2023 年全国高等院校数学能力挑战赛（决赛）真题

一、单选题（20 题）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}]=$（　　）.

A．0　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．$\frac{1}{3}$　　　　D．1

【答案】D

【参考解析】

因为$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}]=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan 2x^3-\tan x^3}=$（　　）.

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】B

【参考解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan 2x^3-\tan x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{\frac{\sin x^3}{\cos 2x^3\cos x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cos 2x^3\cos x^3\cdot\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\sin x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

3．已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，$f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）．

A．不可导　　　　B．可导且 $f'(0)\neq 0$　　　　C．取得极大值　　　　D．取得极小值

【答案】D

【参考解析】

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}=2\cdot 0=0$$ ，所以 0 是驻点.

又由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}=2>0$，由保号性可知，$f(x)-f(0)>0$，故在 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得极小值.

4．已知定积分 $\int_a^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}$，求常数 $a=$（　　）.

A． $\ln 2$　　　　B． $2\ln 2$　　　　C． $\pi\ln 2$　　　　D． $2\ln\pi$

【答案】A

【参考解析】

令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(t^2+1),dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$，故

$$\int_a^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int_{\sqrt{e^a-1}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt=2\arctan x\Big|_{\sqrt{e^a-1}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$，即可解得 $a=\ln 2$.

5．已知无界区域上的二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$ 收敛，则 m 的取值范围为（　　）.

A． $m>1$　　　　B． $m\leq 1$　　　　C． $m>2$　　　　D． $m\leq 2$

【答案】A

【参考解析】

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2m}}rdr=2\pi\int_1^{+\infty}r^{1-2m}dr$$ ；

当 $m=1$ 时，上式 $=2\pi\ln r\Big|_1^{+\infty}=+\infty$，发散；

当 $m\neq 1$ 时，上式 $=2\pi\cdot\frac{r^{2-2m}}{2-2m}\Big|_1^{+\infty}$，欲使积分收敛，则需满足 $\lim\limits_{r\to+\infty}r^{2-2m}$ 存在，故有 $2-2m<0$ 即可，

即 $m>1$.

6．对于函数 $f(x,y)=x^2-y^2$, 点 $(0,0)$（　　）.

A．不是驻点　　　　　　　　　B．是驻点却非极值点

C．是极小值点　　　　　　　　D．是极大值点

【答案】B

【参考解析】

容易验证 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，故 $(0,0)$ 是驻点，但对 $(0,0)$ 的任一去心邻域都有：

$f(x,0)=x^2>0, f(0,y)=-y^2<0$，故 $(0,0)$ 不是极值点.

7．曲线 C:$\begin{cases} x+2y=z \\ x=y^2+z^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面的投影曲线方程为（　　）.

A．$\begin{cases} x=y^2+z^2 \\ z=0 \end{cases}$　　　　B．$\begin{cases} x=y^2+(x+2y)^2 \\ z=0 \end{cases}$

C．$\begin{cases} x=y^2+(2x+y)^2 \\ z=0 \end{cases}$　　　　D．$\begin{cases} x=2y^2+z^2 \\ z=0 \end{cases}$

【答案】B

【参考解析】

两式消去 z 得曲线的投影柱面方程为：$x=y^2+(x+2y)^2$，故曲线 C:$\begin{cases} x+2y=z \\ x=y^2+z^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面的投影曲线方程为 $\begin{cases} x=y^2+(x+2y)^2 \\ z=0 \end{cases}$.

8．设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x}dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cot x}dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos x}dx$，则 I,J,K 的大小关系是（　　）.

A．$I<J<K$　　　　　　　　B．$I<K<J$

C．$J<I<K$　　　　　　　　D．$K<J<I$

【答案】B

【参考解析】

当 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$，$0\le\sin x\le\cos x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1<\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，$y=e^x$ 单增，$e^{\sin x}\le e^{\cos x}<0<e^{\cot x}$，

由定积分的性质 $I < K < J$.

9．已知曲线 $L: y=\frac{1}{2}x^2$ 其中 $x \in (0,1)$，则 $\int_l 6xds =$（　　）.

A． 3　　　B． $4\sqrt{2}-2$　　　C． $2\sqrt{2}+2$　　　D． 2

【答案】B

【参考解析】

$$\int_l 6xds == \int_0^1 6x \cdot \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^1 6x \cdot \sqrt{1+x^2}dx = 3\int_0^1 \sqrt{1+x^2}d(1+x^2) = 2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 4\sqrt{2}-2$$

10．下列哪项可能是 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx$ 的近似值（　　）.

A. 0.529　　　B. 0.415　　　C. 0.265　　　D. 0.113

【答案】C

【参考解析】

$0 \le x \le \frac{1}{2}$，$e^{-\frac{1}{4}} \le e^{-x^2} \le 1$，由估计大小性质 $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx \le \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$，$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \approx 0.282$，

$e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots$，

$e^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8} = 0.625$，$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.176$，$0.176 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx < 0.282$，故选 C.

11．极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}) =$（　　）.

A． $\frac{3}{8}$　　　B． $\frac{3}{2}$　　　C． $\frac{1}{3}$　　　D． $\frac{3}{4}$

【答案】D

【参考解析】

令 $S_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$，则 $\frac{1}{3}S_n = \frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}++\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$，

两式相减得：$\frac{2}{3}S_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$，

故 $S_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4\times 3^{n+1}}-\dfrac{n}{2\times 3^n}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3}{4}$.

12．已知 Ω 是由椭球面 $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 所围成的闭区域，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=$（　　）.

A．$\dfrac{72}{5}\pi$　　B．$\dfrac{36}{5}\pi$　　C．$\dfrac{32}{5}\pi$　　D．$\dfrac{16}{5}\pi$

【答案】A

【参考解析】

由截面法（先二后一法或坐标轴投影法）知 $\Omega:\begin{cases}D_z: x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1-\dfrac{z^2}{9}\\ -3\le z\le 3\end{cases}$，故

$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz==\int_{-3}^{3}dz\iint_{D_{xy}}z^2dxdy=\int_{-3}^{3}z^2dz\iint_{D_z}dxdy\ =\int_{-3}^{3}2\pi z^2(1-\dfrac{z^2}{9})dz=\dfrac{72}{5}\pi$（其中椭圆 D_z 的面积为 $\pi ab=2\pi(1-\dfrac{z^2}{9})$）

13．$x=r\sin\theta,\quad y=r\cos\theta$，$\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=$（　　）.

A．$-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　B．r　　C．θ　　D．$\dfrac{1}{x^2+y^2}$

【答案】A

【参考解析】

$\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{vmatrix}$，方程 $x=r\sin\theta,\quad y=r\cos\theta$ 分别对 x、y 求偏导得：

$1=r_x\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta_x,\ 0=r_y\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta_y,$

$0=r_x\cos\theta-r\sin\theta\cdot\theta_x,\ 1=r_y\cos\theta-r\sin\theta\cdot\theta_y,$

解得 $r_x=\dfrac{\sin\theta}{r},\theta_x=\dfrac{\cos\theta}{r^2},r_y=\dfrac{\cos\theta}{r},\theta_y=-\dfrac{\sin\theta}{r^2}$，故 $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

故 $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{r}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14．设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n(f(\frac{1}{n})-1)=$（　　）.

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】A

【参考解析】

当 x=0 时，带入方程可确定 y=1．则

$$\lim_{n\to\infty}n(f(\frac{1}{n})-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)\ .$$

方程两端对 x 求导得：$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy')$，将 x=0，y=1 代入即得 $f'(0)=y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=1$.

15．设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,......)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为（　　）.

A．$(-1,1]$　　B．$[-1,1)$　　C．$[0,2)$　　D．$(0,2]$

【答案】C

【参考解析】

因为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,......)$ 无界，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$，且当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，故 $x=2$ 是幂级数的发散点，且收敛中心为 $x=1$，由阿贝尔定理可知，幂级数的收敛半径不超过 1．又由于设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以 $x=0$ 时，级数收敛，由阿贝尔定理可知，幂级数的收敛半径不小于 1．故收敛半径为 1，收敛域为 $[0,2)$.

16．设 $f(z)=z^2+1$，$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2Rz,R>0\}$，则 $\lim\limits_{R\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega}f(z)dV}{R^3}=$（　　）.

A．$\frac{4}{3}\pi$　　B．$\frac{1}{3}\pi$　　C．$\frac{3}{4}\pi$　　D．$\frac{2}{3}\pi$

【答案】A

【参考解析】

在球面坐标系下：$\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 2R\cos\varphi\end{cases}$，故

$$\iiint_{\Omega} f(z)dv=\iiint_{\Omega}(z^2+1)dv=\iiint_{\Omega} z^2dv+\iiint_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}(r^2\cos^2\varphi)\cdot r^2\sin\varphi dr+\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$=\frac{8}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^3$$

故 $\lim\limits_{R\to 0^+}\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} f(z)dV}{R^3}=\dfrac{4}{3}\pi$.

17．设 $z=f(x,y)=\dfrac{\sin x^3y^3\cos e^{\sqrt{y}}-(y-1)\cos x}{1+\sin x^3+\sin(y-1)}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}$ 等于（　　）.

A． -1　　　　B． $\cos\sqrt{3}$　　　　C． $\sin\sqrt{3}$　　　　D． 5

【答案】A

【参考解析】

因为 $f(0,y)=\dfrac{1-y}{1+\sin(y-1)}$，且

$$f_y(0,1)=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\dfrac{1-y}{1+\sin(y-1)}-0}{y-1}=-\lim_{y\to 1}\frac{1}{1+\sin(y-1)}=-1.$$

18．极限 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2r^2}e^{xy^2}\cos(x^3+y)dxdy=$（　　）.

A． $\dfrac{3}{4}\pi$　　　　B． 0　　　　C． π　　　　D． 2π

【答案】D

【参考解析】

显然被积函数在积分区域上连续，有积分中值定理可知：

存在点 $(\xi,\eta)\in D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2r^2\}$,使得

$$\iint_D e^{xy^2}\cos(x^3+y)dxdy=e^{\xi\eta^2}\cos(\xi^3+\eta)\cdot\sigma_D=e^{\xi\eta^2}\cos(\xi^3+\eta)\cdot 2\pi r^2,$$

因此$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2r^2} e^{xy^2}\cos(x^3+y)dxdy = =\lim\limits_{r\to 0}\frac{e^{\xi\eta^2}\cos(\xi^3+\eta)\cdot 2\pi r^2}{r^2}=\lim\limits_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}} 2\pi e^{\xi\eta^2}\cos(\xi^3+\eta)=2\pi$.

19．微分方程$2e^x\tan ydx=(e^x-1)\sec^2 ydy$的通解是（　　）.

A．$\tan y=C(e^x-1)^2$　　B．$\tan y=C_1(e^x-1)^2+C_2$

C．$\cot y=C(e^x-1)^2$　　D．$\cot y=C_1(e^x-1)^2+C_2$

【答案】A

【参考解析】

微分方程是可分离变量类型，分离变量的：$(\tan y+\cot y)dy=\frac{2e^x}{e^x-1}dx$，两边积分得：

$(-\ln\cos x+\ln\sin x)=2\ln(e^x-1)+\ln C$．整理得通解为：$\tan y=C(e^x-1)^2$．

20．函数$F(x,y,z)=\frac{1}{4}(\frac{x^2}{\pi}+\frac{y^2}{4}+\frac{\sqrt{3}z^2}{9})$在条件$x+y+z-2=0$下的最小值（　　）.

A．$\frac{1}{\pi+2+3\sqrt{3}}$　　B．$\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$　　C．$\frac{1}{\pi-2+3\sqrt{3}}$　　D．不存在

【答案】B

【参考解析】

拉格朗日函数为$L(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{4}(\frac{x^2}{\pi}+\frac{y^2}{4}+\frac{\sqrt{3}z^2}{9})+\lambda(x+y+z-2)$，可求得拉格朗日函数的驻点为：$x_0=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}},y_0=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}},z_0=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}},\lambda=-\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，是唯一驻点，故所求函数在条件下的最小值为$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$．

二、多选题（7题）

1．下列极限求解正确的是（　　）.

A． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{4}$　　B． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$

C． $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$　　D． $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{2}{1+\ln x}}=e^2$

【答案】BCD

【参考解析】

A 选项： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$；

B 选项： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))-x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}；$$

C 选项： $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}\left\{[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}\right\}^{-1}=e^{-1}$；

D 选项： $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{2}{1+\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln\sin x}{1+\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\cot x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x}{\tan x}}=e^2$

2．已知函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$，则（　　）.

A． $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$　　B． $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$

C． $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,+\infty)$　　D． $f(x)$ 的极大值为 $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{e})$

【答案】AD

【参考解析】

$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$，可知函数定义域为 R，且

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+x^2e^{-x^4}-x^2e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，令 $f'(x)=0$ 解得驻点为 x=0，且易判断：函数的单调递增区间为（0，+∞），单调递减区间为（-∞，0），f(0)是函数的极大值，且为 $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{e})$.

3．已知曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$，点 $M_0(1,-2,1)$，则（　　）.

A. $\frac{dz}{dx}\Big|_{M_0}=-1$

B. 曲线Γ在点M_0处的切向量为$(2,1,-1)$

C. 曲线Γ在点M_0处的切线方程为$\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

D. 曲线Γ在点M_0处的法平面方程为$x+z=0$

【答案】AC

【参考解析】

A 选项：方程组对 x 求全导可得：$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\cdot\frac{dz}{dx}=0,1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0$，解得

$\frac{dy}{dx}\Big|_{M_0}=\frac{z-1}{y-z}\Big|_{M_0}=0$，$\frac{dz}{dx}\Big|_{M_0}=\frac{1-y}{y-z}\Big|_{M_0}=-1$；

B 选项：切向量为$k(1,\frac{dy}{dx}\Big|_{M_0},\frac{dz}{dx}\Big|_{M_0})=k(1,0,-1)$；

C 选项：切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$，即$\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$；

D 选项：法平面方程为：$(x-1)-(z-1)=0$，即$x-z=0$.

4．若$x>0$，则下列不等式正确的有(　　).

A. $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$　　B. $\ln(1+x)<x$

C. $2^x\geq 1+x\sqrt{2^{x-1}}$　　D. $\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

【答案】ABD

【参考解析】

令$g(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$，$g'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{(1-x)(1+x)-1}{x+1}=\frac{-x^2}{x+1}<0$，故$g(x)$在

$(0,+\infty)$上单调递减，故$g(x)<g(0)=0$，故 A 选项正确；

令$h(x)=x-\ln(1+x)$，$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$，故$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$h(x)>h(0)=0$，故 B 选项正确；

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{2}<1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$，故 C 选项错误；

令 $f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\sin x$，则 $f^{'}(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x$，令 $g(x)=f^{'}(x)$，

$g^{'}(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$，令 $k(x)=g^{'}(x)$，则 $k^{'}(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，令 $m(x)=k^{'}(x)$，则

$m^{'}(x)=x-\sin x>0$，所以 $k^{'}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $k^{'}(x)>k^{'}(0)=0$，同理可得

$f^{'}(x)>f^{'}(0)=0$，所以以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，故 D 选项正确.

5．设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$，$n$ 为自然数，则（　　）.

A．$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$　　　　B．$a_n\le a_{n-1}\le a_{n-2}$

C．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$　　　　D．$a_n=\frac{3n+3}{8}$

【答案】ABC

【参考解析】

令 $x=\sin t$，则

$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n t-\sin^{n+2}t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}tdt$，由于：

令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$，当 $n=0$ 时，$I_0=\frac{\pi}{2}$；当 $n=1$ 时，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$；当 $n\ge 2$ 时，

由分部积分法得：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x$

$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\sin^{n-1}x=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}xdx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$，即有 $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$，且

$I_{n+2}=(n+1)(I_n-I_{n+2})$，则有 $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$；

又因为 $a_n=I_n-I_{n+2}$，则有 $a_n=\frac{1}{n+2}I_n$；又因为 $a_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\frac{1}{n-1}I_n$，因此 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$.

显然，$x\in(0,1)$ 时有：$x^{n+1}<x^n$，$x^{n+1}\sqrt{1-x^2}<x^n\sqrt{1-x^2}$，从而

$a_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\,dx<\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx=a_n$，故数列$\{a_n\}$单调递减，且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$从而有$\dfrac{n-1}{n+2}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$，由夹逼准则即可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$．

6．$f_n(x)=x\cdot n^k\cdot e^{-nx}$在$0\le x<+\infty$上一致收敛，则$k$的值可以为（　　）.

A．2　　　　B．1　　　　C．0　　　　D．-1

【答案】CD

【参考解析】

当$0\le x<+\infty$时有，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$，$\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}xn^k e^{-nx}$．由

$f_n'(x)=n^k e^{-nx}(1-nx)$可知，$f_n(x)$在$x=\dfrac{1}{n}$取到最大值，所以$\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=n^{k-1}e^{-1}$，于是

当$k-1<0$，即$k<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}n^{k-1}e^{-1}=0$；当$k-1\ge 0$，即$k\ge 1$时，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}n^{k-1}e^{-1}=\begin{cases}+\infty, & k>1,\\ e^{-1}, & k=1\end{cases}$. 故$k<1$时，$f_n(x)$在$0\le x<+\infty$上一致收敛.

7．设正值函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，$F(x)=\int_1^x[(\dfrac{2}{x}+\ln x)-(\dfrac{2}{t}+\ln t)]f(t)dt$，则（　　）.

A．$F'(x)=\dfrac{-2+x}{x^3}\int_1^x f(t)dt$　　　　B．$\int_1^x f(t)dt>0$

C．$F(x)$在点$x=2$处取得极小值　　　　D．$F(x)$在点$x=2$处取得最小值

【答案】BCD

【参考解析】

$F(x)=\int_1^x[(\dfrac{2}{x}+\ln x)-(\dfrac{2}{t}+\ln t)]f(t)dt=(\dfrac{2}{x}+\ln x)\int_1^x f(t)dt-\int_1^x(\dfrac{2}{t}+\ln t)f(t)dt$　（x>1），则

$F'(x)=(-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x})\int_1^x f(t)dt+(\dfrac{2}{x}+\ln x)f(x)-(\dfrac{2}{x}+\ln x)f(x)=(-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x})\int_1^x f(t)dt$；

因为正值函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，故$\int_1^x f(t)dt>0$；

令$F'(x)=0$解得唯一驻点为x=2，且已验证1<x<2时，$F'(x)<0$；x>2时，$F'(x)>0$，故$F(x)$在点$x=2$处取得极小值，也是最小值.

三、填空题（3题）

1．设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}$，则 f 的可导范围为________.

【答案】$(0,+\infty)$

【参考解析】

①当 x=0 时，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，条件收敛；

②当 x<0 时，此时级数的通项不趋于 0，发散；

③当 x>0 时，运用绝对值级数的比值审敛法可容易判断，该级数收敛，且绝对收敛.

在绝对收敛范围（0，+∞）内，级数是可逐项求导的，即 f 的可导范围为 $(0,+\infty)$.

2．$u=x^2-y^2+2xy$ 在有界区域 $x^2+y^2\le 1$ 上的最小值为________.

【答案】$-\sqrt{2}$

【参考解析】

在圆内（$x^2+y^2<1$）为无条件极值，在边界（$x^2+y^2=1$）上是条件极值．在圆内（$x^2+y^2<1$），令 $u_x=2x+2y=0,u_y=-2y+2x=0$ 得唯一驻点 $(0,0)$，且 $u(0,0)=0$；在边界（$x^2+y^2=1$）上，令 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$（$0\le\theta\le 2\pi$），则有：

$u=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\cos 2\theta+\sin 2\theta=\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})$，故当 $\theta=\frac{5}{8}\pi$ 时取得最小值 $-\sqrt{2}$.

3．设函数 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=$________.

【答案】A

【参考解析】

因为连续，所以对 $\forall a,b\in[0,+\infty)$，$f(x)$ 在 $[a,b]\subset[0,+\infty)$ 上有界，又因为 $\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K_1$，当 $x>K_1$ 时，恒有 $|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}$，取 $x>K_1+1$，则存在自然数使得 $n\le x-K_1<n+1$．记 $l=x-K_1-n$，则 $0\le l<1$，且 $x=K_1+l+n$，

于是 $\dfrac{f(x)}{x}-A=\dfrac{n}{x}[\dfrac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A]+\dfrac{f(K_1+l)}{n}-\dfrac{K_1+l}{x}A$. 下面估计上式右边三项的绝对值，(1)：$\because \dfrac{n}{x}\le 1$，

$$\therefore \left|\frac{n}{x}[\frac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A]\right|\le\left|\frac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A\right|=\left|\frac{f(K_1+l+n)-f(K_1+l)}{n}-A\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}[f(K_1+l+i)-f(K_1+l+i-1)]-A\right|$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(K_1+l+i)-f(K_1+l+i-1)-A|<\frac{1}{n}\cdot n\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3};$$

(2)：因为 $f(x)$ 在 $[K_1,K_1+1]$ 上有界，即 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\le M$. 故 $\exists K_2=\dfrac{3M}{\varepsilon}$，当 $x>K_2$ 时，恒有 $\left|\dfrac{f(K_1+l)}{x}\right|<\dfrac{M}{K_2}=\dfrac{\varepsilon}{3}$；

(3)：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{K_1+l}{x}A=0$，故 $\exists K_3>0$，使当 $x>K_3$ 时恒有 $\left|\dfrac{f(K_1+l)}{x}A\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$；

综合（1）、（2）、（3）可得：任意 $\varepsilon>0$，取 $K=\max\{K_1+1,K_2,K_3\}$，则当 $x>K$ 时，恒有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

注：2024 年第五届全国高等院校数学能力挑战赛（决赛）考试题型由往届“单选题、多选题和填空题”变化为“单选题、多选题和解答题”（决赛共设置 22 道题，其中 15 道单选题、5 道多选题和 2 道解答题）。