Université Paul Sabatier

Master 2 DC - **Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision** - 2018-19

Documents autorisés : notes de cours, calculatrice - durée 2h

Exercice 1 - Réseaux Bayésiens (10 points)

Considérez le système suivant :

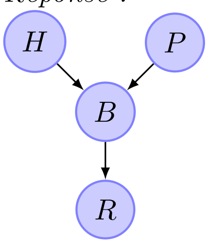
– L'heure de pointe occupe 10% de la journée.
– Il pleut 5% du temps à Toulouse.
– Les chances d'avoir des bouchons sur la rocade sont :

$$\begin{cases} 10\% & \text{hors période de pointe et hors période de pluie,} \\ 30\% & \text{hors période de pointe et sous la pluie,} \\ 60\% & \text{pendant la période de pointe et hors période de pluie,} \\ 90\% & \text{pendant la période de pointe et sous la pluie.} \end{cases}$$

– S'il y a des bouchons, alors j'ai 80% de chances d'arriver en retard à mon rendez-vous, et 10% sinon.

1. Modéliser ces informations sous forme d'un réseau bayésien, avec les variables :
   – H : heure de pointe,
   – P : pluie,
   – B : bouchons,
   – R : retard.

   Réponse :



2. Quelle est la probabilité de $(H = \texttt{faux}, P = \texttt{vrai}, B = \texttt{faux}, R = \texttt{vrai})$?

   Réponse :

$$\begin{aligned} p(H = f, P = v, B = f, R = v) &= p(H = f) \times p(P = v) \times \\ &\qquad p(B = f \mid H = f, P = v) \times p(R = v \mid B = f) \\ &= 0.9 \times 0.05 \times 0.7 \times 0.1 \\ &= 0.00315 \end{aligned}$$

3. Je sais maintenant qu'il ne pleut pas. Quelle est la probabilité de $(H = \texttt{faux}, B = \texttt{faux}, R = \texttt{faux})$?

Réponse :

$$\begin{aligned} p(H=v, B=f, R=f \mid P=f) &= p(H=v) \times p(B=f \mid H=v, P=f) \times \\ &\quad p(R=f \mid B=f) \\ &= 0.1 \times 0.4 \times 0.9 \\ &= 0.036 \end{aligned}$$

4. Quelle est la probabilité d'avoir des bouchons ?
   Réponse :

$$\begin{aligned} p(B=v) &= \sum_{H,P} p(B=v \mid H,P) \times p(H) \times p(P) \\ &= p(B=v \mid H=v, P=v) \times p(Hv) \times p(P=v) + \\ &\quad p(B=v \mid H=v, P=f) \times p(H=v) \times p(P=f) + \\ &\quad p(B=v \mid H=f, P=v) \times p(H=f) \times p(P=v) + \\ &\quad p(B=v \mid H=f, P=f) \times p(H=f) \times p(P=f) \\ &= 0.9 \times 0.1 \times 0.05 + 0.6 \times 0.1 \times 0.95 + \\ &\quad 0.3 \times 0.9 \times 0.05 + 0.1 \times 0.1 \times 0.05 \\ &= 0.0045 + 0.057 + 0.0135 + 0.0005 \\ &= 0.0755 \end{aligned}$$

5. Je ne suis pas en retard. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu un bouchon ?
   Réponse :

$$\begin{aligned} p(B=v \mid R=f) &= \frac{p(B=v, R=f)}{p(R=f)} \\ &= \frac{p(R=f \mid B=v)}{p(R=f)} \times p(B=v) \\ &= \frac{p(R=f \mid B=v)}{\sum_B p(R=f \mid B) \times p(B)} \times p(B=v) \\ &= \frac{0.2}{0.2 \times 0.0755 + 0.9 \times (1 - 0.0755)} \times 0.0755 \\ &= \frac{0.2}{0.84715} \times 0.0755 \approx 0.0178 \end{aligned}$$

6. Sans observation, H et R sont-ils indépendants ?
   Réponse :
   Non, l'information circule par B.

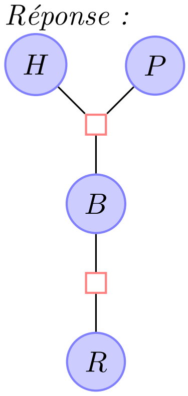
7. J'observe P. H et R sont-ils indépendants ?
   Réponse :
   Non, l'information circule toujours par B.

8. Sans observation, H et P sont-ils indépendants ?
   Réponse :
   Oui, l'information ne passe pas par B, car on a une structure en V.

9. J'observe R. H et P sont-ils indépendants ?
   Réponse :
   Non, si l'on observe R, l'information passe de H à B, R, remonte à B, et passe à P.

10. Quelle est la couverture de Markov (*Markov blanket*) de P ?
    Réponse :
    Il s'agit de l'enfant de P, B, ainsi que du parent de B, H. La couverture est donc $\{B, H\}$.

11. Transformez le problème en un champ de Markov. Quelle est le graphe des facteurs ?
    Réponse :



Exercice 2 - Partage (7pt)

Ivana et Donald se séparent, et doivent se partager : une maison dans le Connecticut, une maison à Palm Beach, un appartement à l'hotel Trump Plaza, un triplex dans la Trump Tower, ainsi que des bijoux. Chacun attribue des points aux lots en fonction de son intêret (avec un total de 100 points pour chacun) .

lot	utilité de Donald (en points)	utilité d'Ivana (en points)
Maison Connecticut	10	38
Maison Palm Beach	40	20
Appartement Trump Plaza	10	30
Triplex Trump Tower	38	10
Bijoux	2	2

2.1 Partage sans compensation

On étudie dans un premier temps les partages sans compensation ni division d'objet.
a) proposer une allocation qui satisfait le test de proportionnalité (justifiez votre reponse)
b) proposer une allocation qui satisfait le test de l'absence d'envie (justifiez votre reponse)
c) proposer une allocation qui satisfait le maxmin test (justifiez votre reponse)

2.2 Partage mixte

Utiliser une procédure partage mixte (Knaster ou Adjuster Winner, au choix) pour construire une allocation équitable en points.
Réponse :

Adjusted Winner : *Ivana reçoit : Connecticut mansion, Trump Plaza apartment, bijouc, and* $x = \frac{2}{15}$ *% de la maison à Palm Beach (en temps par exemple).*
Leur points à tous les deux est : 72.67. Chacun reçoit donc 72.67 % de la valeur totale, qui qui est équitable.
L'allocation obtenue par la procédure Adjusted Winne est toujours equitable (même utilité), sans envie, Pareto optimave and satsifies the test of proportionality. On peut le vérifier sur cet exemple.

Procedure de Knaster :
Ivana recoit : Connecticut - $\frac{38}{2} + \frac{20}{2}$ *+ Plaza Appart -* $\frac{30}{2} + \frac{10}{2}$ *+ Bijoux -* $\frac{2}{2}$
Donald recoit : $\frac{10}{2}$ *+ Palm Beach -* $\frac{40}{2} + \frac{10}{2}$ *+ Tower triplex -* $\frac{38}{2} + \frac{2}{2}$
Il reste dans le pot :
$(\frac{38}{2} - \frac{10}{2}) + (\frac{40}{2} - \frac{20}{2}) + (\frac{30}{2} - \frac{10}{2}) + (\frac{38}{2} - \frac{10}{2}) + (\frac{2}{2} - \frac{2}{2})$ *C'est à dire* $\frac{28}{2} + \frac{20}{2} + \frac{20}{2} + \frac{28}{2} = 48$
Après parage du pot (moitié moitié) :
Ivana a : Connecticut mansion - $\frac{38}{2} + \frac{20}{2}$ *+ Plaza Appart -* $\frac{30}{2} + \frac{10}{2}$ *+ CashJewelery -* $\frac{2}{2} + \frac{48}{2}$
C'est à dire Maison du Connecticut + Plaza Appart + Bijoux + 4.
Donalds a $\frac{10}{2}$ *+ Palm Beach -* $\frac{40}{2} + \frac{10}{2}$ *+ Tower triplex -* $\frac{38}{2} + \frac{2}{2} + \frac{48}{2}$
C'est à dire Palm Beach mansion + Tower triplex - 4. (il donne 4 à Ivana)
L'utilité totale d'Ivana est 38 + 30 + 2 + 4 = 74.

L'utilité totale de Donald est 40 + 38 - 4 = 74.
L'allocation obtenue par la procédure de Knaster est toujours equitable (même utilité), sans envie, Pareto optimale and satisfait le test de proportionality. On peut le vérifier sur cet exemple.

Exercice 3 - theorie des jeux - 3pt

Le "jeux de la crise" met face à face deux joueurs, les manifestants et l'état. Les manifestants peuvent soit bloquer les rond points (action "rond point"), soit rester en famille le week end (action "famille") ; l'état peut soit engager une politique d'aides sociale, ce qui provoque une augmentation des deficits (action "aide"), soit engager une politique de réformes d'austérité budgétaire (action "réformes") et satisfaire ses partenaires

	famille	rond points
aide	-1 ; 2	-3 ; 0
reforme	1 ; -1	-2 ; 0

3.1) Existe-t-il un equilibre de Nash pur ? mixte ? interpréter ce résultat en termes d'entrée en conflit et de sortie de conflit.

3.2) Exhiber une modification de la matrice des des utilités qui permettre de sortir du conflit. Arriverait-on à terme à un état stable (si oui, lequel ?) ?