

倒立摆问题是控制系统工程中的经典问题。如图 1 为倒立摆系统，包括质量为 M 的小车，质量为 m 、长度为 $2l$ 、质心转动惯量为 I 的摆，小车被固定在轨道上，其与轨道间的摩擦系数为 μ ，重力加速度为 g 。摆的一端被通过一可 360 度自由旋转的轴固定在小车上，假设摆杆为匀质刚性杆，不计此轴的摩擦阻力和系统内未给出的其他摩擦阻力。控制倒立摆的目的是通过对小车施加力使之运动，利用惯性使摆杆直立，即达到平衡状态。

有关现实生活中的实际倒立摆系统的起始状态与控制目标，可参考视频

<https://www.bilibili.com/video/BV1o4411179m>

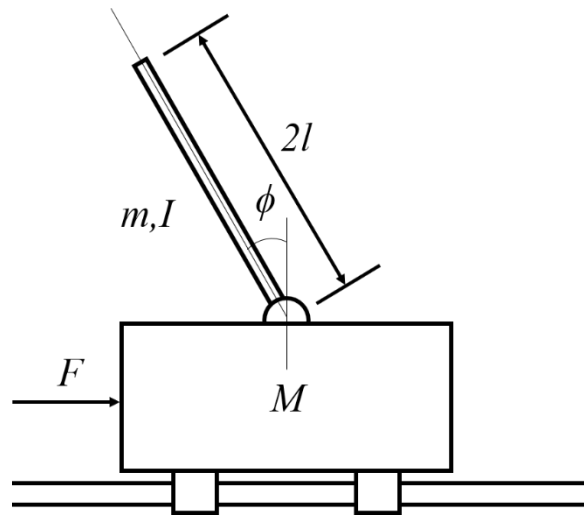


图 1 倒立摆系统

- 1) 假定在摆杆处于垂直（稳定）状态时向小车输入一微小扰动力 F ，根据系统的物理原理写出系统运动关于变量 M 、 m 、 l 、 I 、 g 、 x 、 F 、 ϕ 、 μ 的微分方程。

提示一：在摆杆于平衡位置附近摆动一较小角度 ϕ 时，可假设 $\cos \phi = 1$ ， $\sin \phi = \phi$ ，

$(\frac{d\phi}{dt})^2 = 0$ ；小车的摩擦力可用 $\mu \frac{dx}{dt}$ 表示， x 为小车位移。

提示二：本系统包括两个部分，共有两个相互联系的微分方程，可以从摆杆、小车的受力情况分别展开分析。