Université Paul Sabatier

Master 2 DC - **Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision** - 2020-21

Documents autorisés : notes de cours

1 Complexité (6 points)

Rappel : Une formule φ en FNC (forme normale conjonctive) est une conjonction de clauses, c'est-à-dire $\varphi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ où chaque clause C_i est une disjonction de littéraux. Une formule ψ en FND (forme normale disjonctive) est une disjonction de termes, c'est-à-dire $\psi = T_1 \vee \ldots \vee T_m$ où chaque terme T_i est une conjonction de littéraux. SAT est le problème de décider si une formule φ en FNC est satisfiable. Un problème Π est NP-complet si (1) $\Pi \in$ NP (c'est-à-dire, il existe un vérificateur de complexité polynomiale), et (2) pour chaque problème $\Pi_0 \in$ NP, il existe une réduction polynomiale de Π_0 vers Π. SAT est NP-complet.

Σ_2 est la classe des problèmes qui consiste à déterminer la satisfiabilité de formules de la forme $\exists x = (x_1, \ldots, x_m) \forall y = (y_1, \ldots, y_n) R(x, y)$, où R est une propriété que l'on peut vérifier en temps polynomial. PSPACE est la classe de problèmes de décision que l'on peut résoudre en utilisant un espace mémoire de taille polynomiale.

a) La formule $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (\overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3)$ en FNC, est-elle satisfiable ?
Réponse :

Non ! Par recherche exhaustive.

b) Expliquez pourquoi vérifier la satisfiabilité d'une formule ψ en FND peut se faire en temps polynomial.
Réponse :

$\psi = T_1 \vee \ldots \vee T_m$ *est satisfiable si et seulement s'il existe un terme* T_i *(*$i \in \{1, \ldots, m\}$*) qui ne comporte pas de littéraux contradictoire (*x_j *et* $\overline{x_j}$*). Vérifier cette propriété peut se faire en temps polynomial.*

c) Soit P le problème de déterminer si $\varphi \wedge \psi$ est satisfiable où φ est une formule en FNC et ψ est une formule en FND. Démontrez que P est NP-complet.
Réponse :

Il suffit de démontrer (1) $P \in NP$ *et (2)* $SAT \leq P$.
(1) Etant donné x*, on peut vérifier en temps polynomial si* $\varphi(x) \wedge \psi(x) = \top$*, donc* $P \in NP$.
(2) Pour une formule φ *en FNC, il suffit de choisir* $\psi = \top$ *pour que* P *soit équivalent à déterminer la satisfiabilité de* φ*. Donc,* $SAT \leq P$.

d) Soit Q le problème de déterminer si une formule de la forme

$$(\exists x \ \varphi(x)) \wedge (\forall y \ \psi(y))$$

est satisfiable où φ est une formule en FNC et ψ est une formule en FND. Sans justification, et en supposant P $\neq$ NP, indiquez si (a) $Q \in$ NP, (b) $Q \in$ co-NP, (c) $Q \in \Sigma_2$, (d) $Q \in$ PSPACE.
Réponse :

(a) Non. (b) Non. (c) Oui. (d) Oui.

2 Possibilités, préférences et théorie du vote

Questions de cours (3 points)

— **Question** 1 : Quelles sont les differences entre la théorie des possibilités et celle des probabilités ? **Réponse** :

La théorie des possibilé est qualitative (pas besoin d'avoir des nombres) ; la somme des possibilités ne donne pas 1 ; la théorie des possibilités utilise 2 mesures (N et Pi) ; elle est plus adaptée à la représentation de l'ignorance, la théorie des probabilités est plus adaptéev à la representation de phénomènes aléatoires / hazards

— **Question** 2 : Toute mesure de probabilité est elle une mesure de certitude de type "Bel" au sens de la théorie des fonctions de croyance ? Si oui le montrer, si pas donner un contre exemple

Réponse :

oui - c'est une fonction Bel sur une bpa qui ne contient que des singletons

Exercice - Théorie du vote - règle de Borda (4 points)

On considère le problème de vote avec quatre candidats Schulz, Tsipras, Juncker, and Keller-Bové, et sept votants ; le profil de vote est le suivant

3 votants : Juncker $>$ Tsipras $>$ Schulz $>$ Keller-Bové ;

2 votants : Tsipras $>$ Schulz $>$ Keller-Bové $>$ Juncker ;

2 votants : Schulz $>$ Keller-Bové $>$ Juncker $>$ Tsipras.

a) Determiner la relation de preference sur les candidats obtenue par la règles de la majorité (règle de Condorcet) et montrer qu'elle contient plusieurs cycles.

Réponse :

La table suivante donne pour chaque pair de candidats le nombre de votants qui préfère le candidat indiqué en ligne au candidat indiqué en colonne. On a donc la relation $\succ$:

	Schulz	*Tsipras*	*Juncker*	*Keller-Bové*	
Schulz	-	*2*	*4*	*7*	*Schulz $\succ$ Juncker, Schulz $\succ$ Keller-Bové*
Tsipras	*5*	-	*2*	*5*	*Tsipras $\succ$ Schulz, Tsipras $\succ$ Keller-Bové*
Juncker	*3*	*5*	-	*3*	*Juncker $\succ$ Tsipras*
Keller-Bové	*0*	*2*	*4*	-	*Keller-Bové $\succ$ Juncker*

Il y a trois cycles : Schulz Juncker Tsipras, Schulz Keller-Bové Juncker Tsipras, Juncker Tsipras Keller-Bové.

b) Determiner l'ordre sur les candidats obtenu par la règle de Borda
Réponse :

Borda(Schulz) = 3 × 1 + 2 × 2 + 2 × 3 = 13
Borda(Tsipras) = 3 × 2 + 2 × 3 + 2 × 0 = 12.
Borda(Juncker) = 3 × 3 + 2 × 0 + 2 × 1 = 11.
Borda(Keller-Bové) = 3 × 0 + 2 × 1 + 2 × 2 = 7.
Donc : Schulz $\succ$ Tsipras $\succ$ Juncker $\succ$ Keller-Bové.

c) Pour ce problème, il existe un candidat dont le retrait inverse cet ordre (toujours avec la règle de Borda). Quel est ce candidat ?
Quelle est la propriété formelle qui est dans cet exemple violée par la règle de Borda ?

Réponse :

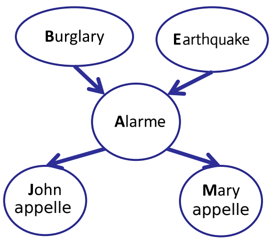
Borda(Schulz) = 3 × 1 + 2 × 2 + 2 × 3 = 13
Borda(Tsipras) = 3 × 2 + 2 × 3 + 2 × 0 = 12.
Borda(Juncker) = 3 × 3 + 2 × 0 + 2 × 1 = 11.
Borda(Keller-Bové) = 3 × 0 + 2 × 1 + 2 × 2 = 7.
Donc : Schulz $\succ$ Tsipras $\succ$ Juncker $\succ$ Keller-Bové.
si Keller-Bové (le perdant) retire sa candidature, le profil devient
3 votants : Juncker > Tsipras > Schulz ;
2 votants : Tsipras > Schulz > Juncker ;
2 votants : Schulz > Juncker > Tsipras ;

Borda(Schulz) = 3 × 0 + 2 × 1 + 2 × 2 = 5. Borda(Tsipras) = 3 × 1 + 2 × 2 + 2 × 0 = 7.
Borda(Juncker) = 3 × 2 + 2 × 0 + 2 × 1 = 8. Donc : Juncker $\succ$ Tsipras $\succ$ Schulz.
Cet exemple montre que la règle de Borda viole la propriété d'IANC

3 Réseaux Bayésiens (3 points)

En Californie, une alarme s'active dans une maison. Deux raisons sont possibles : un cambriolage (burglary) ou un tremblement de terre (earthquake). Quand l'alarme se déclenche, les deux voisins John et Mary peuvent l'entendre et sachant que je suis absent de ma maison, m'appeler au téléphone. Considérez le réseau Bayésien ci-dessous représentant la situation via 5 variables aléatoires booléennes : B : burglary (cambriolage), E : earthquake, A : alarme, J : John m'appelle, M : Mary m'appelle. Les valeurs vraies ou fausses de chaque variable sont représentées via le nom de la variable en minuscule, précédé d'un '+' (vrai) ou d'un '-' (faux). Ainsi '+b' signifie qu'une cambriolage a lieu.

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

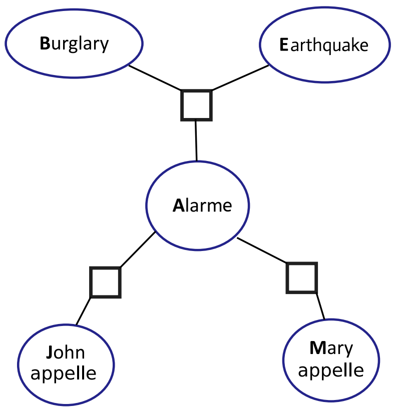
a) Donner le graphe des facteurs du réseau

b) Indiquez comment calculer $P(+b, -e, +a, -j, +m)$ (on ne donnera pas la valeur numérique finale mais on indiquera un produit de 5 nombres), expliquez.

c) On suppose que l'alarme s'est déclenchée (+a). Donner une paire de variables, non affectées, qui soient d-séparées. Expliquez pourquoi. Donnez une paire de variables non d-déparées et expliquez pourquoi.

Réponse :

Le graphe des facteurs est donné ci-dessous :



On a $P(+b, -e, +a, -j, +m) = P(+b) \times P(-e) \times P(+a| + b, -e) \times P(-j| + a) \times P(+m| + a) = 0.001 \times 0.997_{t}imes0.94_{t}imes0.1 \times 0.7$

Si A est observée, on a B d-séparée de J (ou M) car on a une situation head-to-tail, avec la variable centrale, A, observée.

Les variables B et E sont au contraire non d-séparée. A est en situation head-to-head à partir de B et E et A est observée. Toute information B (resp. E) influence la probabilité a posteriori de E (resp. B).

4 Algorithme CDCL (4 points)

On considère 7 clauses c_1 à c_7 indiquées dans l'ordre ci-dessous et qui forme un sous-ensemble d'une base de clauses plus importante.

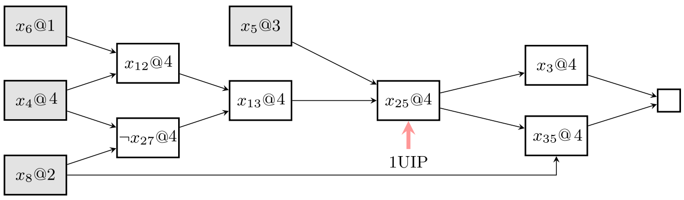
$$\Phi = \{X_{12} \vee \neg X_6 \vee \neg X_4, \quad \neg X_{27} \vee \neg X_4 \vee \neg X_8, \quad X_{13} \vee X_{27} \vee \neg X_{12}, \quad X_{25} \vee \neg X_5 \vee \neg X_{13}, \quad X_3 \vee \neg X_{25}, \quad X_{35} \vee \neg X_{25} \vee \neg X_8 \quad \neg X_{35} \vee \neg X_3\}$$

On pourra représenter vrai par T et faux par F. On décide successsivement d'affecter X_6 à vrai puis X_8 à vrai, puis X_5 à vrai et X_4 à vrai. Un conflit apparaît.

a) Donner le graphe des implications correspondant.
b) Donnez la liste exhaustive des clauses que l'on peut apprendre à partir du conflit observé. Indiquez celles qui correspondent à un "unique implication point" (UIP) et au "First UIP".
c) Pour la clause correspondant au FUIP, quel retour arrière pourra-t-on effectuer et pourquoi ?

Réponse :

Un graphe d'implication possible est :



On voit trois UIP (sommet unique séparant la décision du dernier niveau du conflit) : le premier avec X_{25}, puis X_{13} et enfin X_4 (decision).

On produit les résolvantes en partant du conflit (la liste est incomplète) :

1. $c_7 = \neg X_3 \vee \neg X_{35}$ *résolu avec* $c_6 = X_{35} \vee \neg X_{25} \neg X_8$ *donne*
2. $r_1 = \neg X_3 \vee \neg X_{25} \vee \neg X_8$ *résolu avec* $c_5 = X_3 \vee \neg X_{25}$ *donne*
3. $r_2 = \neg X_{25} \vee \neg X_8$ *(1er UIP) résolu avec* $c_4 = \neg X_{25} 1 \vee \neg X_5 \vee \neg X_{13}$ *donne*
4. $r_3 = \neg X_8 \vee \neg X_5 \vee \neg X_{13}$ *(2nd UIP) résolu avec* $c_3 = X_{13} \vee X_{27} \vee \neg X_{12}$ *donne*
5. $r_4 = \neg X_8 \vee \neg X_5 \vee X_{27} \vee \neg X_{12}$ *résolu avec* $c_2 = \neg X_{27} \vee \neg X_4 \vee \neg X_8$ *donne*
6. $r_5 = \neg X_8 \vee \neg X_5 \vee X_{27} \vee \neg X_6 \vee \neg X_4$ *résolu avec* $c_1 = X_{12} \vee \neg X_6 \vee \neg X_4$ *donne*
7. $r_6 == \neg X_8 \vee \neg X_5 \vee \neg X_6 \vee \neg X_4$ *(dernier UIP)*

La clause associée au FUIP est $r_2 = X_{25} \vee \neg X_8$*. Elle contient bien un seul littéral du niveau de décision courant (5), le littéral* X_{25}*. Comme* X_8 *est le littéral décisdé le plus profond dans cette clause, on peut effectuer un retour arrière à son niveau où l'on applique immédiatement la clause apprise en fixant* X_{25} *à faux.*