DCS440 最优化理论

第一次作业：凸集与凸函数

11 月 22 日（星期五）23:59 前提交

1. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸集。**证明**：对任意 k 个向量 $x_1, \cdots, x_k \in C$，以及 $\theta_1, \cdots, \theta_k \in \mathbb{R}$ 满足 $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, $\theta_i \geqslant 0$，都有 $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$。（注：凸集的定义要求此式在 $k = 2$ 时成立，这里需要证明对任意 $k \geq 2$ 都成立）

2. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为线性方程组的解集, 即

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \right\}$$

   其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$。**证明**：C 是凸集。

3. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为二次不等式的解集，即

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top A x + b^\top x + c \leqslant 0 \right\},$$

   其中 $A \in \mathbf{S}^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$。**证明**: 若 $A \succeq 0$（即 A 是半正定矩阵），则 C 是凸集。

4. 确定以下函数的凹凸性：

   (a) $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i,\ \ x_i \in \mathbb{R}_{++},\ \ i = 1, \cdots, n$；

   (b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$；

   (c) $f(x_1, x_2) = x_1 / x_2,\ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$；

5. 设 $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，则复合函数 $f := h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) := h(g(x)) = h(g_1(x), \cdots, g_m(x)),$$
$$\operatorname{dom} f := \left\{ x \in \operatorname{dom} g \mid g(x) \in \operatorname{dom} h \right\}.$$

   证明：若 g_i 是凹函数，h 是凸函数，且 h 关于其每个分量是非增的，则复合函数 $f := h \circ g$ 是凸函数。