第二章大作业：回声消除

薛翔元（521030910387）

1 问题描述

某一礼堂有明显的回音，那么一个初始的声音冲激之后将会跟着一些衰减了的原声音冲激，它们在空间间隔上都是有规律分布开的。因此，对这一现象常常使用的模型是一个线性时不变系统，该系统的冲激响应由一个冲激串组成，即：

$$h(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}h_k\delta(t-kT) \tag{1}$$

其中，T 表示回波发生的间隔，h_k 表示由初始声音冲激产生的第 k 次回波的增益因子。

假定 $x(t)$ 代表原声音信号，而 $y(t)=x(t)*h(t)$ 是实际听到的未经回音消除处理的信号。为了消除由回音引入的失真，假定用拾音器检测 $y(t)$，并把获得的信号转换成电信号。仍然用 $y(t)$ 表示这个信号，因为它代表了与该声音信号等价的电信号，且经由声电转换系统可从一处传至其他地方。

拟找到一个线性时不变系统，使它的冲激响应 $g(t)$ 满足 $y(t)*g(t)=x(t)$，于是按此方法处理电信号 $y(t)$，然后再变换成声音信号，就能消除令人烦恼的回音。所要求的冲激响应 g(t) 也是一个冲激串：

$$g(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k\delta(t-kT) \tag{2}$$

依次从信号分析、系统建模、仿真模拟三个方面，设计并实现上述的回声消除系统。

2 信号分析

1. 分析系统的冲激响应 $g(t)$，求各个 g_k 所必须满足的代数方程组，并用 h_k 解出 g_0,g_1,g_2。

   根据题意，回声叠加后的信号 $y(t)$ 为：

$$y(t)=x(t)*h(t) \tag{3}$$

   经过系统后，回声被基本消除，新的信号 $x'(t)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned}x'(t)&=y(t)*g(t) && (4)\\ &=x(t)*h(t)*g(t)\\ &=x(t)*[h(t)*g(t)] && (5)\end{aligned}$$

   欲使回声消除后的信号 $x'(t)$ 与原信号 $x(t)$ 相同，必有：

$$h(t)*g(t)\equiv\delta(t) \tag{6}$$

直接将 $h(t)*g(t)$ 展开并化简：

$$\begin{aligned} h(t)*g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau && (7)\\ &= (h_0g_0)\delta(t) + (h_0g_1+h_1g_0)\delta(t-1) + (h_0g_2+h_1g_1+h_2g_0)\delta(t-2) + \dots && (8)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k}\right)\delta(t-n) \equiv \delta(t) && (9)\end{aligned}$$

对比系数有如下方程组：

$$\begin{cases} h_0g_0 = 1 \\ h_0g_1 + h_1g_0 = 0 \\ h_0g_2 + h_1g_1 + h_2g_0 = 0 \\ \dots \end{cases} \tag{10}$$

或者有如下等价形式：

$$\begin{cases} h_0g_0 = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{11}$$

假定 h_k 已知，代入上述方程组有：

$$g_0 = \frac{1}{h_0}, g_1 = -\frac{h_1}{h_0^2}, g_2 = -\frac{h_2}{h_0^2} + \frac{h_1^2}{h_0^3} \tag{12}$$

2. 假设 $h_0 = 1, h_1 = \frac{1}{2}$，而当 $i \geq 2$ 时所有的 $h_i = 0$，求 $g(t)$。

将 $h_0 = 1, h_1 = \frac{1}{2}$ 代入方程组11的前两个方程，可知：

$$g_0 = 1, g_1 = -\frac{1}{2} \tag{13}$$

又因为当 $i \geq 2$ 时，$h_i = 0$，方程组11剩余的每个方程只有前两项非零。事实上，当 $n \geq 1$ 时，总有如下关系：

$$h_0g_n + h_1g_{n-1} = g_n + \frac{1}{2}g_{n-1} = 0 \tag{14}$$

由该递推关系可知 g_n 的通项公式：

$$g_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \tag{15}$$

该通项对任意 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 都成立，因此该系统的单位冲激响应 $g(t)$ 为：

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta(t-kT) \tag{16}$$

3 系统建模

回波产生器的模型可用下图表示。每一个回波都代表了被延迟 T 秒并乘以比例因子 α 后，被反馈回来的 $y(t)$。因为回波总是发生过衰减，所以一般情况下保证 $0<\alpha<1$。

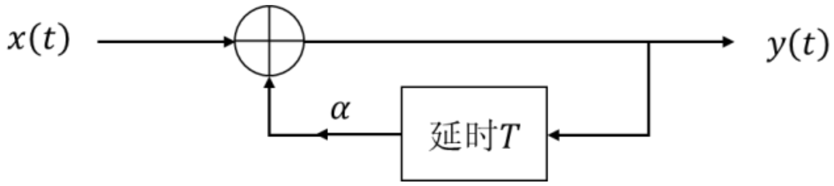

图 1: 回波产生器符号模型

1. 假定系统初始松弛（即若当 $t<0$ 时 $x(t)=0$，则当 $t<0$ 时 $y(t)=0$），求该系统的单位冲激响应。

   由图1中符号模型有如下方程：

$$y(t)=\alpha y(t-T)+x(t) \tag{17}$$

   当 $0\leq t<T$ 时，$y(t-T)=0$，$x(t)=\delta(t)$，于是有：

$$h(t)=\delta(t) \tag{18}$$

   当 $T\leq t<2T$ 时，$y(t-T)=\delta(t-T)$，$x(t)=0$，于是有：

$$h(t)=\alpha\delta(t-T) \tag{19}$$

   当 $2T\leq t<3T$ 时，$y(t-T)=\alpha\delta(t-2T)$，$x(t)=0$，于是有：

$$h(t)=\alpha^2\delta(t-2T) \tag{20}$$

   以此类推，当 $kT\leq t<(k+1)T$ 时有：

$$h(t)=\alpha^k\delta(t-kT) \tag{21}$$

   因此该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 为：

$$h(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT) \tag{22}$$

2. 证明：若 $0<\alpha<1$ 则系统是稳定的，若 $\alpha>1$ 则系统是不稳定的。

   根据22式已知系统的单位冲激响应 $h(t)$，则对于输入 $x(t)$，系统的相应 $y(t)$ 为：

$$\begin{align}
y(t)&=x(t)*h(t) \tag{23}\\
&=x(t)+\alpha x(t-T)+\alpha^2x(t-2T)+\cdots+\alpha^kx(t-kT)+\dots \tag{24}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^kx(t-kT) \tag{25}
\end{align}$$

(a) 当 $0<\alpha<1$ 时，若 $x(t)$ 有界，不妨设为 $|x(t)|\le M$，必定有：

$$\begin{aligned}|y(t)| &\le M(1+\alpha+\alpha^2+\dots)\\ &= M\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\\ &= \frac{M}{1-\alpha}\\ &< +\infty\end{aligned} \tag{26}$$

可知 $y(t)$ 亦有界，因此该系统是稳定的。

(b) 当 $\alpha>1$ 时，即使 $x(t)$ 有界，仍有

$$|y(t)|\to+\infty \quad (t\to+\infty) \tag{27}$$

可知 $y(t)$ 未必有界，因此该系统是不稳定的。

3. 求此时逆系统应有的单位冲激响应 $g(t)$。用相加器、系数相乘器和 T 秒延迟单元构成这个逆系统。

由22可知 $h_k=\alpha^k$，代入关系方程组11中，由于 $h_0=1,h_1=\alpha$，可知：

$$g_0=1,g_1=-\alpha \tag{28}$$

于是对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，总有：

$$g_0h_n+g_1h_{n-1}=1\cdot\alpha^n-\alpha\cdot\alpha^{n-1}=0 \tag{29}$$

因此对于任意的 $i\ge2$，必有 $g_i=0$，因此逆系统的单位冲激响应 $g(t)$ 为：

$$g(t)=\delta(t)-\alpha\delta(t-T) \tag{30}$$

该逆系统的输出方程为：

$$y(t)=x(t)-\alpha x(t-T) \tag{31}$$

于是可以作出如下符号模型：

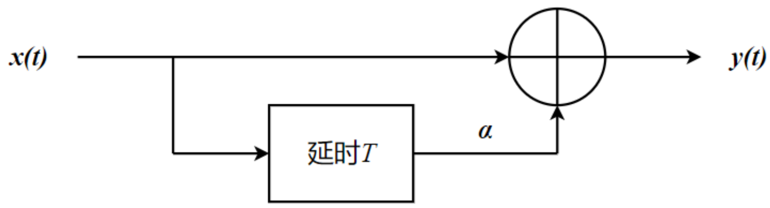

图 2: 回波消除器符号模型

4 仿真模拟

利用 Matlab 的 load 命令将采集到的声音数据 lineup.mat 导入进计算机中。设计一个回音消除系统，把消除回声的信号存入一个向量，并利用 sound 命令试听输入和输出信号，以验证回声消除的效果（文件中共含有 3 个 Matlab 向量 y、y2、y3，各向量的长度均为 7000，采样频率为 8192Hz）。

1. 向量 y 中的语音信号有一次回声，由形如下图的系统生成。

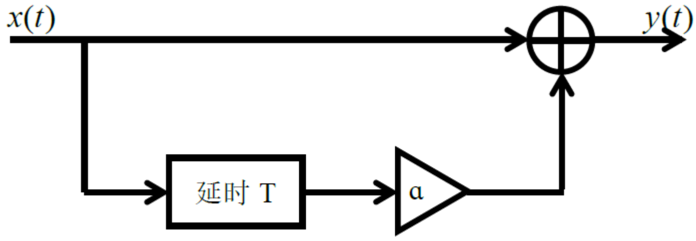

图 3: 一次回声生成系统模型

回声参数已知：$T = 1000$，$\alpha = 0.5$。为便于计算，不考虑该回声的二阶及以上分量。利用相关回声参数，设计一个回声消除系统，消除其中的回声。

逆系统的单位冲激响应 $g(t)$ 已经由16求得，更一般地，对于一次回声和指定参数 T，α，逆系统有如下通用表达式：

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-\alpha)^k \delta(t - kT) \tag{32}$$

为在 Matlab 中实现该逆系统，先设计工具函数 time_shift 实现信号时移：

```
function out = time_shift(in, bias)
last = length(in);
out = in;
if bias > 0
    for i = 1 : last - bias
        out(i, 1) = in(i + bias, 1);
    end
    for i = last - bias + 1 : last
        out(i, 1) = 0;
    end
end
if bias < 0
    for i = 1 - bias : last
        out(i, 1) = in(i + bias, 1);
    end
    for i = 1 : 1 - bias - 1
        out(i, 1) = 0;
    end
end
```

根据逆系统的通用表达式，可以实现指定参数的一次回声消除函数 single_eliminate：

```
function out = single_eliminate(in, period, alpha)
last = length(in);
out = zeros(last, 1);
for k = 0 : last / period
    out = out + (-alpha) ^ k * time_shift(in, -period * k);
```

```
end
```

加载声音数据 lineup.mat，将向量 y 和参数 $T = 1000$，$\alpha = 0$ 传入一次回声消除函数，作出 input 和 output 的波形，并播放声音进行对比：

```
load('lineup.mat');
input = y;
last = length(input);
time = 1 : last;
output = single_eliminate(input, 1000, 0.5);
subplot(2, 1, 1);
plot(time, input);
subplot(2, 1, 2);
plot(time, output);
sound(output);
```

原信号与消除回声后的信号图像如下：

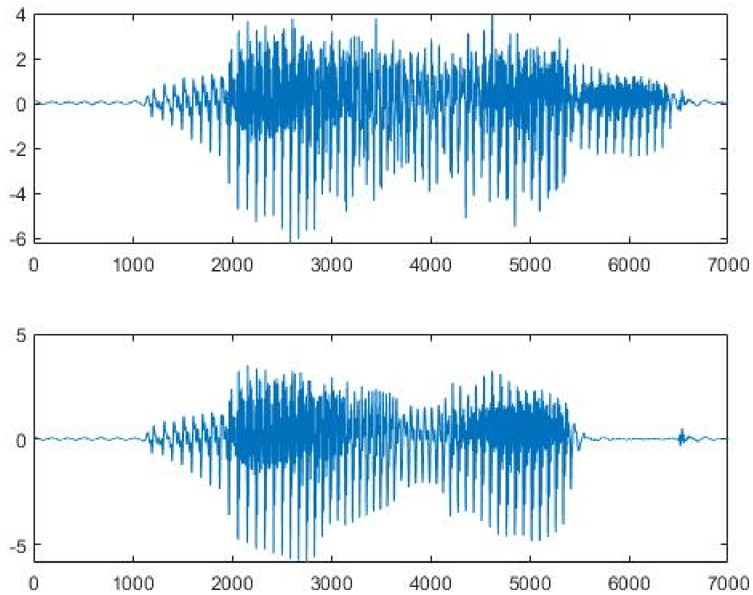

图 4: 原信号与消除回声后信号图像对比

可以看到，消除回声后的信号能量较为集中，在末端几乎不存在能量。播放的声音较为清晰，可知回声已被正确消除。

2. 向量 y2 中的语音信号有一次回声，该回声由形式与上一问中相同的系统生成。为便于计算，不考虑该回声的二阶及以上分量。该语音信号中，回声参数 T，α 未知且与向量 y 中参数不同。请设计程序求出该回声参数，并设计一个回声消除系统，消除其中的回声。

由于回声信号 y2 的参数未知，需要首先计算出 T，α。对于回声时间 T 的估计，考虑输出信

号 y 的自相关函数：

$$R[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}y[m+n]y[m] \tag{33}$$

该函数显然在 $n=0$ 时有最大值，此时时移信号与自身完全重合。此外，在 $n=0$ 两侧应当存在两个对称的峰值 $R[k]=R[-k]$，代表时移信号在 $n=\pm k$ 时与自身有极大的相似性，此时可以断言 k 即为一次回声信号的参数 T。

利用 Matlab 实现并封装自相关函数 self_correlation：

```
function out = self_correlation(in)
last = length(in);
out = zeros(2 * last + 1, 1);
for n = -last : last
    shift = time_shift(in, n);
    out(n + last + 1, 1) = dot(in, shift);
end
```

加载声音数据 lineup.mat，直接调用计算 y2 的自相关函数：

```
load('lineup.mat');
input = y2;
last = length(input);
bias = -last : last;
relevance = self_correlation(input);
plot(bias, relevance);
```

作出自相关函数的信号图像：

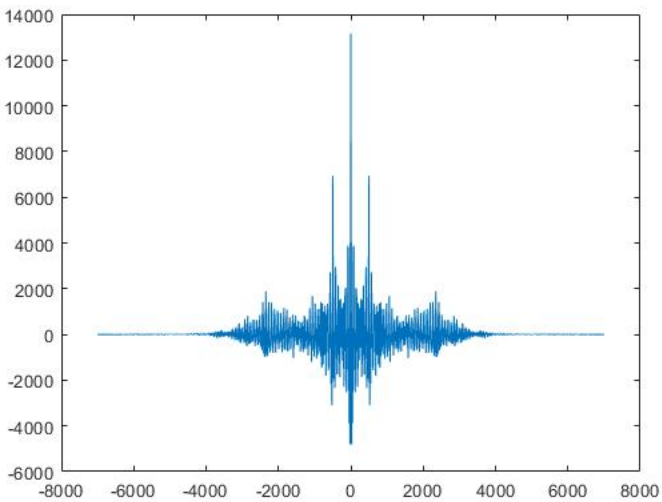

图 5: 一次回声信号的自相关函数

观察两侧峰值可知参数 $T=501$，在此基础上求另一参数 α，考虑逆系统的表达式：

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-\alpha)^k y(t-kT) \tag{34}$$

由于信号长度有限，不妨假定当 $|y(t-kT)|>0$ 时总共存在 n 个周期，结合边界条件有如下高次方程：

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k y[(n-1-k)T+m]=0 \tag{35}$$

其中对任意的 $1\le m\le T-1$，上述方程均成立，因此可以通过求解高次方程计算 α。但事实上，声音信号存在误差，难以通过方程的求解精确得到 α，因此考虑构造损失函数：

$$L(\alpha)=\frac{1}{T-1}\sum_{m=1}^{T-1}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k y[(n-1-k)T+m]\right| \tag{36}$$

求解如下优化问题：

$$\min L(\alpha) \quad \text{s.t.}\ \ 0<\alpha<1 \tag{37}$$

在 Matlab 中构建损失函数，以 0.01 的步长枚举 α 完成求解：

```
load('lineup.mat');
input = y2;
last = 7000;
period = 501;
total = floor(last / period);
coef = zeros(1, total);
best_alpha = 0;
best_error = 1e10;
for step = 0 : 100
    alpha = 0.01 * step;
    error = 0;
    capacity = last - (total - 1) * period;
    for bias = 1 : capacity
        for k = 1 : total
            coef(1, k) = (-1) ^ (total - k) * input((k - 1) * period + bias, 1);
        end
        error = error + abs(polyval(coef, alpha));
    end
    error = error / capacity;
    if error < best_error
        best_alpha = alpha;
        best_error = error;
    end
end
disp(best_alpha);
```

求解得到参数 $\alpha = 0.7$，调用 single_eliminate 函数进行一次回声消除：

```
load('lineup.mat');
input = y2;
last = length(input);
time = 1 : last;
output = single_eliminate(input, 501, 0.7);
subplot(2, 1, 1);
plot(time, input);
subplot(2, 1, 2);
plot(time, output);
sound(output);
```

原信号与消除回声后的信号图像如下：

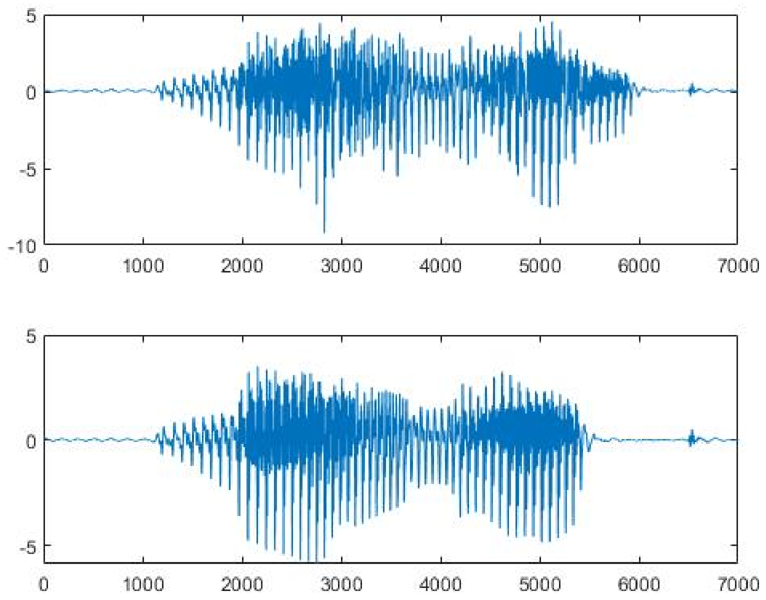

图 6: 原信号与消除回声后信号图像对比

消除回声后的信号图像与前问类似，播放的声音较为清晰，可知回声已被正确消除。

3. 向量 y3 中的语音信号有两次回声，由形如下图的系统生成。

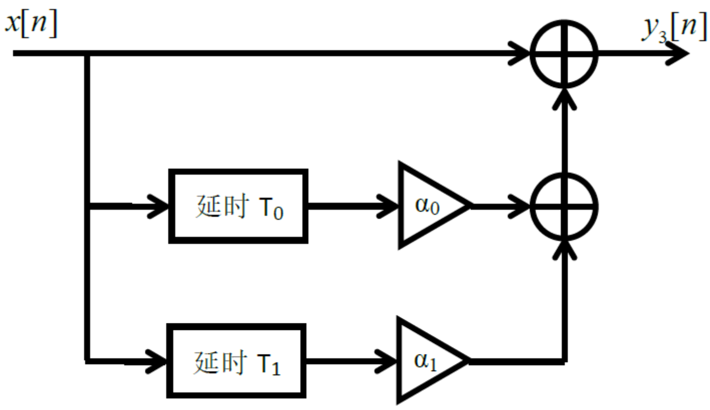

图 7: 两次回声生成系统模型

两次回声的参数 T_0，α_0，T_1，α_1 各不相同且均未知。为便于计算，不考虑各次回声的二阶及以上分量。请设计程序求出该信号中两次回声的参数，并设计一个回声消除系统，消除其中的回声。

为求出延时参数 T_0，T_1，调用 self_correlation 计算自相关函数：

```
load('lineup.mat');
input = y3;
last = length(input);
bias = -last : last;
relevance = self_correlation(input);
plot(bias, relevance);
```

作出自相关函数的信号图像：

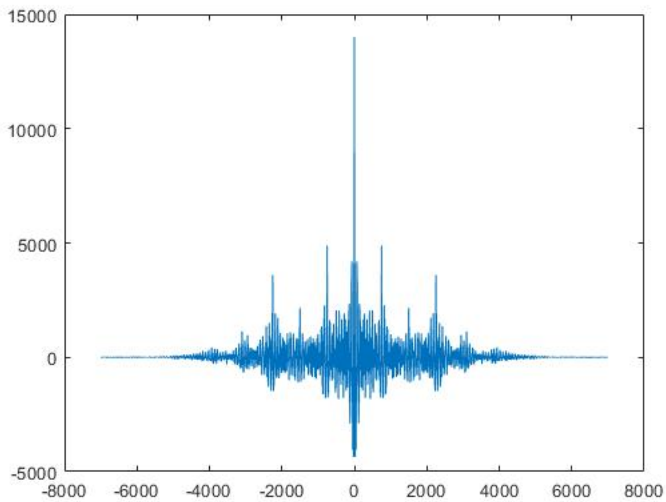

图 8: 两次回声信号的自相关函数

观察两侧峰值可知 $T_0 = 751$，$T_1 = 2252$，在求解 α_0，α_1 之前，首先利用迭代系统实现两次回声消除函数 double_eliminate：

```
function out = double_eliminate(in, period_0, alpha_0, period_1, alpha_1)
last = length(in);
out = zeros(last, 1);
for t = 1 : last
    if t <= period_0
        out(t, 1) = in(t, 1);
    elseif period_0 < t && t <= period_1
        out(t, 1) = in(t, 1) - alpha_0 * out(t - period_0, 1);
    else
        out(t, 1) = in(t, 1) - alpha_0 * out(t - period_0, 1) - alpha_1 * out(t - period_1,
      1);
    end
end
```

注意到正确消除回声后的信号 $x'(t)$ 在时间序列的末端几乎不存在能量，利用这一性质构造损失函数：

$$L(\alpha_0, \alpha_1) = \frac{1}{T} \sum_{k=(n-1)T}^{nT} \left| y[n] * g_{(\alpha_0, \alpha_1)}[n] \right| \tag{38}$$

求解如下优化问题：

$$\min L(\alpha_0, \alpha_1) \qquad \text{s.t.} \;\; 0 < \alpha_0, \alpha_1 < 1 \tag{39}$$

在 Matlab 中构建损失函数，以 0.01 的步长分别枚举 α_0，α_1 完成求解：

```
load("lineup.mat");
input = y3;
last = length(input);
period_0 = 751;
period_1 = 2252;
best_alpha_0 = 0;
best_alpha_1 = 0;
best_error = 1e10;
for i = 0 : 100
    for j = 0 : 100
        alpha_0 = 0.01 * i;
        alpha_1 = 0.01 * j;
        output = double_eliminate(input, period_0, alpha_0, period_1, alpha_1);
        error = 0;
        for k = 6000 : 7000
            error = error + abs(output(k, 1));
        end
        if error < best_error
            best_alpha_0 = alpha_0;
            best_alpha_1 = alpha_1;
            best_error = error;
```

```
        end
    end
end
disp(best_alpha_0);
disp(best_alpha_1);
```

求解得到参数 $\alpha_0 = 0.75$，$\alpha_1 = 0.60$，调用 double_eliminate 函数进行两次回声消除：

```
load("lineup.mat");
input = y3;
last = length(input);
output = double_eliminate(input, 751, 0.75, 2252, 0.60);
subplot(2, 1, 1);
plot(input);
subplot(2, 1, 2);
plot(output);
sound(output);
```

原信号与消除回声后的信号图像如下：

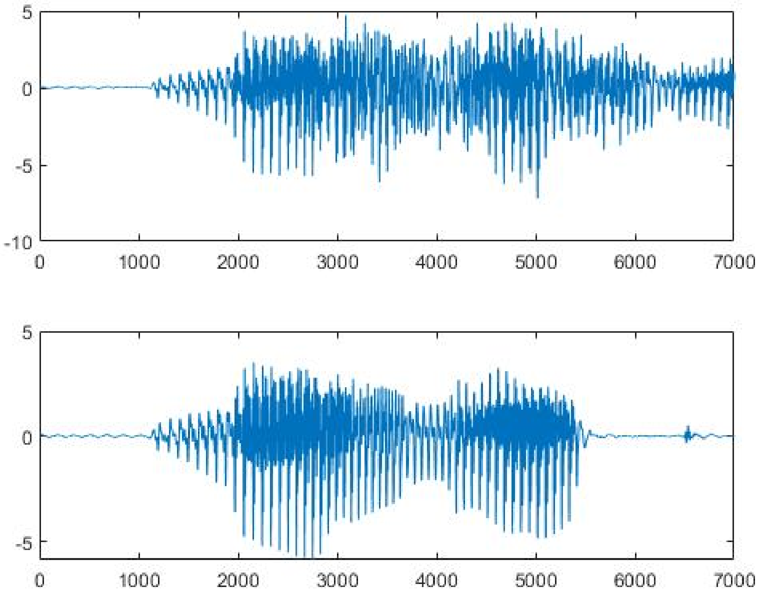

图 9: 原信号与消除回声后信号图像对比

消除回声后的信号图像与前问类似，播放的声音较为清晰，可知回声已被正确消除。

参考文献

[1] 胡光锐, 徐昌庆. 信号与系统 [M]. 上海: 上海交通大学出版社,2013.

[2] 胡光锐, 徐昌庆, 宫新保. 信号与系统习题精解与考研指导 [M]. 上海: 上海交通大学出版社,2013.

[3] Matlab 官方文档.Mathworks 帮助中心.https://ww2.mathworks.cn/help/matlab/index.html

[4] 自相关函数的定义、计算方法及应用.CSDN 博客 2022 年 6 月 27 日.https://blog.csdn.net/weixin_40583722/article/details/125491088.

[5] 回声信号检测系统设计. 原创力文档 2015 年 5 月 22 日.https://max.book118.com/html/2016/1220/74688485.shtm.

[6] 基于 Matlab 的回波信号的产生与消除. 道客巴巴 2013 年 4 月 25 日.https://www.doc88.com/p-7062907417869.html.