Université Paul Sabatier

Master 2 DC - **Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision**

Session 2 - 2020-21

Documents autorisés : notes de cours

Exercice 1 - Choix multi critères (6 points)

On etudie dans cet exercice la regle de decision ordinale suivante

$$a \succeq_{discrimin} b \iff min_{j,a_j \neq b_j} a_j \geq min_{j,a_j \neq b_j} b_j$$

Question 1 Soit le tableau d'évaluation de 5 alternatives ci dessous

		site a	*site b*	*site c*	*site d*	*site e*
Agents	Agent 1	3	7	3	2	2
	Agent 2	7	9	4	1	4
	Agent 3	8	3	9	3	2
	Agent 4	3	3	3	3	3

Quelles sont les alternatives Pareto optimales ?
Dessiner le graphe de la relation $\succ_{discrimin}$ sur cet ensemble de 5 alternatives

Réponse :
a, b et c sont Pareto optimales

Réponse :
Difficile de faire un dessin en latex, mais le graphe de la relation est $a \succ_{discrimin} c, a \succ_{discrimin} d, a \succ_{discrimin} e, b \succ_{discrimin} d, b \succ_{discrimin} e, c \succ_{discrimin} d, c \succ_{discrimin} e$. *On peut prendre comme noyau* $\{a, b\}$

Question 2 Montrer que $\forall a, b, a \succ_{min} b \Rightarrow a \succ_{discrimin} b$

Réponse :

Supposons $a \succ_{min} b$, *i.e.* $min_j aj > min_j b_j$
Notons $\Delta = \{j, a_i \neq b_j\}$, $v = min_j b_j$ $j*$ *le critère (l'agent) oú* $b_{j*} = min_j b_j$.
Puisque $a \succ_{min} b$ *forcement, pour tout* j, $a_j > b_{j*}$. *Donc* $j* \in \Delta$; *donc* $min_{j \in \Delta} b_j = b_{j*}$.
$a \succ_{min} b$ *implique aussi* $\forall j a_j > b_{j*}$. *Donc* $min_{j \in Delta} a_j > b_{j*}$.
On en déduit que $min_{j \in \Delta} a_j > min_{j \in \Delta} b_j$ *QED*

Question 3 La relation $\succeq_{discrimin}$ respecte t elle le principe de séparabilité ? le principe d'efficacité ? si oui le montrer, si non donner un contre exemple

Réponse :
Séparabilité : oui. Prenons a, b, c, d *quatre alternatives et* I *un sous ensemble de critère.* $aIc \succeq_{discrimin} bIc$ *ssi* $min_{j\in I, a_j\neq b_j} a_j \geq min_{j\in I, a_j\neq b_j} b_j$ *puisque les critères de* I *donnent la m*$\tilde{A}^a$*me valeur aux deux alternatives par définition. De m*$\tilde{A}^a$*me,* $aId \succeq_{discrimin} bId$ *ssi* $min_{j\in I, a_j\neq b_j} a_j \geq min_{j\in I, a_j\neq b_j} b_j$*. Donc* $aIc \succeq_{discrimin} bIc$ *ssi* $aId \succeq_{discrimin} bId$*.*$\succeq_{discrimin}$ *est une relation séparable.*

Efficacité. On suppose que $\forall i, a_i \geq b_i$ *et* $\exists i, a_i > b_j$*. Donc* $\Delta = \{j, a_j \neq b_j\}$ *n'est pas vide et sur chacun des critères de cet ensemble,* $a_j > b_j$*. Donc* $min_{j\in\Delta} a_j > min_{j\in\Delta} b_j$*, i.e.* $a \succ_{discrimin} b$ *: on a montré que si* a *domine* b *au sens de Pareto strict,* $a \succ_{discrimin} b$*.*

Question 4 Il a été montré que la relation $\succeq_{discrimin}$ est complète et quasi transitive. Est elle transitive ? si oui le montrer, si non donner un contre exemple

Réponse :
La relation n'est pas transitive. En question 1*, on a* $a \sim_{discrimin} b$*,* $b \sim_{discrimin} c$ *mais* $a \succ_{discrimin} c$*.*

Question 5 Il a ete montre que $\forall a, b, a \succ_{discrimin} b \Rightarrow a \succ_{leximin} b$

Réponse :
Supposons que $a \succ_{discrimin} b$*,* a *et* b *quelconques.*

Notons t *le vecteur qui accorde la meilleure note possible à chaque critère (sur l'exemple,* 10 *partout). Notons* $\Delta = \{j, a_j \neq b_j\}$ *;* $a \succ_{discrimin} b$ *s'écrit donc* $min_{j\in\Delta} a_j > min_{j\in\Delta} b_j$ *; on peut également écrire* $a = a\Delta a = a\delta b$ *et* $b = b\Delta b = b\delta a$*.*

On considère les vecteurs $a\Delta t$ *et* $b\Delta t$*. Puisque* t *donne les valeurs max à tous ses composants, la valeur min des éléments de* $a\Delta t$ *est égale à* $min_{j\in\Delta} a_j$*. Et de m*$\tilde{A}^a$*me, la valeur min des éléments de* $b\Delta t$ *est égale à* $min_{j\in\Delta} b_j$*. Autrement dit,* $a\Delta t \succ_{min} b\Delta t$*. Comme l'ordre leximin raffine l'ordre fourni par l'agrégateur min,* $a\Delta t \succ_{leximin} b\Delta t$*.*

On sait que $\succeq_{leximin}$ *est séparable. De* $a\Delta t \succ_{leximin} b\Delta t$ *on peut déduire de* $a\Delta a \succ_{leximin} b\Delta a$*. Comme* $b\Delta a = b\Delta b$*, ceci s'écrit* $a\Delta a \succ_{leximin} b\Delta b$*, i.e.* $a \succ_{leximin} b$*. CQFD*

Quelle règle de décision proposeriez vous pour conduire la décision dans ce type d'application ? pourquoi ?

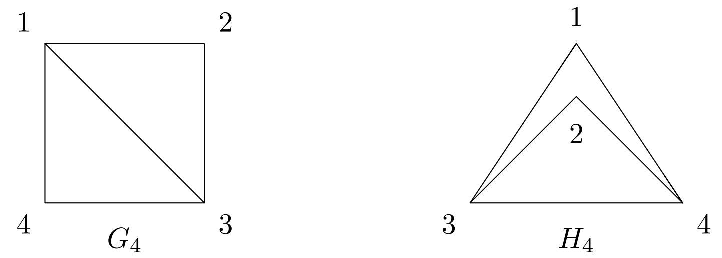
Réponse :
Les trois règles, discrimin, min et leximin satisfont la spécification de base, qui est de maximiser le degré de satisfaction du moins satisfait des agents. Parmi elles, on préfère le discrimin

et le leximin, puisqu'elles sont séparables et efficaces.

Si l'on pousse plus loin, on peut préférer le leximin puisqu'il fournit un préférence totalement transitive.

Exercice 2 - Complexité (7 points)

Un graphe G est une paire $\langle S_G, A_G \rangle$ où S_A est l'ensemble des sommets et A_G l'ensemble des arêtes de G. Deux graphes G et H sont isomorphe (on écrit $G \simeq H$) s'il existe une bijection $f : S_G \to S_H$ telle que $\forall i, j \in S_G$, $(\{i, j\} \in A_G) \Leftrightarrow (\{f(i), f(j)\} \in A_H)$. Par exemple, les deux graphes G_4 et H_4 sont isomorphes via la bijection $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$.



On notera $N_{\simeq}(G, H)$ le nombre d'isomorphismes entre G et H. On se propose d'étudier la complexité des problèmes suivants.

$\boxed{\textbf{ISO}}$
Instance : Deux graphes G et H.
Question : Ces deux graphes, sont-ils isomorphes ?

$\boxed{\textbf{ISO-ZERO}}$
Instance : Deux graphes G et H.
Question : Est-il vrai que $N_{\simeq}(G, H) = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre G et H) ?

$\boxed{\textbf{ISO-UNIQUE}}$
Instance : Deux graphes G et H.
Question : Est-il vrai que $N_{\simeq}(G, H) = 1$ (le nombre d'isomorphismes entre G et H est exactement 1) ?

$\boxed{\textbf{ISO-MULT}}$
Instance : Deux graphes G et H.
Question : Est-il vrai que $N_{\simeq}(G, H) \geq 2$?

Pour les questions suivantes, **justifiez chacune de vos réponses.**

1. Pour chacun des problèmes ISO, ISO-ZERO, ISO-UNIQUE et ISO-MULT, est-il dans NP, dans coNP ou dans ni l'un ni l'autre ?

   Réponse :
   ISO $\in$ NP car on peut vévifier un isomorphisme en temps polynomial. ISO-ZERO $\in$ coNP car un contre-exemple est un isomorphisme (que l'on peut vérifier en temps polynomial). ISO-UNIQUE est sans doute ni dans NP ni dans coNP car un certificat pour le cas positif nécessite une preuve qu'il n'y a pas de deuxième isomorphisme et un

certificat dans le cas négatif peut nécessiter une preuve qu'il n'y a pas d'isomorphisme. ISO-MULT $\in$ NP car on peut vévifier 2 isomorphismes en temps polynomial.

2. Il existe une réduction polynomiale de ISO vers SAT. En sachant que SAT est NP-complet, peut-on déduire que ISO est NP-complet ?

   Réponse :
   Non ! La réduction ISO $\leq$ SAT ne permet pas de déduire que ISO est NP-complet.

3. Le problème de calculer $N_{\simeq}(G,H)$ appartient-il à la classe #P ?

   Réponse :
   Oui, car $N_{\simeq}(G,H)$ est le nombre d'isomorphismes et on peut vérifier un isomorphisme en temps polynomial.

4. Pour deux graphes G, H tels que $S_G \cap S_H$, on note $G+H$ leur réunion disjointe $\langle S_{G+H}, A_{G+H} \rangle$ où $S_{G+H} = S_G \cup S_H$ et $A_{G+H} = A_G \cup S_H$. Pour des graphes connexes G, H, on a l'identité suivante :

   $$N_{\simeq}(G+H, G+H) \;=\; N_{\simeq}(G,G)N_{\simeq}(H,H) + N_{\simeq}(G,H)^2$$

   (Remarque : pour des graphes non connexes G, H, on peut toujours ajouter des sommets artificiels s_0^G relié à chaque sommet de S_G et s_0^H relié à chaque sommet de S_H pour les rendre connexes, et on obtient une identité similaire). Un automorphisme est un isomorphisme f entre un graphe G et lui-même. On souhaite déterminer si le problème de calculer $N_{\simeq}(G,G)$ (le nombre d'automorphismes d'un graphe G) est plus facile que le problème de calculer $N_{\simeq}(G,H)$. Démontrez que ce n'est pas le cas en démontrant que l'on peut calculer le nombre d'isomorphismes $N_{\simeq}(G,H)$ avec un nombre polynomial de calculs du nombre d'automorphismes.

   Réponse :
   Il suffit de réécrire l'identité pour obtenir un formule pour le calcul de $N_{\simeq}(G,H)$ à partir de 3 calculs du nombre d'automorphismes :

   $$N_{\simeq}(G,H) \;=\; \sqrt{N_{\simeq}(G+H,G+H) - N_{\simeq}(G,G)N_{\simeq}(H,H)}$$

Exercice 3 - Decision sous incertitude - 7 points

On considere un problème decision avec 3 etats portant sur la météo de demain, beau, variable et pluie : on sait que normalement, il ne devrait pas pleuvoir. On considère deux actions : faire de l'escalade en falaise ou faire de l'escalade en salle.

Question 1 On se place dans un cadre où les utilités sont purement ordinales. La connaissance est modélisee par la distribution de possibilité suivante

$$\pi(beau) = 1, \pi(variable) = 1, \pi(pluie) = 0.3$$

Les utilités sont :
- Escalade en salle : utilité 0.5 dans tous les etats
- Escalade en falaise : utilité 1 si il fait beau, 0.8 si le temps est variable, utilité 0 si il pleut

Q 1.1 Dans quelle mesure est il certain qu'il ne pleuvra pas ? dans quelle mesure est il possible qu'il ne fasse pas beau ?

Réponse :

$$N(\{beau, variable\}) = 1 - \Pi(\{pluie\}) = 1 - 0.3 = 0.7$$
$$\Pi(\{variable, pluie\}) = max(1, 0.3) = 1$$

Q 1.2 Quelle sont les valeurs des deux actions avec les utilités possibilistes pessimiste et optimiste ?
Réponse :

$$U_{pes}(salle) = U_{opt}(salle) = 0.5$$
$$U_{pes}(Falaise) = min1, 0.8, max(1 - 0.3, 0) = 0.7$$
$$U_{opt}Falaise = max1, 0.8, min(0.3, 0) = 1$$

Question 2 On se place dans un cadre d'utilités cardinales. La connaissance est modélisee par la fonction de masse suivante

$$m(\{beau, variable\}) = 0.7, m(\{pluie\}) = 0.3$$

Les utilités sont :
- Escalade en salle : utilité 0.5 dans tous les etats
- Escalade en falaise : utilité 1 si il fait beau, 0.8 si te temps est variable, utilité 0 si il pleut

Q 2.1 Dans quelle mesure est ton certain qu'il ne pleuvra pas ? dans quelle mesure est il plausible qu'il ne fasse pas beau ?

Réponse :

$$Bel(\{beau, variable\}) = m(\{beau, variable\}) = 0.7$$

,

$$Pl(\{variable, pluie\}) = m(\{beau, variable\}) + m(\{pluie\}) = 1$$

Q 2.2 Quelle sont les valeurs des deux actions avec l'utilité de Choquet pessimiste ?
Réponse :

$$U_{bel}(salle) = U_{pl}(salle) = 0.5$$

$U_{bel}(Falaise) = 0{*}1{+}(0.8{-}0){*}Bel(\{beau, variable\}){+}(1{-}0.8){*}Bel(\{beau\}) = 0.8{*}0.7$

$U_{pl}(Falaise) = 0{*}1{+}(0.8{-}0){*}Pl(\{beau, variable\}){+}(1{-}0.8){*}Pl(\{beau\}) = 0.8{*}1{+}0.2{*}0.7$