2023 年全国高等院校数学能力挑战赛（初赛）真题

一、单选题（13 题）

1．定积分 $4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx=$（　　）.

A．0　　　　B．$\frac{\pi}{4}$　　　　C．$\frac{3\pi}{16}$　　　　D．$\frac{3\pi}{4}$

【答案】D

【参考解析】

令 $t=-x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则：

$$I=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\sin^4 t\mathrm{d}t=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^{-t}}+1}\sin^4 t\mathrm{d}t$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\sin^4 t\mathrm{d}t=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x-I$$

$$I=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)]\mathrm{d}x$$

$$=[x-\sin 2x+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{4}\sin 4x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}$$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\tan^2 x}-1}{\sin^2 x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）.

A． -2　　　　B． 2　　　　C． -6　　　　D． 6

【答案】C

【参考解析】

由函数连续的定义：若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，那么函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，以及等价无穷小的替换求极限，则：

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\tan^2 x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}a\tan^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{2}a=3$$，即 $a=-6$.

3．在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$ 的切平面，该切平面与三个坐标面所围成的四面体的最小体积为（　　）.

A． $6\sqrt{3}$　　　　B． $12\sqrt{3}$　　　　C． $6\sqrt{2}$　　　　D． $12\sqrt{2}$

【答案】B

【参考解析】

设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为椭球面上一点，令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{4^2}-1$，

则 $F_x(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{2x_0{}^2}{2^2}, F_y(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{2y_0{}^2}{3^2}, F_z(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{2z_0{}^2}{4^2}$，

过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的切面方程为 $\dfrac{x_0{}^2}{2^2}(x-x_0)+\dfrac{y_0{}^2}{3^2}(y-y_0)+\dfrac{z_0{}^2}{4^2}(z-z_0)=0$，

即 $\dfrac{xx_0}{2^2}+\dfrac{yy_0}{3^2}+\dfrac{zz_0}{4^2}=1$，

该切平面在三个轴上的截距各为 $x=\dfrac{2^2}{x_0}, y=\dfrac{3^2}{y_0}, z=\dfrac{4^2}{z_0}$，

所围面积记为 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}{6x_0y_0z_0}$，

在条件$\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{9}+\frac{z_0{}^2}{16}=1$下求$V$ 的最小值，

令$U=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$，$G=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda(\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{9}+\frac{z_0{}^2}{16}-1)$

由$\begin{cases} G'_{x_0}=0 \\ G'_{y_0}=0 \\ G'_{z_0}=0 \\ \frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{9}+\frac{z_0{}^2}{16}-1=0 \end{cases}$ 得：$\begin{cases} \frac{1}{x_0}+\frac{\lambda x_0}{2}=0 \\ \frac{1}{y_0}+\frac{2\lambda y_0}{9}=0 \\ \frac{1}{z_0}+\frac{\lambda z_0}{8}=0 \\ \frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{9}+\frac{z_0{}^2}{16}-1=0 \end{cases}$

消去λ得唯一解$x_0=\frac{2}{\sqrt{3}},y_0=\frac{3}{\sqrt{3}},z_0=\frac{4}{\sqrt{3}}$，根据实际意义，可知最小体积为：

$V=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}{6x_0y_0z_0}=12\sqrt{3}$

4．设$f(x)=\ln(\int_0^{+\infty}e^{-|t-x|-t}dt)$，则$f(x)$的最大值等于（　　）.

A． 0　　　　B． -1　　　　C． $-\frac{1}{2}$　　　　D． $-\frac{1}{4}$

【答案】C

【参考解析】

由于

$$e^{f(x)}=\int_0^{+\infty}e^{-|t-x|-t}dt=\int_0^{x}e^{-x}dt+\int_x^{+\infty}e^{x-2t}dt=(x+\frac{1}{2})e^{-x}$$

令$\frac{d}{dx}e^{f(x)}=0$得$x=\frac{1}{2}$，代入后得答案为 C.

5．设$z=f(x,y)=\frac{\sin x^3y^3\cos e^{\sqrt{y}}-(y-1)\cos x}{1+\sin x^3+\sin(y-1)}$，则$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}$等于（　　）.

A． -1　　　　B． $\cos\sqrt{3}$　　　　C． $\sin\sqrt{3}$　　　　D． 5

【答案】A

【参考解析】

根据多元函数偏导数的定义 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{\frac{1-y}{1+\sin(y-1)}-0}{y-1}=-1$

6．若 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x}，则 $\int f'(x)dx=$（　　）.

A．$e^{-2x}+C$　　　B．$-2e^{-2x}$　　　C．$-2e^{-2x}+C$　　　D．$-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

【答案】C

【参考解析】

据题，记 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=e^{-2x}$，则

$f(x)=F'(x)=-2e^{-2x}$，则 $\int f'(x)dx=-2e^{-2x}+C$

7．设 $\int_{-1}^{1}3f(x)dx=9$，$\int_{-1}^{3}f(x)dx=6$，则 $\int_{1}^{3}f(x)dx=$（　　）.

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

【答案】C

【参考解析】

根据定积分的区间可加性，则

$\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx$，则 $\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{3}f(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx=3$

8．如果 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 则 $f'(0)=$（　　）.

A．0　　　B．$+\infty$　　　C．1　　　D．e

【答案】C

【参考解析】

根据函数导数的定义，以及用等价无穷小替换计算极限有：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

9．设 $x=\sqrt{t},y=2t^3-6\sqrt{t}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$（　　）．

A． $60\ t^2$　　　　B． $30t\sqrt{t}$　　　　C． $30t^2$　　　　D． $60t\sqrt{t}$

【答案】A

【参考解析】

$\frac{dy}{dx}=\frac{(2t^3-6\sqrt{t})'}{(\sqrt{t})'}=\frac{6t^2-3t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=6(2t^{\frac{5}{2}}-1)$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6(2t^{\frac{5}{2}}-1)'}{(\sqrt{t})'}=\frac{30t^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=60t^2$

10．设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}=$（　　）．

A． $f'(0)$　　　　B． $f(x_0)$　　　　C． 0　　　　D． $2f(x_0)f'(x_0)$

【答案】D

【参考解析】

由于函数在一点可导与连续的关系，知 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则必定在该点连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+f(x_0)][f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}[f(x)+f(x_0)]\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2f(x_0)f'(x_0)$$

11．下列级数中条件收敛的是（　　）．

A． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}$　　　　B． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{1}{n}$

C． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+4}{2n-1}$　　　　D． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\sqrt{3n+1}}$

【答案】D

【参考解析】

A 选项，根据比较审敛法，对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}\right|$，与 P 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 作比较，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}$ 是绝对收敛的；

B 选项，根据比较审敛法，由于 $\left|\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$，P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{1}{n}\right|$ 收敛，

知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{1}{n}$ 是绝对收敛的；

C 选项，根据级数收敛的必要条件，$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{3n+4}{2n-1}\neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+4}{2n-1}$ 是发散的；

D 选项，根据莱布尼茨定理，易知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\sqrt{3n+1}}$ 是收敛的，根据调和级数的敛散性，

以及级数收敛的性质，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n}}$ 是发散的，根据正项级数的比较审敛法，

$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} > \frac{1}{\sqrt{3n+3n}} = \frac{1}{\sqrt{6n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{2}{\sqrt{3n+1}}\right|$ 是发散的；

综上，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\sqrt{3n+1}}$ 是条件收敛的.

12．$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\sqrt{1+2x^2}-1}=$（　　）.

A．0　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．2　　　　D．∞

【答案】B

【参考解析】

根据等价无穷小的替换方法

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\sqrt{1+2x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{\frac{1}{2}\cdot 2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cdot 2x^2}=\frac{1}{2}$$

13．$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)dx=$（　　）.

A．0　　　　B．$\frac{\pi^2}{4}$　　　　C．$-\frac{\pi^2}{4}$　　　　D．$\frac{\pi^2}{2}$

【答案】C

【参考解析】

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x)dx = -\frac{\pi^2}{4}$$

二、判断题（16 题）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}]=\frac{1}{2}$．（　　）

【答案】错

【参考解析】

本题考查数列极限的夹逼准则，对数列进行放缩，则有：

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}]=1\ne\frac{1}{2}$

2．设 $\varphi:[0,+\infty)\to R$ 为可导的凹函数，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{'}(x)=0$，则对任意的 $\alpha>1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[\alpha\varphi(x)-\varphi(\alpha x)]=+\infty$．（　　）

【答案】对

【参考解析】

因为 φ 为凹函数，所以 φ' 单调递增，又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$，所以 $\boldsymbol{\varphi}'(x)<0$ 且 φ 为单调递减，所以对 $\forall x>0$，有

$$\begin{aligned}\alpha\varphi(x)-\varphi(\alpha x)&=(\alpha-1)\varphi(x)+\varphi(x)-\varphi(\alpha x)\\&=(\alpha-1)\varphi(x)-(\alpha-1)x\varphi'(x+\theta(\alpha-1)x)\\&\ge(\alpha-1)\varphi(x)-(\alpha-1)x\varphi'(x)\end{aligned}$$

下面将证明

$$\lim_{x\to+\infty}(\varphi(x)-x\varphi'(x))=+\infty$$

用反证法，若不然，注意到$\varphi(x)-x\varphi'(x)$单调递增，所以$\exists a\in R$使得$\varphi(x)-x\varphi'(x)$单调收敛到a.

因为$\lim x\to\infty\ \varphi(x)=+\infty$，所以$\exists x_0>1$使得

$$\varphi(x)>\max(1,a+1),\forall x\geq x_0$$

此时对$\forall x>x_0,\exists\xi\in(x_0,x)$，使得

$$\frac{\varphi(x)}{x}-\frac{\varphi(x_0)}{x_0}=-\frac{\varphi(\xi)-x\varphi'(\xi)}{\xi^2}\geq-\frac{\max(0,a)}{\xi^2}>-\frac{\max(0,a)}{x_0}.$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\geq\frac{\varphi(x_0)}{x_0}-\frac{\max(0,a)}{x_0}>0.$$

另一方面，由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$，所以对$\forall\varepsilon>0,\exists x>1$使得

$$\varphi'(x)<\varepsilon,\forall x\geq x_0.$$

由于从而对$\forall x>x_0$，有

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)\leq\varphi(x_0)+\varphi(x_0)(x-x_0)<\varphi(x_0)+\varepsilon(x-x_0).$$

于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x_0)+\varepsilon(x-x_0)}{x}=\varepsilon.$$

由ε的任意性可知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=0$，这就产生矛盾，因此所证极限等式成立，综上

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha\varphi(x)-\varphi(\alpha x))\geq\lim_{x\to+\infty}(\alpha-1)(\varphi(x)-x\varphi'(x))=+\infty.$$

命题成立.

3．设$f(x)=x(x-1)(x-3)(x-7)(x-9)$，则$f'(x)=0$在$[0,10]$内根的个数为 4 个．（　　）

【答案】对

【参考解析】

令$f(x)=0$，得根$x_1=0,x_2=1,x_3=3,x_4=7,x_5=9$，则函数$f(x)$在区间$[0,1],[1,3],[3,7],[7,9]$上满足罗尔定理条件，由罗尔定理可知至少有 4 个根分别在区间$(0,1),(1,3),(3,7),(7,9)$内，又因为$f'(x)$为

一元四次函数，根最多 4 个，综上本题根为 4 个.

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{an^2+bn+c}=0$，其中 a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$．（　　）

【答案】错

【参考解析】

令 $a=0,b=c=1$，也能满足极限成立.

5．$\dfrac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}dt=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\cos x=\cos^2 x$．（　　）

【答案】错

【参考解析】

$\dfrac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}dt=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\cos x=\left|\cos x\right|\cdot\cos x$

6．设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n}{(\sqrt{x_n}+1)^2}$，$n\geq 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛．（　　）

【答案】对

【参考解析】

因为 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{(\sqrt{x_n}+1)^2}=\dfrac{x_n}{x_n+1+2\sqrt{x_n}}<x_n$，且 $x_n>0$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，故 $\{x_n\}$ 的极限存在，并设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geq 0$（保号性），且易求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

7．设 a 为常数,且 $\int_0^1\left(2x+a\right)dx=3$，则 $a=-2$．（　　）

【答案】错

【参考解析】

$\int_0^1\left(2x+a\right)dx=(x^2+ax)\Big|_0^1=1+a=3$，$a=2$.

8．已知 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=3t+t^3\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48$．（　　）

【答案】对

【参考解析】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3t+t^3)'}{(\arctan t)'}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$$，则.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3[(1+t^2)^2]'}{(\arctan t)'}=12t(1+t^2)^2$$，

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.12t(1+t^2)^2\right|_{t=1}=48$$

9．已知函数 $f(x)$ 连续，则函数 $\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$ 为偶函数．（　　）

【答案】对

【参考解析】

记 $F(x)=\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$， $F(-x)=\int_0^{-x} t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$，

令 $u=-t$，则 $F(-x)=\int_0^x u\left[f(u)+f(-u)\right]du$，则

$F(x)=F(-x)$，即函数 $\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$ 是偶函数

10．设 $f(x)$ 为可微函数，且 $f(\cos x)=\sin^4\frac{x}{2}$, 则 $f''(x)=\frac{1}{3}$．（　　）

【答案】错

【参考解析】

由 $f(\cos x)=\sin^4\frac{x}{2}=(\frac{1-\cos x}{2})^2=\frac{1}{4}(1-\cos x)^2$

得 $f(x)=\frac{1}{4}(1-x)^2, f'(x)=-\frac{1}{2}(1-x), f''(x)=\frac{1}{2}.$

11．黎曼可积是勒贝格可积的充分不必要条件．（　　）

【答案】对

【参考解析】

对于定义在闭区间的函数，如果它是黎曼可积的，则它勒贝格可积．具有广义黎曼积分的函数不一

定勒贝格可积，例如 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的广义黎曼积分是收敛的，但不是勒贝格可积的.

12．已知 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 在对称区间上的定积分值为 0．（　　）

【答案】对

【参考解析】

根据定积分的性质可知若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

13．若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定不可导．（　　）

【答案】对

【参考解析】

根据导数的定义：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，若该极限不存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导．要使 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则必须 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

14．过点 $M_1(1,1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ ，$M_2(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},0)$ 的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 z 轴所夹的角是锐角．（　　）

【答案】错

【参考解析】

记沿 z 轴正向的方向向量为 $\vec{k}=\{0,0,1\}$ ，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$

记 $\vec{k},\overrightarrow{M_1M_2}$ 的夹角为 θ，$\cos\theta=\dfrac{\vec{k}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}}{|\vec{k}|\cdot|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=135^{o}$ 是钝角.

15．等式 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}=\int_{-2}^{2}\dfrac{x+|x|}{2+x}dx$ 成立．（　　）

【答案】错

【参考解析】

左边$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$，

右边$=\int_{-2}^{0}\dfrac{0}{2+x}dx+\int_{0}^{2}\dfrac{2x}{2+x}dx=2\int_{0}^{2}\dfrac{2+x-2}{2+x}dx=2(x-2\ln|2+x|)\Big|_{0}^{2}=4(1-\ln 2)$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}\neq\int_{-2}^{2}\dfrac{x+|x|}{2+x}dx$

16．若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)\neq f(b)$，则一定不存在$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$．（　　）

【答案】错

【参考解析】

取$f(x)=x^{2}$，$f(x)$在$[-1,2]$连续，在$(-1,2)$内可导，且$f(-1)\neq f(2)$，但有$f'(0)=0$．

注：2024年第五届全国高等院校数学能力挑战赛（初赛）考试题型由往届单选题和判断题变化为单选题、判断题和多选题（初赛共设置26道题，其中13道单选题、10道判断题、3道多选题）。