倒立摆建模：微分方程的构建

薛翔元（521030910387）

1 问题描述

倒立摆问题是控制系统工程中的经典问题。

如图1为倒立摆系统，包括质量为 M 的小车，质量为 m，长度为 $2l$，质心转动惯量为 I 的摆。小车被固定在轨道上，其与轨道间的摩擦系数为 μ，重力加速度为 g。摆的一端被通过一个可以 360° 自由旋转的轴固定在小车上。假设摆杆为匀质刚性杆，不计此轴的摩擦阻力和系统内未给出的其他摩擦阻力。

控制倒立摆的目的是通过对小车施加力使之运动，利用惯性使摆杆直立，即达到平衡状态。

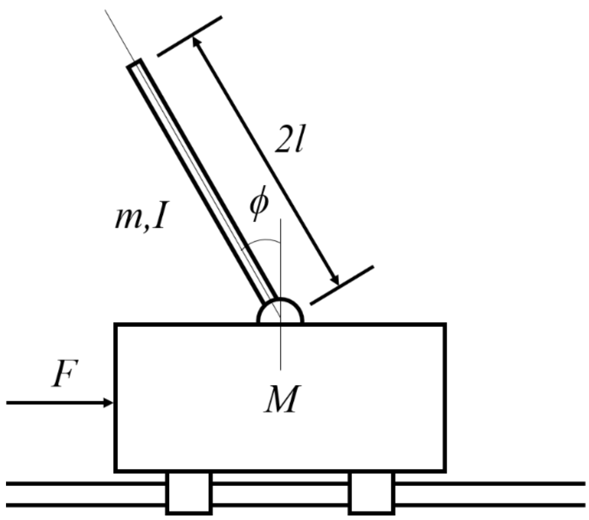

图 1: 倒立摆图示

假定在摆杆处于垂直（稳定）状态时向小车输入一微小扰动力 F，根据系统的物理原理，写出系统运动关于变量 $M, m, l, I, g, x, F, \phi, \mu$ 的微分方程。

2 问题解答

将倒立摆系统分解为小车和摆杆两部分分别进行分析，并将物体受力分解到水平 $\boldsymbol{x}$ 和竖直 $\boldsymbol{y}$ 两个正交的方向上。

为了完整地书写方程，补充如下中间变量：

- x：小车质心的水平位移
- x'：摆杆质心的水平位移，规定向右为正
- y'：摆杆质心的竖直位移，规定向下为正

- T：小车在转轴上对摆杆施加的力
- T_x：T 的水平分量
- T_y：T 的竖直分量
- N：轨道对小车的支持力
- f：轨道对小车的摩擦力
- P：摆杆在小车参考系中受到的惯性力
- I'：摆杆相对于转轴的转动惯量

在倒立摆系统中有如下基本的约束关系：

$$x' = x + l\sin\phi \tag{1}$$
$$y' = l\cos\phi \tag{2}$$
$$f = \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$
$$P = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{4}$$
$$I' = I + ml^2 \tag{5}$$

对小车进行受力分析，以地面为参考系，小车受到重力 Mg，外力 F，轨道的支持力 N，轨道的摩擦力 f 和摆杆的压力 T，在竖直方向上保持静止，在水平方向上有速度和加速度。根据牛顿第二定律，可以列出如下动力学方程：

$$F - T_x - \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{6}$$
$$Mg + T_y - N = 0 \tag{7}$$

对摆杆进行受力分析，以小车为参考系，摆杆受到重力 mg，小车的支持力 T 和惯性力 P，沿轴在平面内旋转，质心在水平和竖直方向上均有速度和加速度。由于摆杆质量 m 小于小车质量 M，小车的加速度远小于摆杆质心的加速度，因此惯性力 P 可以忽略不计。根据牛顿第二定律，可以列出如下动力学方程：

$$T_x = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x') = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x + l\sin\phi) \tag{8}$$
$$mg - T_y = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(y') = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(l\cos\phi) \tag{9}$$

根据角动量定理的微分形式，又有如下转动方程：

$$mgl\sin\phi - T_x l\cos\phi = (I + ml^2)\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} \tag{10}$$

根据题设，微小扰动保证 $\phi \approx 0$，可以假定 $\cos\phi \approx 1$，$\sin\phi \approx \phi$，$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \approx 0$，代入可得线性化方程：

$$T_x = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + ml\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} \tag{11}$$
$$T_y = mg \tag{12}$$
$$(I + ml^2)\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = mgl\phi - T_x l \tag{13}$$

将方程6代入上述线性化方程，化简得到系统微分方程：

$$\begin{cases} (I+2ml^2)\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}+ml\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=mgl\phi \\ ml\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}+(M+m)\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\mu\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F \end{cases} \tag{14}$$

方程组14即为倒立摆系统关于变量 M,m,l,I,g,x,F,ϕ,μ 的微分方程。