TD1- intro au traitement du signal.

ex 1 :

a) $y(n) = x(n) + x(n-1) = T[x(n)]$

linéaire ?

- Linéarité

Un système est dit linéaire si $T[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 \mathrm{T}[x_1(n)] + \alpha_2 \mathrm{T}[x_2(n)]$
$= \alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n)$

Exemple: le système défini par $\mathrm{T}[x(n)] = 2x(n)$ *est un système linéaire*

$T[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \alpha_1 x_1(n-1) + \alpha_2 x_2(n-1)$

$= \alpha_1 (x_1(n) + x_1(n-1)) + \alpha_2 (x_2(n) + x_2(n-1))$

$= \alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n)$ donc linéaire

causalité ?

- Causalité

Un système est dit causal si réponse $T[x(n_0)]$ à *un instant* n_0 *est une combinaison de ses entrées* x *et ou de ses sorties* y *aux instants inférieurs ou égaux à* n_0

Exemple : le système dénifi par $\mathrm{T}[x(n)] = 2x(n-3)$ *est un sytème causal*

$y(n)$ est causal car $y(n)$ est exprimé comme une combinaison des entrés aux instants antérieurs. $(\leq n)$.

invariant par translation ?

- Invariance par décalage

Un système est dit invariant par décalage si pour tout n_0 la réponse à une entrée $x(n-n_0)$ est $y(n-n_0)$, c'est à dire :

si $T[x(n)] = y(n)$ *alors* $T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$

Si un système n'est pas invariant par décalage, il est dit variant par décalage

Exemple : le système défini par $\mathrm{T}[\mathrm{x}(\mathrm{n})] = \mathrm{x}^3(\mathrm{n})$ est *invariant par décalage*
le système défini par $\mathrm{T}[x(n)] = x(n) + u(n)$ est *variant par décalage*

$T[x(n-n_0)] = x(n-n_0) + x(n-n_0-1) = y(n-n_0)$

donc invariant par translation.

stabilité ?

- Stabilité

Un système est dit stable si

la sortie de n'importe quelle entrée bornée, est elle − même bornée

C'est à dire :

si $T[x(n)] = y(n)$ *alors si* $|x(n)| \leq A$ *alors* $|T[x(n)]| \leq B$ *avec* $A, B \in \mathbb{R}+$

Exemple : le système défini par $T[x(n)] = x(n) + 1$ *est un système stable*

soit $x(n)$ tq $|x(n)| \leqslant A \in \mathbb{R} < \infty$

on a : $|y(n)| = |x(n) + x(n-1)| \leqslant |x(n)| + |x(n-1)| \leqslant A + A = 2A < \infty$

$\Rightarrow$ le système est stable

b) $y(n) = \exp[x(n)] = T[x(n)]$

linéaire ?

$T[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \exp(\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n))$

$= \exp(\alpha_1 x_1(n)) . \exp(\alpha_2 x_2(n))$

$\neq \alpha_1 \exp(x_1(n)) + \alpha_2 \exp(x_2(n))$

$\Rightarrow$ pas linéaire

causalité ?

$y(n) = \exp(x(n))$ est causal car elle dépend que des antécédents

invariant par translation ?

$T[x(n-n_0)] = \exp(x(n-n_0)) = y(n-n_0)$

$\Rightarrow$ le système est invariant par translation.

* stabilité ?

soit $x(n)$ tq $|x(n)| < \alpha \in \mathbb{R}$ (où $\alpha < \infty$)

alors, on a :

$|y(n)| = |\exp(n)| \leqslant \exp(\alpha) < \infty$

Donc stable

c) $T(\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)) = \ldots = \alpha_1 T[x_1(n)] \alpha_2 T[x_2(n)]$

donc linéaire

causalité ?

Non $\rightarrow$ le système dépends aux entrées antérieurs si $n < 0$, $-n > n$

donc $y(n) = x(-n)$ dépends aux instants $> n$

$\Rightarrow$ non causal

* invariant par translation ?

$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$?

soit $x_1(n) = x(n-n_0)$

$T[x_1(n)] = x_1(-n) = x(-n-n_0)$

$y(n-n_0) = x(-(n-n_0)) = x(-n+n_0)$

$\neq$ donc non invariant

* stabilité ?

soit $x(n)$ tq $|x(n)| \leqslant A < \infty$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$|y(n)| = |x(-n)| \leqslant A < \infty$ donc stable

d) linéaire, causal, invariant par translation et non stable.

2)

- Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est la réponse (sortie) du système pour l'entrée $\delta(n)$. En général, il est noté $h(n)$, c'est-à-dire $T[\delta(n)] = h(n)$

$$Pour\ un\ système\ linéaire, h(n)\ est\ une\ caractéristique\ importante$$

a) $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$

b) $h(n) = \exp(\delta(n)) = \begin{cases} e & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

c) $h(n) = \delta(-n) = \delta(n)$

d) $h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(x(k)) = u(n)$

3) parce qu'il n'est pas SLIT (n'est pas linéaire)

4) $u(n) \longrightarrow s(n) = n(1/3)^{n+1} u(n)$

$h(n)$?

propriété : $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

- $u(n-1) \rightarrow s(n-1) = (n-1)(1/3)^n u(n-1)$

donc, on peut en déduire la réponse de ce système à $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ qui est $s(n) - s(n-1)$ car le système est SLIT

$h(n) = T(\delta(n)) = T(u(n) - u(n-1))$

$= T[u(n)] - T[u(n-1)]$

$= s(n) - s(n-1)$

$= n(1/3)^{n+1} u(n) - (n-1)(1/3)^n u(n-1)$

$= h(n)$

ex2:

1- $x(n) = (1/6)^{n-6}\,\mu(n)$ et $h(n) = (1/3)^{n}\,(n-3)$

$y(n) = h(n) * x(n)$ $\quad$ $*$: convolution

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,.\,h(n-k)$$

$$= \sum_{k=\infty}^{+\infty} (1/6)^{k-6}\,\mu(k)\,.\,(1/3)^{n-k}\,\mu(n-k-3)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (1/6)^{k-6}\,(1/3)^{n-k}\,\mu(n-k-3)$$ si $n \geqslant 3 \Rightarrow \mu(n-k-3) = 1$ si $k \leq n-3$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-3} (1/6)^{k-6}\,(1/3)^{n-k}$$

$$= 6^{6}\,(1/3)^{n} \sum_{k=0}^{n-3} (1/2)^{k}$$

$$= 6^{6}\,(1/3)^{n}\,\frac{1-(1/2)^{n-2}}{1-(1/2)}$$

$$= 2\cdot 6^{6}\,(1/3)^{n}\,\left(1-(1/2)^{n-2}\right)$$

. si $n < 3 \Rightarrow \mu(n-3-k) = 0 \Rightarrow y(n) = 0$

donc $y(n) = 2\cdot 6^{6}\,(1/3)\,\left(1-(1/3)^{n-2}\right)\mu(n-3)$

2- $= [5, 3, -4]$ et $y = [2, -1, 6]$

a) $z = x * y$

	5	3	-4		
6	30	18	-24		
-1	-5	-3	4		
2	10	6	-8		
	10	1	19	22	-24

$z = x * y = [10, 1, 19, 22, -24]$

b) $N=3$ car c'est la longueur des vecteurs

$$z(n) = x \circ y = \sum_{k=0}^{2} y(n)\, x_3(n-k)$$

$$x_3(n) = x(n+3p) \; ; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow z(n) = y_0\, x_3(n) + y(1)\, x_3(n-1) + y(2)\, x_3(n-2)$$

$$z(0) = 2 \times 5 + (-1)(-4) + (-6) \times 3 = 32$$

$$z(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 5 + 6 \times (-4) = -23$$

$$z(2) = 2 \times (-4) + (-1) \times 3 + 6 \times 5 = 19$$

$$z(n) = [32, -23, 19]$$

3- $h = [1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5]^T$

$x = [x(0) \; x(1) \; x(2) \; x(3) \; x(4)$ avec $N = 5$

$$z(n) = (x \circ h)(n) = \sum_{k=0}^{4} h(k)\, x_5(n-k)$$

où $x_5(n)$ est une extension périodique de $x(n)$ avec $N=5$

$$x_5(n) = x(n+5p) \quad \begin{cases} n = 0, \dots, 5 \\ p = 0, \pm 1 \end{cases}$$

En claire, si $x(n) = [x(0) \dots x(5)]$

$$x_5(n) = [x(0) \dots x(5)\, x(0) \dots x(5)]$$

$$\Rightarrow z(n) = h(0)\, x_5(n) + h(1)\, x_5(n-1) + h2\, x_5(n-2) + h(3)\, x_3(n-3) + h(4)\, x_5(x-4)$$

$$= x_5(n) + 2\, x_5(n-1) + 3\, x_5(n-3) + 4\, x_5(n-4)$$