Université Paul Sabatier
SRI 3 - **IA Avancee - incertitude** - 2020-2021

Documents autorisés : notes de cours

Question de cours (6 points)

— Est il vrai que $\forall A, Bel(A) + Bel(\bar{A}) = 1$? si oui le montrer, si non donner un contre exemple

Réponse :
Non ; par exemple, si $S = \{a, b\}$ et $= m(\{a, b\}) = 1$,et avec $A = \{a\}$, $Bel(A) = 0$, $Bel(\bar{A}) = 0$: $Bel(A) + Bel(\bar{A}) = 0$

— Est il vrai que $\forall A, B,$ t.q $A \cap B = \emptyset, Bel(A \cup B) = Bel(A) + Bel(B)$? si oui le montrer , si non donner un contre exemple
Réponse :
Non ; par exemple, si $S = \{a, b\}$ et $= m(\{a, b\}) = 1$,et avec $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ $Bel(A) = 0$, $Bel(B) = 0$ et $Bel(A \cup B) = 1$

— Dans quel type de problème utilise-t-on l'utilité de Choquet pessimiste ? dans quel cas est elle egale à l'utilité esperée ?
Réponse :
On l'utilise orsque l'utilité est cardinale et que le decideur adopte un comportement prudent ; elle est egale à l'utite esperée lorsque la capacité representant la connaissance est une mesure de probabilité

Exercice 1 (6 points)

On considere un problème de decision avec 3 etats portant sur la météo de demain : beau, variable et pluie : normalement, il ne devrait pas pleuvoir. Ce qui est modélise par la fonction de masse suivante :

$$m(\{beau, variable\}) = 0.7, m(\{pluie\}) = 0.3$$

On considère deux decisions : faire de l'escalade en falaise ou faire de l'escalade en salle. Les utilités sont :
- Escalade en salle : utilité 0.5 dans tous les etats
- Escalade en falaise : utilité 1 si il fait beau, 0.8 si te temps est variable, utilité 0 si il pleut

Question 1 Dans quelle mesure est ton certain qu'il ne pleuvra pas ? dans quelle mesure est il plausible qu'il ne fasse pas beau ?

Réponse :

$$Bel(\{beau, variable\}) = m(\{beau, variable\}) = 0.7$$

,

$$Pl(\{variable, pluie\}) = m(\{beau, variable\}) + m(\{pluie\}) = 1$$

Question 2 Quelle sont les valeurs des deux décisions avec l'utilité de Choquet pessimiste ? quelle decision choisira t on ?
Réponse :
Dans le cadre le la theorie des fonctions de croyance, on utilise indifferement l'utilité de Choquet pessimiste Ch_{Bel} ou l'utilité $U_{pes}(f) = \Sigma_{B \subseteq S}(m(B).min_{s \in B} u(f(s)))$ - elles sont egales ($\forall f, Ch_{Bel}(f) = U_{pes}(f)$) . On detaille ci dessous les deux calculs (avec la fonction d'utilité $u(x) = x$)
$U_{pes}(Falaise) = m(\{beau, variable\}).min(1, 0.8) + m(\{pluie\}) * 0 = 0.7 * 0.8 = 0.56$
$U_{pes}(Salle) = m(\{beau, variable\}).min(0.5, 0.5) + m(\{pluie\}) * 0.5 = 0.7 * 0.5 + 0.3 * 0.5 = 0.5$

On preferera la deciosn "Aller en falaise"

On peut au passage verifier que :
$Ch_{bel}(salle) = 0.5 = U_{pes}(Salle)$
$Ch_{bel}(Falaise) = 0 * 1 + (0.8 - 0) * Bel(\{beau, variable\}) + (1 - 0.8) * Bel(\{beau\}) = 0.8 * 0.7 = 0.56 = U_{pes}(Falaise)$

Exercice 2 (8 points)

Des vaccins ont été proposés pour une maladie contagieuse et parfois grave. Dans la suite, on estime la gravité de la maladie par le pourcentage de personne hospitalisées parmi celles ayant contracté la maladie. Ces vaccins ont été été testés. On n'a pas décelé d'effet secondaire grave de la vaccination (aucun deces ni aucune hospitalisation parmi les personnes sur lesquelles on a testé les vaccins), et l'on estime donc à moins de $\frac{1}{10000}$ la probabilité qu'un individu fasse une reaction grave à ces vaccins. On sait que les effet secondaires d'un vaccin (fièvre, allergie), si ils existent, sont au pire du même ordre que les effets des formes sevères de la maladie .

Question 1. Supposons que la vaccination protège à 100 % des personnes vaccinées. Les individus ayant le choix de se faire vacciner ou non, quelle est la probabilité qu'une personne qui ne se fait pas vacciner accorde au fait d être contaminés par la maladie et d'en faire une forme grave ?

Réponse :
On note ESG l'evenement "Effet Secondaire Grave" (du vaccin) et FSM l'evenement "faire une forme severe de la maladie". Enfin, on note BS l'evenement "bonne santé" (ne pas être affecté, que ca soit par le vaccin ou par la maladie).

On pourrait considerer des utilités, avec $u(BS) > u(ESG) \geq u(FSM)$ - en posant $u(BS) = 0$ (la fonction d'utilité etant define à une transformation lineaire près, on peut toujours choisir où placer l'utilité 0) les utilites de "Effet secondaire grave" et "forme severe de la maladie" seraient negatives.

Dans cette correction on considère les gravités $gr(x) = -u(x)$ - donc $gr(BS) = 0 < gr(ESG) \leq gr(FSM)$ - que l'on minimise (plus faible la gravite d'une decision, meilleure cette decision).
Une personne refuse de se faire vacciner si la l'esperance mathematique de gravite (notee GrE) de l'action "No vaccin" est inferieure (on minimise la gravite)à l'esperance mathematique de gravite de l'action "Vaccin"
$GrE(Vaccin) = gr(ESG) * P(ESG|Vaccin) + gr(BS) * P(BS|Vaccin) = gr(ESG) * P(ESG|Vaccin)$ *(puisque $gr(BS) = 0$)*
$GrE(NoVaccin) = gr(FSM)*P(FSM|noVaccin)+gr(BS)*P(BS|noVaccin) = gr(FSM)*P(FSM|noVaccin)$

Elle refuse donc de ce faire vacciner si $gr(FSM)*P(FSM|noVaccin) < gr(ESG)*P(ESG|Vaccin)$, c'est a dire si $P(FSM|noVaccin) < \frac{gr(ESG)}{gr(FSM)} * P(ESG|Vaccin)$
Or $\frac{gr(ESG)}{gr(FSM)} \leq 1$, donc ce refus implique que la personnepense que $P(FSM|noVaccin) < P(ESG|Vaccin)$
Et en particulier, que $P(FSM|noVaccin) < \frac{1}{10000}$ (puisque $P(ESG|Vaccin) < \frac{1}{10000}$)

Question 2. On se place maintenant du point de vue du médecin, qui veut minimiser la gravité de son conseil à son patient. Il a à sa disposition les informations suivantes :

— Pour un individu donné, la probabilité que le vaccin ait des effets secondaires severe (ESG) est inférieure à $\frac{1}{10000}$ et est independante de l'age.
— Si un individu est vacciné, il ne devoppera pas la maladie (le vaccin protège à 100 %).
— Si un individu (non vaccciné donc) est infecté par la maladie, la probabilité de faire une forme severe de la maladie (FSM) depend de son age : moins de 0.04 % pour les 0-19 ans, 1% pour les 20-29 ans, entre 3 et 4 % pour les 30-49 ans, entre 8 et 12 % pour la classe 50-69 ans, entre 12 % et 19 % pour les personnes au dela de 70 ans,

— Avant disparition de la maladie, entre 40% et 60% des individus auront contracté cette maladie.

En supposant que les effets secondaires graves du vaccin (si ils existent) sont au pire du même ordre que la gravité des formes severes de la maladie, quelles classe d'age doit on convaincre de se faire vacciner ?

Réponse :
Comme dans la question precedent on note ESG l'evenement "Effet Secondaire Grave" (du vaccin) et FSM l'evenement "faire une forme severe de la maladie". Enfin, on note BS l'evenement "bonne santé" (ne pas être affecté : ne pas faire d'effet secondaire si on se vaccine, ou etre touche par de maladie mais sans en faire de forme grave, ou meme ne pas etre au contact de la maladie du tout). On note T l'evenement "etre touche par la maladie" (on peut bien sur etre touche et ne pas faire de forme grave, ou au contraire etre touche et faire une forme grave)

De la meme facon, on considere des gravités, que l'on minimise, avec $gr(BS) = 0 <$*gr(ESG)*$\leq gr(FSM)$ *.*

La probabilité d 'etre touché par la maladie est imprecise (entre 40 % et 60 %) : $P(T) \in [0.4, 0.6]$.

Lorsqu'il est en presence de probabilté imprecises et d'utilités à maximiser, le decideur pessimiste estime chaque decision par la bornes inferieures de son utilité esperée (il maximise cette esperance mathematique inferieure). En considerant les gravités (à minimiser), on va minimiser l'esperance mathematique de la gravité, c'est à dire evaluer chaque decsion par la borne superieur de sa gravité esperée - la meilleure decision étant celle qui minimise cette evaluation.

La probabilité de faire une forme severe, pour une personne non vaccinée, est $P(FSM) = P(FSM|T) * P(T) + P(FSM|\bar{T}) * P(FSM|\bar{T})$*. Bien sur,* $P(FSM|\bar{T}) = 0$ *(on ne fait pas de forme severe d'une maladie que l'on attrape pas). Donc* $P(FSM) = P(FSM|T) * P(T)$ *;* $P(T)$ *est une proba imprecise (* $P(T) \in [0.4, 0.6]$*) ;* $P(FSM|T)$ *est egalement une proba imprecise, qui depend de l'age. On obtient donc pour* $P(FSM)$ *une proba imprecise qui depend de l'age :*

Age	$P_{inf}(FSM)$	$P_{sup}(FSM)$
< 20	*0.4 * 0*	*0.6 ** $\frac{0.04}{100}$
20-29	*0.4 * 0.01*	*0.6 * 0.01*
30-49	*0.4 * 0.03*	*0.6 * 0.04*
50-69	*0.4 * 0.08*	*0.6 * 0.12*
≥ 70	*0.4 * 0.12*	*0.6 * 0.18*

On peut maintenant calculer la borne superieure de l'esperance mathematique de gravité pour la decision "ne pas se faire vacciner" (le tableau indique egalement sa borne inferieure)

Age	$GrEinf(NoVaccin)$	$GrE_{sup}(NoVaccin)$
< 20	*0 * gr(FSM)*	$\frac{0.024}{100}$ ** gr(FSM)*
20-29	*0.004 * gr(FSM)*	*0.006 * gr(FSM)*
30-49	*0.012 * gr(FSM)*	*0.024 * gr(FSM)*
50-69	*0.048 * gr(FSM)*	*0.072 * gr(FSM)*
≥ 70	*0.072 * gr(FSM)*	*0.108 * gr(FSM)*

Considerons maintenant l'action "Vaccin"- pour personne vaccinée, l esperance mathematique de gravité est : $GrE(Vaccin) = P(ESG) * gr(ESG) + (1 - P(ESG)) * gr(BS) = P(ESG) * gr(ESG)$*. Elle varie donc entre* 0 *(quand* $P(ESG) = 0$*) et* $\frac{1}{10000}.gr(ESG)$ *: dans le pire des cas (borne supérieure de la gravité esperée), elle est egale à* $\frac{1}{10000}.gr(ESG)$ *:*
$GrE_{sup}(Vaccin) = \frac{1}{10000}$

Pour les gens de 20 ans, il est preferable de ne pas se vacciner si $0.006 * gr(FSM) < \frac{1}{10000}.gr(ESG)$ *i.e.* $gr(ESG) > 60 * gr(FSM)$*, c 'est à dire si les effets secondaires eventuels du vaccin sont* 60 *fois plus graves que les effets secondaires de la maladie (qu'on hospitalise 60 fois plus de gens suite à un vaccin que suite à la maladie). Or on sait (ennoncé) que* $gr(ESG) \leq gr(FSM)$ *: il est preférable de vacciner cette classe d'age.*

Pour les gens de plus de 20 ans, le rapport est encore supérieur - là aussi, on conseillera le vaccin.

Pour les tres jeunes, il est preferable de vacciner si $0.0024.10^{-2} * gr(FSM) > \frac{1}{10000}.gr(ESG)$ *i.e. si* $2.4 * gr(FSM) > gr(ESG)$ *- pour les tres jeunes, le conseil depend du rapport* $\frac{gr(ESG)}{gr(FSM)}$ *; si comme dit dans l'ennoncé, on sait qu'il est de l'ordre de* 1*, on a* $2.4 > 1$ *et on enclenche une campagne de vaccination ; si il etait de l'ordre de 2.4 ou plus, on appliquerait un principe de precaution et on ne vaccinerrait pas.*