Intelligence Artificielle et Traitement de l'Incertain
Contrôle Terminal du Mercredi 14 Octobre 2020.

Le barème est donné à titre indicatif. La compréhension du sujet faisant partie de l'épreuve, **on ne répondra à aucune question**. Si vous rencontrez des ambiguïtés, vous expliquerez **sur votre copie** comment vous les interprétez.
Durée 1h30. **Documents autorisés.**

I - Réseaux bayésiens (13 points)

Énoncé : Anne travaille dans son bureau, lorsqu'elle reçoit un coup de téléphone de son voisin Fred lui indiquant qu'il a entendu l'alarme du domicile d'Anne.
Croyant à un cambriolage, Anne décide de rentrer rapidement chez elle. En écoutant la radio dans sa voiture, elle apprend qu'un léger tremblement de terre vient de se produire dans la région. Sachant qu'un tremblement de terre peut déclencher l'alarme, Anne est rassurée et retourne à son bureau.
Il s'agit de formaliser le raisonnement d'Anne.

Variables : On propose d'utiliser les 5 variables binaires suivantes :

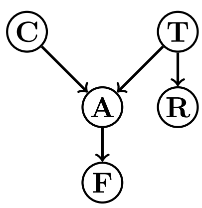
VARIABLE	valeurs	signification
C	c, nc	il y a eu un cambriolage ou pas
T	t, nt	il y a eu un tremblement de terre ou pas
A	a, na	l'alarme s'est déclenchée ou pas
R	r, nr	la radio informe d'un tremblement de terre ou pas
F	d, nd	Fred dit qu'il a entendu l'alarme ou pas

On donne les probabilités suivantes :

P(c) = 0.1	P(t) = 0.01	P(a|c,t) = 1	P(a|c,nt) = 0.95
P(a|nc,t) = 0.95	P(a|nc,nt) = 0.05	P(r|t) = 0.95	P(r|nt) = 0.01
P(d|a) = 0.9	P(d|na) = 0.3		

1) **(2 pts)** Construire un réseau bayésien RB (graphe + tables) correspondant à l'énoncé et aux données ci-dessus.

Corrigé



Pour compléter le réseau, il faut donner pour chaque variable, la table de probabilité conditionnelle de la variable sachant ses parents

	c	nc
P(C)	0.1	0.9

	t	nt
P(T)	0.01	0.99

P(R|T)	t	nt
r	0.95	0.01
nr	0.05	0.99

P(F|A)	a	na
d	0.9	0.3
nd	0.1	0.7

P(A|C,T)	c		nc	
	t	nt	t	nt
a	1	0.95	0.95	0.05
na	0	0.05	0.05	0.95

2) **(5 pts)**

(a) Proposer un arbre de groupes de jonction qui représente RB. Cet arbre sera utilisé dans les questions suivantes.

Corrigé

AF — A — ACT — T — RT

(b) Déterminer la table de probabilités P(A), *détaillez votre raisonnement et donnez le résultat final avec 2 décimales.*

Corrigé

On initialise $t_{AF} = P(F|A)$, $t_{RT} = P(R|T)$, $t_{ACT} = P(C) * P(T) * P(A|C,T)$, $t_A = t_T = \mathbb{1}$.
On a donc $t_A = P(A,C,T)$ car $P(A,C,T) = P(C) * P(T|C) * P(A|C,T)$ et C et T sont indépendantes lorsqu'on ne connaît rien sur A car la liaison est convergente en A donc $P(T|C) = P(T)$.
Puis, pour calculer $P(A)$ on marginalise $P(A,C,T)$ sur C et T.

P(A,C,T)	c		nc		P(A)
	t	nt	t	nt	
a	1*0.1*0.01 0.001	0.95*0.1*0.99 0.09405	0.95*0.9*0.01 0.00855	0.05*0.9*0.99 0.04455	$\simeq 0.15$
na	0	0.05*0.1*0.99 0.00495	0.05*0.9*0.01 0.00045	0.95*0.9*0.99 0.84645	$\simeq 0.85$

3) **(4 pts)** *Pour cette question vous détaillerez votre méthode et vous donnerez le résultat final avec 2 décimales, vous pouvez éviter les calculs des cases inutiles des tables.* Traiter la prise en compte de l'évidence (notée e_1), correspondant à l'annonce par Fred qu'il a entendu l'alarme, afin d'obtenir :

(a) la valeur de $P(A = a|e_1)$

Corrigé

Mise à jour de $t_{A,F}$ par envoi de message de ACT vers AF. Au début $t_A = \mathbb{1}$ puis $t^*_A = P(A)$ obtenue à la question précédente par marginalisation de ACT puis $t^*_{AF} = \frac{t_{AF}.t^*_A}{t_A}$ ($t_{A,F} = P(A,F)$) qu'on marginalise pour retrouver $P(A)$ et obtenir $P(F)$.

$t_{A,F}$	a	na	P(F)
d	0.9*0.15	0.3*0.85	0.39
nd	0.1*0.15	0.7*0.85	0,61
P(A)	0.15	0.85	1

On intègre $e_1 = (F = d)$ pour obtenir $t_{AF,e1} = P(A, F, e_1)$, puis on marginalise sur F pour obtenir $P(A, e_1)$

$t_{A,F,e1}$	a	na	$P(F, e_1)$
d	0.9*0.15	0.3*0.85	0.39
nd	0	0	0
$P(A, e_1)$	0.135	0.255	0.39

Donc $P(A = a|e_1) = \frac{P(A=a,e_1)}{P(e_1)} = 0.135/0.39 \simeq 0.35$.

(b) puis celle de $P(C = c|e_1)$

Corrigé

message de AF vers ACT pour propager e_1 : t^*_A obtenu par marginalisation de $t_{A,F,e1}$.

$t_{A,F,e1}$	a	na	$P(F, e_1)$
d	0.9*0.15	0.3*0.85	0.39
nd	0	0	0
$P(A, e_1)$	0.135	0.255	$P(e_1) = 0.39$

Corrigé

$t^*_{ACT} = \frac{t_{ACT} * t^*A}{t_A} = P(ACT) * P(A, e_1)/P(A) = P(ACTe_1)$
En fait $P(A, e_1)/P(A) = P(e_1|A) = P(F = d|A)$ donné dans l'énoncé (0.9 et 0.3).

$P(A, C, T, e_1)$	c		nc	
	t	nt	t	nt
a	0.001*0.135/0.15 0.001*0.9	0.095*0.135/0.15 0.095*0.9	...	...
na	0	0.00495*0.255/0.85 0.00495*0.3	0	...
$P(C, e_1)$	0.087		...	

$P(C = c, e_1)$ s'obtient par marginalisation de $P(ACTe1)$ sur A et T.
Puis $P(C = c|e_1) = \frac{P(C=c,e_1)}{P(e_1)} = 0.087/0.39 = 0.22$

4) **(2 pts)** Soit e_2 la seconde évidence correspondant à l'information par la radio d'un tremblement de terre. Comment va se situer $P(C = c|e_1, e_2)$ par rapport à

$P(C = a|e_1)$. Justifier votre réponse. *On ne demande aucun calcul.*

Corrigé

$e_2 = (R = r)$. On doit avoir $P(T|e_1, e_2) > P(T|e_1) > P(T)$.
D'autre part, la présence de e_1, enlève l'indépendance entre C et T (la liaison est convergente en A entre C et T et on connait une info sur un descendant de A). Donc un renforcement de la cause T affaiblit la cause C pour provoquer A. $P(C = c|F = d, R = r) < P(C = c|F = d)$.

II - Raisonnement en logique possibiliste (7 points)

⚠ Les deux exercices sont indépendants.

A) Raisonnement avec les axiomes possibilistes (2 pts)

On dispose des connaissances suivantes :
Il est presque certain qu'un tremblement de terre sera annoncé à la radio. Lorsqu'une alarme se déclenche, il est possible que ce soit dû à un tremblement de terre.
Ces connaissances sont traduites en logique possibiliste par les assertions :
A1 $N(T \to R) \geq 0.8$.
A2 $\Pi(A \to T) \geq 0.4$,
Une source nous permet d'avoir quelque certitude (au moins au degré 0.8) sur le fait que l'alarme s'est déclenchée. *En justifiant chaque étape du raisonnement par le nom des axiomes sur les mesures de nécessité ou possibilité utilisés*, donner une information sur la possibilité ou la nécessité de

1. la présence d'un tremblement de terre ?

Corrigé

$\Pi(A \to T) = \Pi(\neg A \vee T) = \max(\Pi(\neg A), \Pi(T))$ (possibilité) $N(A) \geq 0.8$ donc $\Pi(\neg A) \leq 0.2$ (dualité). Or $\Pi(A \to T) \geq 0.4$ donc $\max(\Pi(\neg A), \Pi(T)) \geq 0.4$ donc $\Pi(T) \geq 0.4$.

2. l'annonce d'un tremblement de terre à la radio ?

Corrigé

$(T \to R) \wedge \neg R \vdash \neg T$ donc par monotonie $\min(N(T \to R), N(\neg R)) \leq N(\neg T)$ or $N(\neg T) \leq 0.6$ (dualité) et $N(T \to R) \geq 0.8$ donc $N(\neg R) \leq 0.6$.

B) Résolution possibiliste (5 points)

— Si l'alarme s'est déclenchée alors Fred le dira certainement (avec une certitude au moins au degré 0.9).

— Il est quasi certain qu'un tremblement de terre déclenche une alarme (degré 0.9)

— Il est peu certain que Fred ait dit que l'alarme s'est déclenchée alors que ce n'est pas le cas (degré 0.5 seulement).

— Il est presque certain qu'un tremblement de terre sera annoncé à la radio (degré au moins 0.8).

— Il est assez certain (au moins au degré 0.7) qu'un cambrioleur déclenche une alarme.

— On est sûr qu'il y a un tremblement de terre (certitude 1).

1) **(1 pt)** En utilisant les variables C, T, A, R, F avec les mêmes significations que précédemment, écrire les connaissances sous la forme d'une base de clauses possibilistes BP (numérotez les clauses).

Corrigé

$$\begin{array}{ll} C1 : \neg A \vee F & 0.9 \\ C2 : \neg T \vee A & 0.9 \\ C3 : F & 0.5 \\ C4 : \neg A & 0.5 \\ C5 : \neg T \vee R & 0.8 \\ C6 : \neg C \vee A & 0.7 \\ C7 : T & 1 \end{array}$$

2) **(1 pt)** Déterminez le degré d'inconsistance de BP.

Corrigé

$$\begin{array}{ll} C8 = C2 + C4 : \neg T & 0.5 \\ C9 = C8 + C7 : \bot & 0.5 \end{array}$$

Le degré d'inconsistance est 0.5.

3) **(3 pts)** Pour chaque variable (C, T, A, R et F), peut-on conclure quelque chose la concernant ou concernant sa négation, si oui avec quelle certitude ? *Vous détaillerez les résolutions effectuées.*

Corrigé

$$\begin{array}{ll} C10 = C5 + C7 : R & 0.8 \\ C11 = C4 + C6 : \neg C & 0.5 \\ C12 = C2 + C4 : \neg T & 0.5 \\ C13 = C2 + C7 : A & 0.9 \end{array}$$

C aucune clause ne le contient, $\neg C$ on pourrait le conclure avec 0.5 mais c'est le degré d'inconsistance donc on ne peut rien conclure sur $\neg C$.
$N(T) = 1$ (on pourrait inférer $N(\neg T) = 0.5$ mais c'est le degré d'inconsistance)
$\neg A$ est à 0.5 donc en dessous du degré intéressant. Par contre on peut conclure $N(A) \geq 0.9$ on est quasi certain que l'alarme a été déclenchée.
$N(R) \geq 0.8$ ($\neg R$ n'est pas dans les clauses)
$N(F) \geq 0.9$ (C13+C1) On ne peut rien conclure sur $\neg F$ qui n'apparait pas dans les clauses.