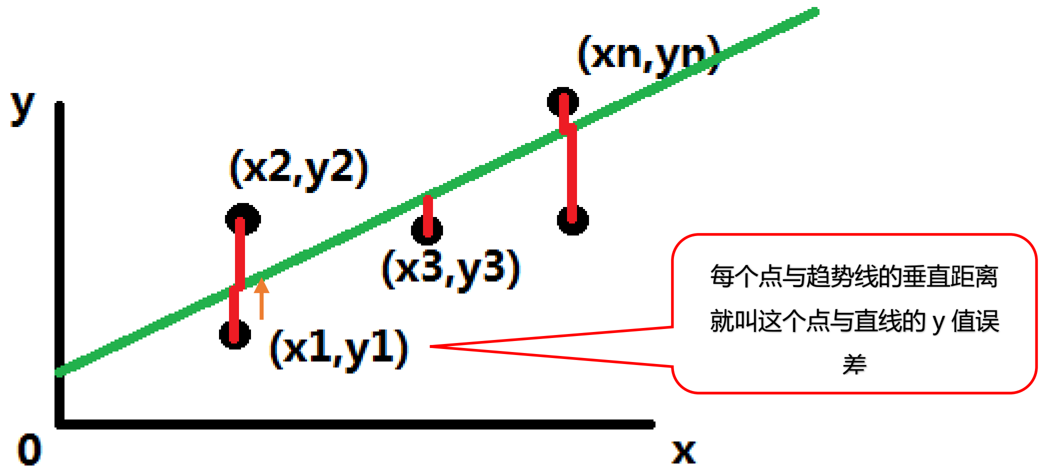
但是感觉这种初等变换的方式，矩阵维数越多，好像计算也有点麻烦，那是当然的。可以用计算机来算。

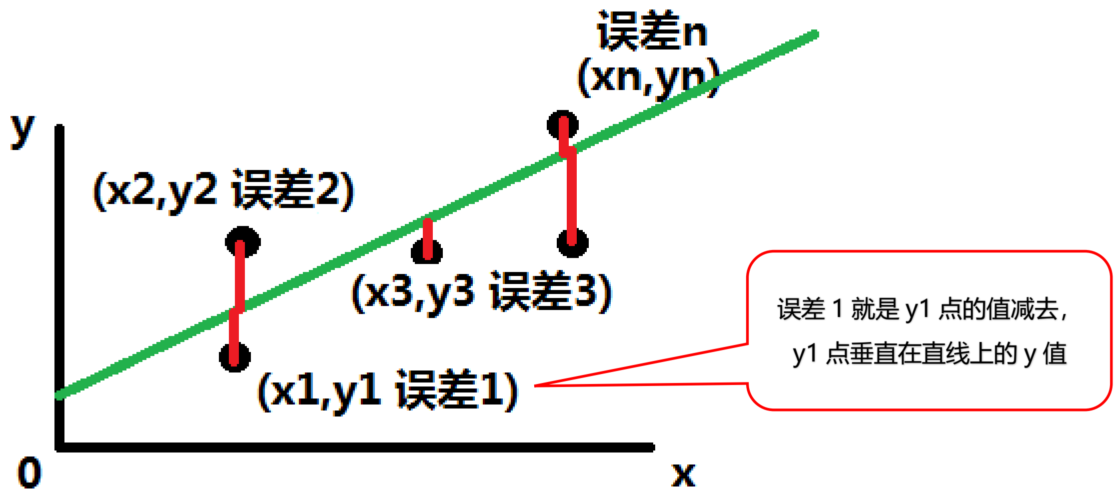
线性拟合(也叫线性回归)

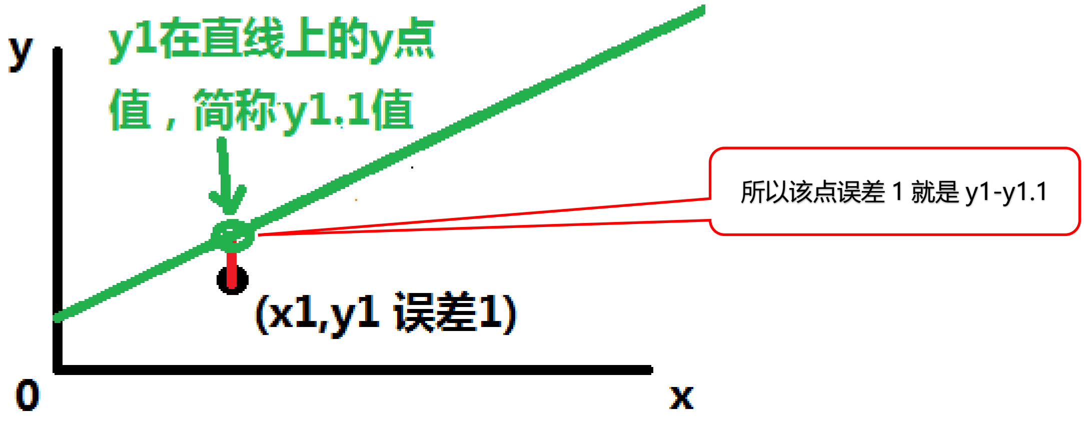


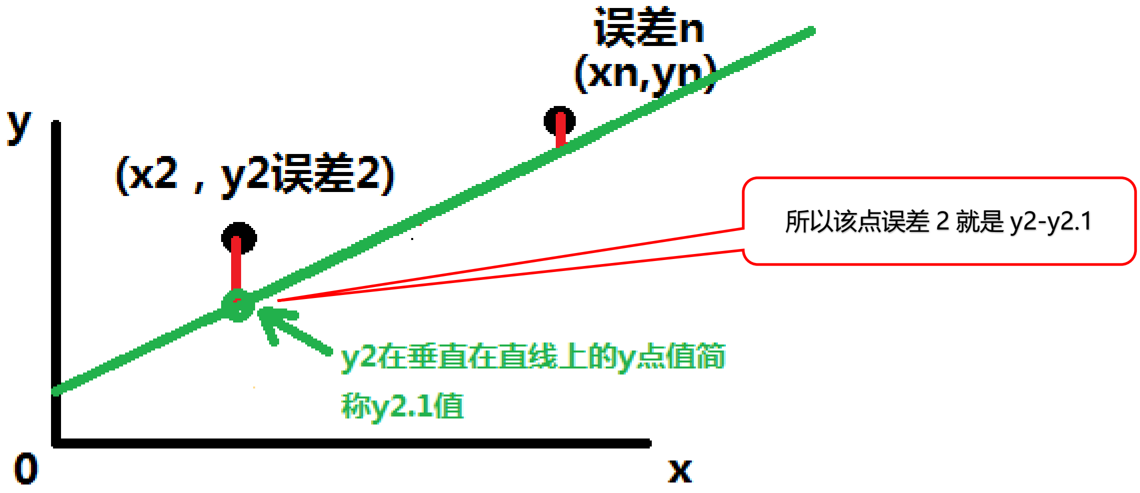
(x1，y1) (x2，y2) (x3，y3)..............(xn，yn)表示这些点的坐标


y
(xn,yn)
(x2,y2)
(x3,y3)
(x1,y1)
0
x
计算一条这些点都大概挨着的线叫趋势线,y=mx+b
m 为斜率，b 为 y 轴截距


y
(xn,yn)
(x2,y2)
(x3,y3)
(x1,y1)
0
x
每个点与趋势线的垂直距离就叫这个点与直线的 y 值误差


误差n
(xn,yn)
y
(x2,y2 误差2)
(x3,y3 误差3)
(x1,y1 误差1)
0
x
误差 1 就是 y1 点的值减去，y1 点垂直在直线上的 y 值





线性回归每个点的误差就如下面公式列出来那样：

线性回归每个点的误差就是：误差1 $= (y1-y1.1)^2$

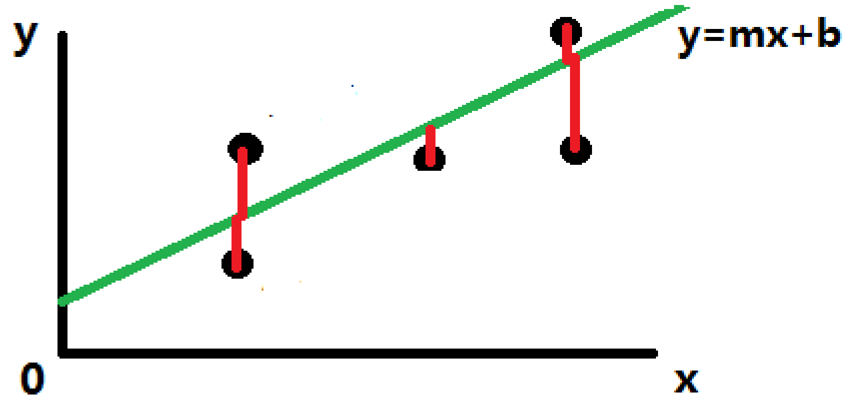
因为$=y1.1=y=(mx1+b)$

所以误差1 ：$diff = (y1-(mx1+b))^2$

误差2 $= (y2-(mx2+b))^2$

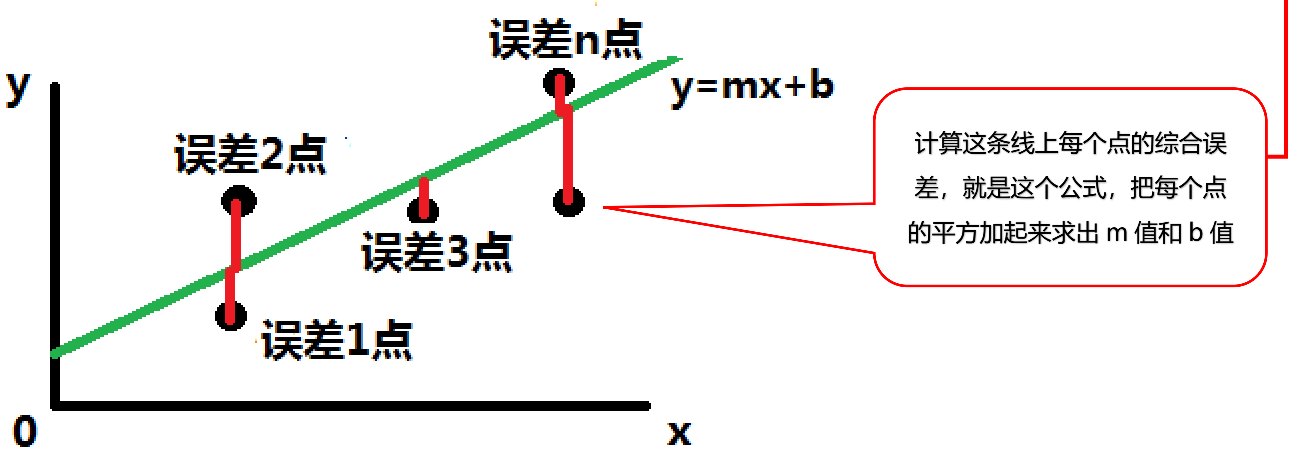
误差n $= (yn-(mxn+b))^2$

我们要求出的是一条直线，落在直线周围点的综合误差



就是要求 m 的值和 b 值

$$SE_{line} = \underbrace{(y1-(mx1+b))^2}_{误差1点} + \underbrace{(y2-(mx2+b))^2}_{误差2点} + \underbrace{(y2-(mx3+b))^2}_{误差3点} + \dots\dots\dots\ \underbrace{(yn-(mxn+b))^2}_{误差4点}$$



下面对 SEline 公式进行分解，得到最小化

$$SE_{line} = \underbrace{(y1-(mx1+b))^2}_{误差1点} + \underbrace{(y2-(mx2+b))^2}_{误差2点} + \underbrace{(y2-(mx3+b))^2}_{误差3点} + \dots\dots\dots\ \underbrace{(yn-(mxn+b))^2}_{误差4点}$$

$$SE_{line} = \underbrace{(y1-(mx1+b))^2}_{误差1点} + \underbrace{(y2-(mx2+b))^2}_{误差2点} + \underbrace{(y3-(mx3+b))^2}_{误差3点} + \dots\dots\dots\ \underbrace{(yn-(mxn+b))^2}_{误差4点}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(y1-(mx1+b))^2\text{展开} &= (y1-(mx1+b))\,(y1-(mx1+b)) \\ &= y^2 - 2y(mx1+b) + (mx1+b)^2\end{aligned}}$$

每个点的误差都这样做，就变成了下面公式这样:

$$(y1-(mx1+b))^2 + (y2-(mx2+b))^2 + (y3-(mx3+b))^2 + \dots\dots\ (yn-(mxn+b))^2 \text{ 展开后}$$

$$y1 - 2y(mx1+b) + (mx1+b)^2 + y2 - 2y_2(mx2+b) + (mx2+b)^2 + y3 - 2y_3(mx3+b) + (mx3+b)^2 + \dots\dots\ yn - 2yn(mxn+b) + (mxn+b)^2$$

$(y1-(mx1+b))^2 + (y2-(mx2+b))^2 + (y3-(mx3+b))^2 + ... (yn-(mxn+b))^2$ 展开后

$y1 - 2y(mx1 + b) + (mx1+b)^2 + y2 - 2y_2(mx2 + b) + (mx2+b)^2 + y3 - 2y_3(mx3 + b) + (mx3+b)^2 + ... yn-2yn(mxn + b)+(mxn +b)^2$

$= y1^2 - 2ymx1 - 2y1b + m^2x1^2 + 2mx1b + b^2$

$+$

$y_2^2 - 2y_2mx_2 - 2y2b + m^2\ x_2^2 + 2mx_2\ b + b^2$

$+$

.

.

.

$y_n^2 - 2y_n mx_n - 2y_n b + m^2\ x_n^2 + 2mx_n b + b^2$

把这些项加起来相互化简得到下面的式子:

单独把y1...yn项加起来得到 $y_1^2 + y_2^2 + ... y_n^2$

单独把$2y_1mx_1$...2ynmxn项加起来得到 $-2m(x1\ y1 + x2y2 +..... xnyn)$

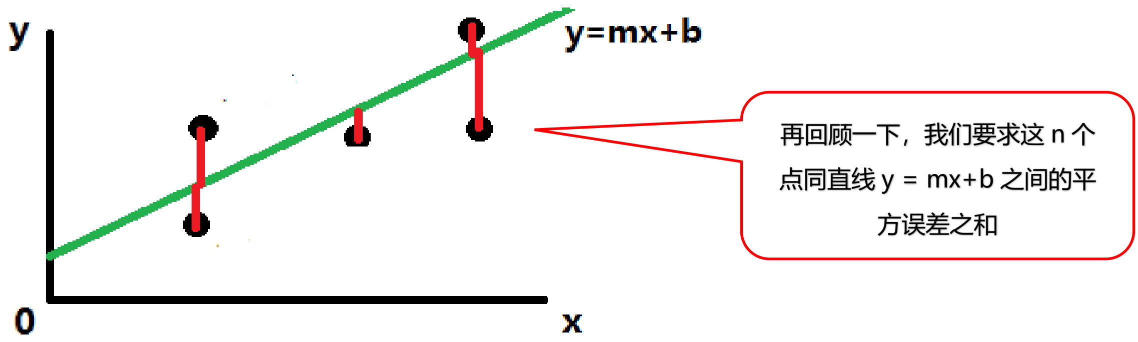
单独把2y1b ... ..2ynb加起来 $-2b(y1 + y2 + ... yn)$

单独把m^2x1^2.... $m^2\ x_n^2$ 加起来 $+m^2(\ x_1^2 + \ x_2^2 +..... x_n^2)$

单独把2mx1b .... $2mx_n$ b加起来 $+ 2mb(X1 +X2 +....Xn)$

单独把b^2加起来 nb^2

最后各项再结合起来 $y_1^2 + y_2^2 + ... y_n^2 -2m(x1\ y1 + x2y2 +..... xnyn) -2b(y1 + y2 + ... yn) +m^2(\ x_1^2 + \ x_2^2 +..... x_n^2) + 2mb(X1 +X2 +....Xn) +nb^2$



$y_1^2 + y_2^2 + ... y_n^2 -2m(x1\ y1 + x2y2 +..... xnyn) -2b(y1 + y2 + ... yn) +m^2(\ x_1^2 + \ x_2^2 +..... x_n^2) + 2mb(X1 +X2 +....Xn) +nb^2$

$\frac{y_1^2 + y_2^2 + ...y_n^2}{n} = \overline{y2}$ $\overline{y2}$ 这样的写法是个化简写法，意思就是$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 +...y_n^2$的平均值

$\frac{y_1^2 + y_2^2 + ...y_n^2}{n} = \overline{y2}$ 如果等号两边乘以n，简化后得到$n\overline{y2}$

$\frac{x1y1 + x2y2 +xnyn}{n} = \overline{xy}$ 乘以n 得到n $\overline{xy}$

这样我们知道每项都可以这样算，就可以算出n个点和y=mx+b平方误差之和表达式

$\underbrace{y_1^2 + y_2^2 + ... y_n^2}_{n\overline{y^2}} -2m\underbrace{(x1\ y1 + x2y2 +..... xnyn)}_{n\overline{xy}} -2b\underbrace{(y1 + y2 + ... yn)}_{n\overline{y}} +m^2\underbrace{(\ x_1^2 + \ x_2^2 +..... x_n^2)}_{n\overline{x^2}} + 2mb\underbrace{(X1 +X2 +....Xn)}_{n\overline{x}} +nb^2$

$SEline = n\overline{y^2} - 2m\ n\overline{xy} -2b\ n\overline{y} + m^2 n\overline{x^2} + \ 2mbn\overline{x} \ + nb^2$

这就是最简化的代数运算了，然后用各种微积分偏导求出m和b的简化值，这个微积分偏导过程就不写了，直接给出最后的一元线性回归公式

矩阵向量

先说说实数

R 表示实数

R^n 就是实数的集合

集合中有几个实数，记住一定是集合中都是实数，那么R的n，这个n就表示有几个实数

$x1 \in R$ 表示x1属于实数R

$x2 \in R$ 表示x2属于实数R

$\{x1, x2\} \in R^2$ 这就是集合，集合有x1，x2，所以R的n为2

$R^3 = \{(x1, x2, x3) \mid x1 \in R \quad x2 \in R \quad x3 \in R\}$

表示集合里面有3个实数 x1属于实数，x2属于实数，x3属于实数

$$R^n = \{\underbrace{(x_1 \ldots\ldots x_n)}_{\text{Rn就是x1到xn，这些值都是xi}} \mid \underbrace{x_i \in R \quad 1<i<n}_{\text{xi属于实数，那么i的范围就是>1，<n}}\}$$

向量(也就是矢量)

$\vec{V}$ 一个变量上面加一个箭头就是矢量(向量)

矢量(向量)一般用一组数据去表示的

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ \vdots \\ xn \end{Bmatrix}$$

x1.....xn所有的数都是这个向量表示

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ \vdots \\ xn \end{Bmatrix} \in R^n$$

也就是Rn表示，向量里面有n个实数

$\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\in R^2$ **这表示向量a包含两个实数**

$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\\pi\end{pmatrix}\in R^3$ **b包含三个实数**

这样表示向量的意义在哪里?

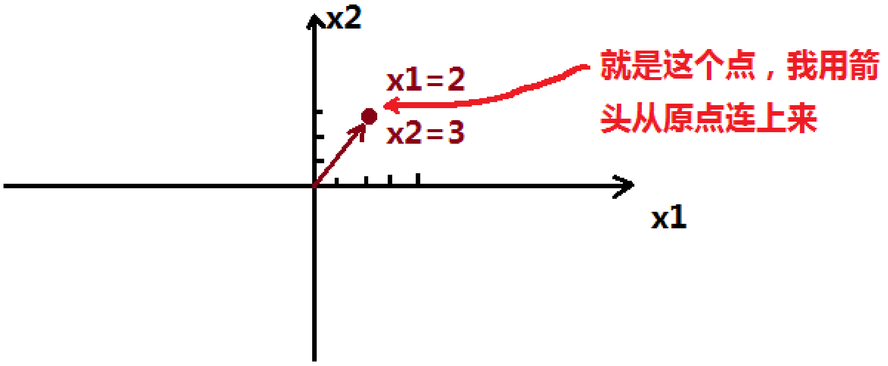
例如:

$\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\in R^2$ **这表示向量a包含两个实数**

我们把列1当做x1　x1 = 2

列2当做x2　x2 = 3

下面坐标表示



这个箭头就是向量，向量和我们平时的标量不一样，
向量除了值，还有一个方向，所以向量是两个参数

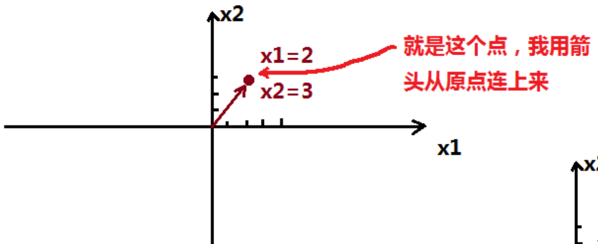
例如:

$\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\in R^2$ **这表示向量a包含两个实数**

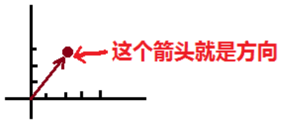
我们把列1当做x1　x1 = 2

列2当做x2　x2 = 3

下面坐标表示



这个箭头就是向量，向量和我们平时的标量不一样，
向量除了长度还有一个方向，所以向量是两个参数



$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+5\\3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$$

两个矢量(向量)相加其实就是矩阵加法

比如:

$$\vec{V}1=\begin{pmatrix}x1\\x2\\\vdots\\xn\end{pmatrix}\quad \vec{V}2=\begin{pmatrix}y1\\y2\\\vdots\\yn\end{pmatrix}\quad \vec{V}1+\vec{V}2=\begin{pmatrix}x1+y1\\x2+y2\\\vdots\\xn+yn\end{pmatrix}$$

这就是两个向量相加

也就是矩阵列与列相加

向量乘法

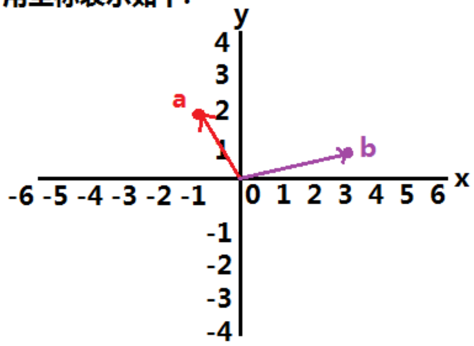
$$2\vec{V}1=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\\\vdots\\2x_n\end{pmatrix}\quad C\vec{V}=\begin{pmatrix}Cx_1\\Cx_2\\\vdots\\Cx_n\end{pmatrix}$$

向量乘法就是外部的标量乘以列里面的每一项

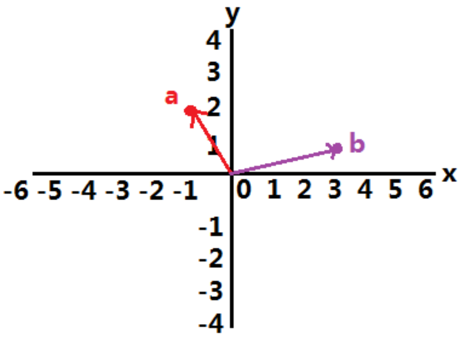
向量加法在坐标上如何显示

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

我假设a向量的列1为x，列2为y，b向量同理
用坐标表示如下:



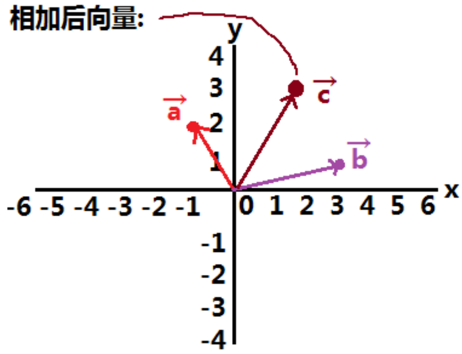
原向量:



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

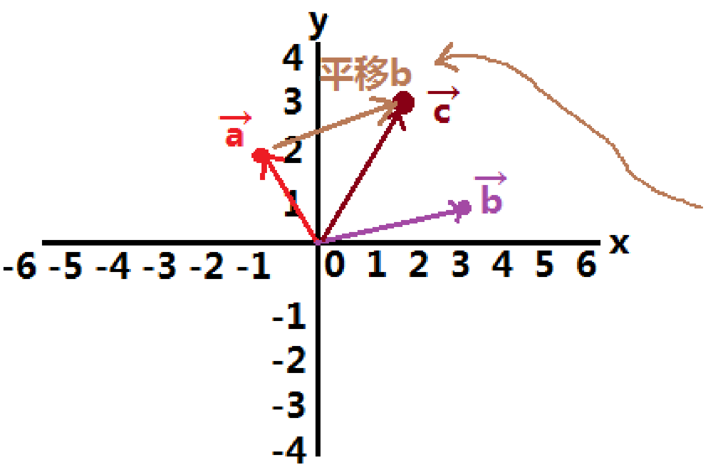
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

相加后向量:



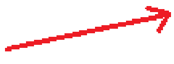
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

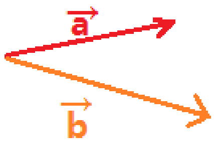


向量相加，比如a+b就是把b向量开始坐标平移到a向量结束坐标

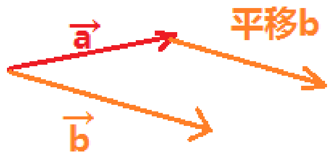
所以在空间当中只有一个向量 $\vec{a}$



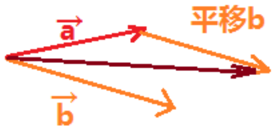
a再加上一个向量 $\vec{b}$



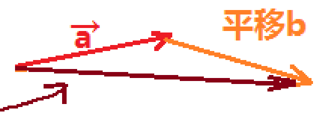
那么b起始点就平移到a终点了



将其a向量终点和平移后b向量终点连起来

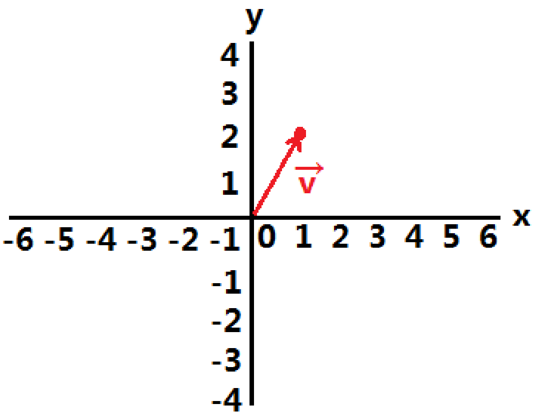


这条线段就是ab相加的结果

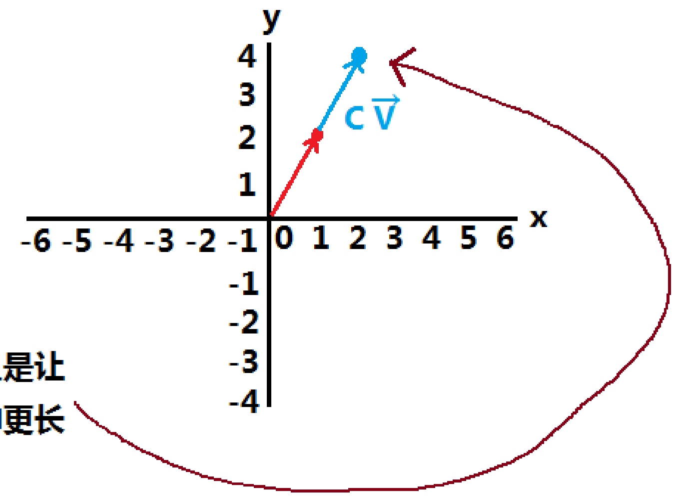


如果向量乘以标量，在坐标是怎么个显示结果呢?

$C = 2 \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$



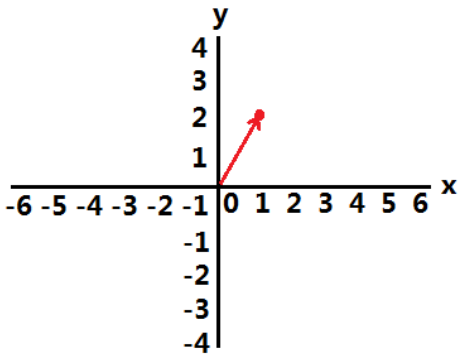
$c\,\vec{V} = 2 \times \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$



我们发现向量乘以标量只是让
本向量向同一个方向延伸更长

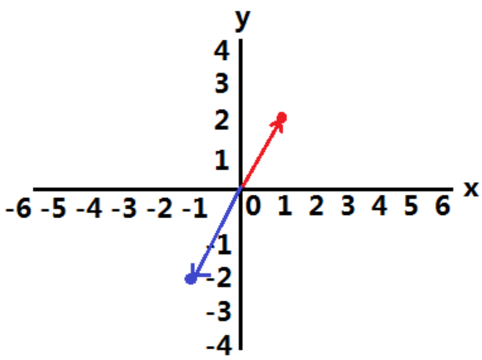
向量乘以负值，就是反方向延长

$C = 2 \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$



如果$C = -1$

$c\,\vec{V} = -1 \times \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

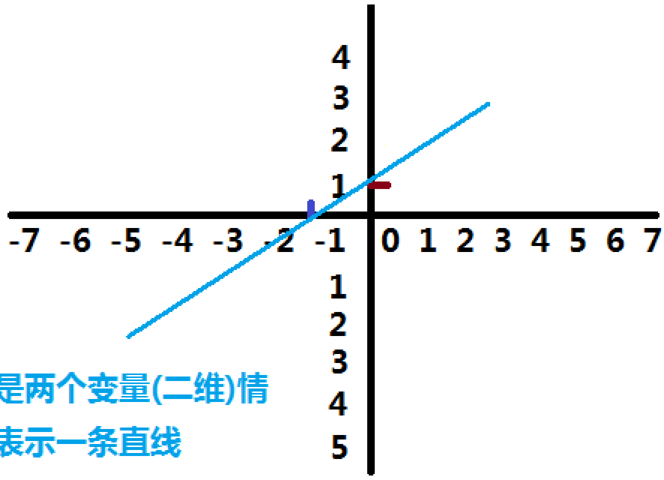


线性代数直线参数表示，从两个变量，变到多个变量

我们常规直线方程 $y=2x+1$

当$x=0$，$y=1$

当$y=0$，$x=-\frac{1}{2}$



这就是两个变量(二维)情况下表示一条直线

如果我们有3个变量(三维)情况下，如何表示直线呢？

先用向量做个二维的直线

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

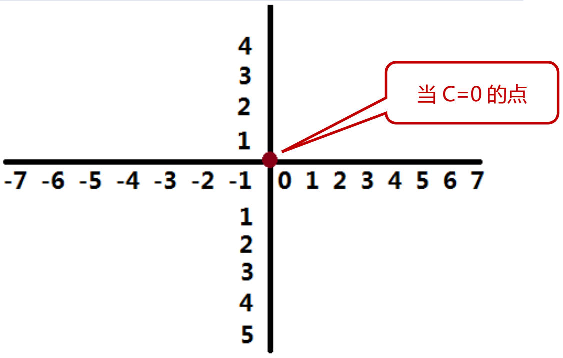
$S = \{ C\vec{V} \mid C \in R \}$ C属于实数

这个S集合在C不停的随实数变化的时候，这个S的含义时候什么？

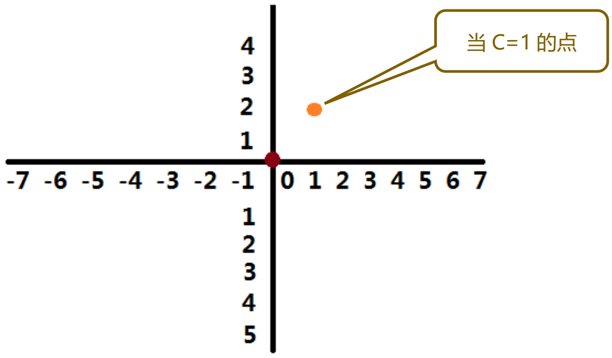
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$S = \{ C\vec{V} \mid C \in R \}$ C属于实数

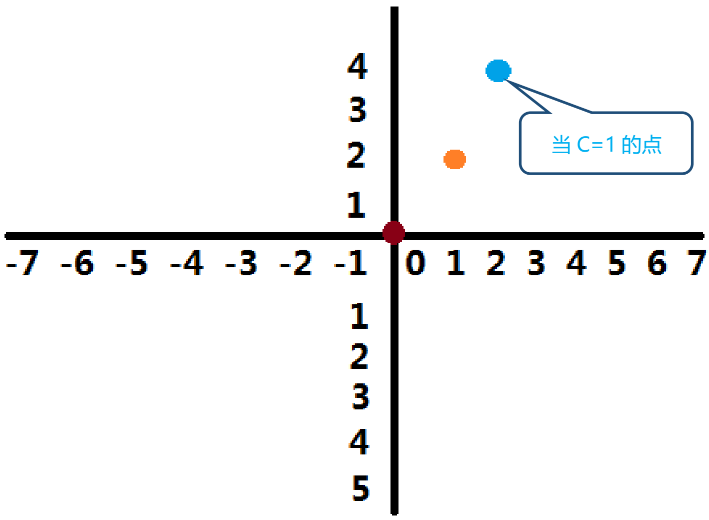
当$C = 0$时 $C\vec{V} = 0 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

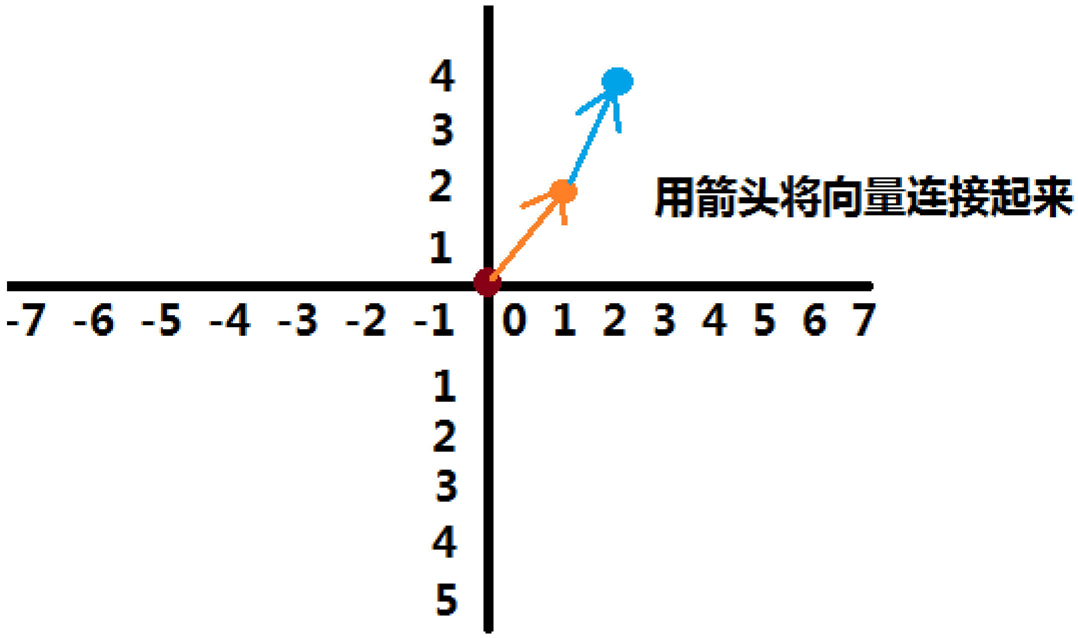


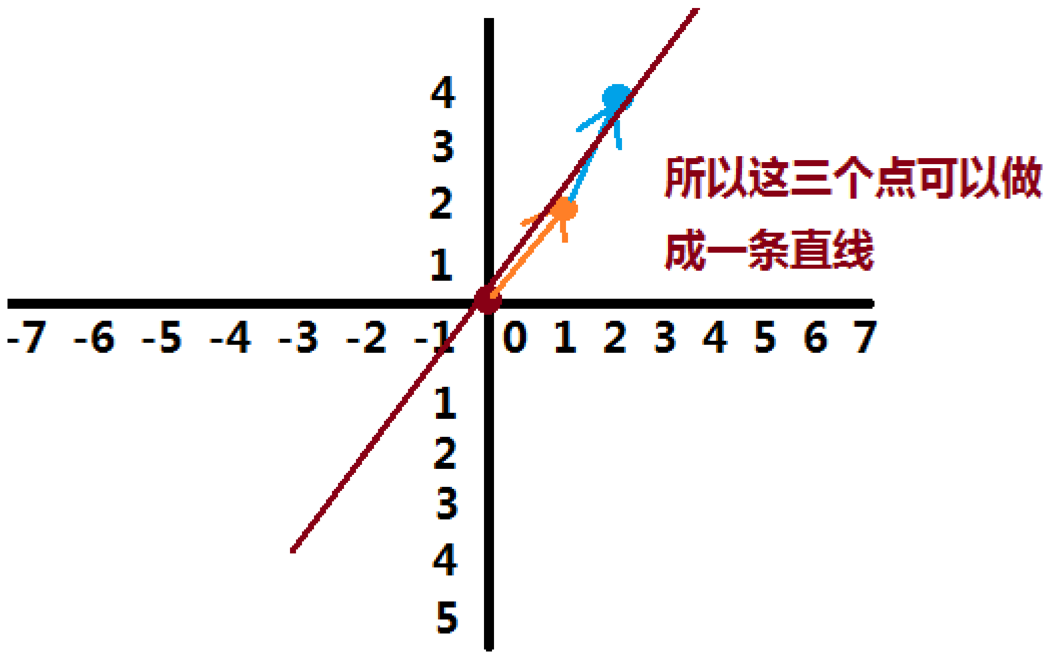
当$C = 1$时 $C\vec{V} = 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



当C=2 $c\vec{V} = 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

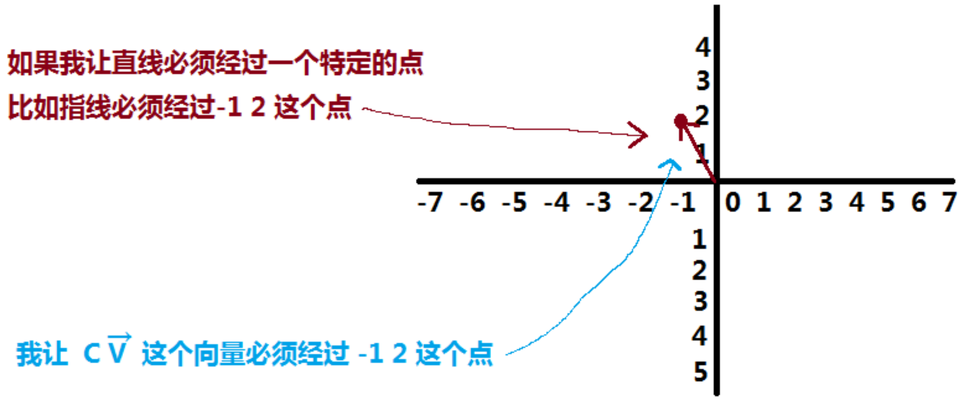


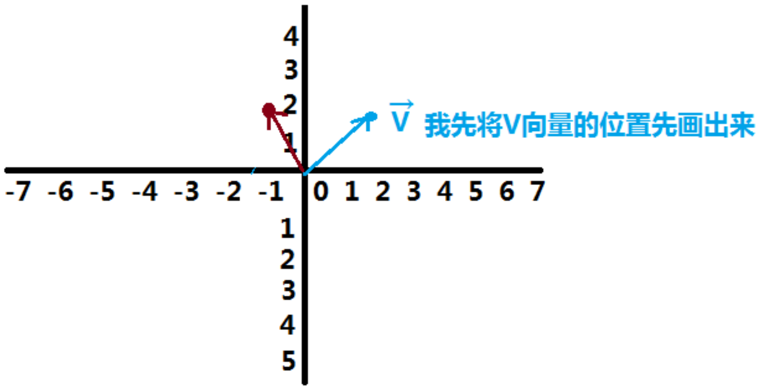


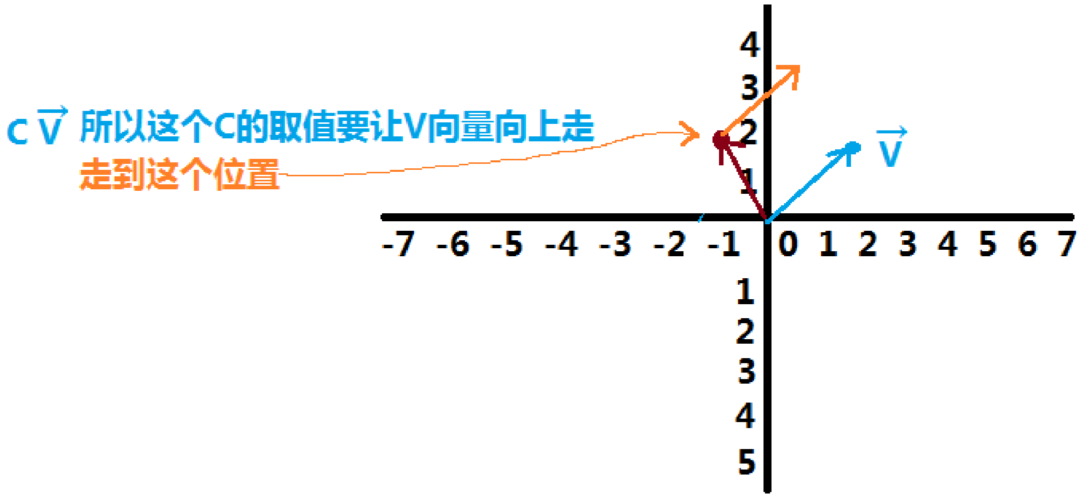


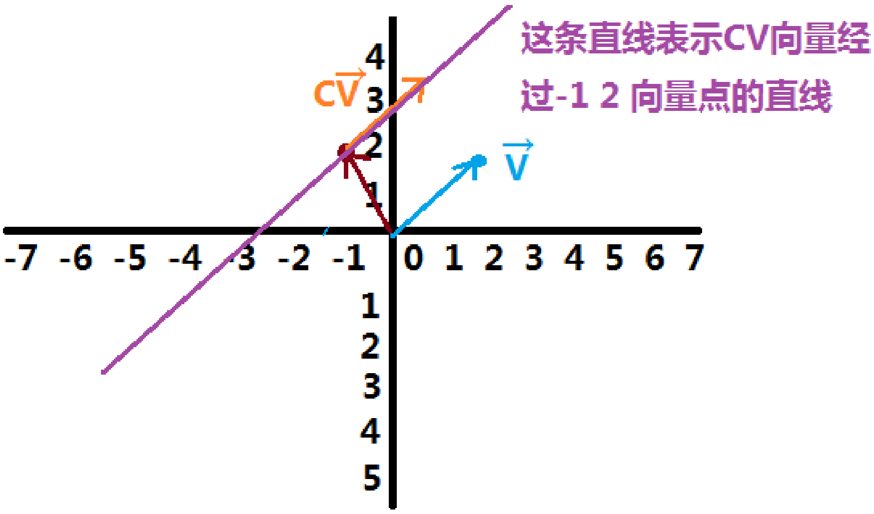
所以这个 CV 向量就是表示的一条直线。

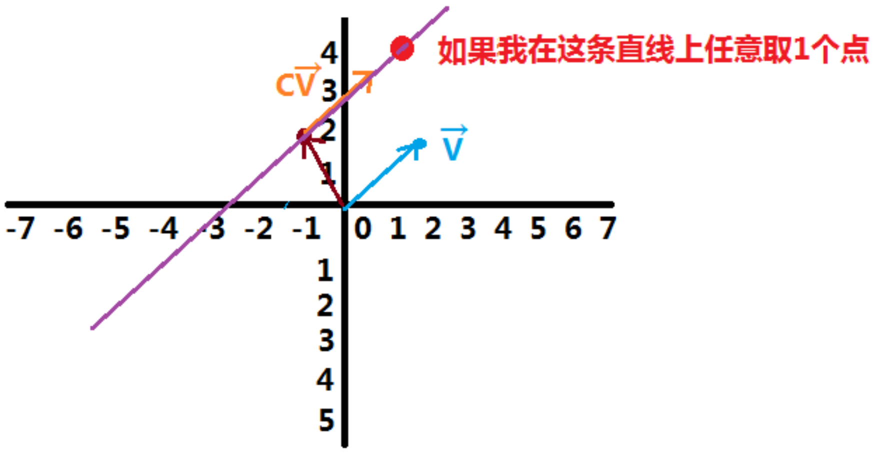
如何用向量的运算公式来表示直线的变化?

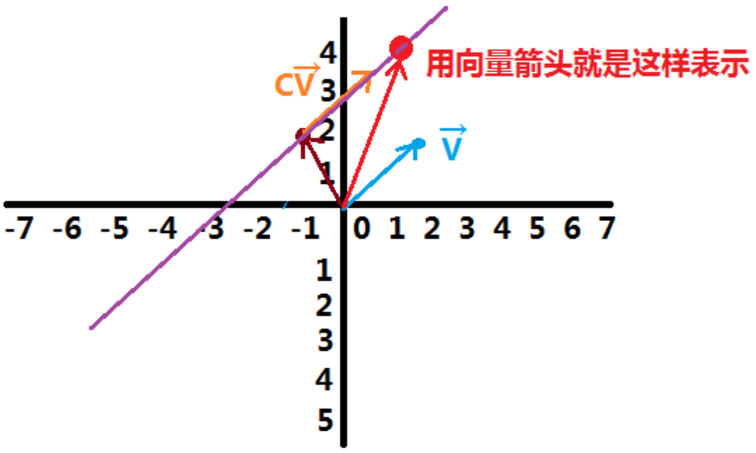


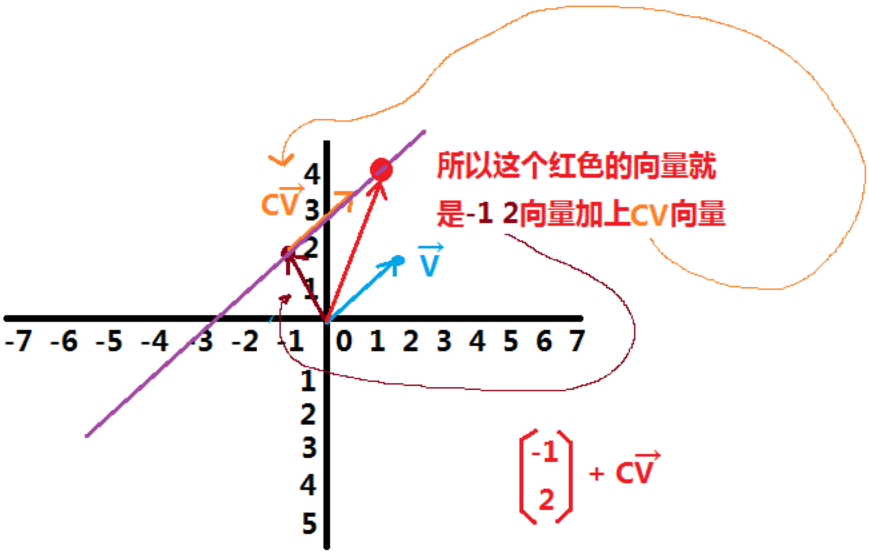












$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + c\vec{V}$$

所以得出如下结论

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + c\vec{V}$$

如果把-1 2 用 $\vec{P}$ 表示

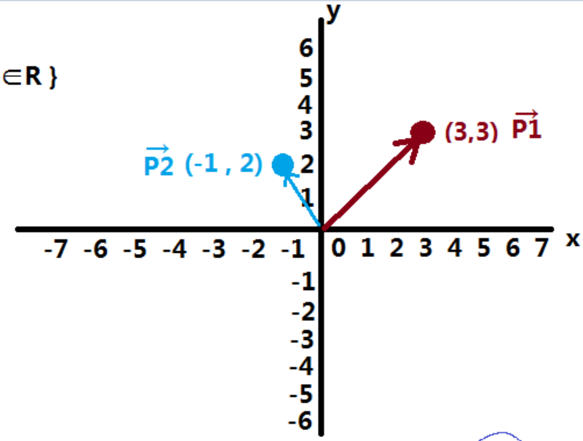
想要画出经过 $\vec{P}$ 点的直线

L(直线变量) = { P + CV | C∈R }

直线用公式表示方法 2

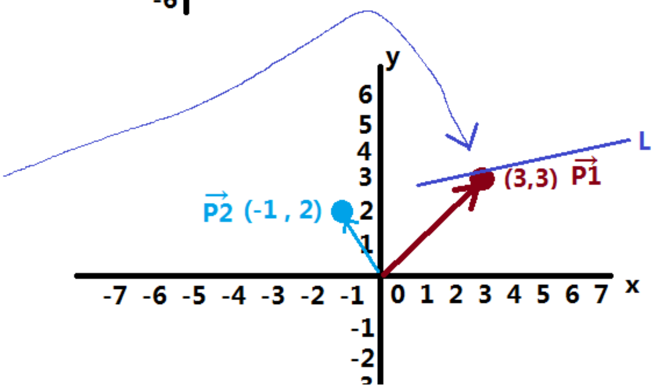
$L=\{\ \vec{P1}+C\ (\ \vec{P1}-\vec{P2})\mid C\in R\ \}$

这个公式是什么意思？



$L=\{\ \vec{P1}+C\ (\ \vec{P1}-\vec{P2})\mid C\in R\ \}$

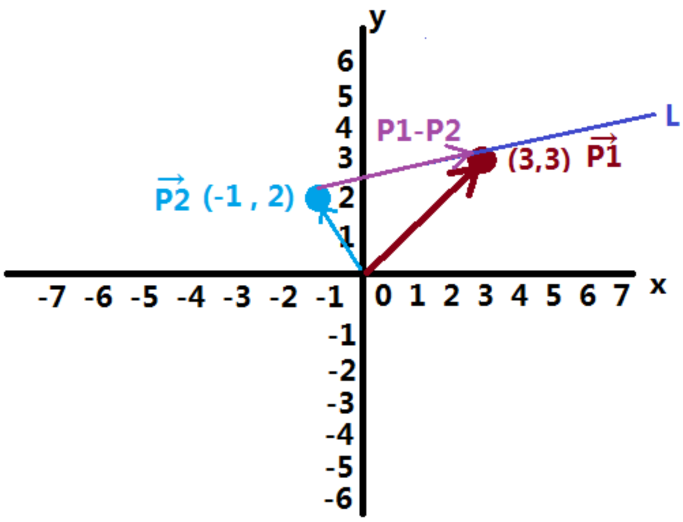
其实就是说L这条直线要经过P1这个点



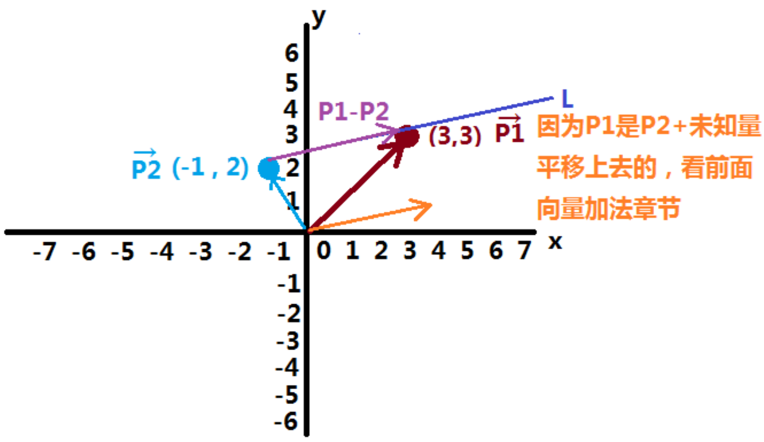
那么这条L直线的方向是朝哪个方向呢？

$L=\{\ \vec{P1}+C\ (\ \vec{P1}-\vec{P2})\mid C\in R\ \}$

这个直线的方向是P1-P2



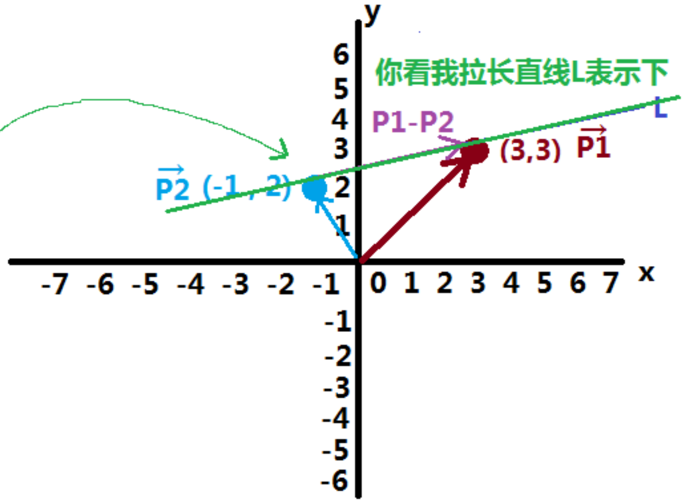
为什么是P1-P2呢？



那么这条L直线的方向是朝哪个方向呢？

$L=\{\vec{P1}+\underline{C}(\vec{P1}-\vec{P2})\mid C\in R\}$

乘以C就是表示这条L直线
可以任意拉长或者变短



如何用公式表示三维的直线

$\vec{P1}=\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}$ **这是P1这个点的三维坐标**

$P2-P1=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ **这是两个向量点相减后的坐标**

$$L=\left\{\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}+C\left(\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right)\middle|\ C\in R\right\}$$

这就是 我现在这个L表示的直线

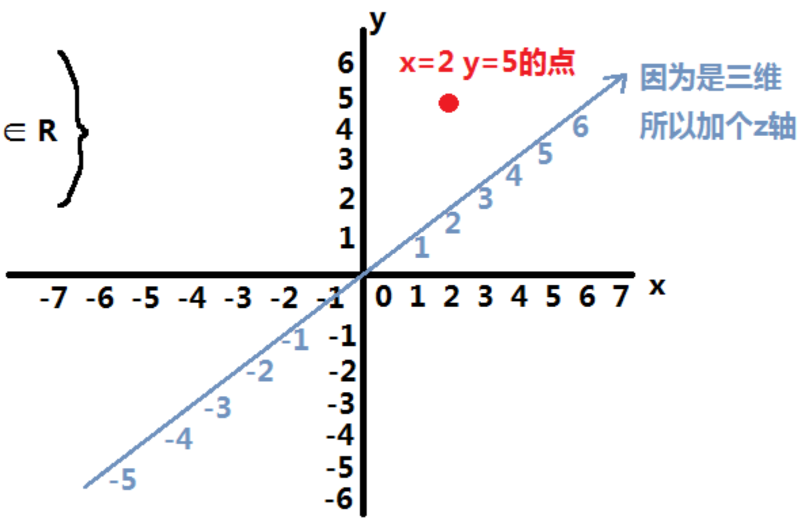
这个公式怎么用坐标表示?

$$L=\left\{\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}+C\left(\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right)\middle|\ C\in R\right\}$$

我们定义 $x=2$

$y=5$

$z=4$



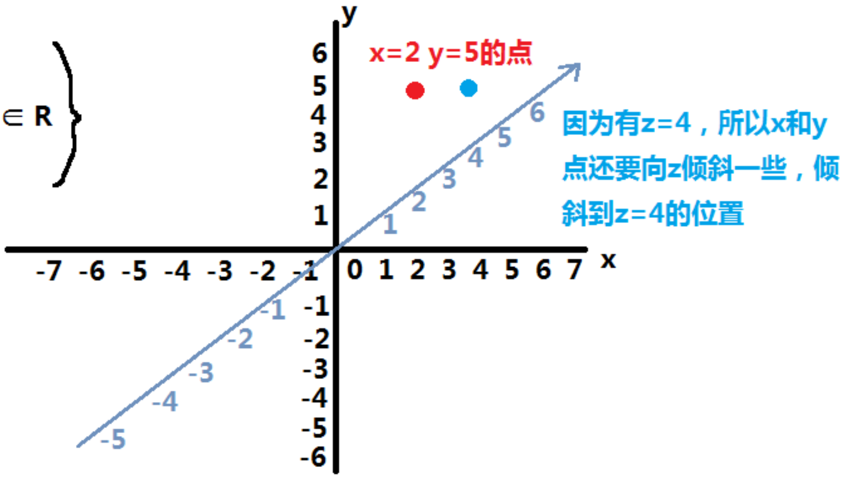
这个公式怎么用坐标表示?

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} + C\left(\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right) \middle| \; C \in R \right\}$$

我们定义 $x = 2$

$y = 5$

$z = 4$



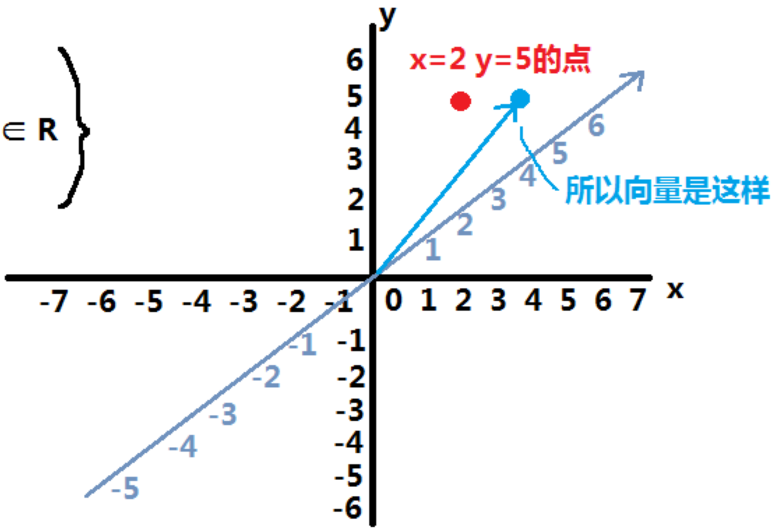
这个公式怎么用坐标表示?

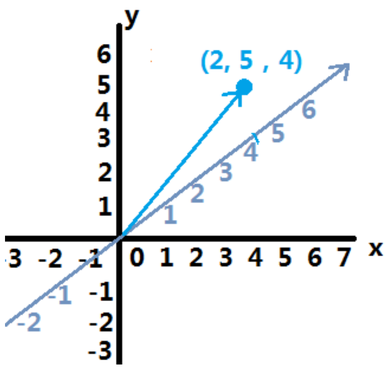
$$L = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} + C\left(\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right) \middle| \; C \in R \right\}$$

我们定义 $x = 2$

$y = 5$

$z = 4$





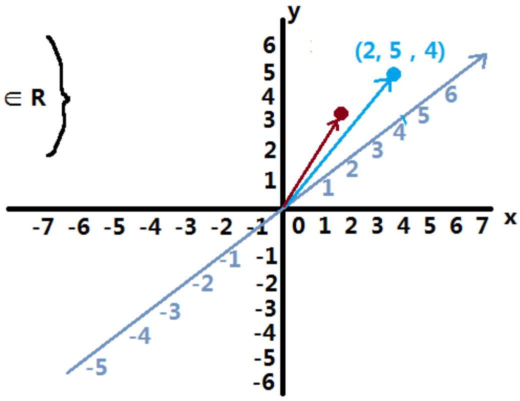
这个公式怎么用坐标表示?

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} + C\left(\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right) \middle| \; C \in R \right\}$$

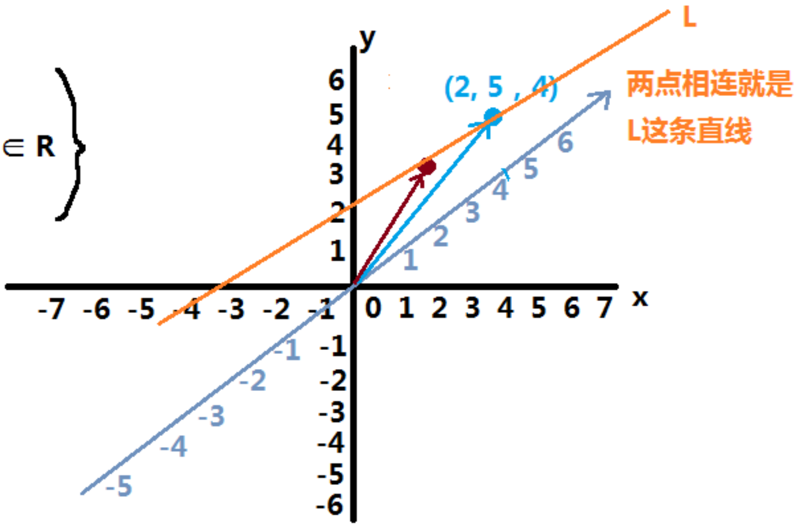
x=0

y=3

z=4



$$L = \left\{ \begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix} + C\left(\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix} \right) \middle| \; C \in R \right\}$$



单位向量

在我的《ee_match_base20220612》文档中有讲解

平行向量

在我的《ee_match_base20220612》文档中有讲解

方向余弦

在我的《ee_match_base20220612》文档中有讲解

向量的内积

设 $a = (a1,\ a2,\ ....,\ an)^T$ $\quad \beta = (b1, b2, ..., bn)^T$

因为有了转置，所以a是列向量，β 也是列向量

$$a = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ \vdots \\ an \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{bmatrix}$$

(a,β) 用括号将两个向量括起来就是内积

$$(a,\beta) = a^T\beta = \beta^T a = (a1,\ a2,\ ....,\ an) \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{bmatrix} = a1*b1+......an*bn$$ = 最后得到一个数值

内积就是行乘列，最后得到一个单个的数值

$a^T\beta = 0$ 两个向量正交，意思就是两个向量垂直的

$a^Ta=0$，如果向量自己的内积为0，表示该a就是0向量

如果a = (.......) b = (.......) a和b都是行向量

这种情况下也是可以求ab内积的

$(a,b) = ab^T$

内积具有下列性质(其中 x,y,z 为 n 维向量,λ 为实数):

(i) $[x,y]=[y,x]$;

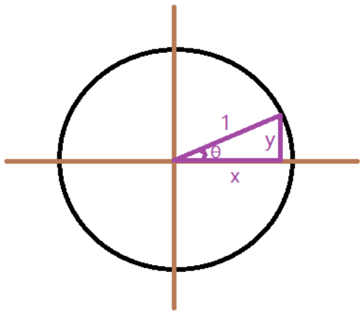
(ii) $[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$;

(iii) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$;

(iv) 当 $x=0$ 时,$[x,x]=0$;当 $x\neq 0$时,$[x,x]>0$.

反三角函数

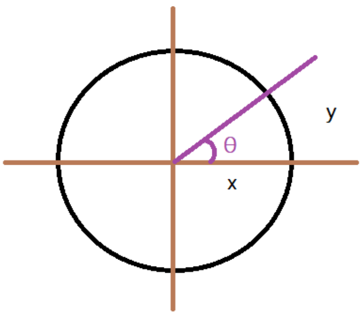
单位圆，半径为1的圆



$\cos\theta = \frac{\text{领边}}{\text{斜边}} = \frac{x}{1}$

$\sin\theta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{y}{1}$

$\tan\theta = \frac{\text{对边}}{\text{领边}} = \frac{y}{x}$ = $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$

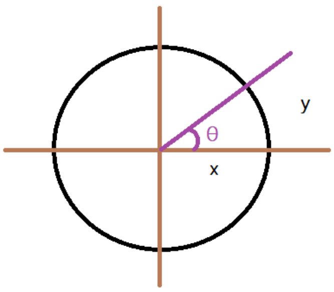


$\tan\theta = \frac{y}{x}$ 正切相当于表示这条线的斜率

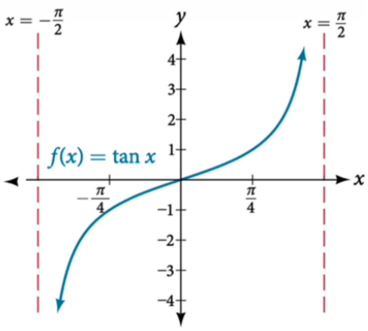
arctan(正切值) = ？得到什么样的角度值?

如 $\tan\frac{\pi}{4} = \tan(45) = 1$

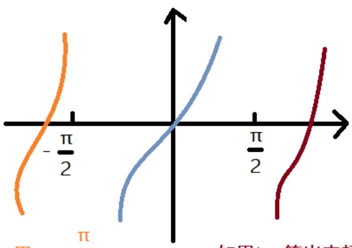
那么$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45°$



$\tan\theta = \frac{y}{x}$



正切函数图像



如果$\tan<\frac{\pi}{2}$
单独出来一个

如果tan算出来超过$\frac{\pi}{2}$ 就会单独出来一个

所以正切函数要规定范围，如$x\in(-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2})$

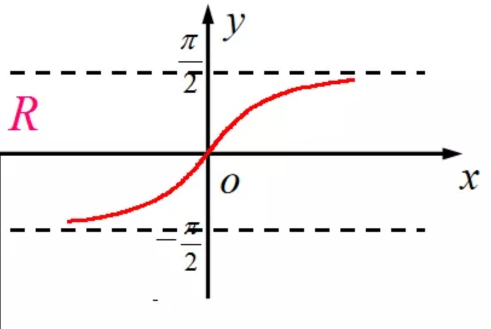
表示x在-π/2到π/2之间取值

所以x永远不可能取值到-π/2和π/2这两个值，也就是-90°，90°这两个值，因为tan计算的斜率，所以分母不准为0

$\tan\theta = \frac{y}{0}$ ×

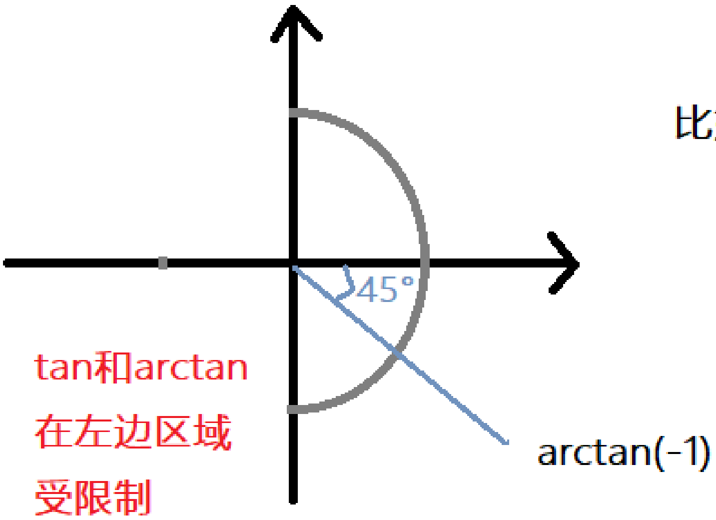
$y = \arctan x，\ x \in R$

定义域	R
值域	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



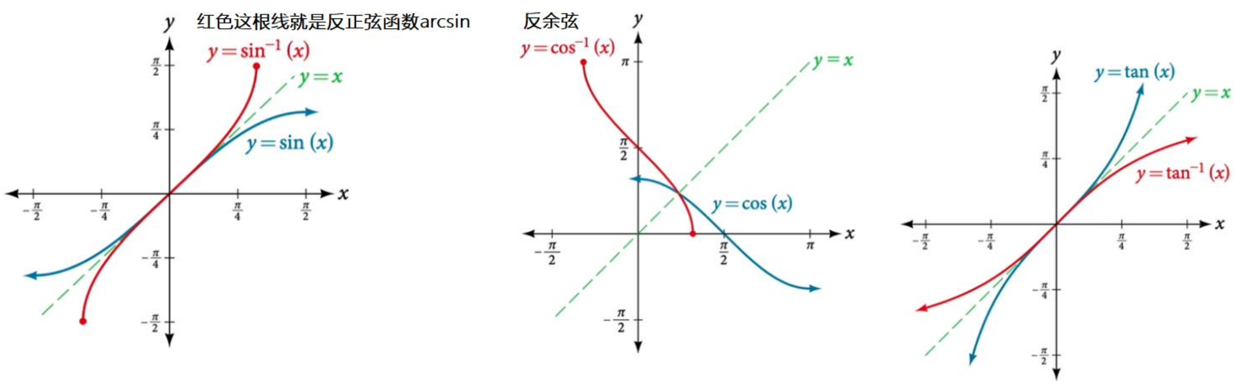
反正切函数就是，x可以随便取，但是得到的y的范围在-π/2到π/2之间

反正切函数，在单位圆坐标系中，就有限制

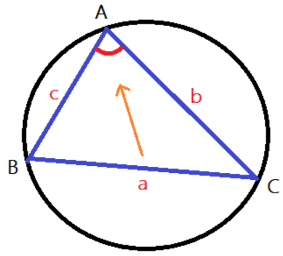


比如: $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} = -45°$

名称	常用符号	定义	定义域	值域
反正弦	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
反余弦	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

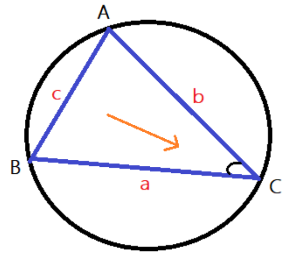


正弦定理



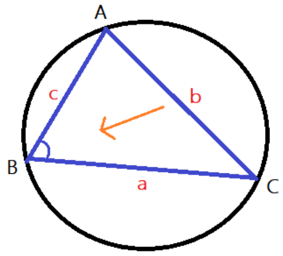
正弦定理就是 $\frac{a边}{\sin A} = 2R$

就是a边比上sinA的角度，得到外面这个圆的直径



$\frac{c}{\sin c} = 2R$

也是同理，只是边不一样



$\frac{b}{\sin B} = 2R$

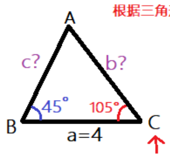
同理，b边比上sinB的角度也得到这个圆的直径

所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 正弦定理

1. 正弦定理可以解决已知两角和任意一边，求其它两边和一个角

如，已知 边a=4，∠C=105° ，∠B = 45°，则b边有多长

根据三角形内角和公式 = ∠a+∠b+∠c=180°



角A = 180° - 45° - 105° =30°

$\frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\sin 30°} = \frac{4}{0.5} = 8$

根据正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = 8$ B=45° $\frac{b}{0.707} = 8$

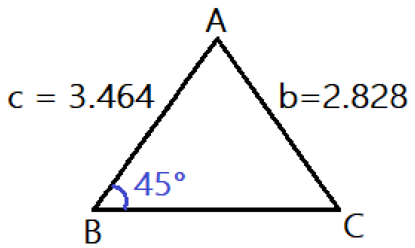
角C是105度，是钝角啊，你这个角好小，示意图不用这么认真

所以b = 5.656

那么c = 7.727

2.已知两边和其中一边的对角，求另一边对角

例如：已知∠B=45°，c = $2\sqrt{3}$(3.464)，b=$2\sqrt{2}$(2.828)，求∠C(角C多少度)



$$\frac{b}{\sin B} = \frac{2.828}{\sin 45°} = \frac{2.828}{0.707} = 4$$

根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{3.464}{\sin C} = 4 \quad \sin C = 0.866 = \sin 60°$$

正弦定理比例设 k 法

因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 那么 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$

例如: 在三角形ABC中，若 $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ ，则 $\frac{\sin A + 3\sin B}{\sin B} = ?$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{4}{5}$

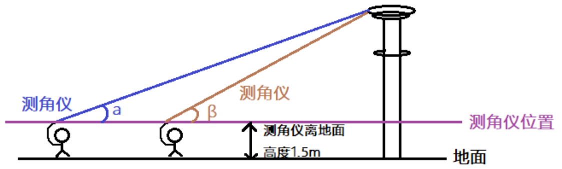
我们人为给sin加入k代替 $\frac{4}{5}$ 人为写成 $\frac{4K}{5K}$

$\sin A = 4K$ $\sin B = 5K$ 现在代入方程 $\frac{\sin A + 3\sin B}{\sin B}$

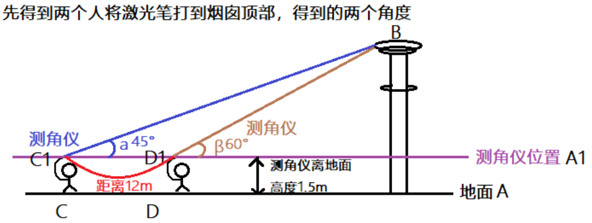
$\frac{4K+3(5K)}{5K} = \frac{19K}{5K}$ 则 $\frac{\sin A + 3\sin B}{\sin B} = \frac{19K}{5K}$

只要遇到有比例的地方，就可以考虑使用比例设K法

正弦定理工程应用



先得到两个人将激光笔打到烟囱顶部，得到的两个角度



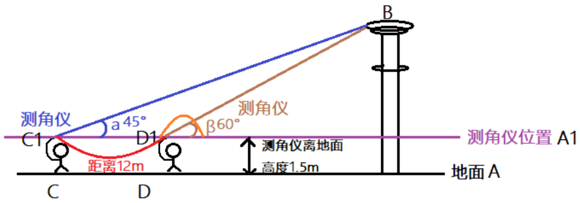
因为烟囱高度AB = A到A1 + A1到B

已知A到A1高度是1.5m ，我们定义为AA1 = 1.5m

已知a = 45° β=60°

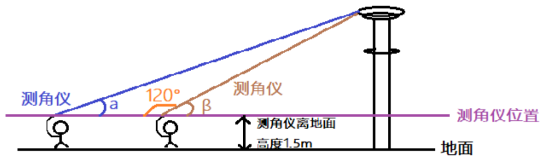
已知CD距离是12m

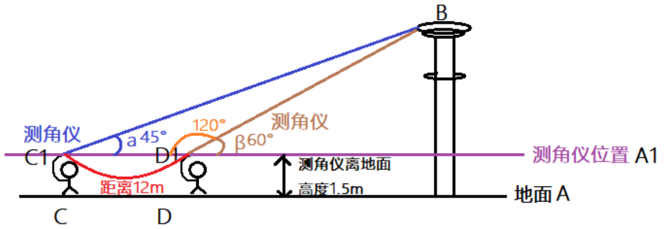
1.先求B的角度



将D1看成180°,因为地面是平的，这样180° - 60° = 120°

这个120° 就是钝角

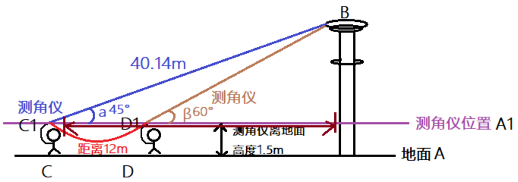




有了D1=120°，C1的角度是45°，那么B角度 = 180° - 120°- 45° = 15°

$$\frac{C1D1边}{\sin B} = \frac{C1D1边}{\sin 15°} = \frac{C1B边}{\sin D1}$$

$$BC1边 = \frac{C1D1边 * \sin D1}{\sin B} = \frac{12m * \sin 120°}{\sin 15°} = 18\sqrt{2} + 6\sqrt{6} = 40.14m$$



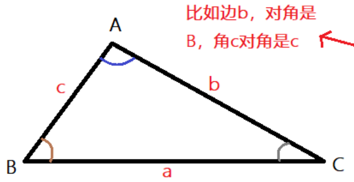
40.1m + 棕色线这段长度

用勾股定律就可以得到烟囱从测距仪开始的高度

最后再加个1.5m就得到烟囱实际高度

余弦定理

我们知道，解三角形是知3求3的过程



比如边b，对角是B，角c对角是c

1. 已知1边2角，使用正弦定理
2. 已知2边1角，对角使用正弦定理

夹角使用余弦定理 比如已知角a，已知c边和b边，这种明显角a是夹角，用余弦定理

3,已知3边，0角，用余弦定理

余弦定理公式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ 也可以看成这样写

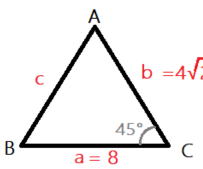
例1: 已知a=8，b=$4\sqrt{2}$ ，C = 45°，求c

勾股定理变形 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C)$

$= 64 + 32 - 64\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$

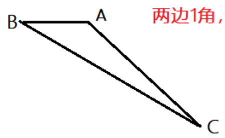
$= 32$

所以$c = \sqrt{32} = 5.656$



一看就是夹角，用余弦定理

例2: 三角形中，A为钝角，$\sin A = \frac{4}{5}$ ，AB=3，AC=5，求BC

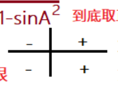


两边1角，求余弦定理

因为A是sin，所以要把sinA转成cosA

$\cos A = \pm\sqrt{1-\sin A^2}$ 到底取正号还是负号呢?

因为A为钝角 钝角在第2象限



第2象限cosa是负号

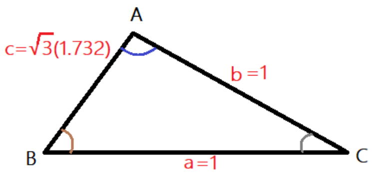
$\cos A = -\frac{3}{5}$

$a = b + c - 2bc(-\frac{3}{5})$

$= 25 + 9 - 30 * -5/3$ $\sqrt{52}$

已知3边，求角

例1: 已知a=1，b=1，c=$\sqrt{3}$，求A



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1+3-1}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$ 这是余弦定理求cosB角的公式

例子2: a = 3, b =$\sqrt{7}$，c=2，求∠B

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9+4-7}{2x6}=\frac{1}{2}=\cos 60°$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$ 这是余弦定理求cosC角的公式

例子3: 在三角形中，BC=1，AC=2，AB= $\sqrt{7}$ ，求∠C

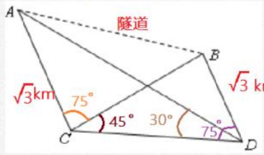
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1+4-7}{2x2}=-\frac{1}{2}=\cos 60°$$

余弦定理工程实际应用

一、在测量不可到达的两点间距离中的应用

某工程队在修筑公路时，遇到一个小山包，需要打一条隧道，设山两侧隧道口分别为A、B，为了测得隧道的长度，在小山的一侧选取相距$\sqrt{3}$ km的C、D两点，测得∠ACB=75°，∠BCD=45°，∠BDC=75°，∠ADC=30°，（A、B、C、D），试求隧道的长度.

分析：根据题意作出平面示意图，在四边形ABCD中，需要由已知条件求出AB的长，由图可知，在△ACD和△BCD中，利用正弦定理可求得AC与BC，然后再在△ABC中，由余弦定理求出AB.



解析：在$\triangle ACD$中，$\because \angle ADC=30°$，$\angle ACD=120°$，

$\therefore \angle CAD=30°$，

$\therefore AC=CD=\sqrt{3}$.

在$\triangle BCD$中，$\angle CBD=180°-45°-75°=60°$

由正弦定理可得，

$$BC=\frac{\sqrt{3}\sin 75^0}{\sin 60^0}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，可得

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot COS\angle ACB$$

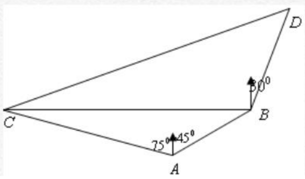
$$AB^2=(\sqrt{3})^2+(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2})^2-2\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\times\cos 75°=5$$

$\therefore AB=\sqrt{5}\approx 2.236km$,即隧道长为$2.236km$.

二、在航行中的应用

在海岸A处，发现北偏东45°方向，距A处$\sqrt{3}-1$海里B处有一艘走私船，在A处北偏西75°方向，距A处2海里的C处的缉私船奉命以$10\sqrt{3}$海里/小时的速度追截走私船，此时走私船正以10海里/小时的速度从B处向北偏东30°方向航行，问缉私船沿什么方向能最快追上走私船，并求出所需时间.

分析：根据题意作出平面示意图，设在D处追上走私船，由图知，要求追截方向和时间即求∠DCB及CD长度，先用余弦定理求BC及∠CBA，从而求出∠ABD，列出关于追截时间的方程，求出时间，再用余弦定理求出∠DCB.



解析：设在D处追上走私船，所需时间为t小时，

则$CD = 10\sqrt{3}t$，$BD = 10t$

在$\triangle ABC$中，

$\because \angle BAC = 75° + 45° = 120°$，$AB = \sqrt{3} - 1$，$BC = 2$，

由余弦定理得

$$BC^2 = 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \times (\sqrt{3} - 1)\cos^2 120 = 6,$$

$$\cos\angle CBA = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$$

$$= \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

又$\because 0 < \angle CBA < \pi$，则$\angle CBA = 45°$，则$BC$为正东西方向，

在中$\triangle BCD$，$\angle CBD = 120°$，由余弦定理得，

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times CD\cos\angle CBD,$$

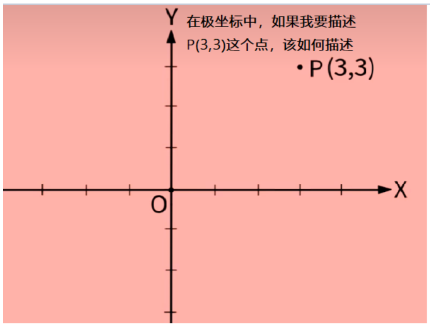
即$(10\sqrt{3}t)^2 = (10t)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \times 10t \times \sqrt{6}\cos 120^{\circ}$，

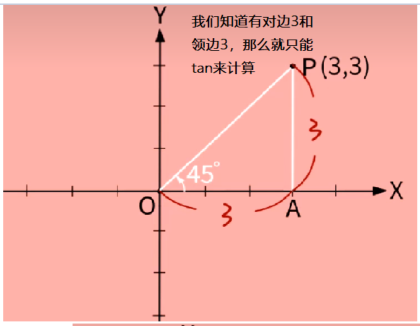
解得，$t = \dfrac{\sqrt{6}}{10}$或$t = -\dfrac{\sqrt{6}}{20}$（舍），

$\therefore BD = \sqrt{6}$，$CD = 3\sqrt{2}$，$\therefore BD = BC$，$\therefore \angle DCB = \angle BDC = 30°$，

故缉私船沿东偏北30°方向追截，所需时间为$\dfrac{\sqrt{6}}{10}$小时.

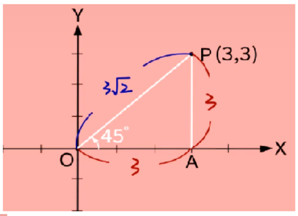
三角函数极坐标变换





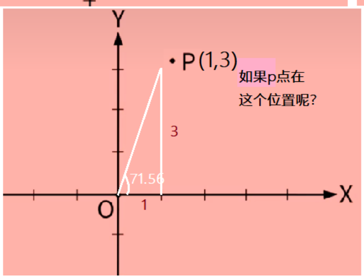
$\tan = \frac{3}{3} = \tan(1)$ 那么$\arctan(1) = 45°$

如果用sin算呢?，那么就必须求出斜边



$\sin(\frac{3}{3\sqrt{2}}) = \sin(\frac{3}{4.242}) = \sin(0.707) = \arcsin(0.707) = 44.99°$

所以斜边在坐标系的角度用tan可以算，用sin也可以算

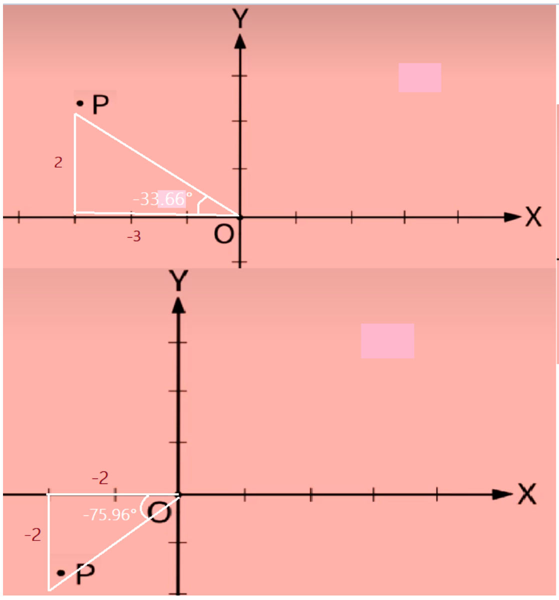


$\tan = \frac{3}{1} = \tan(3)$ 那么 $\arctan(3) = 71.56°$

勾股定理斜边$= 1^2 + 3^2 = 10$ 开根号 = 3.16

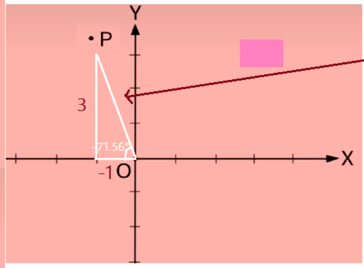
$\sin(\frac{3}{3.16}) = \sin(0.949) = \arcsin(0.949) = 71.6°$

这就证明不管是arcsin还是arctan，都能算出对应的角度



$\tan\left(\frac{2}{-3}\right) = \tan(-0.666)$ arctan = -33.66° tan左边的轴和右边的轴是正负关系

并不是180°或者360°旋转表示法的关系

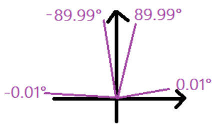


那么如果是这样呢?

$\tan\left(\frac{3}{-1}\right) = \tan(-3)$ $\arctan(-3) = -71.56°$

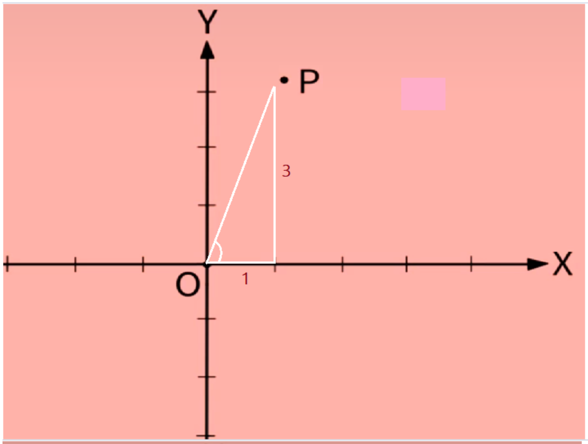
这个-71.56°和下面在三象限的坐标冲突

$\tan\left(\frac{-2}{-2}\right) = \tan(-4) = \arctan(-4) = -75.96°$



所以tan，arctan只能在0.01° ~ 89.99°和-0.01° ~ -89.99°范围内转动，如果坐标转动到90度了，就直接变成0°。无法实现0~360°旋转表示

tan 和 arctan 的问题在<反三角函数>章节讲过，可以回看，为什么无法到 90 度，这儿只是做直观演示。注意 sin 和 arcsin 也是同样的情况。下面用 cos 和 arccos 来试试。



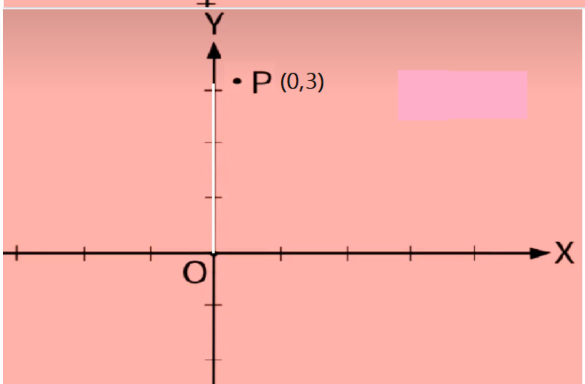
因为$\cos\theta = \frac{领边}{斜边}$

所以要用勾股定理计算斜边

$1^2 + 3^2 = \sqrt{10}$ 开方3.162

$\cos\theta = \frac{领边}{斜边} = \frac{1}{3.162} = \cos(0.316)$

那么arccos(0.316) = 71.57°

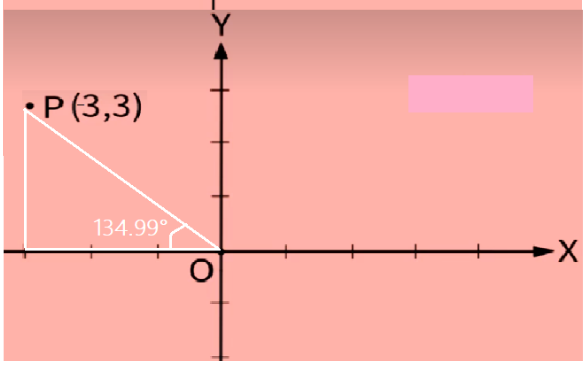


勾股定理斜边 = $0^2 + 3^2 = \sqrt{9}$ 开方 = 3

领边为0，斜边为3，对边也是3

$\cos\theta = \frac{领边}{斜边} = \frac{0}{3} = \cos(0) = \arccos(0) = 90°$

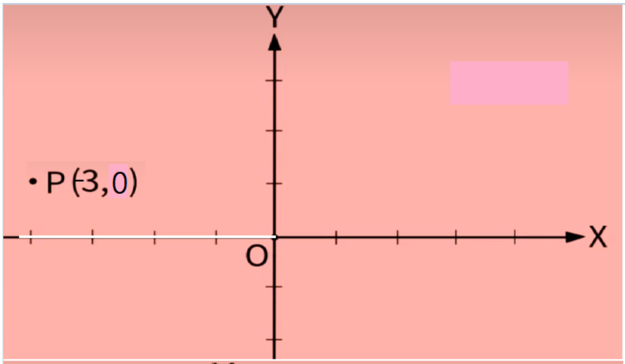
看来cos和arccos可以达到90度的角



勾股定理斜边 = $-3^2 + 3^2 = \sqrt{18}$ 开方 = 4.242

斜边 4.242，领边 -3

$\cos\theta = \frac{领边}{斜边} = \frac{-3}{4.242} = \cos(-0.707) = \arccos(-0.707) = 134.99°$

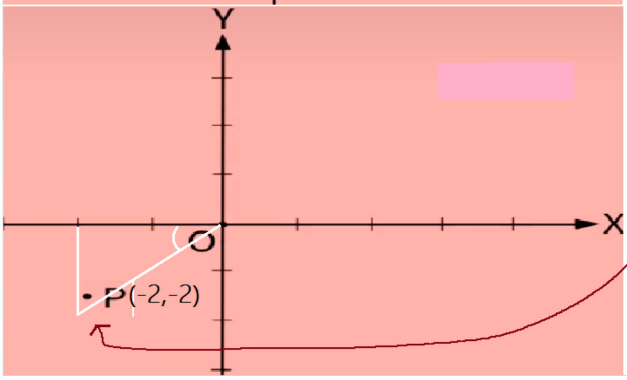


勾股定理斜边= $-3^2 + 0^2 = \sqrt{9}$ 开方 = 3

斜边3，领边-3

$\cos(\frac{-3}{3}) = -1 = \arccos(-1) = 180°$

余弦函数最多能达到180°



如果我强行让斜边>180度呢

勾股定理斜边 = $-2^2 + -2^2 = \sqrt{8}$ 开方2.828

斜边2.828，领边-2

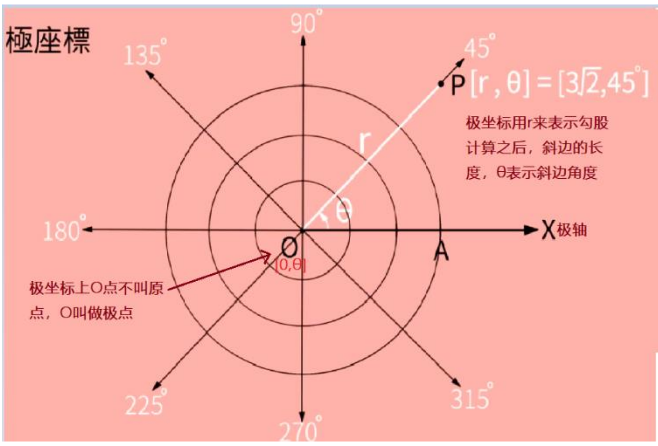
$\cos(\frac{-2}{2.828}) = \cos(-0.707) = \arccos(-0.707) = -134.99°$

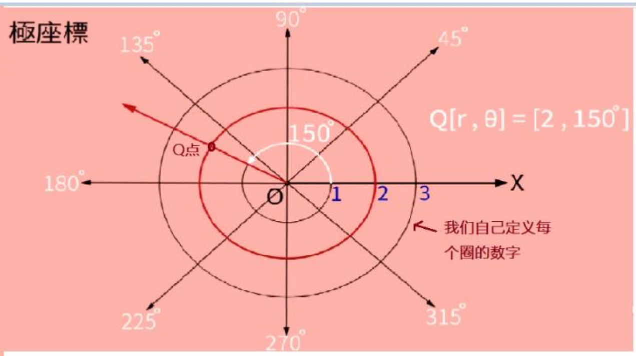
很明显，这里是220°的角，怎么会是-134.99°呢，明显不对。

但是发现个有意思的现象，如果斜边最开始按照负方向顺时针旋转那么第三，第四象限，可以用负的度数来表示。这就可以满足360度的要求了。

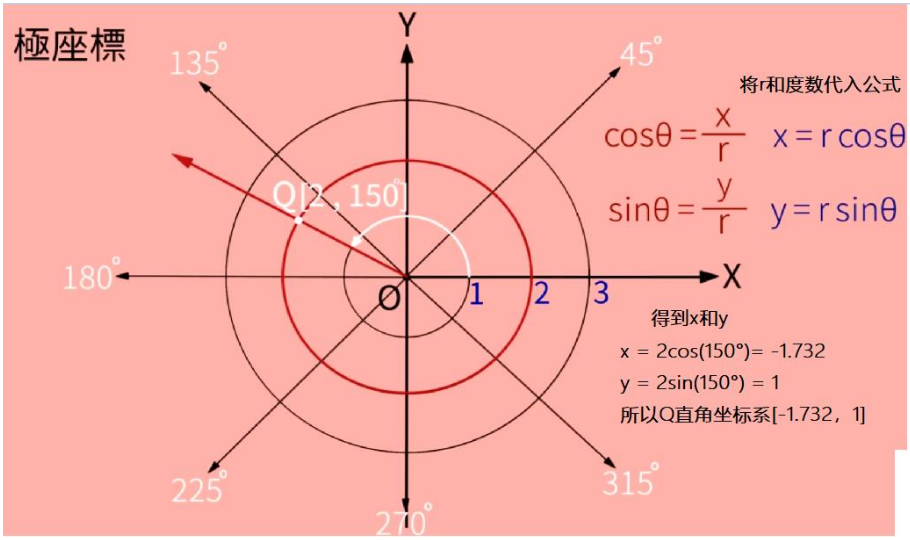
所以正0~180度，和-0~-180度可以组成360度

极坐标是什么意思?

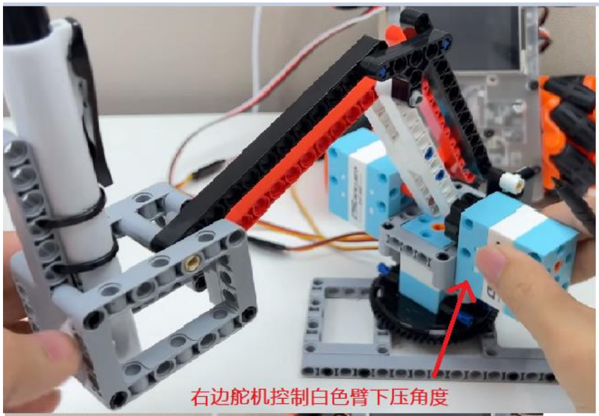


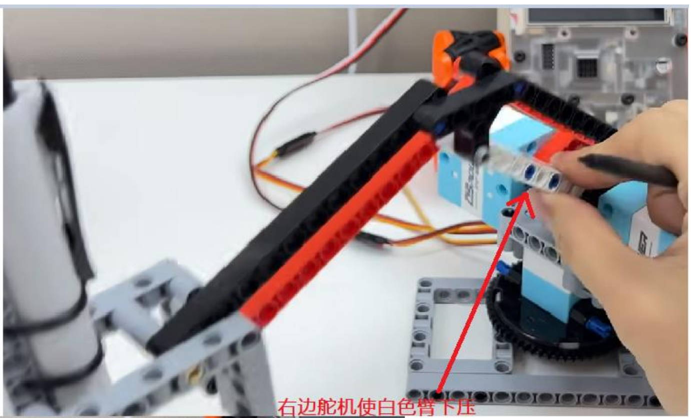


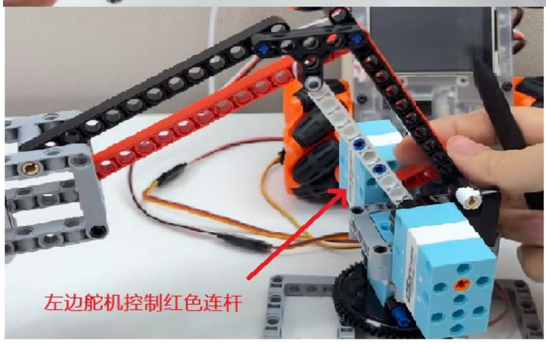
极坐标到直角坐标变换

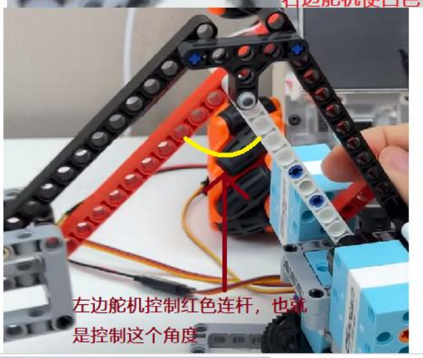


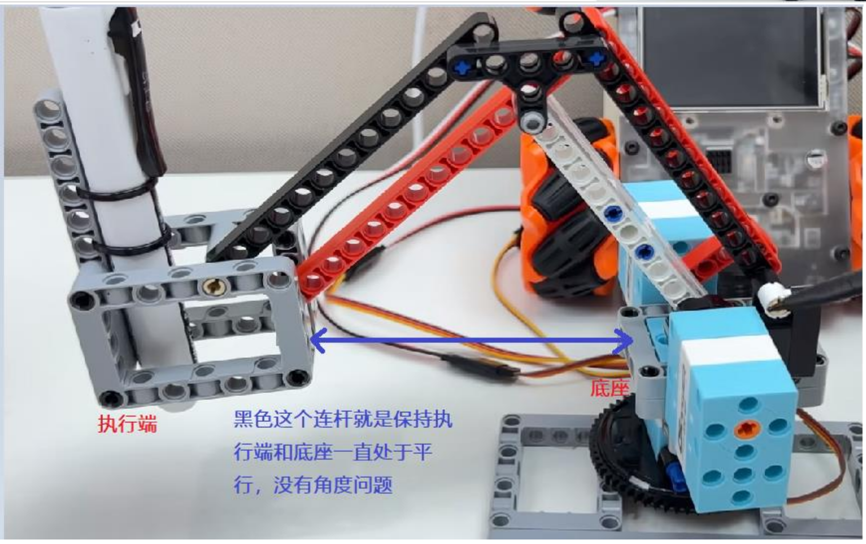
三自由度机械手实践



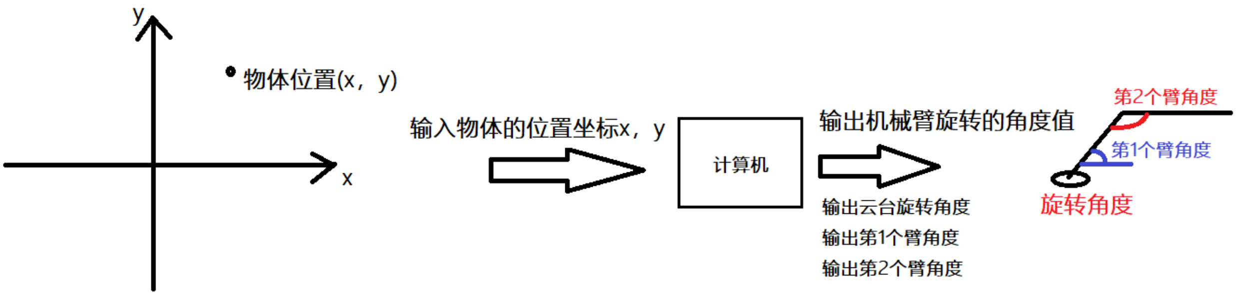




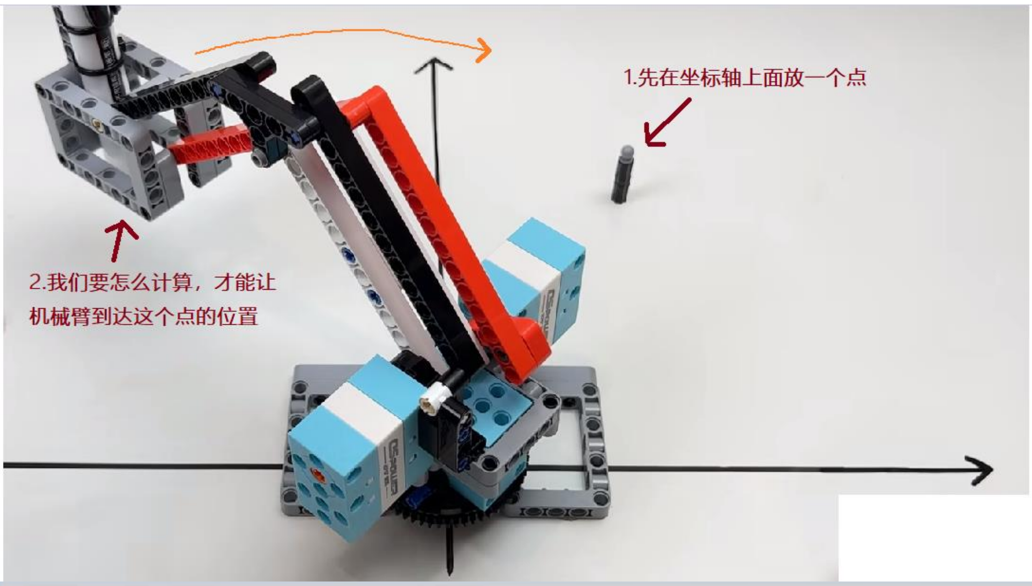


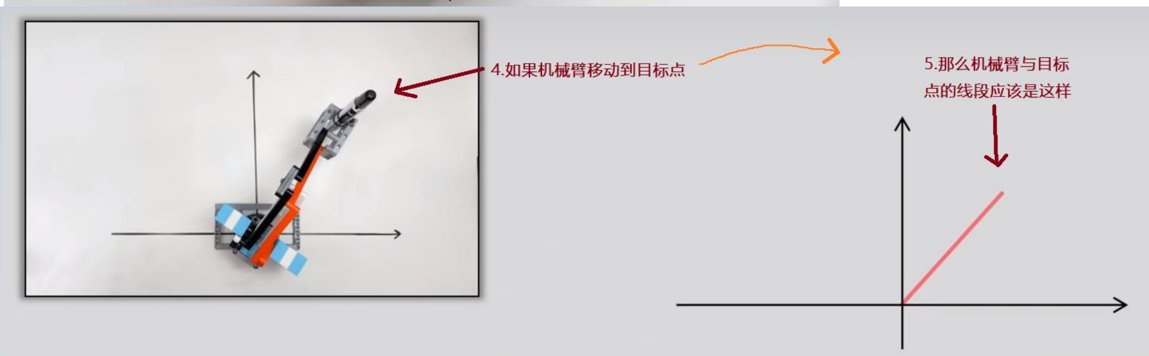


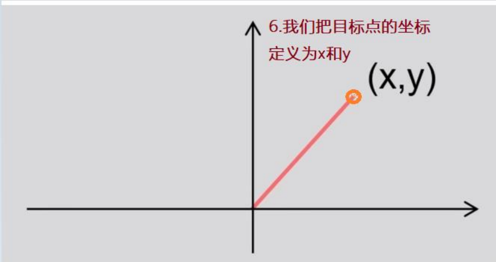
三轴机械臂要实现的功能

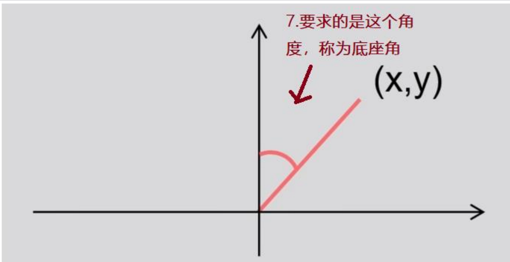


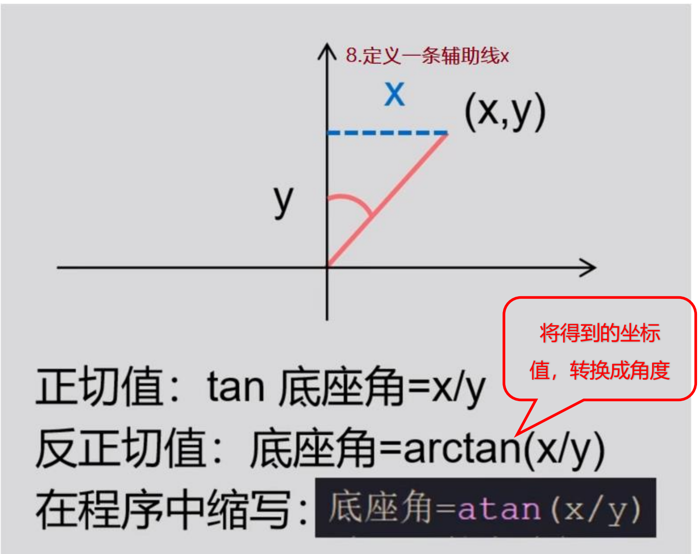
所以我们要实现的是，把坐标变成角度输出

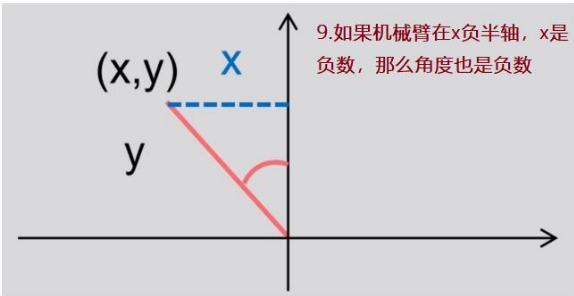

1.先在坐标轴上面放一个点
2.我们要怎么计算，才能让机械臂到达这个点的位置

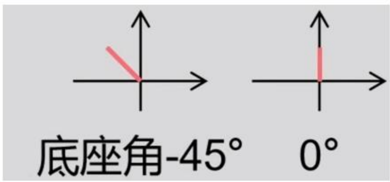

4.如果机械臂移动到目标点
5.那么机械臂与目标点的线段应该是这样

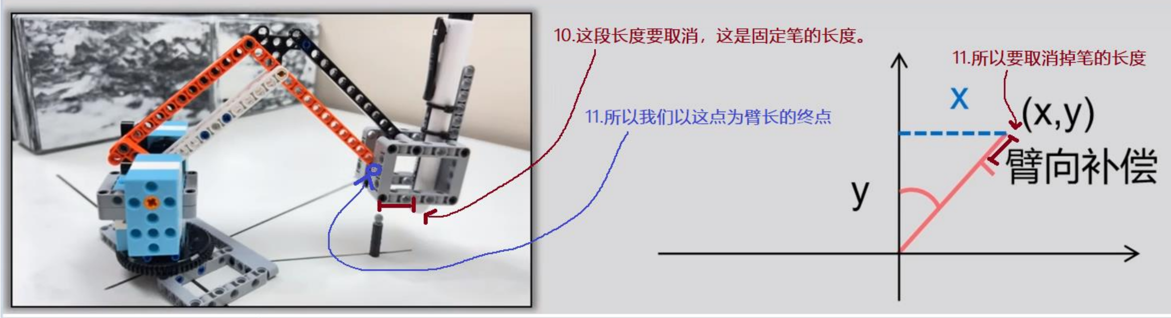

6.我们把目标点的坐标定义为x和y
(x,y)

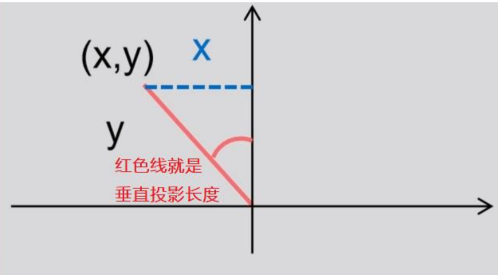

7.要求的是这个角度，称为底座角
(x,y)


8.定义一条辅助线x
x
(x,y)
y
将得到的坐标值，转换成角度
正切值：tan 底座角=x/y
反正切值：底座角=arctan(x/y)
在程序中缩写：底座角=atan(x/y)


9.如果机械臂在x负半轴，x是负数，那么角度也是负数
(x,y)
x
y


底座角-45°
0°



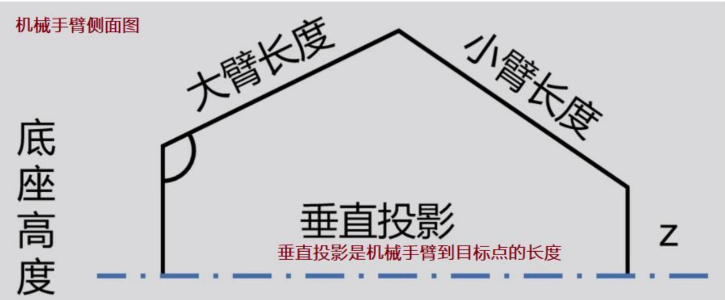


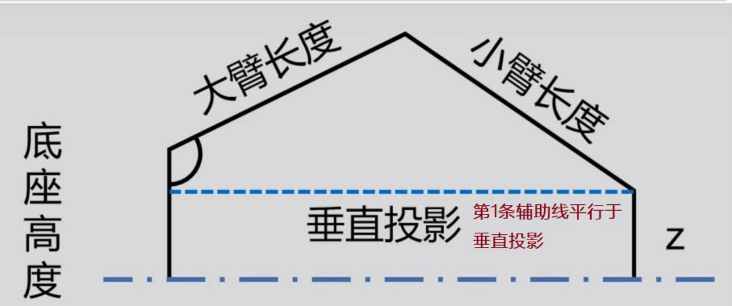
完整垂直投影 = $\sqrt{x^2+y^2}$

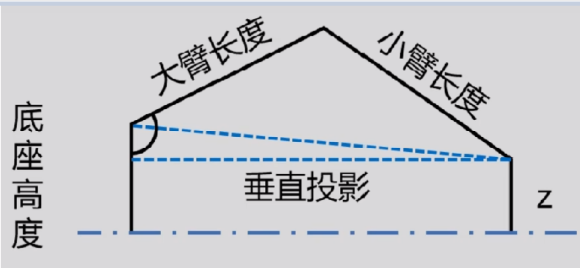
垂直投影 = $\sqrt{x^2+y^2}$ - 臂向补偿

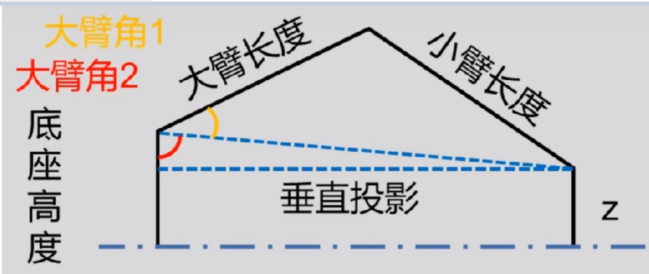
在程序中写作：

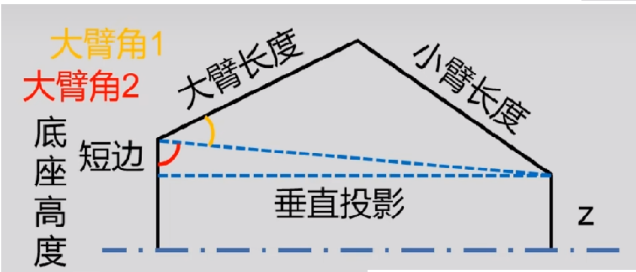
垂直投影 = (x**2 + y**2) **0.5 - 臂向补偿











余弦定理 $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

斜边 = (短边**2 + 垂直投影**2) **0.5

大臂角2 = atan(垂直投影 / 短边)

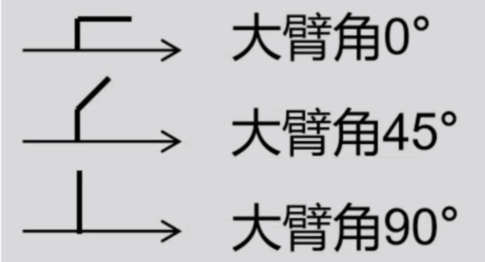
短边 = 底座高度 - z

大臂角1 = 余弦定理

acos((大臂长度**2+斜边**2-小臂长度**2)/(2*大臂长度*斜边))

大臂角 = 大臂角1 + 大臂角2

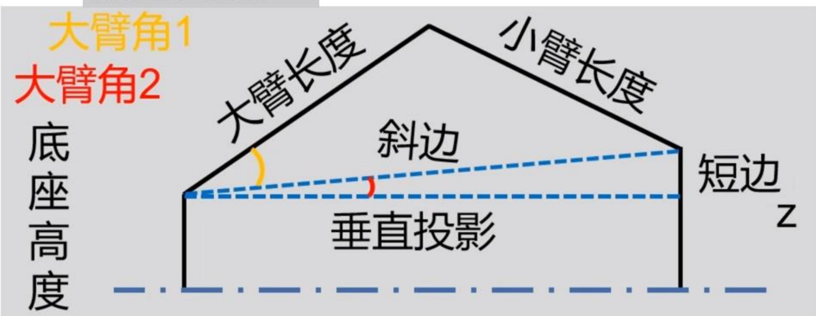
注意：我设定的 90 度其实在舵机信号上面输出的是 0 度



所以大臂角还要多减90度

大臂角 = 大臂角1 + 大臂角2 - 90°

情况2: **底座高度<z**



短边 = z - 底座高度 调换减数与被减数，保证短边为正数

斜边 = (短边**2 + 垂直投影**2) **0.5

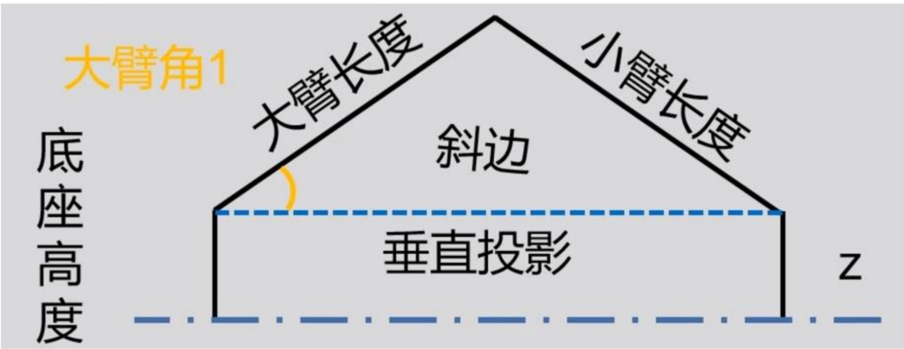
大臂角2 = atan(短边 / 垂直投影) 反正切值变量调换

大臂角1 =

acos((大臂长度**2+斜边**2-小臂长度**2)/(2*大臂长度*斜边)))

大臂角 = 大臂角1 + 大臂角2 这时候大臂角1和大臂角2是从90度开始计算的

情况3: **底座高度=z**



短边 = 0

斜边 = (短边**2 + 垂直投影**2) **0.5

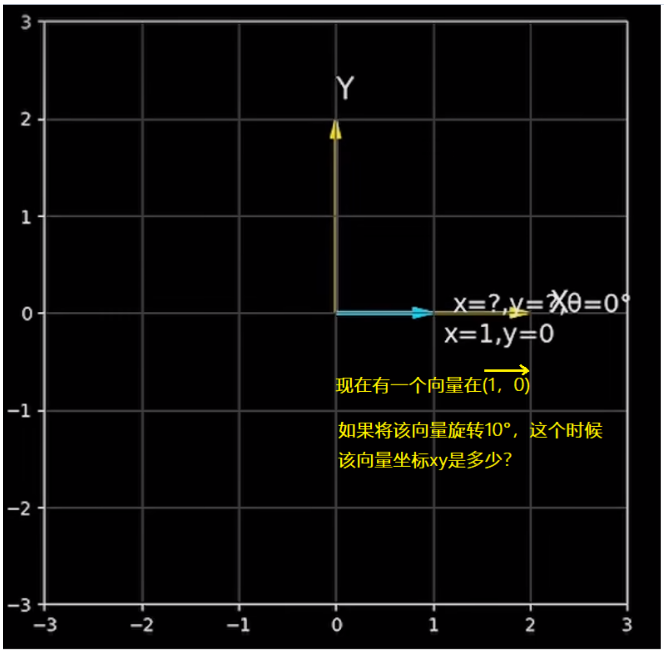
大臂角2 = 0

大臂角1 =

acos((大臂长度**2+斜边**2-小臂长度**2)/(2*大臂长度*斜边)))

大臂角 = 大臂角1 + 大臂角2

旋转矩阵



$$R(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$$

我们需要一个旋转矩阵的东西来计算旋转角度，对应的向量坐标

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=R(\theta)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

使用旋转矩阵，可以把向量x，y旋转到你想要的位置

$$R(68)=\begin{matrix}[0.375,\ -0.927]\\ [0.927,\ 0.375]\end{matrix}$$

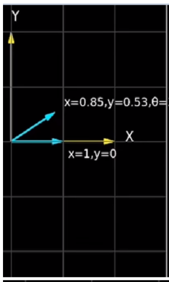
向量角度旋转到68°,我们的xy是多少?

这就是x

$$R(68)=\begin{matrix}[0.375,\ -0.927]\\ [0.927,\ 0.375]\end{matrix}$$

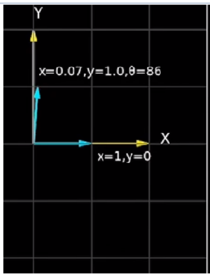
这就是y

下面进行实验



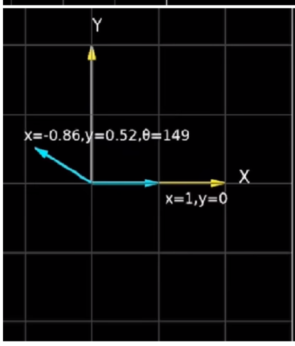
$$R(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R(33)=\begin{matrix}[0.839,\ -0.545]\\ [0.545,\ 0.839]\end{matrix}$$



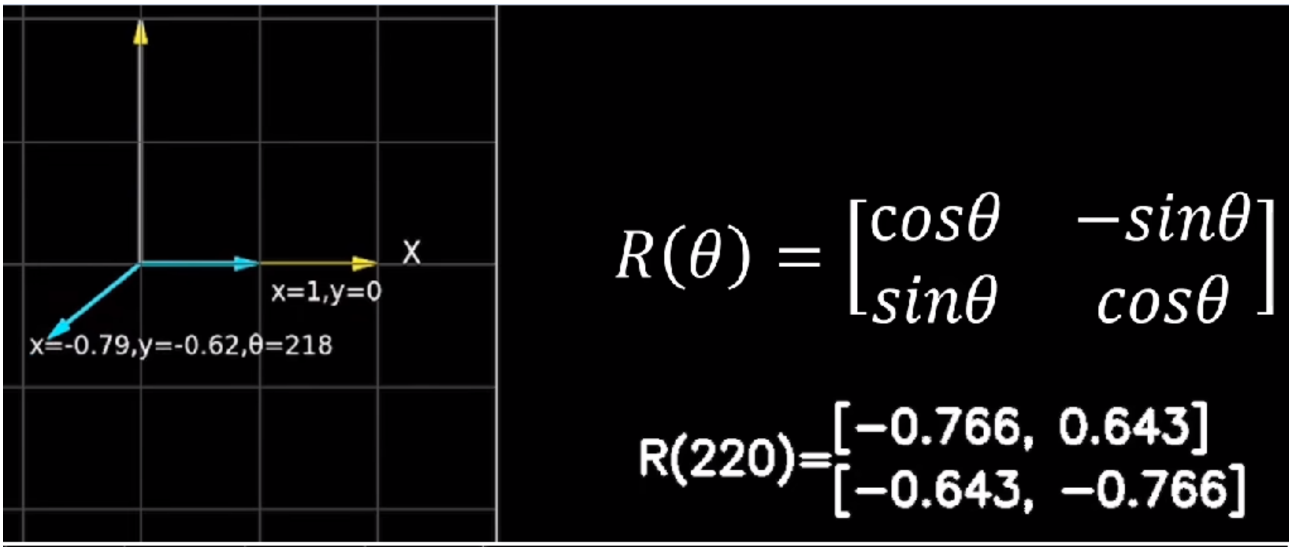
$$R(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$$

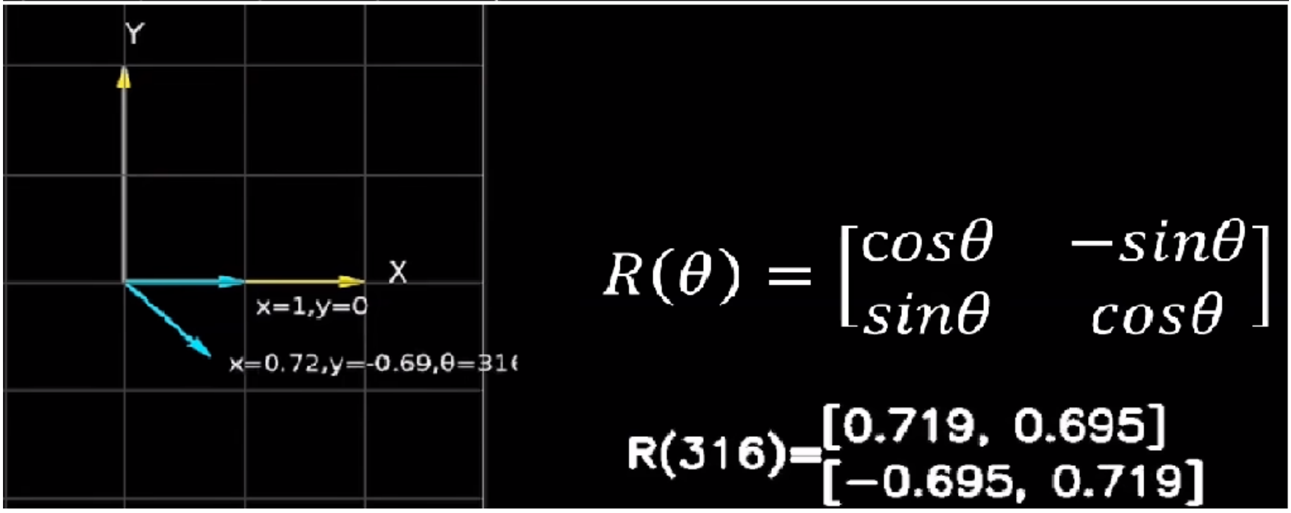
$$R(86)=\begin{matrix}[0.07,\ -0.998]\\ [0.998,\ 0.07]\end{matrix}$$



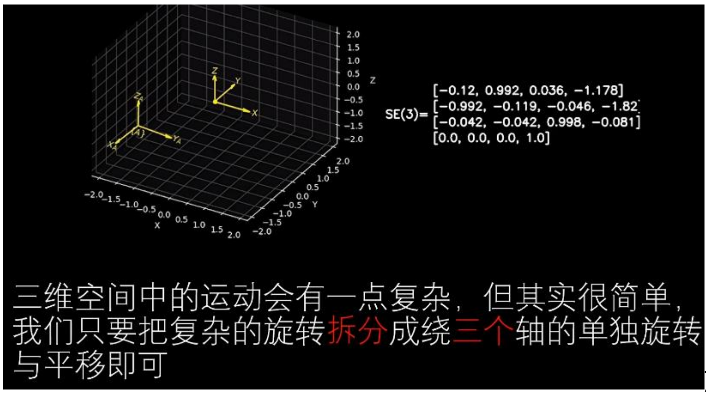
$$R(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R(150)=\begin{matrix}[-0.866,\ -0.5]\\ [0.5,\ -0.866]\end{matrix}$$





三维下的旋转矩阵



意思就是每个轴单独旋转和得到单独向量

绕x轴旋转的矩阵：$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\theta \end{bmatrix}$

绕y轴旋转的矩阵：$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix}$

绕z轴旋转的矩阵：$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} cos\gamma & -sin\gamma & 0 \\ sin\gamma & cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

这是旋转公式

例如: 想要一个向量 $\vec{v}$ 绕着x轴旋转30°
再绕z轴旋转45°，最后绕y轴旋转60°
这样就得到旋转后的新向量 $\dot{\vec{v}}$

$$R = R_y(60°) \cdot R_z(45°) \cdot R_x(30°)$$
$$\dot{\vec{v}} = R \cdot \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} \cos45 & -\sin45 & 0 \\ \sin45 & \cos45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos30 & -\sin30 \\ 0 & \sin30 & \cos30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos60 & 0 & \sin60 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin60 & 0 & \cos60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.866 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.866 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

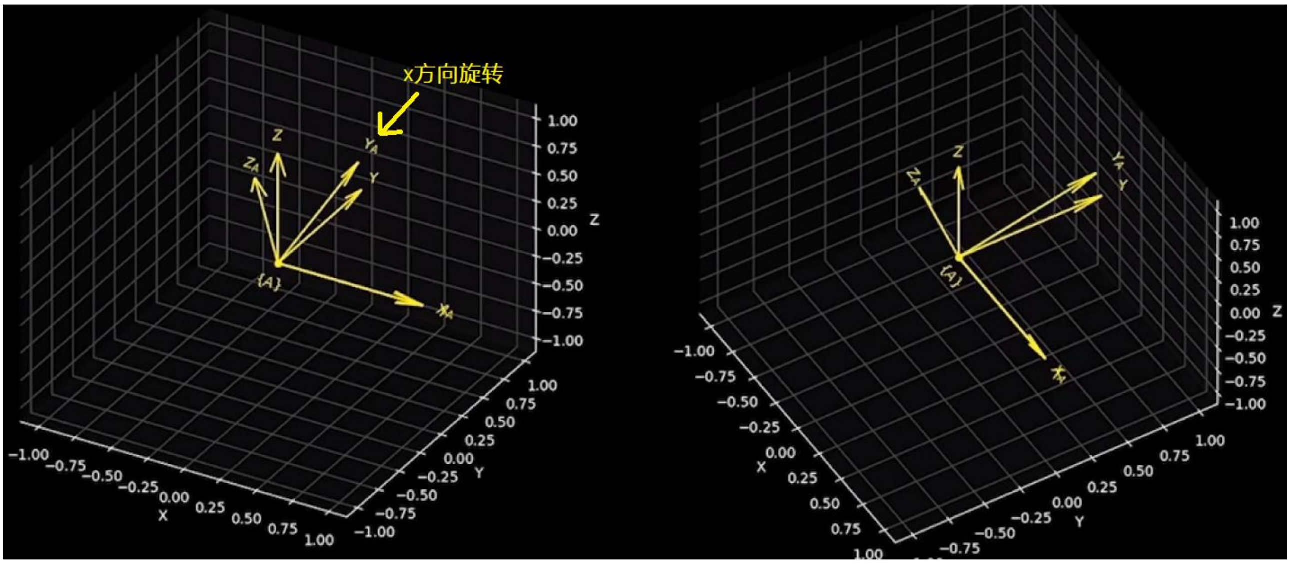
$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.866 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.866 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$$

$$R = R_y(60°) \cdot R_z(45°) \cdot R_x(30°)$$

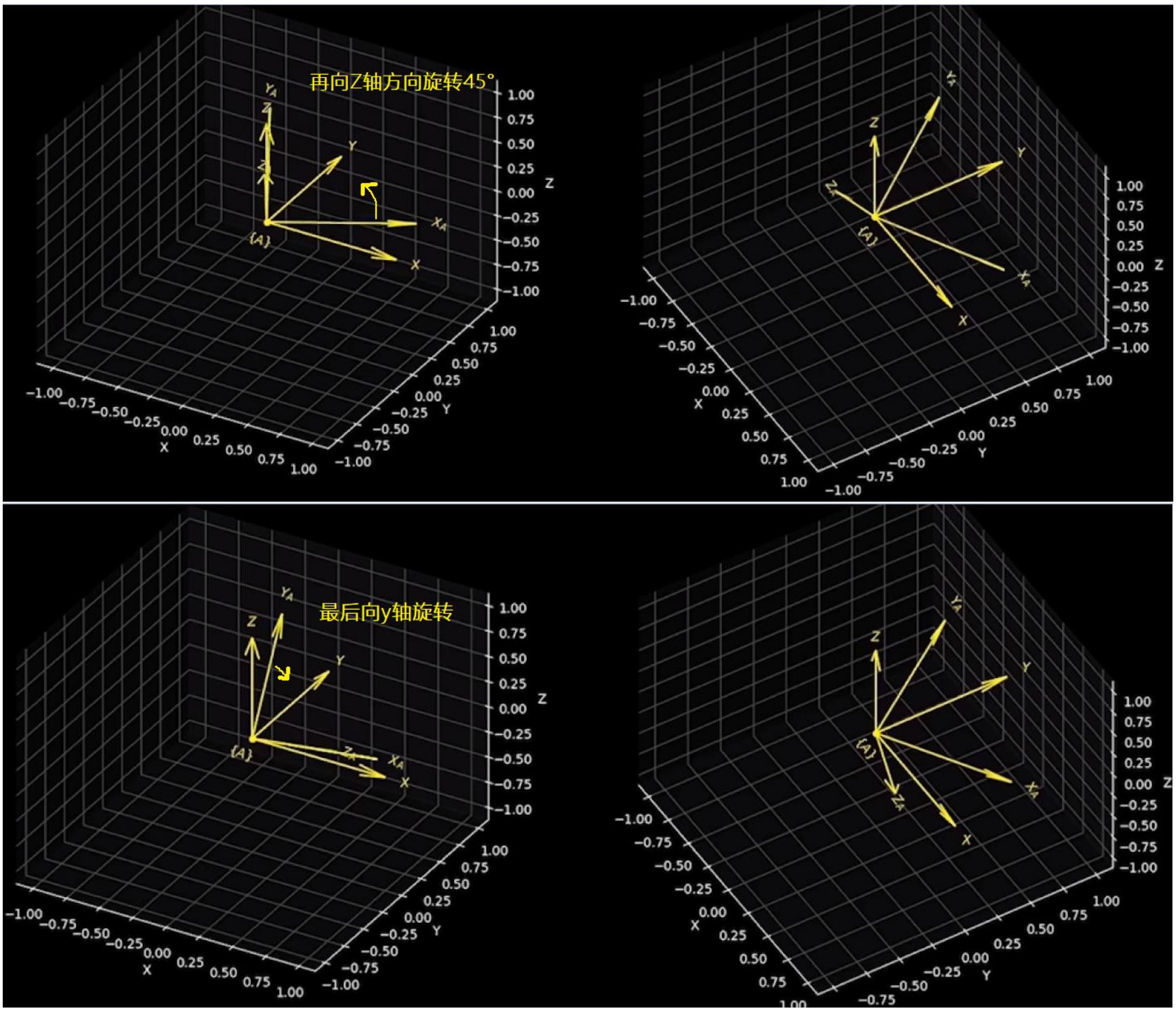
这种方式写法选择方式如下

$$R_x(30°) \rightarrow R_z(45°) \rightarrow R_y(60°)$$

先选择Rx(向x轴方向旋转)，再选择Rz(向z轴方向旋转)，最后选择Ry(向y轴方向旋转)

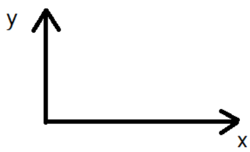


以上只是向量的旋转，但是并没有说清楚向量旋转之后，在空间中坐标是多少?



旋转矩阵在空间坐标变换中的应用

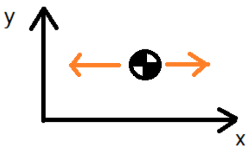
如何描述一个物体(刚体)在平面中的运动和位置



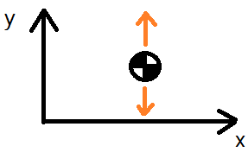
1.假设这个物体就是这个圆球

2.我们在这个平面上面定义
一个二维的坐标

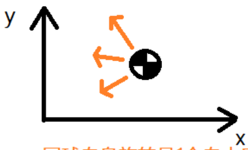
3.在二维平面上我们有3个自由度来描述圆球的运动，为什么是3个自由度呢?



圆球水平移动是1个自由度

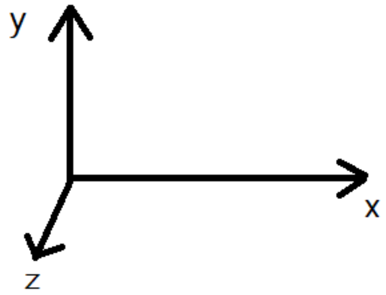


圆球垂直移动是1个自由度

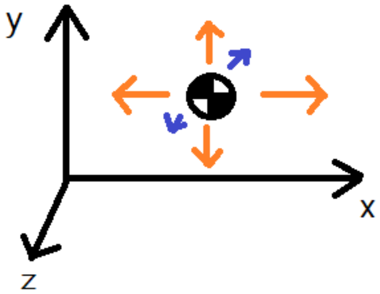


圆球自身旋转是1个自由度

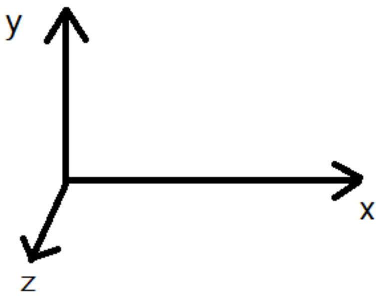
4.所以一个物体在平面上有3
个自由度

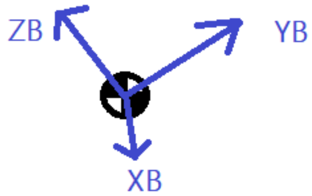


5.如果这个球在一个三维空间中

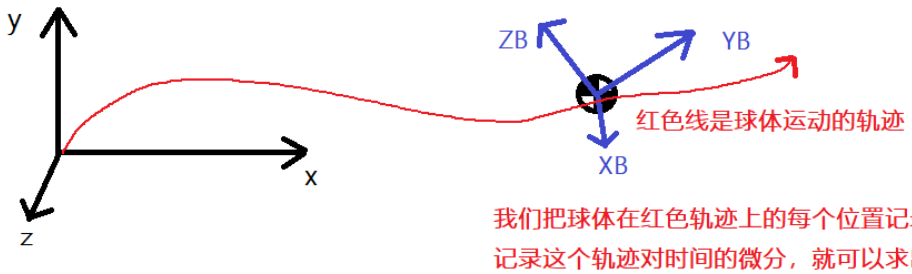


6.这个球可以水平，垂直，前后移动。
所以这个球移动方向有3个自由度。
另外这个球也可以在原点，对着x轴，y轴，z轴做转动。所以球的转动，从我们之前二维平面将的1个转动自由度，变成了3个转动自由度。
所以在三维空间中，球需要6个参数来描述。

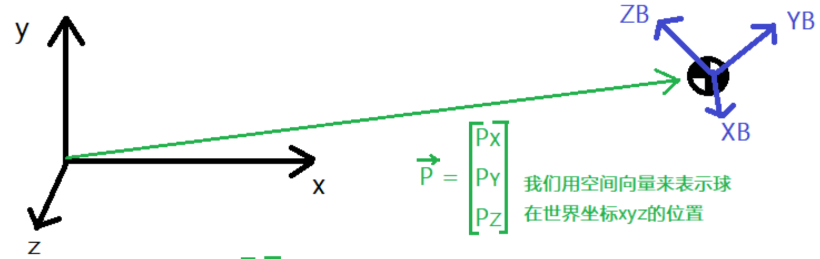


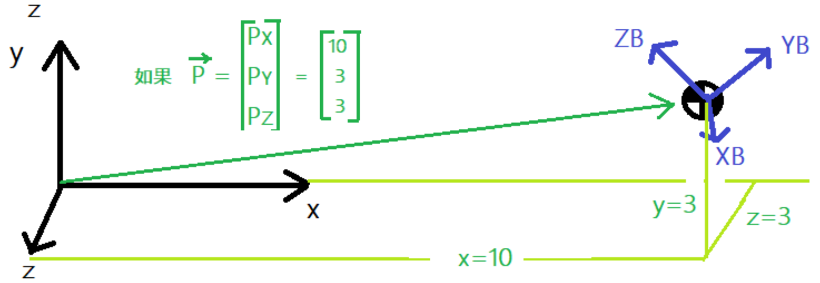


XB,YB,ZB是建立在可以移动物体(球体)上的，所以称为子坐标

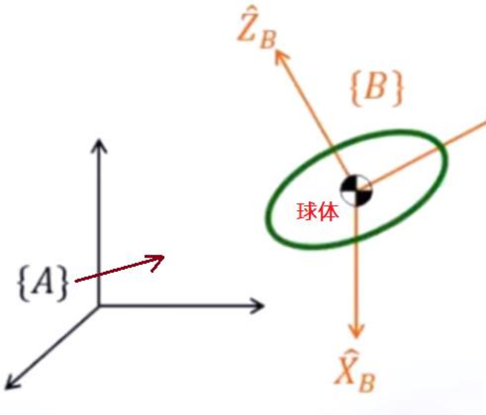


我们把球体在红色轨迹上的每个位置记录下来
记录这个轨迹对时间的微分，就可以求出球体的速度状态。
将速度状态再次微分，就可以得到球体加速度。
所以ZB,XB,YB是球体的旋转向量(也就是旋转后的坐标)





下面用例子来说明



1.如果从A看向球体

$$ {}^A_BR = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix} $$

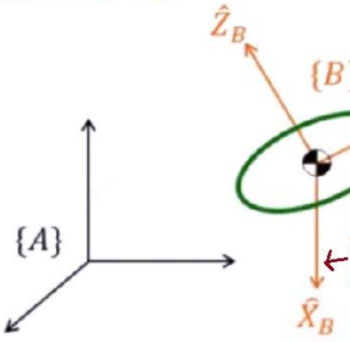
这就表示B相对于A的状态，就是旋转矩阵的意思

2.左边的小A，意思就是球体B子坐标相对于A的状态。里面的$\hat{X}_B$,$\hat{Y}_B$,$\hat{Z}_B$表示这个球体所指向的三个方向。

投影

$$ = \begin{bmatrix} \hat{X}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Y}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

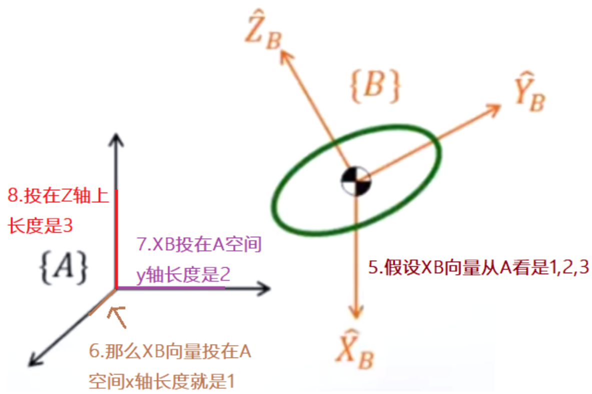
4.那么A看过来3个向量的投影就这样



3.我们知道每一个向量都是从A看过来

$$ = \begin{bmatrix} \hat{X}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Y}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

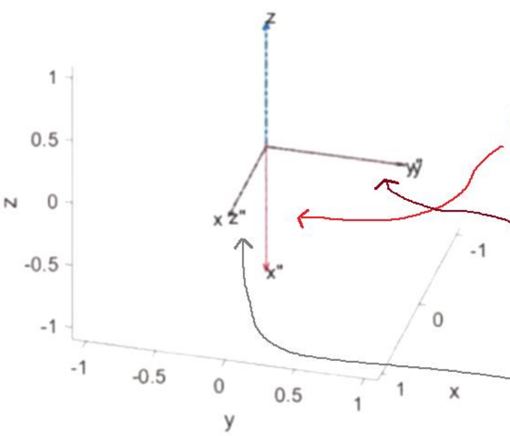
9.所以这个方程就是XB向量长度投影在A空间的xyz分别是多少



${}^A_BR = ?$ B相对于A的旋转矩阵到底是多少

蓝色线是A，空间坐标

红色线是B，物体旋转坐标



$$ \{B\}\text{的}x''\text{軸為}\{A\}\text{的}z\text{軸反向} \Rightarrow {}^A\hat{X}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} $$

B的x轴投影到A轴，发现B的x轴相对于A的Z轴是反向，所以A的Z轴写-1

$$ \{B\}\text{的}y''\text{軸與}\{A\}\text{的}y\text{軸重疊} \Rightarrow {}^A\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

B的y轴与A的y轴重合，所以A的y轴写1

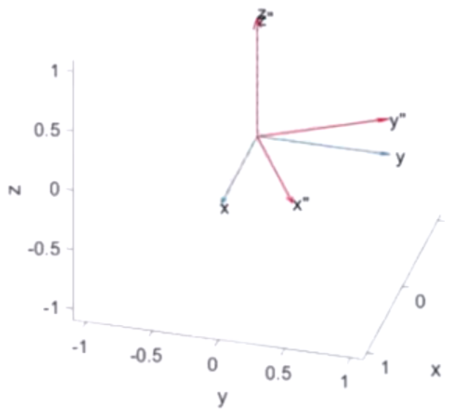
$$ \{B\}\text{的}z''\text{軸與}\{A\}\text{的}x\text{軸重疊} \Rightarrow {}^A\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

B的Z轴和A的x轴是从何的，所以反应到A这儿，A的x轴写1

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

所以B(圆球)相对于A的姿态就是这个矩阵

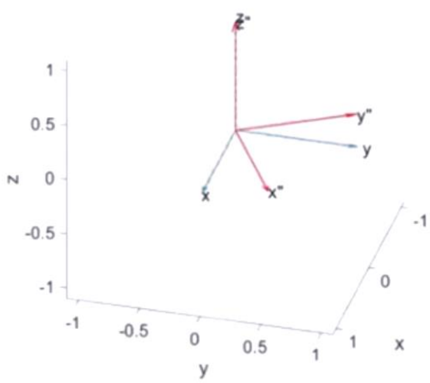
- Ex: $\{B\}$相對於$\{A\}$之姿態 ${}^{A}_{B}R = ?$



上視圖

$$ {}^{A}\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{bmatrix} $$



$$ {}^{A}\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$\{B\}$相對於$\{A\}$之姿態：

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

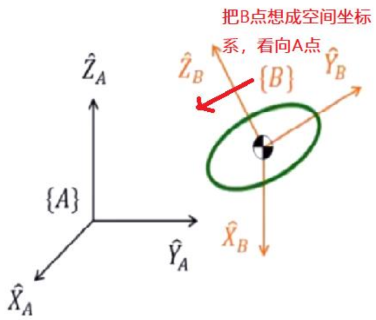
最后得到B相对于A的旋转矩阵

A和B互换

之前是B投影到A，现在我要做A投影到B

❑ 特性

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Y}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix} $$



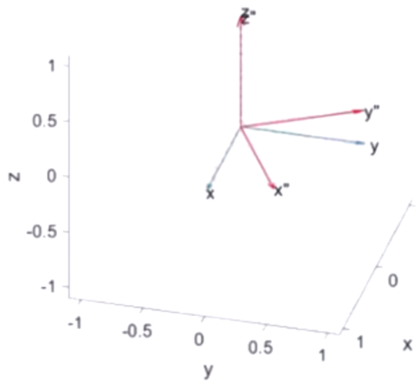
前後向量互換

$$ = \begin{bmatrix} \hat{X}_A\cdot\hat{X}_B & \hat{X}_A\cdot\hat{Y}_B & \hat{X}_A\cdot\hat{Z}_B \\ \hat{Y}_A\cdot\hat{X}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{Y}_B & \hat{Y}_A\cdot\hat{Z}_B \\ \hat{Z}_A\cdot\hat{X}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{Y}_B & \hat{Z}_A\cdot\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & {}^{B}\hat{X}_A{}^{T} & - \\ - & {}^{B}\hat{Y}_A{}^{T} & - \\ - & {}^{B}\hat{Z}_A{}^{T} & - \end{bmatrix} $$

其实本身就是行矩阵，只是加了转置，所以写成列矩阵

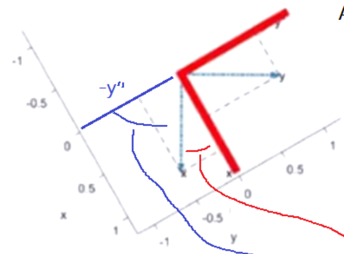
$$ = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^{B}\hat{X}_A & {}^{B}\hat{Y}_A & {}^{B}\hat{Z}_A \\ | & | & | \end{bmatrix}^{T} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

❑ Ex: $\{A\}$相對於$\{B\}$之姿態 ${}^{B}_{A}R = ?$



上視圖

以{B}為參考基準



蓝色线是A

红色线是B

A蓝色线投影到B

$$ {}^{B}\hat{X}_A = \begin{bmatrix} \hat{X}_A\cdot\hat{X}_B \\ \hat{Y}_A\cdot\hat{X}_B \\ \hat{Z}_A\cdot\hat{X}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} $$

在x方向蓝线是正的$\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为相对于红线x确实是正的

在B点的y方向线看，蓝色线是负的，也就是-1/2

$$ {}^{B}\hat{Y}_A = \begin{bmatrix} \hat{X}_A\cdot\hat{Y}_B \\ \hat{Y}_A\cdot\hat{Y}_B \\ \hat{Z}_A\cdot\hat{Y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{B}\hat{Z}_A = \begin{bmatrix} \hat{X}_A\cdot\hat{Z}_B \\ \hat{Y}_A\cdot\hat{Z}_B \\ \hat{Z}_A\cdot\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. $$

$\{A\}$相對於$\{B\}$之姿態：

$$ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

A相对与B姿态的旋转矩阵

$\{B\}$相對於$\{A\}$之姿態：

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

AB互换之后

$\{A\}$相對於$\{B\}$之姿態：

$$ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}R^{T} $$

旋转矩阵求逆，和我们普通矩阵求逆还不一样

$$ {}^A_BR^T\, {}^A_BR = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix} $$

X和X方向一致，相差取1

X和Y方向垂直，夹角90度，内积为0，取0

x和z互相垂直，也取0

$$ = \begin{bmatrix} - & {}^A\hat{X}_B{}^T & - \\ - & {}^A\hat{Y}_B{}^T & - \\ - & {}^A\hat{Z}_B{}^T & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

我们把上面的向量相互乘完之后，发现是个单位矩阵

$= I_3$ (I3就是3x3单位矩阵)

$$ = {}^A_BR^{-1}\, {}^A_BR $$

我们知道，一个矩阵和它反矩阵(逆矩阵)相乘，得到单位矩阵I

$${}^A_BR^T\, {}^A_BR$$

但是我们上面是把一个矩阵跟自己的转置矩阵相乘，得到的单位矩阵

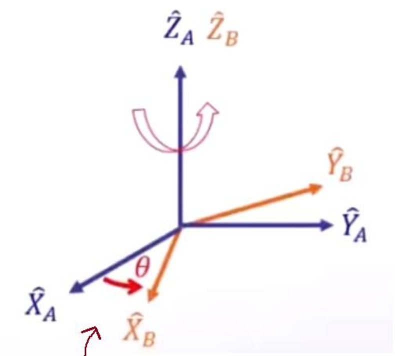
所以旋转矩阵的逆矩阵，直接算本矩阵的转置就可以了。不想以前，算个矩阵的逆相当麻烦

$$QQ^T = Q^TQ = I$$

旋转矩阵和自己转置相乘得到单位矩阵I

$$Q^{-1} = Q^T$$

旋转矩阵的逆，就是本旋转矩阵的转置



1.我将黄色线绕Z轴做旋转，这个转动的角度公式如下:

$$ R_{\hat{Z}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

这个公式怎么来的?

$$ R_{\hat{Z}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \text{Note: } {}^A_BR = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix} $$

XB在A空间xyz方向的投影

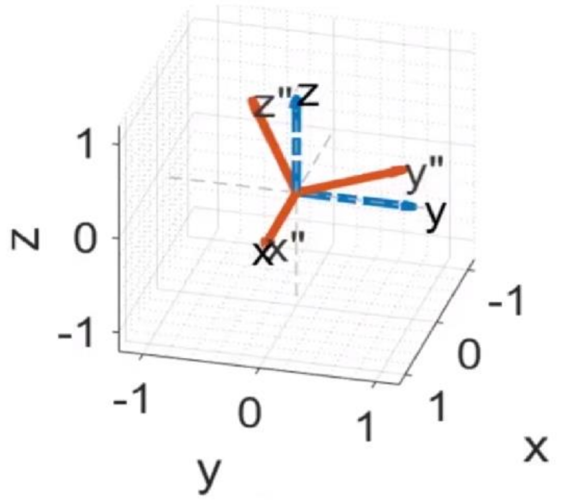
YB在A空间xyz上的投影

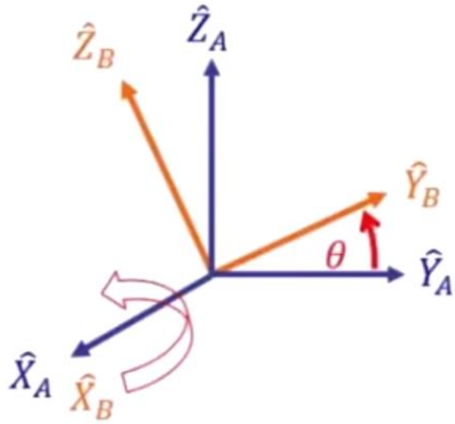
$$ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

因为sin，cos字符太长

所以以后面用这种简写方式

围绕X轴旋转



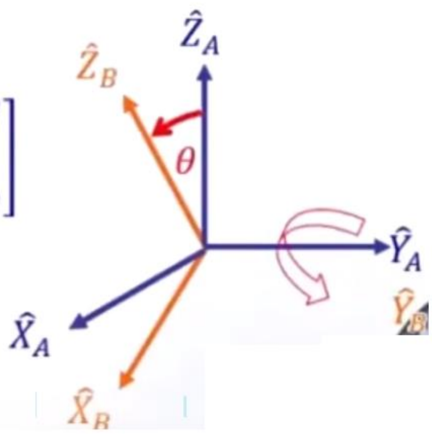


$$R_{\hat{X}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

↑
这就是B轴绕着A空间的X轴旋转

围绕Y轴旋转

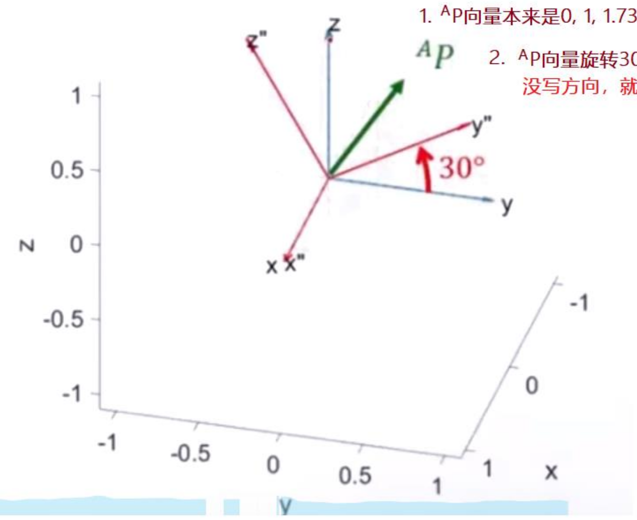
$$R_{\hat{Y}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$



下面将使用以上旋转矩阵公式，应用到实际例子中

旋转矩阵应用

- Ex: ${}^{A}P = [0 \quad 1 \quad 1.732]^T$ 對 $\hat{X}_A$ 軸旋轉30°，${}^{A}P' =?$



1. ^{A}P向量本来是0, 1, 1.732
2. ^{A}P向量旋转30度之后，向量值是多少？
没写方向，就默认逆时针旋转

$$R_{\hat{X}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30° & -\sin 30° \\ 0 & \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$$

RXA方向旋转的公式前面就有

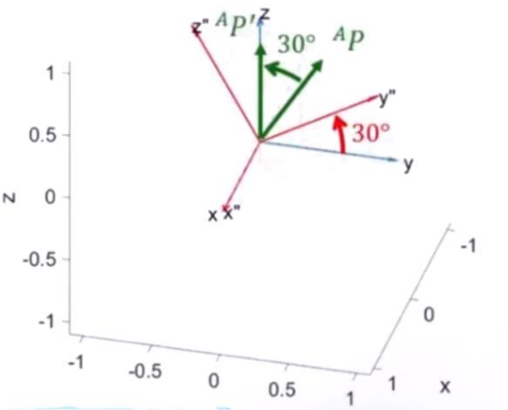
得到矩阵之后，向量旋转之后的向量值怎么算呢？

$${}^{A}P' = R_{\hat{X}_A}(\theta)\,{}^{A}P$$

用算出的旋转矩阵取乘初始化向量

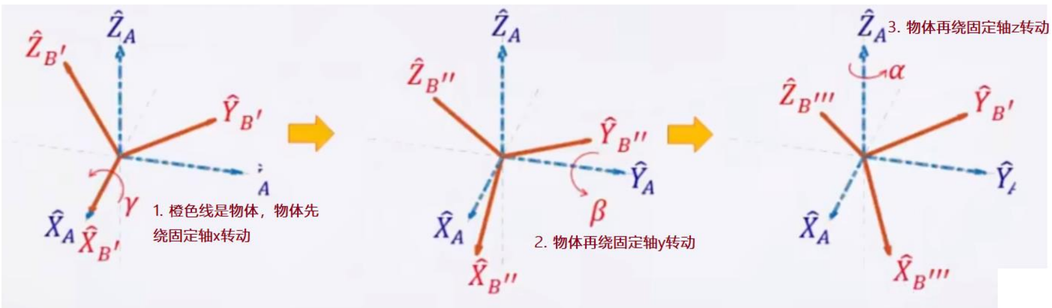
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1.732 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

这个 [0 0 2] 就是AP新位置的向量



这就是旋转之后的效果。这只是 AP 点的选择效果

物体绕X，Y，Z固定轴旋转



$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

为什么Rx(γ)绕x轴旋转的顺序在后面呢？不是先绕x轴旋转吗？

3个角度，γ角度对应x轴，β角度对应y轴，α角度对应z轴

物体B相对于固定轴A转动

我们物体针对XYZ轴做旋转，从标记也能看出来，先转x再转y再转z

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

$$v' = {}^{A}_{B}Rv = R_3R_2R_1v$$

我们可以把橙色线的xyz想成三个向量

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

$$v' = {}^{A}_{B}Rv = R_3R_2R_1v$$

1.v就是橙色xyz向量的意思
2.因为先转的轴必须先乘到
3.所以v先乘R1也就是(Rx(γ))，得到第1个旋转的位置
4.第1个旋转之后，R1v就得到一个新的方向，这个方向再去乘R2，也就是绕y轴旋转。
5.最后再去乘R3，绕Z轴旋转

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

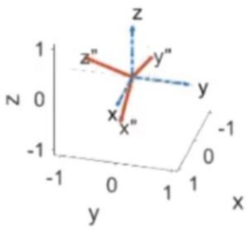
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_Z(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}}_{R_Y(\beta)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}}_{R_X(\gamma)}$$

这是三个轴的选择矩阵

$$= \begin{bmatrix} \text{coaa}*\cos\beta & \cos a*\sin\beta*\sin\gamma - \sin a*\cos\gamma & \cos a*\sin\beta*\cos\gamma + \sin a*\sin\gamma \\ \sin a*\cos\beta & \sin a*\sin\beta*\sin\gamma + \cos a*\cos\gamma & \sin a*\sin\beta*\cos\gamma - \cos a*\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta*\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}$$

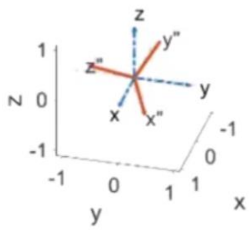
矩阵连乘之后得到

案例应用



先對X轉60度，再對Y轉30度

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(0)R_Y(30)R_X(60) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix}$$



先對Y轉30度，再對X轉60度

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(0)R_X(60)R_Y(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.433 & 0.5 & -0.75 \\ -0.25 & 0.866 & 0.433 \end{bmatrix}$$

从代数也能看出来，先后转的顺序调换之后，最后得到的矩阵是不一样的。所以旋转矩阵的旋转顺序是不能互换的。

旋转矩阵反算角度

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} coaa*\cos\beta & \cos a*\sin\beta*\sin\gamma - \sin a*\cos\gamma & \cos a*\sin\beta*\cos\gamma + \sin a*\sin\gamma \\ \sin a*\cos\beta & \sin a*\sin\beta*\sin\gamma + \cos a*\cos\gamma & \sin a*\sin\beta*\cos\gamma - \cos a*\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta*\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

我用r11，r12....r33代替左边的矩阵元素，
因为左边矩阵元素字符太长，不好后面操作

If $\beta \neq 90^\circ$

$$\beta = Atan2(-r_{31},\sqrt{{r_{11}}^2+{r_{21}}^2})$$
$$\alpha = Atan2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta)$$
$$\gamma = Atan2(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta)$$

这就是传入选择矩阵，
反算对应的旋转角度

$-90^\circ \le \beta \le 90^\circ$

Single solution

If $\beta = 90^\circ$

$$\alpha = 0^\circ$$
$$\gamma = Atan2(r_{12}, r_{22})$$

If $\beta = -90^\circ$

$$\alpha = 0^\circ$$
$$\gamma = -Atan2(r_{12}, r_{22})$$

比如我现在得到一个选择矩阵的参数，我要求把对应的角度算出来

- Ex: 以X-Y-Z Fixed Angles方法，反算$R=\begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix}$的

代替 $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

If $\beta \neq 90^\circ$

$$\beta = Atan2(-r_{31},\sqrt{{r_{11}}^2+{r_{21}}^2})$$
$$\alpha = Atan2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta)$$
$$\gamma = Atan2(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta)$$

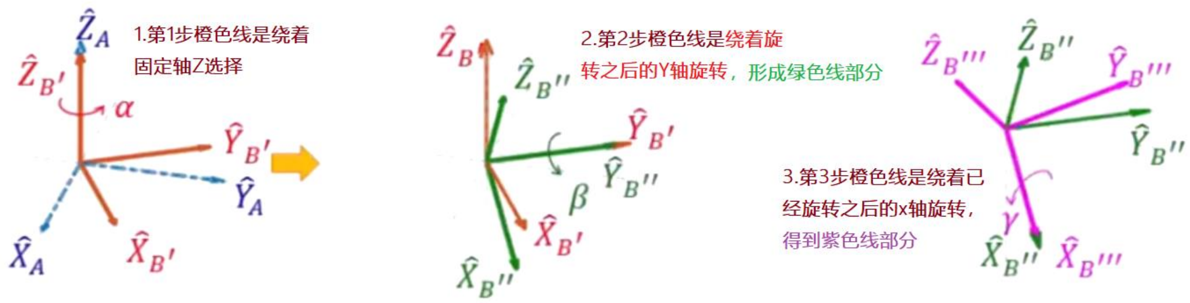
根据上面公式
得到计算结果如下

$$\beta = Atan2\left(-r_{31},\sqrt{{r_{11}}^2+{r_{21}}^2}\right) = Atan2\left(-(-0.5),\sqrt{0.866^2+0^2}\right) = 30^\circ$$

$$\alpha = Atan2\left(\frac{r_{21}}{c\beta},\frac{r_{11}}{c\beta}\right) = Atan2\left(\frac{0}{\cos 30},\frac{0.866}{\cos 30}\right) = 0^\circ$$

$$\gamma = Atan2\left(\frac{r_{32}}{c\beta},\frac{r_{33}}{c\beta}\right) = Atan2\left(\frac{0.75}{\cos 30},\frac{0.433}{\cos 30}\right) = 60^\circ$$

浮动坐标轴的旋转(ZYX)



这就是浮动轴旋转，不是在固定的xyz轴上面旋转

$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = {}^{A}_{B'}R\,{}^{B'}_{B''}R\,{}^{B''}_{B}R = R_{Z'}(\alpha)R_{Y'}(\beta)R_{X'}(\gamma) $$

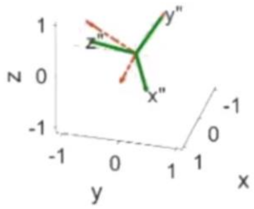
增加 ' 表示zyx转轴会随着我们的状态而改变

我们发现浮动轴转动，先转动的部分要放在前面

浮动轴转动的顺序就是Z->Y->X，这点和固定轴X->Y->Z不一样

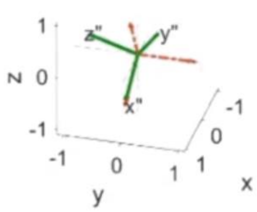
$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = {}^{A}_{B'}R\,{}^{B'}_{B''}R\,{}^{B''}_{B}R = R_{Z'}(\alpha)R_{Y'}(\beta)R_{X'}(\gamma) $$

$$ = \underset{R_{Z'}(\alpha)}{\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{R_{Y'}(\beta)}{\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}} \underset{R_{X'}(\gamma)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}} $$



先對X轉60度，再對Y轉30度

$$ {}^{A}_{B}R_{X'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha) = R_{X'}(60)R_{Y'}(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.433 & 0.5 & -0.75 \\ -0.25 & 0.866 & 0.433 \end{bmatrix} $$

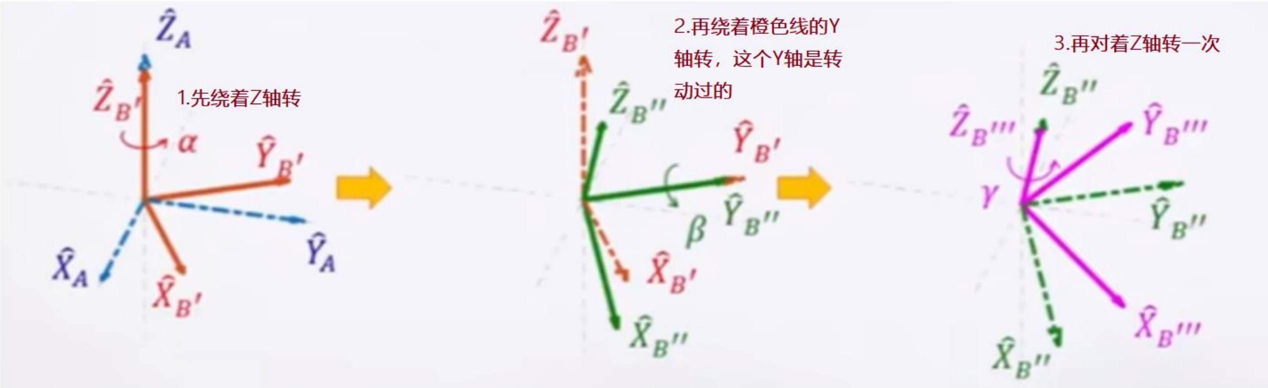


先對Y轉30度，再對X轉60度

$$ {}^{A}_{B}R_{X'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha) = R_{Y'}(30)R_{X'}(60) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix} $$

浮动坐标轴的旋转(ZYZ)

Z->Y->Z旋转方式如下:



$${}^A_BR_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = \underline{R_{Z'}(\alpha)}R_{Y'}(\beta)R_{Z'}(\gamma)$$

先转的还是放前面

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

ZYZ旋转矩阵反算角度

$${}^A_BR_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

If $\beta \neq 0°$

$$\beta = Atan2(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33})$$
$$\alpha = Atan2(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta)$$
$$\gamma = Atan2(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta)$$

If $\beta = 0°$

$$\alpha = 0°$$
$$\gamma = Atan2(-r_{12}, r_{11})$$

If $\beta = 180°$

$$\alpha = 0°$$
$$\gamma = Atan2(r_{12}, -r_{11})$$

例如:

$${}^A_BR_{X'Y'Z'}(60,30,0) = R_{X'}(60)R_{Y'}(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.433 & 0.5 & -0.75 \\ -0.25 & 0.866 & 0.433 \end{bmatrix}$$

$$\beta = Atan2\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right) = Atan2\left(\sqrt{(-0.25)^2 + 0.866^2}, 0.433\right) = 64.3°$$

$$\alpha = Atan2\left(\frac{r_{23}}{s\beta}, \frac{r_{13}}{s\beta}\right) = Atan2\left(\frac{-0.75}{s\beta}, \frac{0.5}{s\beta}\right) = -56.3°$$

$$\gamma = Atan2(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta) = Atan2(0.866/s\beta, 0.25/s\beta) = 73.9°$$

➡ $\boldsymbol{R_{Z'}(-56.3)R_{Y'}(64.3)R_{Z'}(73.9)}$ 我发现转出来的角度值和之前的角度值不一样

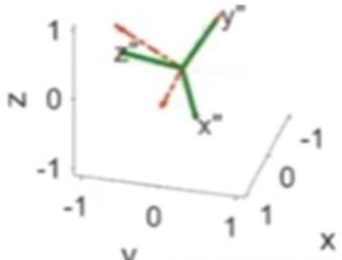
先對Z轉 -56.3°,對Y轉64.3°,最後對Z轉73.9°

$$\boxed{{}^A_BR_{X'Y'Z'}(60,30,0) = R_{X'}(60)R_{Y'}(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.433 & 0.5 & -0.75 \\ -0.25 & 0.866 & 0.433 \end{bmatrix}}$$

这是之前角度值

这个好奇怪哦，反算之后的结果居然和之前的角度不一样

正算 $R_{X'}(60)R_{Y'}(30)=\begin{bmatrix}0.866 & 0 & 0.5\\ 0.433 & 0.5 & -0.75\\ -0.25 & 0.866 & 0.433\end{bmatrix}$

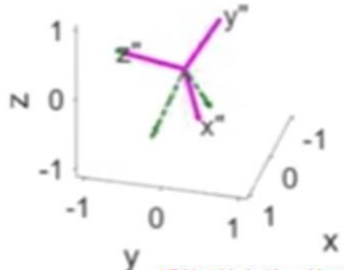


正算Z轴为0转2次

$R_{X'}(60)R_{Y'}(30)$

其实反算出来也是这个矩阵，只是旋转顺序不同

反算 $R_{Z'}(-56.3)R_{Y'}(64.3)R_{Z'}(73.9)$



反算Z轴有数，转3次

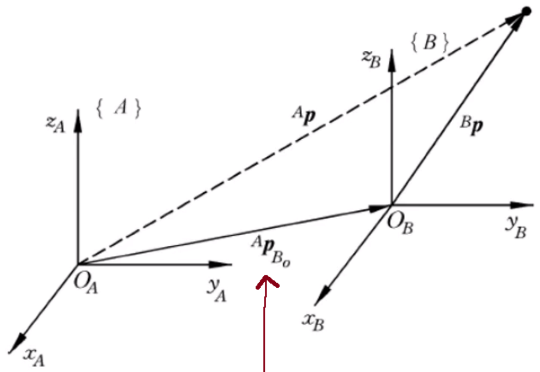
但是不管正算还是反算，最后的物体的姿态都是一样的，所以正算=反算

物体移动和转动结合在一起计算(变换矩阵)

学习这一章节，需要前面旋转矩阵的基础。

空间位姿

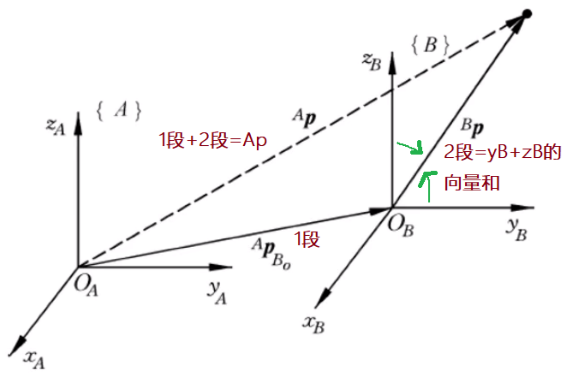
4.1 平移坐标变换 ${}^{A}\mathbf{p}={}^{B}\mathbf{p}+{}^{A}\mathbf{p}_{B}$



OB一开始本来和OA是重合的

OB后来平移了ApBo一段

如果我在OA坐标中，想表示OB的三个箭头向量，该如何表示

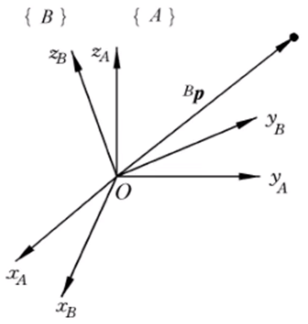


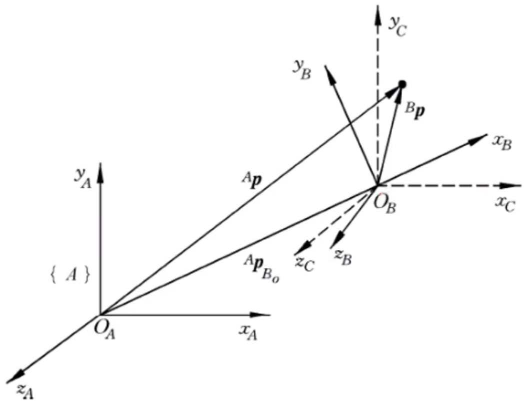
所以直接用三角形法则，ApBo + Bp = Ap

所以在OA坐标中，表示OB的向量可以用三角形法则

4.2 旋转坐标变换 $^{A}\mathbf{p}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{A}\mathbf{p}_{B}$

{B} {A} 带大括号的表示坐标系的意思
{A}表示坐标系A
{B}表示坐标系B





最先坐标系B和坐标系A是重合的
假设我有个P点，在坐标系B下有一个表示方法
那我们如何在坐标系A中表示这个点呢？
就是将原来这点 $^{A}\mathbf{p}_{B}$ 乘以旋转矩阵 $^{A}_{B}\mathbf{R}$ 得到坐标系A的表示 $^{A}\mathbf{p}$

如果我这个坐标系既平移又旋转了，那么该如何表示

例题：已知坐标系{B}的初始位姿与坐标系{A}重合
1.先让{B}相对于坐标系{A}的z轴转30°
2.再沿{A}的x轴移动12个单位，同时沿{A}的y轴移动6个单位，
求当前坐标系{B} Ap_B的位置和旋转矩阵

Ap_{B0}(表示移动后的坐标) = $\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

旋转矩阵：

$$^{A}_{B}R = R(z,30°) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 假设p点在坐标系{B}中的位置为[3, 7, 0]
那么B坐标系旋转30度，p点绝对也会跟着旋转30度，然后B坐标系移到12,6个单位，那么p点一会跟着移动12,6个单位

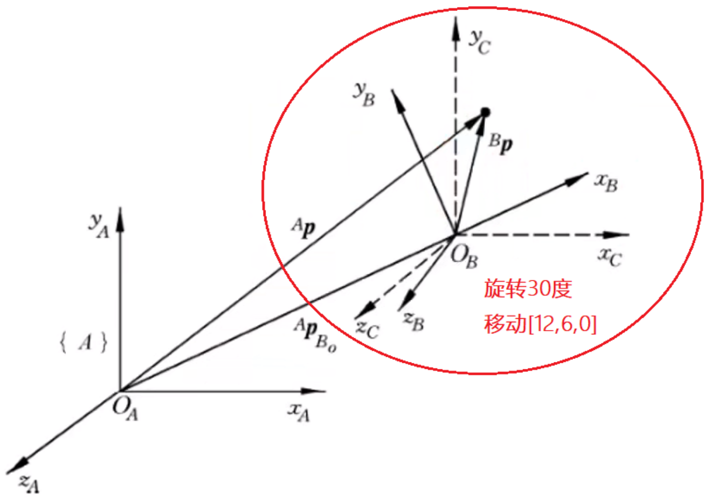
$$^{A}\mathbf{p}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{A}\mathbf{p}_{B}+{}^{A}\mathbf{p}_{B_0} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在{A}中坐标：p点在B坐标系位置投影到A坐

$$^{A}\mathbf{p}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{A}\mathbf{p}_{B}+{}^{A}\mathbf{p}_{B_0} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.902 \\ 7.562 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11.098 \\ 13.562 \\ 0 \end{bmatrix}$$



齐次变换矩阵

${}^{A}_{B}R$ 表示转动的旋转矩阵

${}^{A}P_{B}$ 表示物体移动的移动矩阵

$$\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R_{3x3} & {}^{A}P_{B\ org3x} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果想表达物体的移动和转动结合运算，就只有把移动和转动都放在一个矩阵里面

3x的意思就是只有3行的矩阵

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R_{3x3} & {}^{A}P_{B\ org3x} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right]_{4x4}$$

这是一个4x4的矩阵

怎么会是4x4呢？我看起向2x2

这是因为矩阵里面还有矩阵

${}^{A}_{B}R_{3x3}$ 这是3x3矩阵 = 9个元素

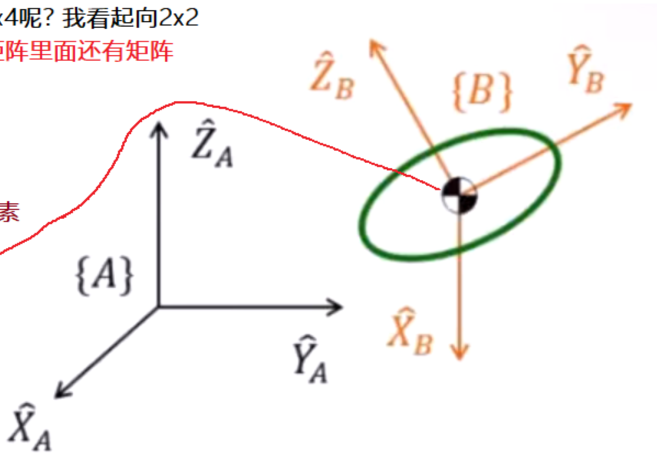
${}^{A}P_{B\ org3x}$ 这是3行矩阵=3个元素

再加上下面 0 0 0　 1 =4个元素　 一共就是16个元素

16个元素可以分解成4x4，所以是4x4矩阵

圆球的原点相对于观察点A 表示的向量

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R_{3x3} & {}^{A}P_{B\ org3x} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right]$$



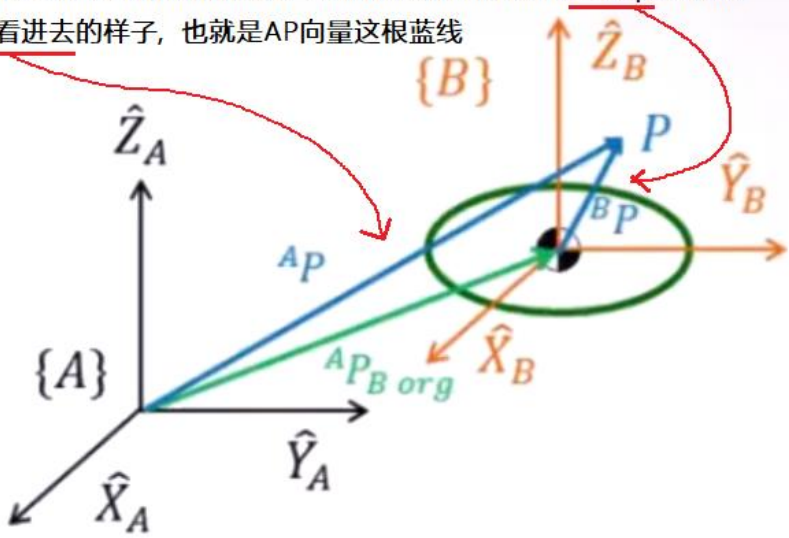
$$\left[\begin{array}{c:c} {}^{A}_{B}R_{3x3} & {}^{A}P_{B\ org3x} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right]_{4x4}$$

${}^{A}_{B}R_{3x3}$ 把旋转矩阵分解

$$\left[\begin{array}{ccc:c} | & | & | & \\ {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B & {}^{A}P_{B\ org} \\ | & | & | & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$= {}^{A}_{B}T$ 将以上矩阵写成B相对A的T，表示这个矩阵包含移动跟转动

如果B根A之间只有相对的移动，我想将P点在B圆球的向量Bp 转换成在A点看进去的样子，也就是AP向量这根蓝线



- 僅有 移動

$$\underset{3\times 1}{^AP} = \underset{3\times 1}{^BP} + \underset{3\times 1}{^AP_{B\,org}}$$

已知向量

因为变形矩阵是4x4，如果Bp向跟4x4矩阵相乘，那么Bp必须是4x1的矩阵，所以在下方补1

只计算移动，旋转不计算，所以旋转用单位矩阵表示

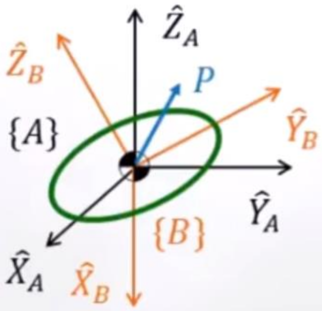
$$\begin{bmatrix} ^AP \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & I_{3\times 3} & & ^AP_{B\,org} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} ^BP \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^BP + {}^AP_{B\,org} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 僅有 轉動

$$\underset{3\times 1}{^AP} = \underset{3\times 3}{^A_BR}\,\underset{3\times 1}{^BP}$$

因为只有转动没有移动，所以补0

$$\begin{bmatrix} ^AP \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & ^A_BR & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} ^BP \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^A_BR\,^BP \\ 1 \end{bmatrix}$$



相当于把P的分量从橙色线Bp变成了Ap，也就是黑色线分量来表示

◆ 移動和轉動複合

$${}^AP_{3\times 1} = {}^A_BR\,{}^BP_{3\times 1} + {}^AP_{B\,org\;3\times 1}$$

1.P点线先做一个转动　　再移动

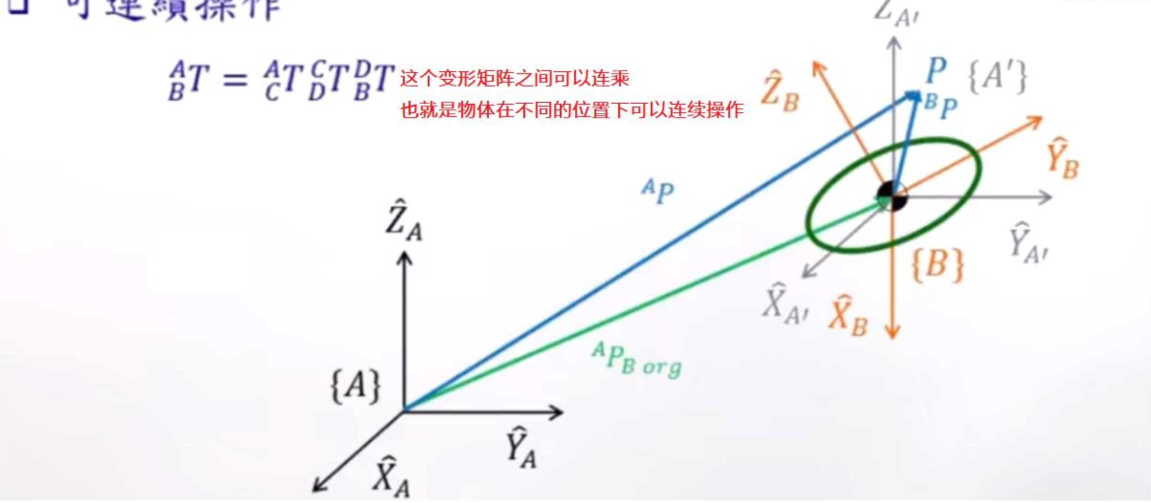
$$\begin{bmatrix}{}^AP\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^A_BR & {}^AP_{B\,org}\\ 0\quad 0\quad 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^BP\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^A_BR\,{}^BP + {}^AP_{B\,org}\\ 1\end{bmatrix}$$

P点在A位置的向量可以展开为P点在B位置做一个旋转之后，再移动

□ 可連續操作

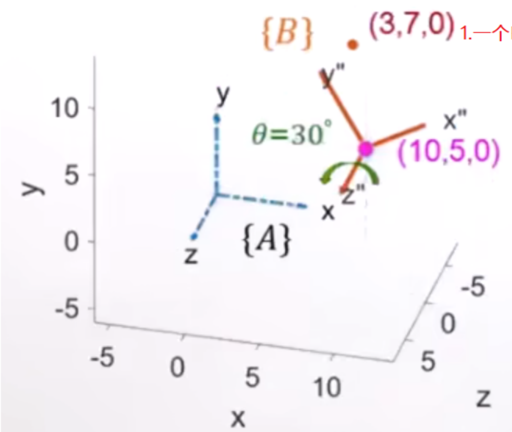
$${}^A_BT = {}^A_CT\,{}^C_DT\,{}^D_BT$$

这个变形矩阵之间可以连乘
也就是物体在不同的位置下可以连续操作



例题

$${}^BP = \begin{bmatrix}3\\7\\0\end{bmatrix}\quad {}^AP_{Borg} = \begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}\quad {}^A\hat{X}_B = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}\quad {}^A\hat{Y}_B = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{bmatrix}\quad {}^A\hat{Z}_B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow {}^AP = ?$$



1.一个P点，在B位置的表达是3,7,0 橙色线的三轴就表示B位置，橙色x=3，y=7，z=0

2.B位置的原点相对于A位置是10,5,0,也就是用蓝色线表示B点的分量，x=10，y=5，z=0

$$\boxed{{}^A\hat{X}_B = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}\quad {}^A\hat{Y}_B = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{bmatrix}\quad {}^A\hat{Z}_B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}$$

B位置相对于A位置状态，
把B位置3个主轴的方向，也就是3个橙色线，分别用A来表达

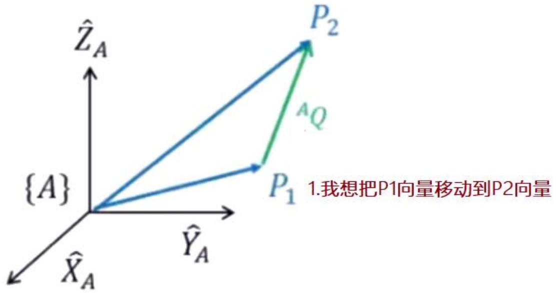
$$\begin{bmatrix}{}^AP\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^A_BR & {}^AP_{B\,org}\\ 0\quad 0\quad 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^BP\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 10\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9.098\\12.562\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}|\\ {}^AP\\ |\\ 1\end{bmatrix}$$

P点在A位置的向量

- 僅有 移動

$${}^AP_{2\,3\times 1} = {}^AP_{1\,3\times 1} + {}^AQ_{3\times 1}$$

位移距离



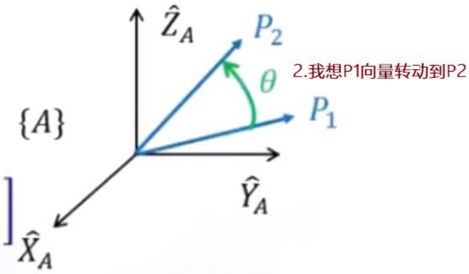
向量移动，没有转动，用单位矩阵

$$\begin{bmatrix} {}^AP_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{D(Q)}_{\text{位移}} \begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^AP_1 + {}^AQ \\ 1 \end{bmatrix}$$

这就是P2的向量

- 僅有 轉動

$${}^AP_{2\,3\times 1} = \underset{3\times 3}{R_{\hat K}(\theta)}\,{}^AP_{1\,3\times 1}$$



只有转动，移动补0

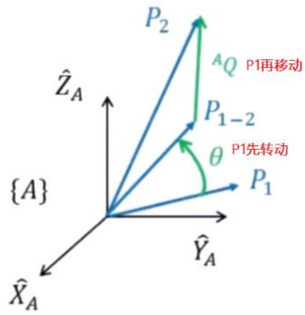
$$\begin{bmatrix} {}^AP_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_{\hat K}(\theta) & & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat K}(\theta)\,{}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 移動和轉動複合

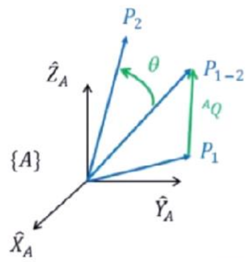
$${}^AP_{2\,3\times 1} = \underset{3\times 3}{R_{\hat K}(\theta)}\,{}^AP_{1\,3\times 1} + {}^AQ_{3\times 1}$$

先轉動再移動

$$\begin{bmatrix} {}^AP_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat K}(\theta) & & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat K}(\theta)\,{}^AP_1 + {}^AQ \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



先轉動再移動



先移動再轉動（${}^AQ$也會被轉動到）

$${}^AP_2 = R_{\hat K}(\theta)({}^AP_1 + {}^AQ) = R_{\hat K}(\theta)\,{}^AP_1 + R_{\hat K}(\theta)\,{}^AQ$$

举例如下:

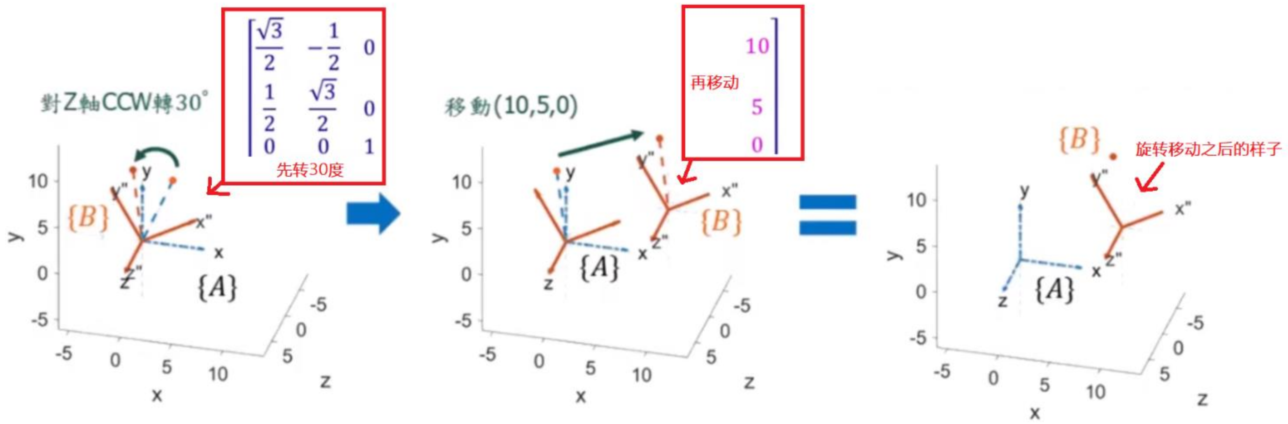
Point $P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$，先對Z軸CCW轉30°，然後移動$\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$到$P_2$ ⇨ P_2 =?

$$\begin{bmatrix} {}^AP_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat K}(\theta) & & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ {}^AP_2 \\ | \\ 1 \end{bmatrix}$$

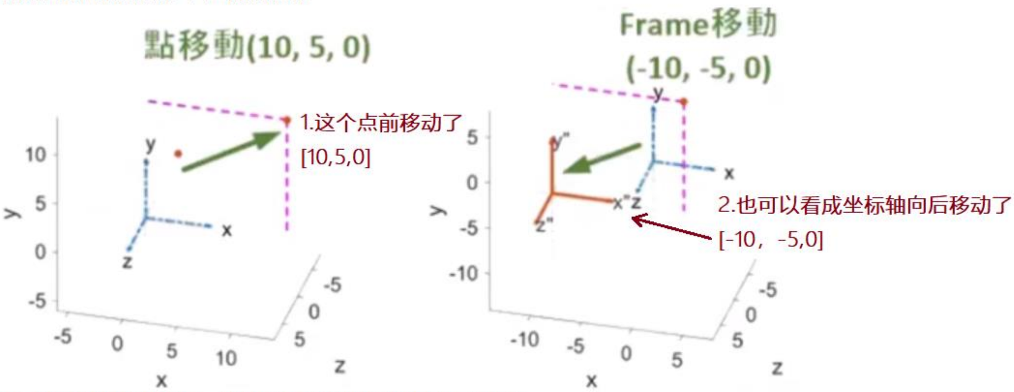
这就是P2向量的位置

⇩ 分数，就是旋转矩阵

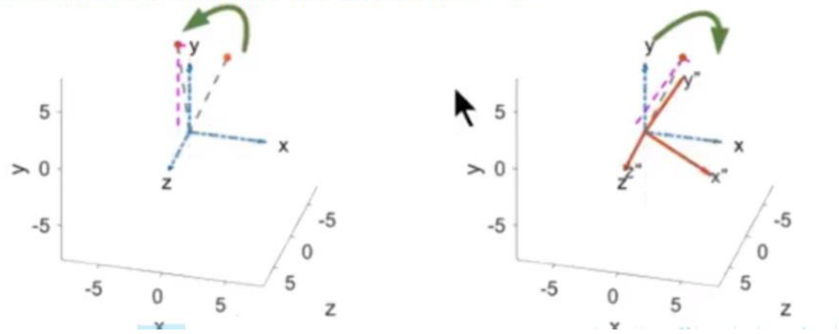
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 10 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



我们也可以让后目标点前移，坐标轴后移



我们让目标点顺时针转动30度，也相当于坐标轴逆时针转了30度



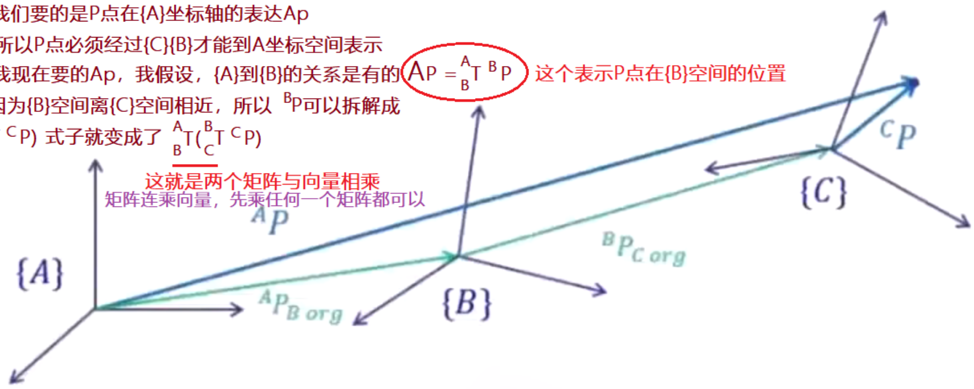
变形矩阵连续运算法

❑ 連續運算

$${}^AP = {}^A_BT\,{}^BP = {}^A_BT({}^B_CT\,{}^CP) = {}^A_BT\,{}^B_CT\,{}^CP$$

这个系统本来P点是在 {C} 坐标 上面，现在我们要推算，P
点是怎么经过前面AB坐标，进入{C}坐标的

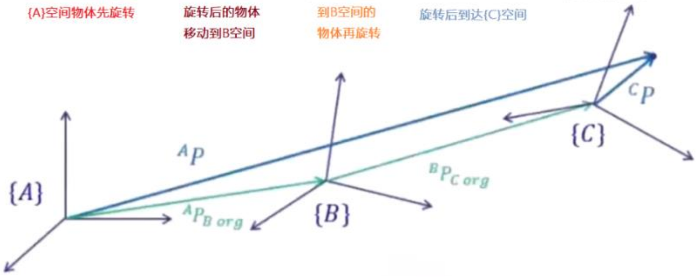
1.我们要的是P点在{A}坐标轴的表达Ap
2.所以P点必须经过{C}{B}才能到A坐标空间表示
3.我现在要的Ap，我假设，{A}到{B}的关系是有的 ${}^AP = {}^A_BT\,{}^BP$ 这个表示P点在{B}空间的位置
4.因为{B}空间离{C}空间相近，所以 ${}^BP$可以拆解成
$({}^B_CT\,{}^CP)$ 式子就变成了 ${}^A_BT({}^B_CT\,{}^CP)$
这就是两个矩阵与向量相乘
矩阵连乘向量，先乘任何一个矩阵都可以



$$
{}^A P = {}^A_B T\, {}^B P = {}^A_B T({}^B_C T\, {}^C P) = {}^A_B T\, {}^B_C T\, {}^C P
$$

$$
= \begin{bmatrix} \boxed{{}^A_B R} & \boxed{{}^A P_{B\,org}} \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{{}^B_C R} & \boxed{{}^B P_{C\,org}} \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^C P = \begin{bmatrix} {}^A_B R\, {}^B_C R & {}^A P_{B\,org} + {}^A_B R\, {}^B P_{C\,org} \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^A_C T\, {}^C P
$$

{A}空间物体先旋转　旋转后的物体移动到B空间　到B空间的物体再旋转　旋转后到达{C}空间　C空间物体再移动 ${}^C P$



机械臂 DH 模型(用于多轴机器臂)

右手法则判断 Z 轴方向

在X，Y，Z轴空间中如何确定Z轴方向呢？

手背对着电脑屏幕

- **拇指**：指向 X 轴的正向
- **食指**：指向 Y 轴的正向
- **中指**：指向 Z 轴的正向

2.用右手定则确定绕X、Y、Z轴旋转的正方向。

如图示：

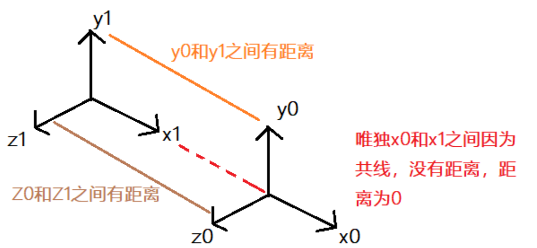
这就是手指指向的XYZ轴方向，Z轴是从屏幕向脸照射的方向

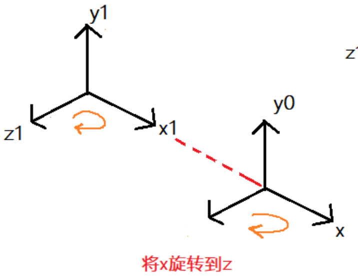
还有一种方向：　拇指：指向Z 轴的正方向；

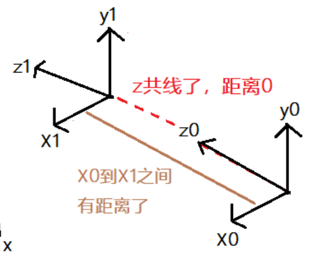
食指：指向X轴的正方向；

中指：指向Y轴的正方向；　根据实际需要确定

三维坐标共线问题





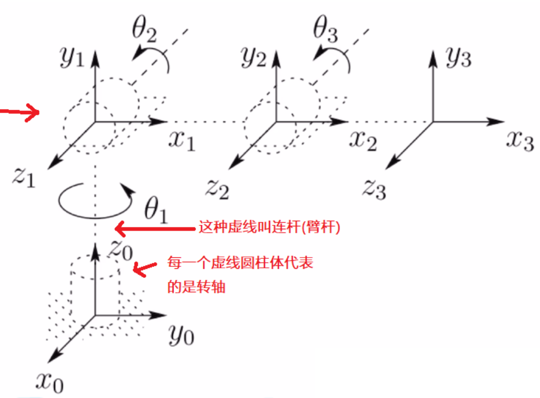


这就说明两个相同的坐标方向，不能一一对应摆放，必须相互平行摆放，才不会共线

DH 法正解最终末端执行器的位置(这叫事后诸葛亮)

$$
-\ H^0_n = H^0_1(q_1) H^1_2(q_2) \ldots H^{n-1}_n(q_n)
$$

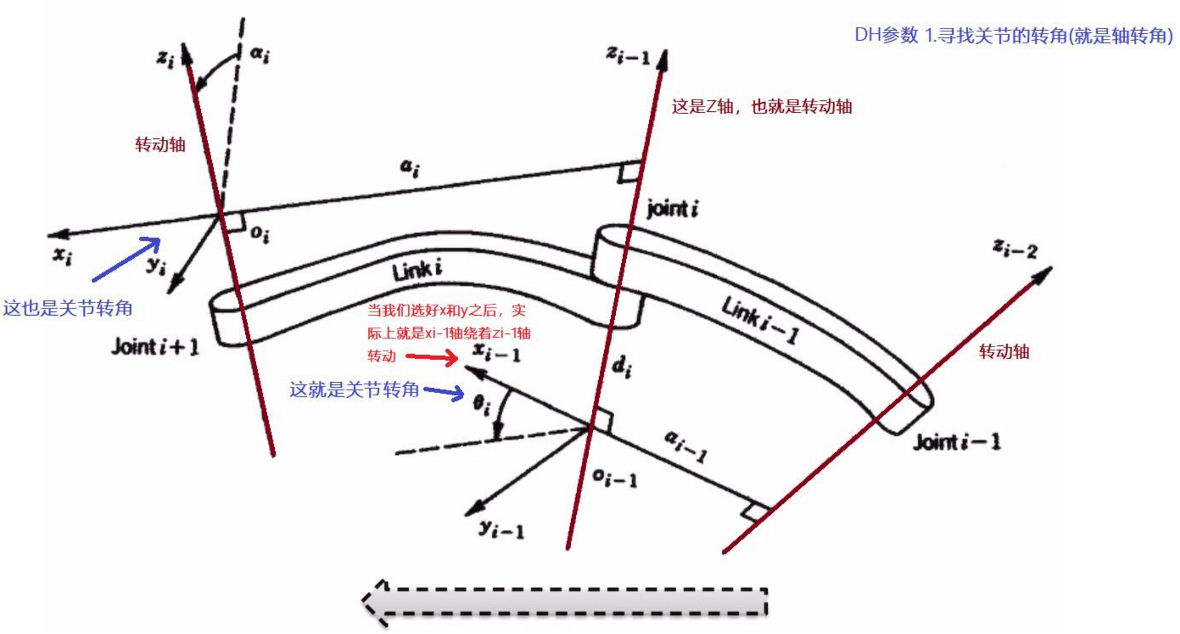
$H^0_1(q1)$　q1就是θ1。意思就是θ1转动，导致值相对于x0y0z0的转轴x1y1z1转动。

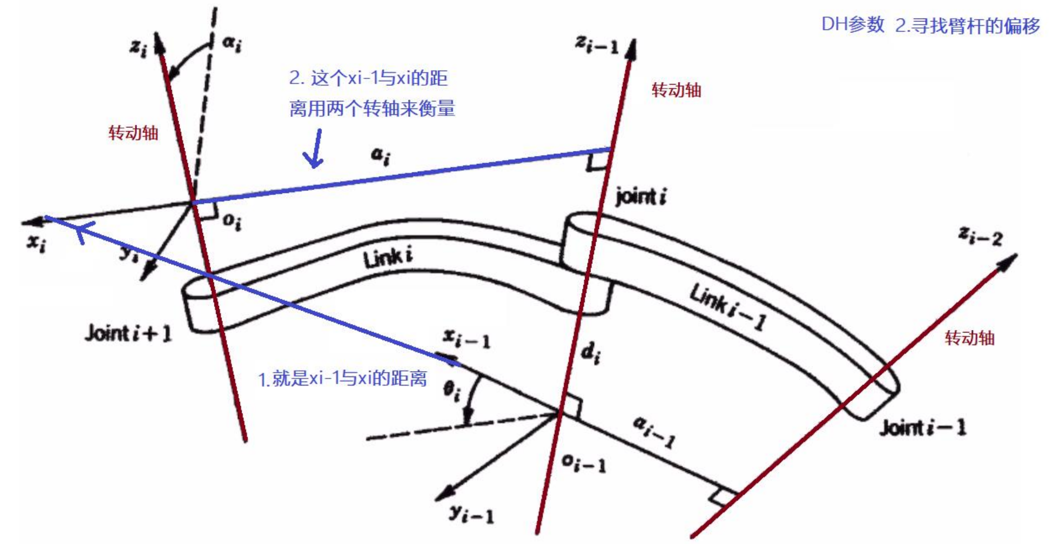


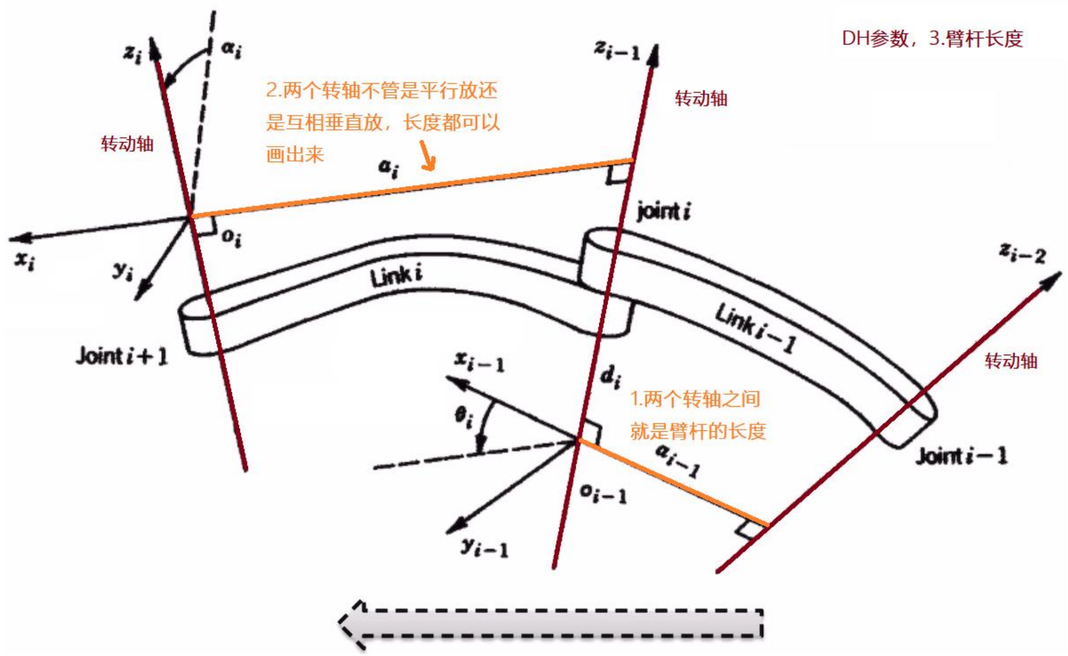
$H^1_2(q2)$　同上一样，θ2转动导致相对于x1y1z1的转轴x2，y2，z2转动

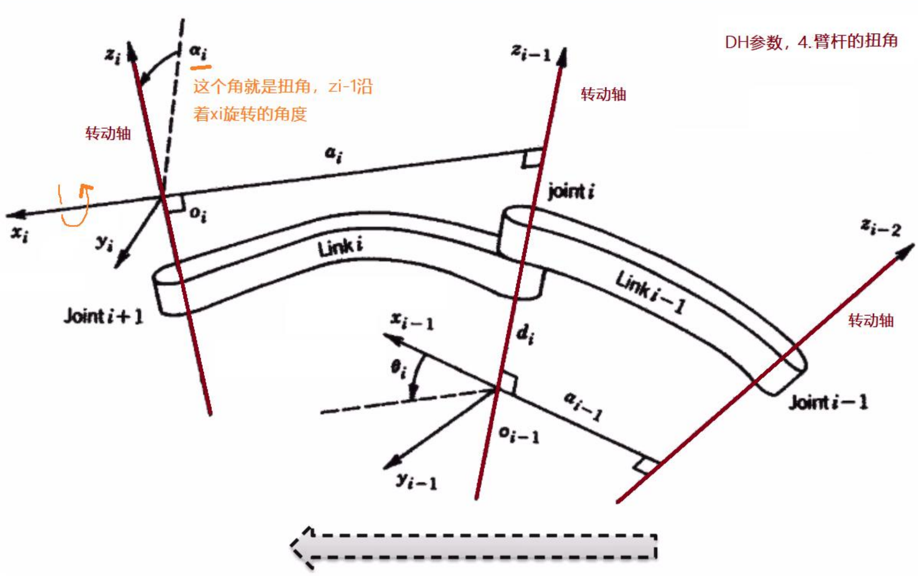
$H^2_3(q3)$　因为第3个轴就是末端执行器本身，就是自己转自己。

$H^0_3 = H^0_1(q1) \times H^1_2(q2) \times H^2_3(q3)$　只要将这些转轴相乘，就得到末端执行器的位置


DH参数 1.寻找关节的转角(就是轴转角)
z_i
α_i
z_{i-1}
这是Z轴，也就是转动轴
转动轴
a_i
joint i
x_i
o_i
y_i
这也是关节转角
Link i
z_{i-2}
Link $i-1$
当我们选好x和y之后，实际上就是xi-1轴绕着zi-1轴转动
Joint $i+1$
x_{i-1}
d_i
转动轴
这就是关节转角
θ_i
a_{i-1}
Joint $i-1$
o_{i-1}
y_{i-1}


DH参数 2.寻找臂杆的偏移
z_i
α_i
z_{i-1}
2. 这个xi-1与xi的距离用两个转轴来衡量
转动轴
转动轴
a_i
joint i
x_i
o_i
y_i
Link i
z_{i-2}
Link $i-1$
Joint $i+1$
x_{i-1}
转动轴
d_i
1.就是xi-1与xi的距离
θ_i
a_{i-1}
Joint $i-1$
o_{i-1}
y_{i-1}

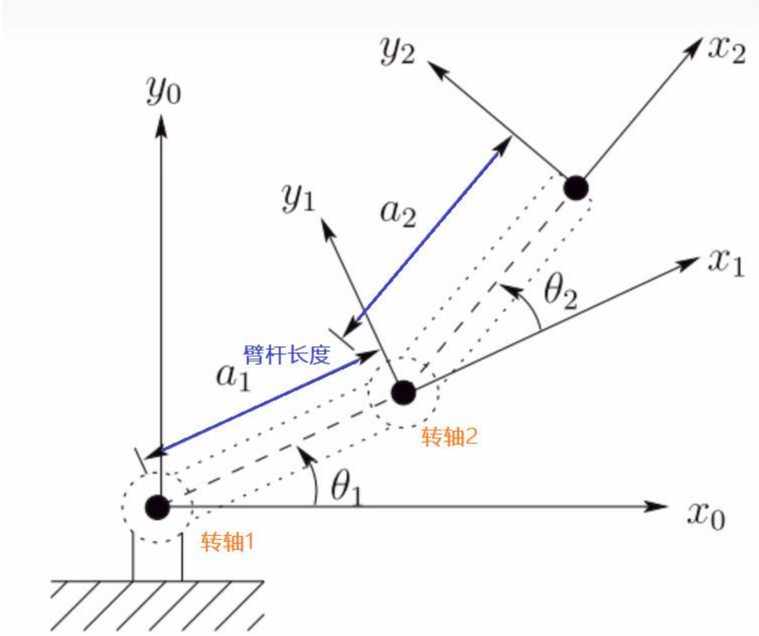

DH参数，3.臂杆长度
z_i
α_i
z_{i-1}
2.两个转轴不管是平行放还是互相垂直放，长度都可以画出来
转动轴
转动轴
a_i
joint i
x_i
o_i
y_i
Link i
z_{i-2}
Link $i-1$
Joint $i+1$
x_{i-1}
d_i
转动轴
1.两个转轴之间就是臂杆的长度
θ_i
a_{i-1}
Joint $i-1$
o_{i-1}
y_{i-1}



DH表

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

转轴　臂杆长度

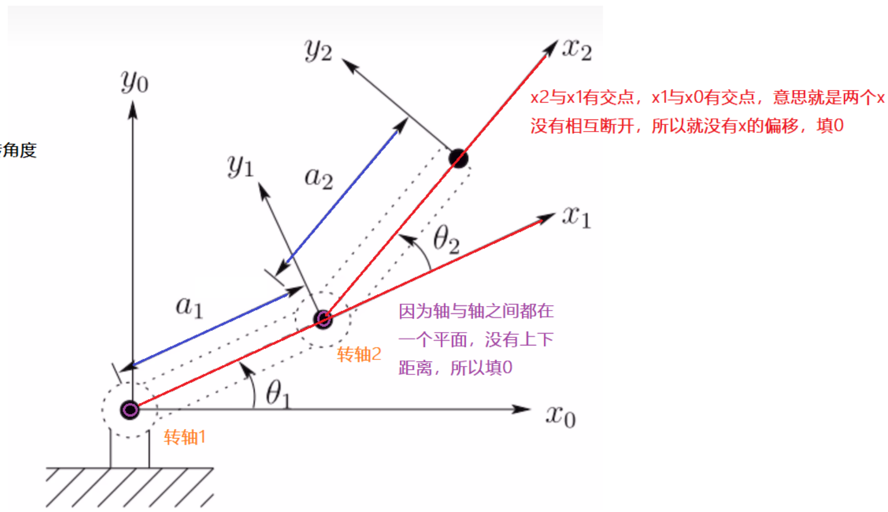


DH表　x的偏移

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

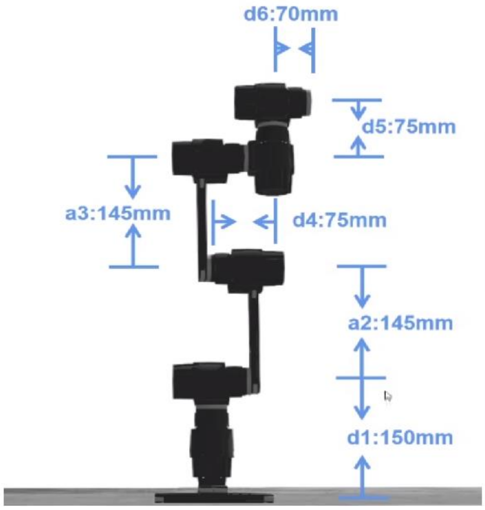
旋转角度

转轴　臂杆长度　轴与轴没有上下距离和相互扭转，填0

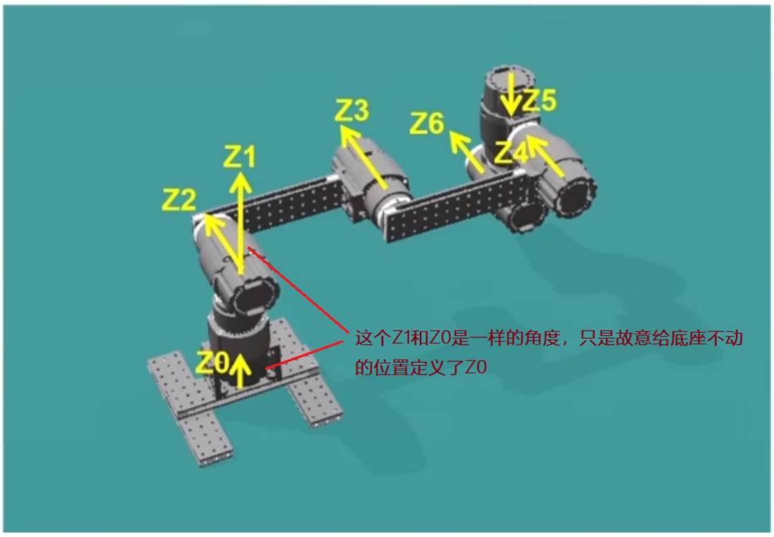


DH 表建立实战 1

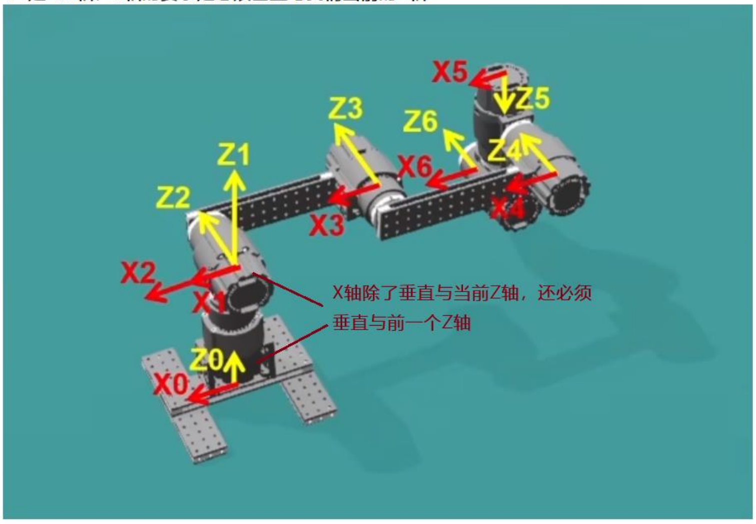
这是机械臂的尺寸

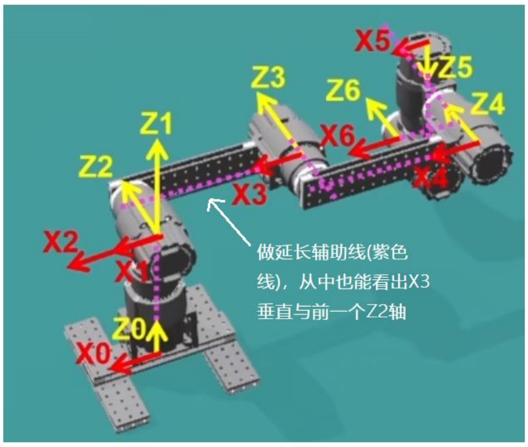


1.建立Z轴，也就是旋转关节的旋转轴

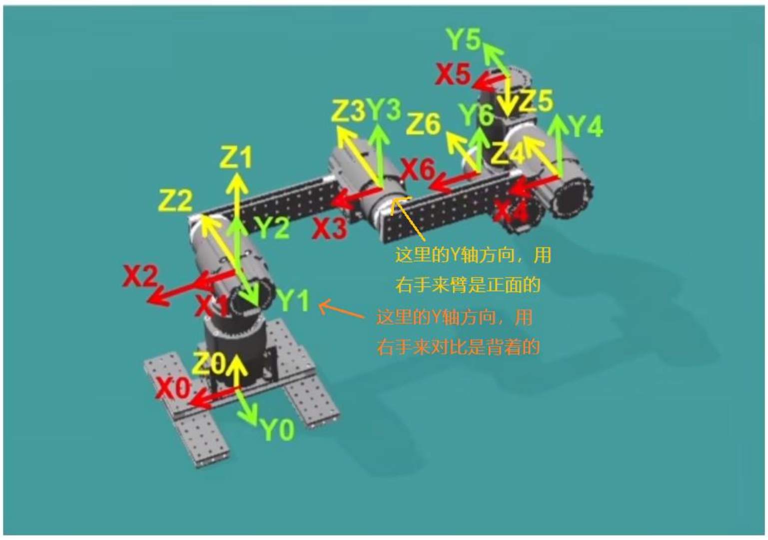


2.建立X轴，X轴的要求是必须垂直与我们当前的Z轴



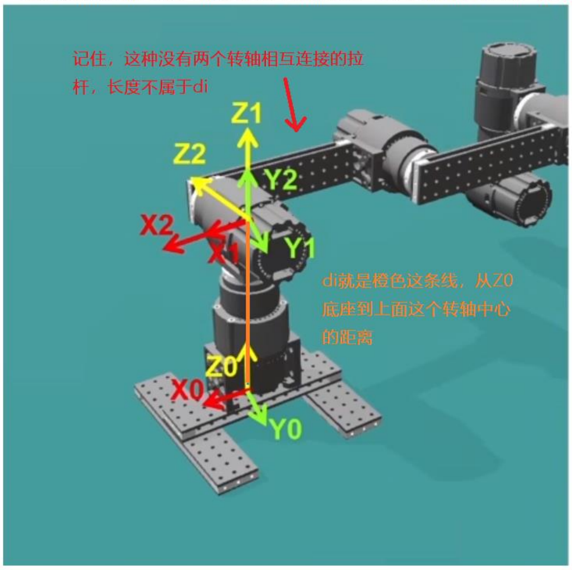


3.建立Y轴，Y轴是先按照右手定则，决定垂直与X轴的正方向还是负方向

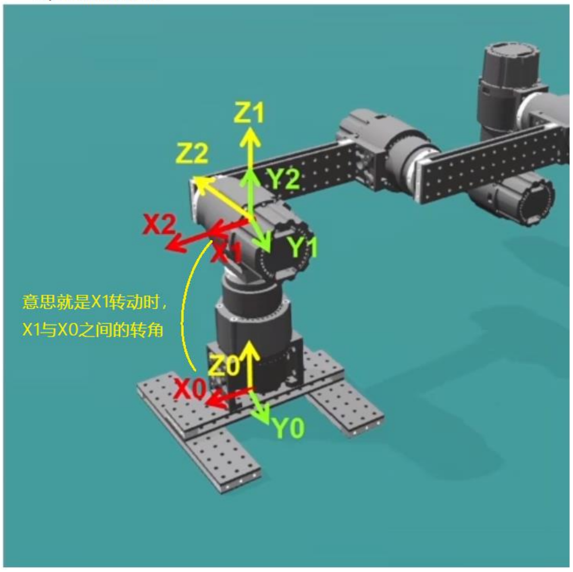


坐标系建立完成

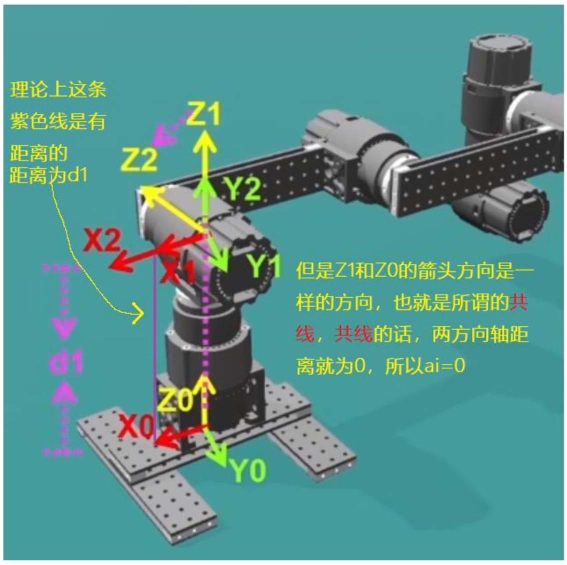
di参数: 沿Z_{i-1}轴，从X_{i-1}转动到X_i之间的距离，与Z_{i-1}方向相同为正。 什么意思呢?



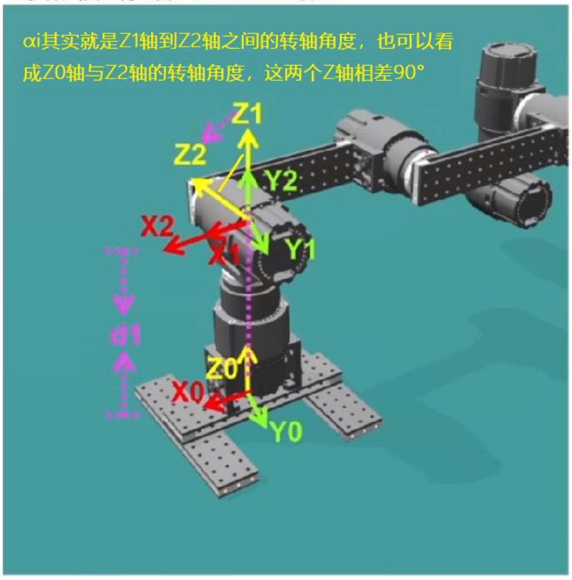
θ_i 电机轴的转角



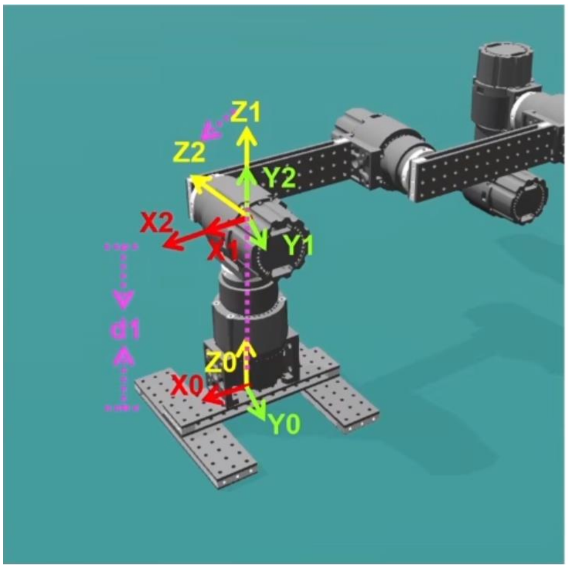
ai参数: 沿Xi轴，从$\hat{Z}_{i-1}$到$\hat{Z}_i$的距离，与$\hat{X}_i$正向转动方向为正



α_i参数: 就是绕$\hat{X}_i$轴，从$\hat{Z}_{i-1}$到$\hat{Z}_i$的转角



DH 表填写



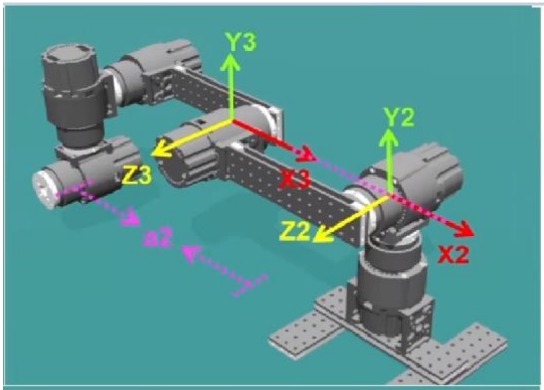
Z1沿X2坐标轴转90度才能到Z2。所以填90

因为Z0和Z1处于同一条线方向，也就是共线，所以填0

x0和X1未共线两轴之间的距离

X0和X1初始化状态角度是平行的，所以角度位0，用t0表示，后面t0会改变的

i	αi	ai	di	θi
1	pi/2	0	d1	t0
2				
3				
4				
5				
6				

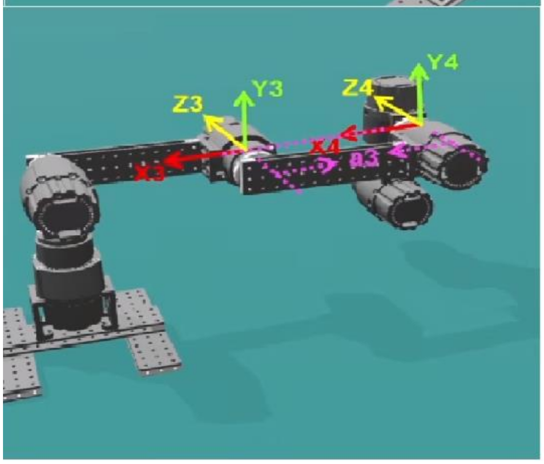


i	αi	ai	di	θi
1	pi/2	0	d1	t0
2	0	-a2	0	t1
3				
4				
5				
6				

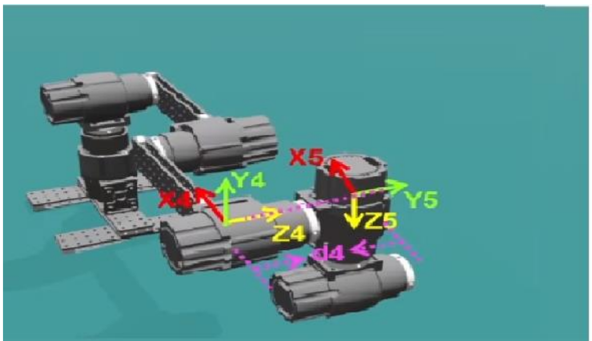
z2~z3轴平行0度

x3和x2共线

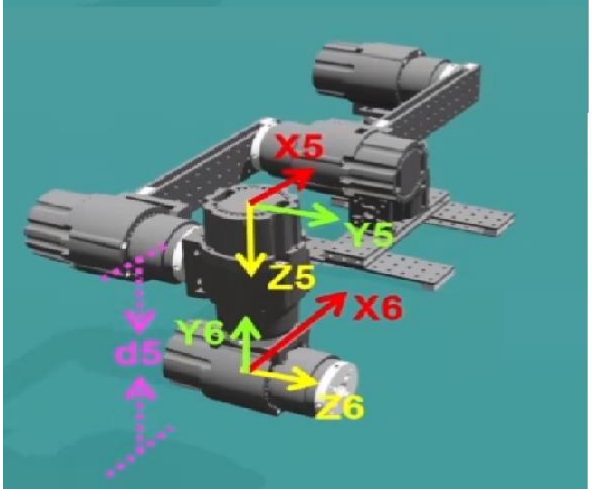
ai距离是与x轴箭头的负方向运动，所以加负号，-a2



i	αi	ai	di	θi
1	pi/2	0	d1	t0
2	0	-a2	0	t1
3	0	-a3	0	t2
4				
5				
6				

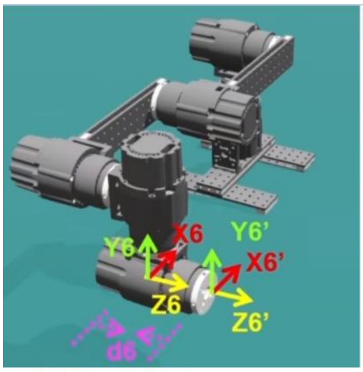


i	αi	ai	di	θi
1	pi/2	0	d1	t0
2	0	-a2	0	t1
3	0	-a3	0	t2
4	pi/2	0	d4	t3
5				
6				



i	αi	ai	di	θi
1	pi/2	0	d1	t0
2	0	-a2	0	t1
3	0	-a3	0	t2
4	pi/2	0	d4	t3
5	-pi/2	0	d5	t4
6				

与右手定则相反



i	αi	ai	di	θi
1	pi/2	0	d1	t0
2	0	-a2	0	t1
3	0	-a3	0	t2
4	pi/2	0	d4	t3
5	-pi/2	0	d5	t4
6	0	0	d6	t5

DH相邻坐标系变换矩阵

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}T = R_Z(\theta_i)D_Z(d_i)R_X(\alpha_i)D_X(a_i) $$

$$ = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

代码实现

```
T01 = DHTransform(pi/2 , 0  , d1, theta[0])
T12 = DHTransform(0    , -a2, 0 , theta[1])
T23 = DHTransform(0    , -a3, 0 , theta[2])
T34 = DHTransform(pi/2 , 0  , d4, theta[3])
T45 = DHTransform(-pi/2, 0  , d5, theta[4])
T56 = DHTransform(0    , 0  , d6, theta[5])

T06 = T01*T12*T23*T34*T45*T56
```

每一个轴转成一个矩阵

坐标系0 - 6，坐标变换矩阵

```
T06 = T01*T12*T23*T34*T45*T56
```

这个矩阵连乘之后会得到最终的一个矩阵

旋转矩阵 (Rotation Matrix)　　位移矩阵 (Translate Vector)

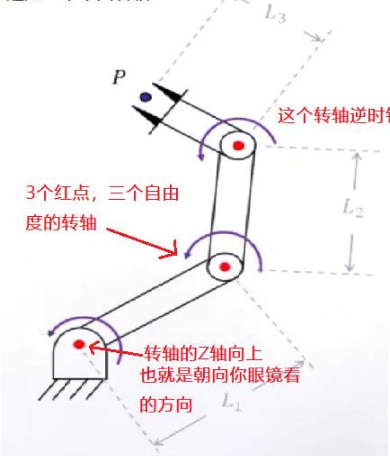
$$ {}^{0}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

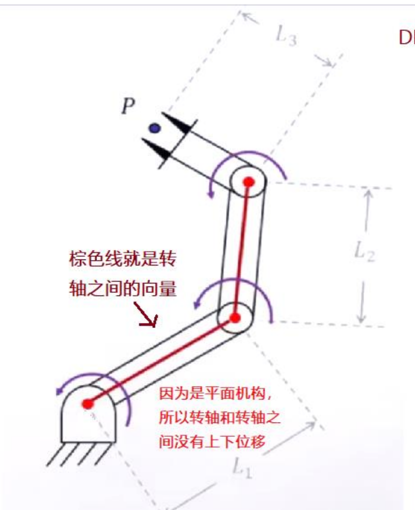
末端电机旋转角度　　末端电机在空 间中的位置

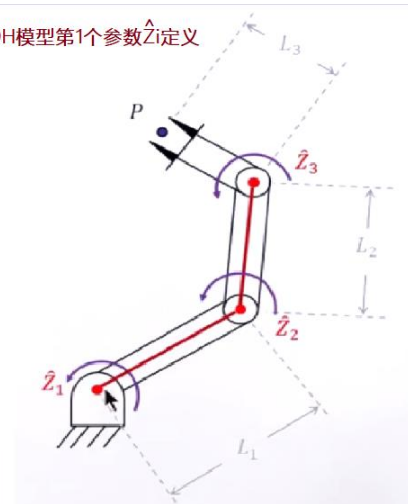
这就是输入每个电机转轴的角度，得到末端输出的结果，就是事后诸葛亮的玩法。
后面我们再讲解反算(逆向运动学)来根据坐标点来求关节角度，这才是最重要的。

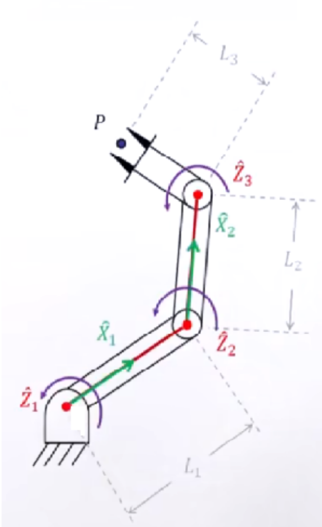
DH 表建立实战 2

这是一个平面转轴









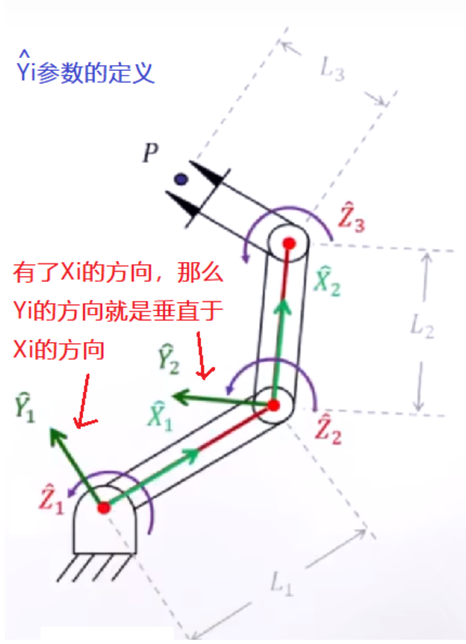
$\hat{X}$i 是Zi-1的转轴指向Zi转轴的方向

所以$\hat{X}_1$ = $\hat{Z}_1$指向Z2

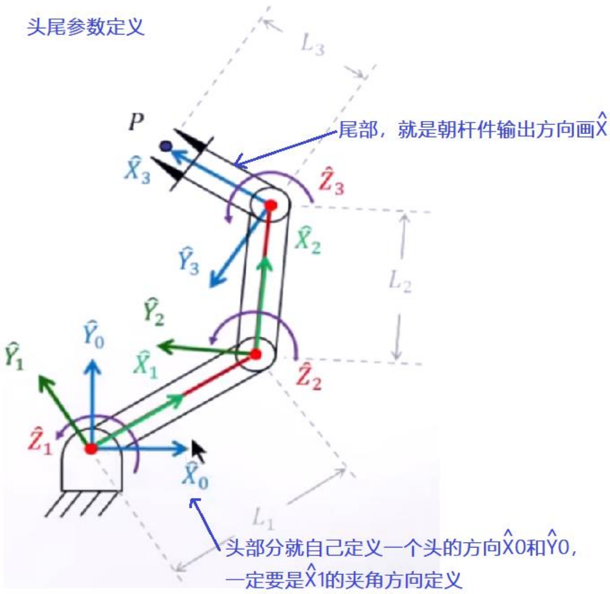
$\hat{X}_2$ = $\hat{Z}_2$指向Z3

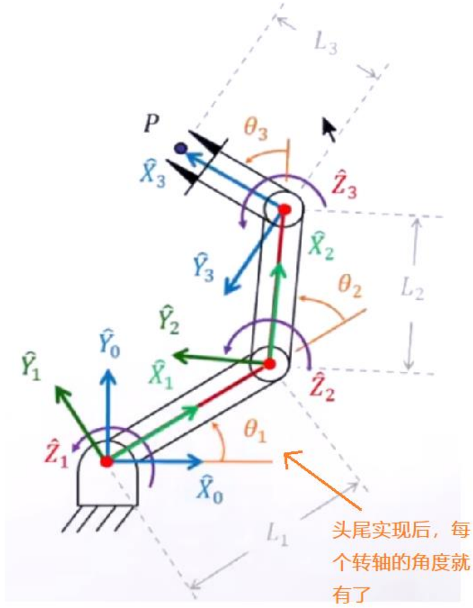
所以$\hat{X}$i 就是指的转轴指向的方向

$\hat{Y}$i参数的定义

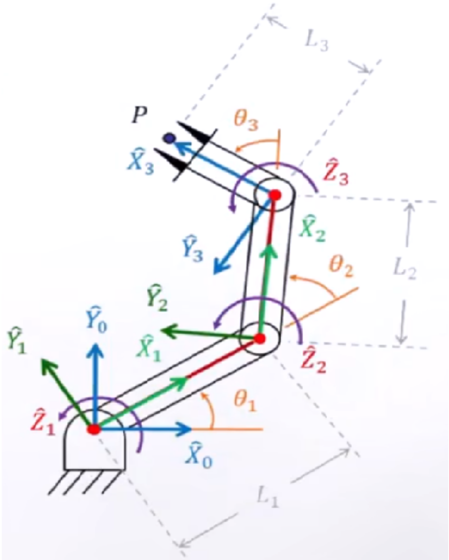


头尾参数定义





这样就定义完了 Zi Xi Yi θi DH表的参数



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1(1轴)	0	0	0	θ_1
2(2轴)	0	L_1	0	θ_2
3(3轴)	0	L_2	0	θ_3

每个转轴角度
马达驱动角度

因为3个Z轴没有上下错开移动，都在一个平面高度，所以都填0

因为第1(a1-1)轴和第0(a0-1)轴是重合的所以填0

第1轴到第2轴有个拉杆距离L1

第2轴到第3轴有个拉杆距离L2

因为所有连杆都没有上下错开，所以在一个平面，全部填0

所以DH参数里面只有θ值是变化的，其它参数都是固定的
固定参数多，矩阵就简洁

DH表解算

注意这个是ai-1

$$
=\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & \boxed{a_{i-1}} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

DH表公式

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} \cos[t1] & -\sin[t1] & 0 & 0 \\ \sin[t1] & \cos[t1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

t1表示第1项角度

$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} \cos[t2] & -\sin[t2] & 0 & L1 \\ \sin[t2] & \cos[t2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

t2表示第2项角度

t3表示第3项角度

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} \cos[t3] & -\sin[t3] & 0 & L2 \\ \sin[t3] & \cos[t3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

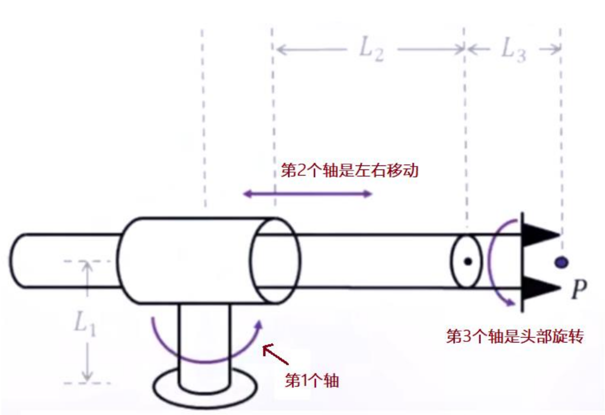
$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} \cos[t1] & -\sin[t1] & 0 & 0 \\ \sin[t1] & \cos[t1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; X \; {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} \cos[t2] & -\sin[t2] & 0 & L1 \\ \sin[t2] & \cos[t2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; X \; {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} \cos[t3] & -\sin[t3] & 0 & L2 \\ \sin[t3] & \cos[t3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

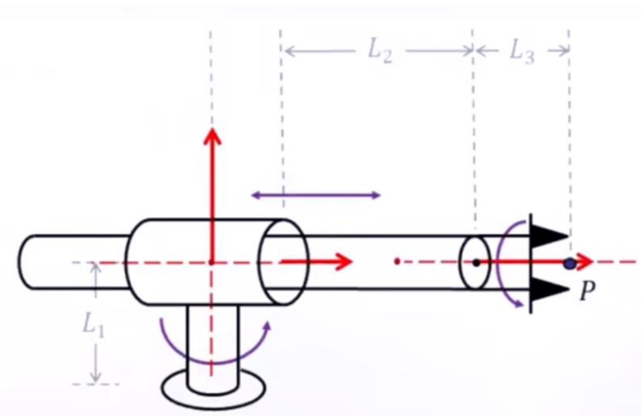
上面三个矩阵相乘，得到如下矩阵：

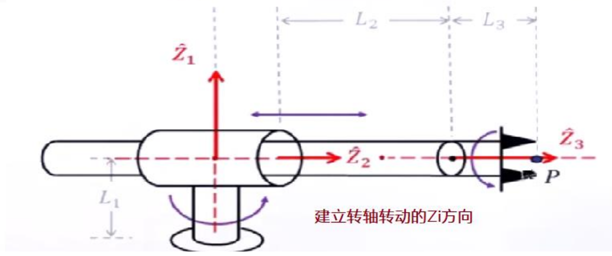
$$
{}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} \cos[t1+t2+t3] & -\sin[t1+t2+t3] & 0 & L1\cos[t1] + L2\cos[t1+t2] \\ \sin[t1+t2+t3] & \cos[t1+t2+t3] & 0 & L1\sin[t1] + L2\sin[t1+t2] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

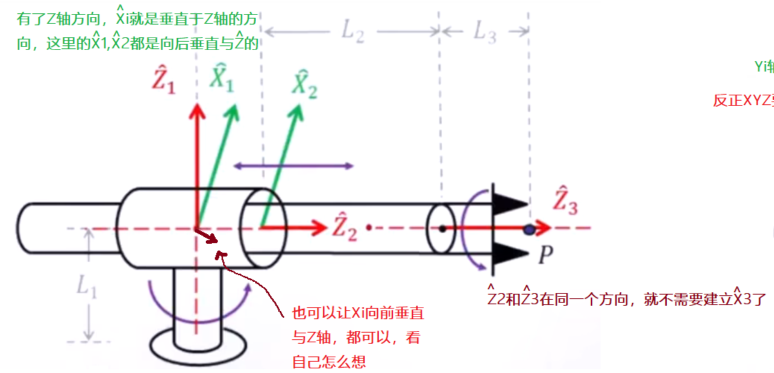
最后这个t1，t2，t3代表的θ角需要自己事先填入。也可以用后面讲的运动学求逆解得到。

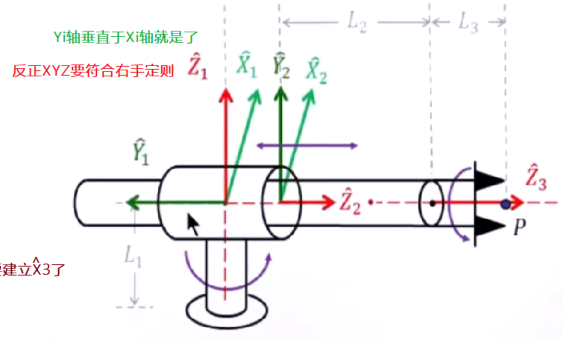
第 2 个机构 DH 表建立

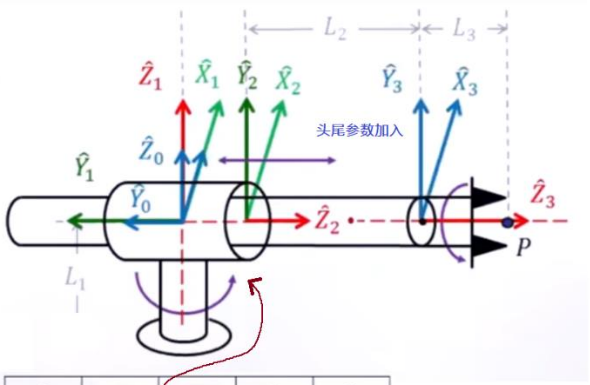


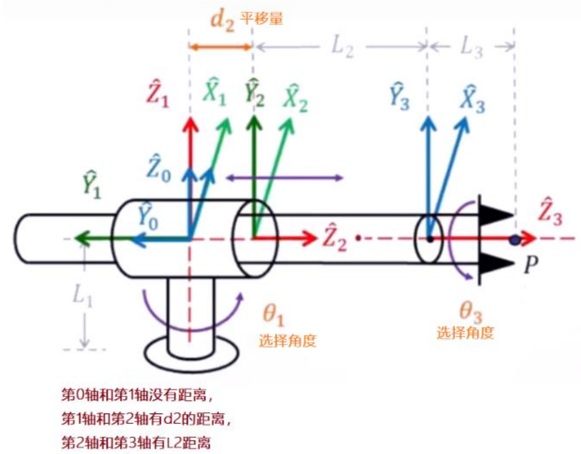












i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

1个转动

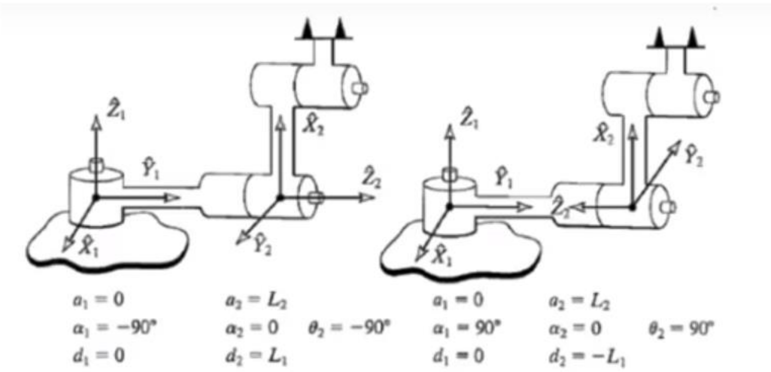
这个机械臂只有2个转动

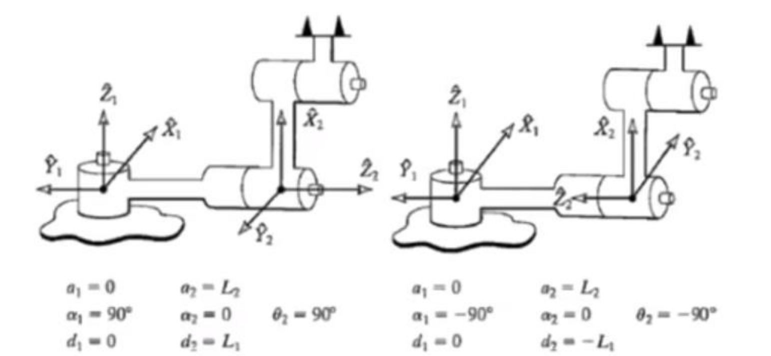
2个转动

第1轴和第2轴之间有个90度转角

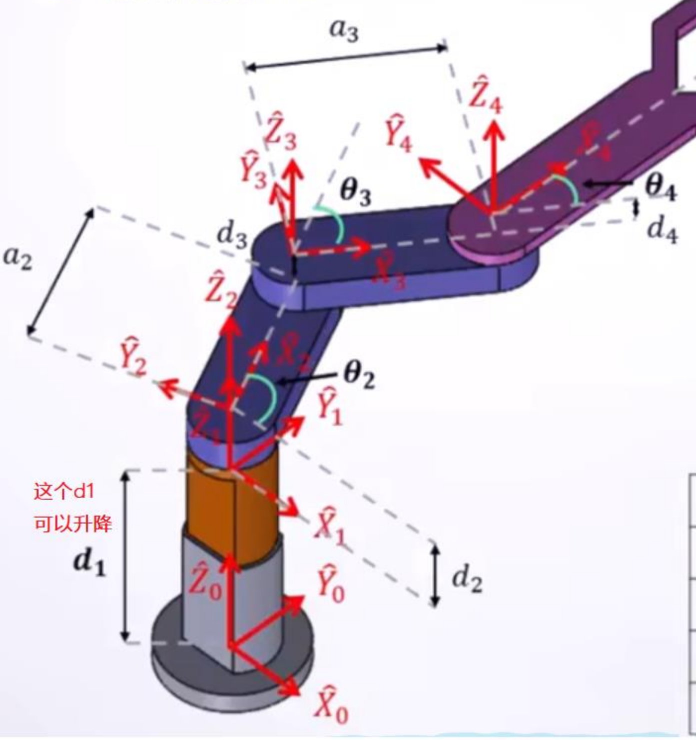
Z1Z2Z3的转轴都挨在一起，所以填0

DH 表练习





❑ 晶圓機器人



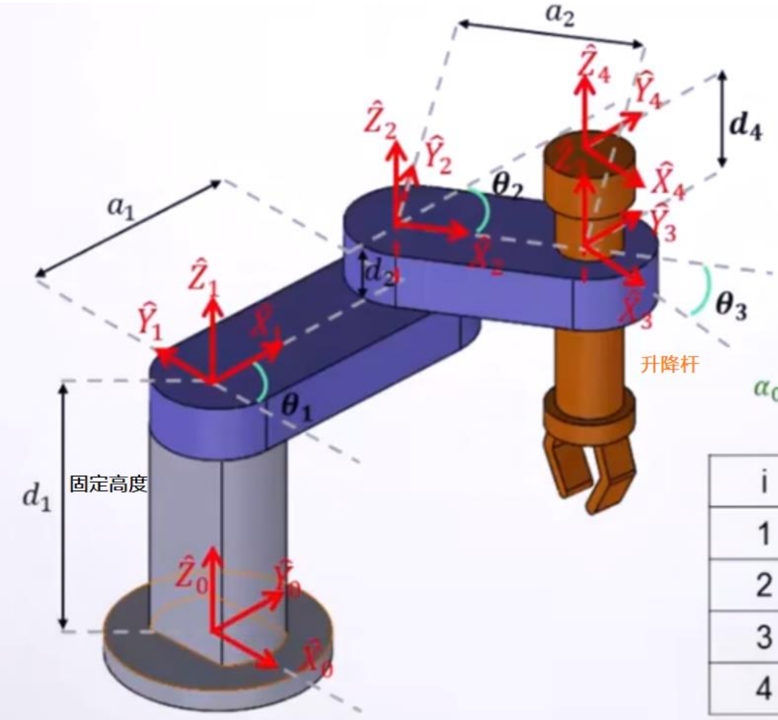
$d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 為驅動關節

$\theta_1 = 0$ (X_0 // X_1)

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$（所有Z軸相互平行）

$a_0, a_1 = 0$

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	0
2	0	0	d_2	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	0	a_3	d_4	θ_4



$\theta_1, \theta_2, \theta_3, d_4$ 為驅動關節

$\theta_4 = 0$ (X_0 // X_1)

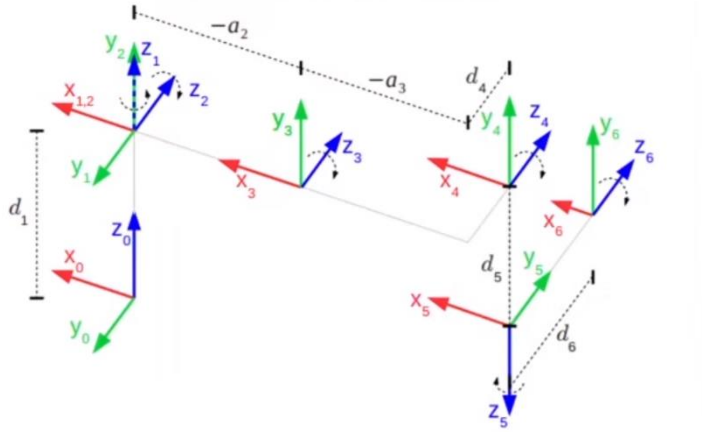
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$（所有Z軸相互平行）

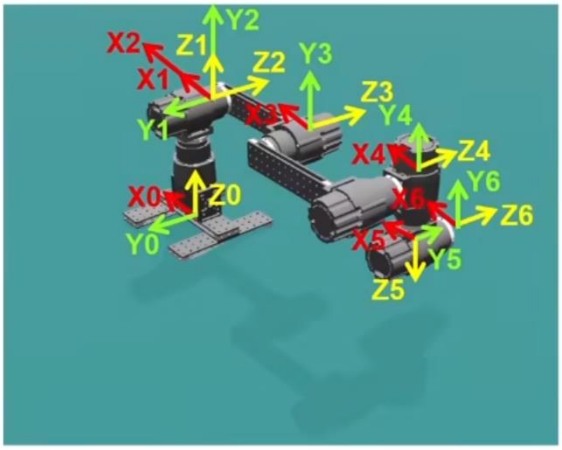
$a_0, a_3 = 0$

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	0	a_1	d_2	θ_2
3	0	a_2	0	θ_3
4	0	0	d_4	0

DH 法逆向运动学，解最终末端执行器的位置(这才是我们需要的)

逆向运动学就是根据指定的坐标位置，反算各个关节旋转角度。





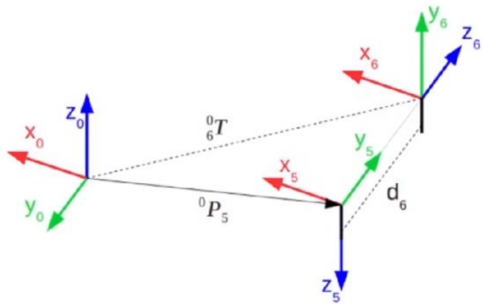
解算顺序:

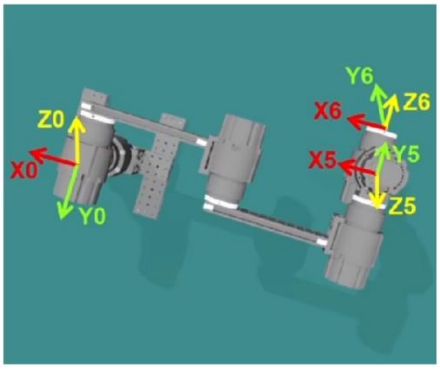
1. 计算θ1。先解算固定座子
2. 计算θ5。再解算末端坐标
3. 计算θ6。
4. 计算θ3。然后才解算中间关节
5. 计算θ2。
6. 计算θ4。

$$^0P_5 = {}^0P_6 - d_6 \cdot {}^0\hat{Z}_6 \Leftrightarrow$$

$$^0P_5 = {}^0_6T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

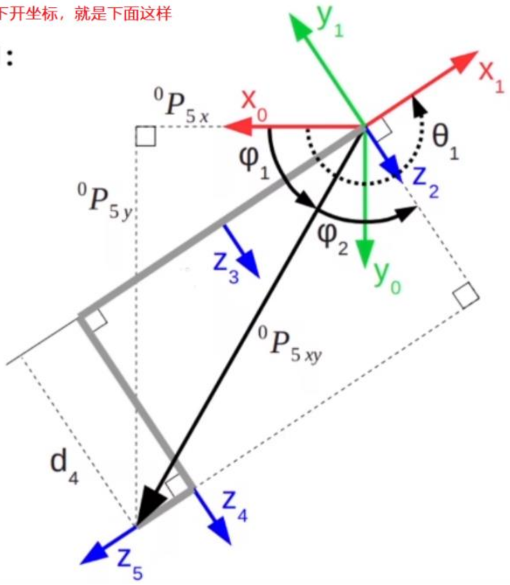
解算θ1:





从上面向下开坐标，就是下面这样

解算θ1:



$$\theta_1 = \phi_1 + \left(\phi_2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\phi_1 = \operatorname{atan2}({}^0P_{5y}, {}^0P_{5x})$$

$$\cos(\phi_2) = \frac{d_4}{|{}^0P_{5xy}|} \Rightarrow$$

$$\phi_2 = \pm\operatorname{acos}\left(\frac{d_4}{|{}^0P_{5xy}|}\right) \Leftrightarrow$$

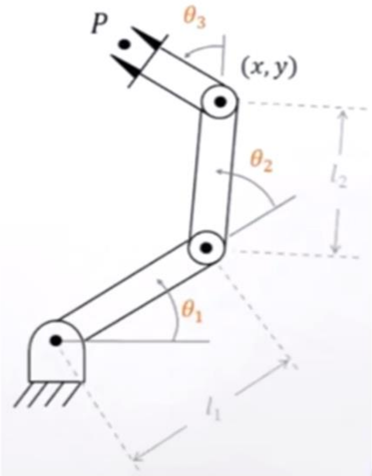
$$\phi_2 = \pm\operatorname{acos}\left(\frac{d_4}{\sqrt{{}^0P_{5x}{}^2 + {}^0P_{5y}{}^2}}\right)$$

$$\theta_1 = \phi_1 + \phi_2 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}\left({}^0P_{5y}, {}^0P_{5x}\right) \pm \operatorname{acos}\left(\frac{d_4}{\sqrt{{}^0P_{5x}{}^2 + {}^0P_{5y}{}^2}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

以上都是解算思路

我们解算之前计算的平面机械手，这个机械手取消掉Z轴参数



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos[t1] & -\sin[t1] & 0 & 0 \\ \sin[t1] & \cos[t1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos[t2] & -\sin[t2] & 0 & L1 \\ \sin[t2] & \cos[t2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos[t3] & -\sin[t3] & 0 & L2 \\ \sin[t3] & \cos[t3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

上面三个矩阵相乘，得到如下矩阵：

$$ {}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos[t1+t2+t3] & -\sin[t1+t2+t3] & 0 & L1\cos[t1] + L2\cos[t1+t2] \\ \sin[t1+t2+t3] & \cos[t1+t2+t3] & 0 & L1\sin[t1] + L2\sin[t1+t2] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

这是已知末端执行器x，y位置。推算机械臂θ1，θ2，θ3各旋转多少度的固定公式。

$$ {}^0_3T = \begin{bmatrix} \boxed{\cos[t1+t2+t3]} & -\sin[t1+t2+t3] & 0 & \boxed{L1\cos[t1] + L2\cos[t1+t2]} \\ \boxed{\sin[t1+t2+t3]} & \cos[t1+t2+t3] & 0 & \boxed{L1\sin[t1] + L2\sin[t1+t2]} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 转换 \quad \begin{bmatrix} \boxed{\cos\theta} & -\sin\theta & 0 & \boxed{x} \\ \boxed{\sin\theta} & \cos\theta & 0 & \boxed{y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

代数解： 建立方程式

$\cos\theta = \cos[t1+t2+t3]$

$\sin\theta = \sin[t1+t2+t3]$

$x = L1\cos[t1] + L2\cos[t1+t2]$

$y = L1\sin[t1] + L2\sin[t1+t2]$

因为t1(θ1)在${}^0_3T$矩阵中，比较多的地方出现，所以先解算t2(θ2)，简单些

$$ x^2 + y^2 = (L1\cos[t1] + L2\cos[t1+t2])^2 + (L1\sin[t1] + L2\sin[t1+t2])^2 $$

$$ x^2 + y^2 = L1^2 + L2^2 + 2L1*L2*\cos[t2] $$

$$ \cos[t2] = \frac{x^2 + y^2 - L1^2 - L2^2}{2*L1*L2} $$

得到cos[θ2] θ2转轴角度

注意：cosθ2必须在-1 ≤ cosθ2 ≤ 1 范围内我们才能找到对应的角度，最后用 θ2 = $\cos^{-1}$(θ2) 也就是arccos(θ2)得到角度

如果cosθ2的值是>1或者<-1，那么这个角度手臂是到不了的

$x = L1\cos[t1] + L2\cos[t1+t2]$ ⟵ 然后我将θ2代入t2中求出t1，也就是θ1的角度

$y = L1\sin[t1] + L2\sin[t1+t2]$

公式化简后如下：

$$ x = l_1c_1 + l_2c_{12} = (l_1 + l_2c_2)c_1 + (-l_2s_2)s_1 \triangleq k_1c_1 - k_2s_1 $$

$$ y = l_1s_1 + l_2s_{12} = (l_1 + l_2c_2)s_1 + (l_2s_2)c_1 \triangleq k_1s_1 + k_2c_1 $$

- 變數變換

define

$$ r = +\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}} $$

$$ \gamma = Atan2(k_2, k_1) $$

then

$$ k_1 = r\cos\gamma $$

$$ k_2 = r\sin\gamma $$

And then

$$ \frac{x}{r} = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1 = \cos(\gamma + \theta_1) $$

$$ \frac{y}{r} = \cos\gamma\sin\theta_1 + \sin\gamma\cos\theta_1 = \sin(\gamma + \theta_1) $$

- 解 θ_1

$$ \gamma + \theta_1 = Atan2\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = Atan2(y, x) $$

$$ \Rightarrow \theta_1 = Atan2(y, x) - Atan2(k_2, k_1) $$

- 解 θ_3

$$ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = Atan2(s_\phi, c_\phi) = \phi $$

$$ \Rightarrow \theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 $$

其实求解机械臂逆运算，还是用 MATLAB 软件或者一些公式化软件来做比较好。