Université Paul Sabatier

Master 2 DC - **Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision** - 2017-18

Documents autorisés : notes de cours

Exercice 1 - Complexité (10 points)

On se propose d'étudier deux problèmes d'optimsation : MAX-2-COLORIAGE et MAX-HORN-2-SAT.

Un 2-coloriage d'un graphe $G = \langle S, A\rangle$, où $S = \{1, \ldots, n\}$, est une affectation $(c_1, \ldots, c_n)$ de "couleurs" aux sommets de G telle que chaque couleur $c_i \in \{0, 1\}$. Le problème MAX-2-COLORIAGE est le problème de trouver un 2-coloriage d'un graphe $G = \langle S, A\rangle$ qui maximise le nombre $N_G^{\neq}$ d'arêtes $\{i, j\} \in A$ reliant des sommets i, j de couleurs différentes :

$$N_G^{\neq}(c_1, \ldots, c_n) \;=\; |\{\ \{i, j\} \in A \mid c_i \neq c_j\ \}|$$

Une instance du problème MAX-HORN-2-SAT est une formule booléenne $f = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, où chaque clause C_i $(i = 1, \ldots, m)$ comporte au plus deux litéraux dont au plus un litéral positif. Donc, dans une instance de MAX-HORN-2-SAT, chaque clause est de la forme $x_i \vee \overline{x_j}$, $\overline{x_i} \vee \overline{x_j}$, x_i ou $\overline{x_i}$. La fonction objective (à maximiser) est le nombre N_f^{SAT} de clauses C_i satisfaites :

$$N_f^{SAT}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; |\{\ i \mid (1 \leq i \leq m) \wedge (C_i = vrai)\ \}|$$

1. Soit f_{ij} la formule suivante comportant quatre clauses (dont deux sont identiques) :
$$(x_i) \wedge (x_j) \wedge (\overline{x_i} \vee \overline{x_j}) \wedge (\overline{x_i} \vee \overline{x_j}).$$
Combien de clauses de f_{ij} sont satisfaites (a) lorsque $x_i = x_j$, (b) lorsque $x_i \neq x_j$?
2. Etant donné un graphe $G = \langle S, A\rangle$, où $S = \{1, \ldots, n\}$, soit I_G l'instance de MAX-HORN-2-SAT associée à la formule suivante (qui comporte $4\,|A|$ clauses) :
$$f^G \;=\; \bigwedge_{\{i,j\} \in A} f_{ij}.$$
Montrez qu'il existe une bijection g entre les 2-coloriages $(c_1, \ldots, c_n)$ de G et les affectactions $(x_1, \ldots, x_n) = g(c_1, \ldots, c_n)$ aux variables de I^G qui satisfait
$$N_{f^G}^{SAT}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; N_G^{\neq}(c_1, \ldots, c_n) \;+\; K\,|A|$$
pour une constante K. Donnez la veleur de K.
3. En sachant que MAX-2-COLORIAGE est NP-difficile, que peut-on déduire de la complexité de MAX-HORN-2-SAT ? Justifiez votre réponse.
4. Démontrez que MAX-HORN-2-SAT $\in$ APX. *Indice : étudiez les deux affectations $(vrai, \ldots, vrai)$ et $(faux, \ldots, faux)$.*
5. Peut-on déduire à partir de la bijection g de la question 2 que MAX-2-COLORIAGE $\in$ APX ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 - Décision sous incertitude (10 points)

Un investisseur souhaite placer son capital dans un placement immobilier locatif. Il a ciblé un quartier en pleine rénovation dont la population peut être composée d'*étudiants*, de *cadres moyens* et de *cadres supérieurs*. Les logements bâtis dans ce quartier comportent des *appartements* en immeubles ou des *villas*.

Compte tenu des prêts qu'il peut obtenir de sa banque sur 10 ans, le montant de l'opération pour l'investisseur est plafonné, et pour ce montant, la rentabilité du placement dépend des loyers perçus sur la période.

- Si ce sont des *étudiants* E qui habitent le quartier, seul le placement en *appartements* sera rentable.
- Si ce sont des *cadres moyens* M, le placement en *appartements* sera plus rentable que le placement en *villas*
- Si ce sont des *cadres supérieurs* S , les *appartements* seront très peu rentable, et les *villas* rémunératrices.

Selon la nature de la population qui se logerait dans le quartier les estimations de remplissage des logements donneraient des gains V (rentabilités exprimées en pourcentage %) selon le tableau ci-dessous :

Population \ *Investisseur* :	*appartements*	*villas*
E	200	0
M	300	220
S	30	400

L'investisseur veut utiliser les prévisions sur le quartier en considérant les probabilités respectives des composantes de la population pour anticiper les chances qu'il a de trouver des locataires E, M ou S. Il s'adresse à un cabinet de conseil qu'il connaît et dont il sait évaluer la fiabilité des prévisions selon la catégorie de population prédite : le cabinet est plus fiable quand il conseille C_S=*"'investir pour* S*"'* ou C_E=*"'investir pour* E*"'*. En effet :

- Lorsque le cabinet conseille C_E, il y a une probabilité 3/4 que des *étudiants* viennent effectivement s'installer, et une probabilité 1/4 que ce soient des cadres moyens ou supérieurs
- Lorsque le cabinet conseille C_S, il y a une probabilité 3/4 que des *cadres superieurs* viennent effectivement s'installer, et une probabilité 1/4 que ce soient des cadres moyens ou des étudiants
- Lorsque le cabinet conseille C_M, il y a une probabilité 1/2 que des *cadres moyens* viennent effectivement s'installer, et une probabilité 1/2 que des etudiants ou au contraire des cadres supérieurs.

Question A

L'utilité de l'investisseur est supposée neutre par rapport au gain

1. Quelle sera la forme de la fonction d'utilité de l'investisseur ? donner un exemple

2. Si il ne veut pas faire d'hypothèse supplementaire, quelle théorie l'investisseur peut il utiliser pour modéliser l'information qu'il peut déduire du conseil du cabinet ? modéliser le cas où il reçoit l'information C_M
3. Si le cabinet conseille C_M, quelle est la plausibilité des evenements suivants : $\{S\}$, $\{M, S\}$, $\{M, S, E\}$? quelle est la certitude de ces evenements ?
4. En utilisant l'utilité de Choquet prudente ou l'utilité à à priori multiples, déterminer le choix de l'investisseur lorsque le conseil est C_M
5. Pour lequel des trois avis du cabinet l'investisseur décidera-t-il d'investir dans des villas ? Justifez votre réponse

Question B

Pour toute fonction de masse m sur un referentiel S, on definit l'ensemble des distributions de probabilité compatibles avec m : $F(m) = \{p, \forall A \subseteq S, Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)\}$

Il est facile de montrer que Bel est la mesure de probabilité inférieure associée à cette famille et Pl la mesure de probabilité inférieure associée à cette famille.

En appliquant le principe de Laplace, on peut construire une distribution de probabilité particuliere q en repartissant les poids des elements focaux de m sur les etats qu'ils contiennent. Formellemet, cette distribution q est definie par

$$\forall s \in S, q(s) = \Sigma_{A, s \in A} \frac{m(A)}{|A|}$$

. On note $EU_q(f)$ l'utilité esperée de f basée sur q

1. Application : calculer la distribution q qui correspond au conseil C_M ; calculer $EU_q(Villa)$ et $EU_q(Appartement)$
2. Montrer que quel que soit m, q appartient à $F(m)$
3. Montrer que quel que soit m, pour toute décision f, $Ch_{Pl}(f) \geq EU_q(f) \geq Ch_B(f)$
   où $Ch_B(f)$ est l'utilité de Choquet basée sur la fonction Bel associée à m et $Ch_B(f)$ est l'utilité de Choquet basée sur la fonction Pl associée à m
4. EU_q et Ch_B donnent elles toujours les memes decision optimales ? si oui le demontrer si non donner un contre exemple
5. Quels types de décideurs vont utiliser EU_q plutot que Ch_B ?