KINX9AD1 – IA et Décision – Examen Terminal – 9 janvier 2024

Documents autorisés : 1 feuille manuscrite (recto-verso)

Questions de cours (7 points)

1. Est il vrai que la règle de Borda est Condorcet Cohérente ? si oui le demontrer, si non donner une contre exemple

Réponse :
Non, par exemple avec 20 votants $C > A > B > D$ et 10 votants $A > B > D > C$, C est un gagant de Cordorcet, alors qu'avec la règle de Borda, on obtient $A > C > B$ D
2. Citer trois règles de vote qui violent l'axiom d'independance par rapport aux alternatives irrelevantes ; pour l'une d entre elle, montrer cette violation par un contre exemple

Réponse :
Borda, pluralité, Copland, IRV, scrutin majoritaire à deux tours, etc (en fait, quasi toutes les règles -> cf theorème de Arrow
3. Citer trois règles de vote Condorcet Cohérentes, dont une que vous inventerez.

Réponse :
Copeland, Kramer Simpson, règle de Condorcet

Exercice 1 (7 points)

Soit un satellite dont la mission est d'acquérir des informations sur des zones géographiques. Il peut pointer sur une zone et acquérir des images (action "Mission") ou pointer la station terrestre, décharger les informations acquises et vider sa mémoire (action "Upload"). L'action Mission échouera lorsque la mémoire est pleine.
Dans un modèle simple, on considère deux état normaux "Acquire", " Earth Station" ; et deux états "Memory Full" et "Memory Slow" (car presque pleine). L'effet des actions est le suivant :

- Quel que soit l'état où elle est exécutée l'action "Upload" amène toujours à l'état "Earth Station" ;
- Quand exécutée dans l'état "Earth Station" l'action "Mission" amène toujours à l'état "Acquire" ;
- Quand exécutée dans l'état "Acquire" l'action "Mission" amène à soit à l'état "Acquire", soit, avec une faible probabilité (notée p), à l'état "Memory slow", soit, exceptionnellement (avec une probabilité p^2) à l'état "Memory full" ;
- Quand exécutée dans l'état "Memory slow", l'action "Mission" amène à l'état "Memory full" avec une forte probabilité (notée q) - on reste sinon en l'état "Memory Slow" ;
- Quand exécutée dans l'état "Memory full", l'action "Mission" laisse le satellite dans le même état ;

L'état "Memory full" est évidement à éviter, puisque les images prises dans cet état ne pourront pas être stockées.
1. Modéliser ce problème par un Mdp, et donner les matrices de reward et de transition.
2. A titre d'exemple, proposer des valeurs numériques pour les rewards et les probabilités.
3. Enfin, proposer une politique qui vous semble plausible pour la maximisation de l'utilité espérée (il n'est pas demandé de la justifier algorithmiquement ni par des calculs)

Exercice 2 (3 points)

On considère une utilité additive généralisée u défini sur un espace où les alternatives sont définies par 4 variables A, B, C, D :

$$u(a, b, c, d) = u_1(a, c) + u_2(b, c) + u_3(c, d) + u_4(d, e)$$

où les u_is sont définies par les tables ci-contres. On veut calculer l'alternative optimale, c'est-à-dire la combinaison $abcde$ qui maximise $u(abcde)$.

	u_1
a_1c_1	3
a_1c_2	8
a_2c_1	0
a_2c_2	9

	u_2
b_1c_1	4
b_1c_2	0
b_2c_1	6
b_2c_2	1

	u_3
c_1d_1	4
c_1d_2	0
c_2d_1	1
c_2d_2	1

	u_4
d_1e_1	1
d_1e_2	2
d_2e_1	3
d_2e_2	0

Question 2.1 Calculer la table de u_1^* définie par : $u_1^*(c) = \max_a u_1(a, c)$ pour tout $c \in \underline{C}$. On indiquera dans la table, pour chaque valeur c de C, la valeur a de A qui maximise $u_1(a, c)$.

Question 2.2 Calculer de même la table de u_2^* définie par : $u_2^*(c) = \max_b u_2(b, c)$ pour tout $c \in \underline{C}$; puis la table de $u_3^*(d) = \max_{a,b,c} \big(u_1(a, c) + u_2(b, c) + u_3(c, d)\big)$.

Question 2.3 Quelle alternative maximise u, et quelle est sa valeur ?

Solution

	u_1^*
c_1	$3(a_1)$
c_2	$9(a_2)$

	u_2^*
c_1	$6(b_2)$
c_2	$1(b_2)$

	u_3^*
d_1	$13(c_1)$
d_2	$11(c_2)$

	$u_4^* = u_3^*(d) + u_4(de)$
d_1e_1	$13 + 1 = 14$
d_1e_2	$13 + 2 = 15$
d_2e_1	$11 + 3 = 14$
d_2e_2	$11 + 0 = 11$

Donc on maximise pour d_12e_2, et pour maximiser d_1 il faut c_1, et pour maximiser il faut a_1b_2. Donc l'alternative optimale est $a_1b_2c_1d_1e_2$, d'utilité $3 + 6 + 4 + 2 = 15$

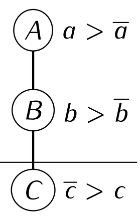
Bar. : 3pt = *0,5pt pour chacune des 3 premières tables, 0,5 pour valeur optimale, 1pt pour reconstitution de l'alternative optimale (-0,25 par valeur fausse).*

Exercice 3 (3 points)

Une site de commerce en ligne vend des objets configurables : il y a 3 options A, B, C, qu'on peut choisir, ou non. Un objet vendu est donc caractérisé par le choix, ou le refus, de chacune de ces 3 options. Pour l'option X, on dénote par la valeur x le choix de l'option, et par la valeur $\overline{x}$ le refus de l'option. On dénote par $\underline{\mathcal{X}}$ l'ensemble des configurations possibles. Ainsi, la combinaison $\overline{a}b\overline{c}$ dénote une configuration ayant l'option b, mais pas les options a ni c. Le site désire apprendre les préférences globales des utilisateurs. On dispose d'un historique de vente, sous la forme d'un tableau donnant, pour chaque configuration possible, le nombre d'objets vendus dans cette configuration :

	abc	$ab\overline{c}$	$a\overline{b}c$	$a\overline{b}\overline{c}$	$\overline{a}bc$	$\overline{a}b\overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}c$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
nb. ventes	3	6	0	5	14	30	9	16

ϕ_0 :



Question 3.1 Quel est le rang moyen de ces objets pour l'ordre représenté par l'arbre de préférence lexicographique ϕ_0 ci-contre ?

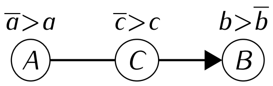
Solution Il y a $3 + 6 + 5 + 14 + 30 + 9 + 16 = 83$ objets. L'ordre correspondant à ϕ_0 est : $ab\overline{c} \succ abc \succ a\overline{b}\overline{c} \succ a\overline{b}c \succ \overline{a}b\overline{c} \succ \overline{a}bc \succ a\overline{b}\overline{c} \succ a\overline{b}c$

$$\begin{aligned}\overline{\text{rank}} &= \big(3\times r(abc)+6\times r(ab\overline{c})+0\times r(a\overline{b}c)+5\times r(a\overline{b}\overline{c})+14\times r(\overline{a}bc)+30\times r(\overline{a}b\overline{c})+9\times r(\overline{a}\overline{b}c)+16\times r(\overline{a}\overline{b}\overline{c})\big)/83\\ &= (3 \times 2 + 6 \times 1 + 5 \times 3 + 14 \times 6 + 30 \times 5 + 9 \times 8 + 16 \times 7)/83 = 450/83 = 5.36\end{aligned}$$

Bar. : 0,5pt = .

Question 3.2 Donnez un arbre de préférence lexicographique qui minimise le rang moyen de cet ensemble d'objets.

Solution On peut ordonner les alternatives par ordre de fréquences d'apparition décroissantes : on veut $\overline{a}b\overline{c} \succ \overline{a}\overline{b}\overline{c} \succ \overline{a}bc \succ \overline{a}\overline{b}c \succ ab\overline{c} \succ a\overline{b}\overline{c} \succ abc \succ a\overline{b}c$; ça correspond à l'abre



Ou construction "top-down" d'un arbre linéaire en calculant les scores :

Score(A) = $(0 \times 69 + 1 \times 14)/1 = 14$, Score($B$) = $(0 \times 53 + 1 \times 30)/1 = 30$, Score($C$) = $(0 \times 57 + 1 \times 26)/1 = 26$

Bar. : 1,5pt = *0,25 / score ok + 0,25 pour ordre vars ok + 0,5 pour tables ; 0,5 si arbre ok mais pas de justif ; 0 si arbre faux et pas de justif.*

Question 3.3 Donnez une utilité additive généralisée qui représente le même ordre sur $\underline{\mathcal{X}}$ que l'ordre représenté par l'arbre trouvé à la question précédente.

Solution 3 variables indépendantes,
par exemple : $u_B(\overline{b}) = 0$, $u_B(b) = 1$; puis $u_C(c) = 0$, $u_C(\overline{c}) = 2$, et enfin $u_A(a) = 0$ et $u_A(\overline{A}) = 4$.

Bar. : 1pt =*-0,25 par inversion.*