软件工程经济学

第七单元 软件项目经济评价方法

（六）

本单元内容

- 软件项目决策方法
  - 动态规划方法

软件项目动态规划

当软件项目的各个方案的评价指标值域为连续（或片段连续）且不同指标间存在复杂非线性映射关系时，或指标随时间变化出现阶段性关联时，可以采用动态规划的方法求解最好方案。

多阶段决策问题中，一般来说是与时间有关的，决策依赖于当前状态，又随即引起状态的转移，一个决策序列就是在变化的状态中产生出来的，故有“动态”的含义，称这种解决多阶段决策最优化问题的方法为动态规划方法。

动态规划

指标函数：

$$V_{k,n}(s_k,u_k,s_{k+1},u_{k+1},\cdots,s_{n+1})$$

$$=\varphi_k[s_k,u_k,V_{k+1,n}(s_{k+1},u_{k+1},\cdots,s_{n+1})]$$

可递推

指标函数形式： 和、 积

最优函数：

$$f_k(s_k)=\underset{\{u_k,\cdots,u_n\}}{opt}V_{k,n}(s_k,u_k,\cdots,s_{n+1})$$

效益

建立动态规划模型的步骤

1、划分阶段

划分阶段是运用动态规划求解多阶段决策问题的第一步，在确定多阶段特性后，按时间或空间先后顺序，将过程划分为若干相互联系的阶段。对于静态问题要人为地赋予“时间”概念，以便划分阶段。

2、正确选择状态变量

选择变量既要能确切描述过程演变又要满足无后效性，而且各阶段状态变量的取值能够确定、一般地，状态变量的选择是从过程演变的特点中寻找。

3、确定决策变量及允许决策集合

通常选择所求解问题的关键变量作为决策变量，同时要给出决策变量的取值范围。即确定允许决策集合。

4、确定状态转移方程

根据k阶段状态变量和决策变量，写出k+1阶段状态变量，状态转移方程应当具有递推关系。

5、确定阶段指标函数和最优指标函数，建立动态规划基本方程

阶段指标函数是指第k阶段的收益，最优指标函数是指从第k阶段状态出发到第n阶段末所获得收益的最优值，最后写出动态规划基本方程。

以上五步是建立动态规划数学模型的一般步骤。由于动态规划模型与线性规划模型不同，动态规划模型没有统一的模式，建模时必须根据具体问题具体分析，只有通过不断实践总结，才能较好掌握建模方法与技巧。

资源分配问题

现有数量α（万元）的资金，计划分配给n个工厂，用于扩大再生产。假设：χ_i为分配给第i个工厂的资金数量（万元）；g_i（x_i）为第i个工厂得到资金后提供的利润值（万元）。问题是如何确定个工厂的资金数，使得总的利润为最大。

据此，有： $$\max Z=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i \le a \\ x_i \ge 0 i = 1.2.\Lambda\ .n\end{cases}$$

令：$f_k(x)$=以数量为x的资金分配给前**k**个工厂

所得到的最大利润值。

用动态规划求解，就是就$f_n(\alpha)$的问题。

当k=1时: $f_1(x)=g_1(x)$　　（因为只给一个工厂）

当$1<k \le n$时：其递推关系如下：

设：y为分给第k个工厂的资金（其中$0 \le y \le x$），

此时还剩x-y（万元）的资金需要分配给前k-1

个工厂，如果采取最优策略，则得到的最大利

润为$f_{k-1}(x-y)$，因此总的利润为:

$$g_k(y)+f_{k-1}(x-y)$$

所以，根据动态规划的最优化原理，有下式：

$$f_k(x) = \max_{0 \le y \le x}\{g_k(y) + f_{k-1}(x-y)\}$$

其中$k = 2.3.\cdots.n$

如果是α是以万元资金分配单位，则式中的y只去非负整数0,1,2,...,x。
上式可变为：

$$f_k(x) = \max_{y=0,1,2,\cdots,x}\{g_k(y) + f_{k-1}(x-y)\}$$

例 设国家拨给60万元投资，供四个工厂扩建使用，每个工厂扩建后的利润与投资额的大小有关，投资后的利润函数如下表所示。

投资 / 利润	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

解：依据题意，是要求 $f_4(60)$ 。

按顺序解法计算。

第一阶段：求 $f_1(x)$。显然有 $f_1(x) = g_1(x)$，得到下表

投资 \ 利润	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x) = g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60

第二阶段：求 $f_2(x)$。此时需考虑第一、第二个工厂如何进行投资分配，以取得最大的总利润。

$$f_2(60) = \max_{y=0,10,\cdots,60}\{g_2(y) + f_1(60-y)\}$$

$$
=\max\left\{\begin{array}{l}
g_2(0)+f_1(60)\\
g_2(10)+f_1(50)\\
g_2(20)+f_1(40)\\
g_2(30)+f_1(30)\\
g_2(40)+f_1(20)\\
g_2(50)+f_1(10)\\
g_2(60)+f_1(0)
\end{array}\right\}
=\max\left\{\begin{array}{l}
0+85\\
20+85\\
40+80\\
50+65\\
55+50\\
60+20\\
65+0
\end{array}\right\}=120
$$

最优策略为（**40**，**20**），此时最大利润为**120**万元。

同理可求得其它 $f_2(x)$ 的值。

$$f_2(50) = \max_{y=0,10,\cdots,50} \{g_2(y) + f_1(50-y)\}$$

$$= \max \begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(50) \\ g_2(10) + f_1(40) \\ g_2(20) + f_1(30) \\ \boxed{g_2(30) + f_1(20)} \\ g_2(40) + f_1(10) \\ g_2(50) + f_1(0) \end{Bmatrix} = 105$$

最优策略为（**30**，**20**），此时最大利润为**105**万元。

$$f_2(40)=\max_{y=0,10,\cdots,40}\{g_2(y)+f_1(40-y)\}=90$$

最优策略为（20，20），此时最大利润为90万元。

$$f_2(30)=\max_{y=0,10,20,30}\{g_2(y)+f_1(30-y)\}=70$$

最优策略为（20，10），此时最大利润为70万元。

$$f_2(20)=\max_{y=0,10,20}\{g_2(y)+f_1(20-y)\}=50$$

最优策略为（20，0），此时最大利润为50万元。

$$f_2(10)=\max_{y=0,10,}\{g_2(y)+f_1(10-y)\}=20$$

最优策略为（10，0）或（ 0， 10 ），此时最大利润为20万元。

$$f_2(0)=0$$

最优策略为（0，0），最大利润为0万元。 得到下表

利润 \ 投资	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	(0,0)	(10,0) (0,10)	(20,0)	(20,10)	(20,20)	(30,20)	(40,20)

第三阶段：求 $f_3(x)$。此时需考虑第一、第二及第三个工厂如何进行投资分配，以取得最大的总利润。

$$f_3(60) = \max_{y=0,10,\cdots,60} \{g_3(y) + f_2(60-y)\}$$

$$
=\max\left\{\begin{array}{l} g_3(0)+f_2(60) \\ g_3(10)+f_2(50) \\ g_3(20)+f_2(40) \\ g_3(30)+f_2(30) \\ g_3(40)+f_2(20) \\ g_3(50)+f_2(10) \\ g_3(60)+f_2(0) \end{array}\right\} = \max\left\{\begin{array}{l} 0+120 \\ 25+105 \\ 60+90 \\ 85+70 \\ 100+50 \\ 110+20 \\ 115+0 \end{array}\right\} = 155
$$

最优策略为（20，10，30），最大利润为155万元。

同理可求得其它 $f_3(x)$ 的值。得到下表

投资 \ 利润	0	10	20	30	40	50	60
$f_3(x)$	0	25	60	85	110	135	155
最优策略	(0,0,0)	(0,0,10)	(0,0,20)	(0,0,30)	(20,0,20)	(20,0,30)	(20,10,30)

第四阶段：求 $f_4(60)$。即问题的最优策略。

$$f_4(60) = \max_{y=0,10,\cdots,60} \{ g_4(y) + f_3(60-y) \}$$

$$
=\max\begin{Bmatrix} g_4(0)+f_3(60) \\ g_4(10)+f_3(50) \\ g_4(20)+f_3(40) \\ g_4(30)+f_3(30) \\ g_4(40)+f_3(20) \\ g_4(50)+f_3(10) \\ g_4(60)+f_3(0) \end{Bmatrix} =\max\begin{Bmatrix} 0+155 \\ 25+135 \\ 40+110 \\ 50+85 \\ 60+60 \\ 65+25 \\ 70+0 \end{Bmatrix} =160
$$

最优策略为（20，0，30，10），最大利润为160万元。

本单元结束，谢谢大家！！！