

Contrôle terminal du Mercredi 4 janvier 2023 (durée 40 mn)

Durée 40mn. Seuls matériels autorisés : une feuille A4 Recto-Verso et de quoi écrire.

On considère un réseau bayésien RB composé de cinq variables.

Variables	Description
C	Créativité (élevée, faible) avec une probabilité de 0.6 qu'il soit élevé.
M	Motivation pour les études (motivé, boaf)
A	Relations Amicales (sociable, isolé) avec une probabilité de 0.8 d'être sociable.
B	Bonheur (heureux, triste)
S	Sagesse (sage, insensé)

Le réseau présente les liens suivants :

- $C \rightarrow M$: la créativité peut rendre les études plus intéressantes, ce qui augmente la motivation.
- $A \rightarrow M$: parce que le fait d'avoir un groupe d'amis qui vous soutiennent peut vous motiver et vous encourager à étudier.

\Rightarrow On considère que la probabilité d'être motivé par les études pour un étudiant créatif et sociable est de 0.9, pour un étudiant créatif isolé de 0.7, pour un étudiant non créatif et sociable de 0.6 et pour un étudiant non créatif et isolé de 0.4.

- $C \rightarrow B$: parce que la créativité peut donner un sentiment d'accomplissement et d'épanouissement, ce qui peut contribuer au bonheur.
- $M \rightarrow B$: de la même manière la motivation peut donner un sentiment d'accomplissement donc contribuer au bonheur.
- $A \rightarrow B$: car avoir des amis qui vous soutiennent peut vous apporter joie et bonheur.

\Rightarrow On précise les probabilités suivantes avec la convention que C est une abréviation pour C = "élevé" et \bar{C} pour C = "faible", et de même pour M et A :

$$P(B|C, M, A) = 0.9; P(B|C, M, \bar{A}) = 0.8; P(B|C, \bar{M}, A) = 0.7; P(B|C, \bar{M}, \bar{A}) = 0.2; \\ P(B|\bar{C}, M, A) = 0.8; P(B|\bar{C}, M, \bar{A}) = 0.6; P(B|\bar{C}, \bar{M}, A) = 0.5; P(B|\bar{C}, \bar{M}, \bar{A}) = 0.4.$$

- $B \rightarrow S$: car être heureux peut conduire à une perspective plus claire et équilibrée, pouvant contribuer à la sagesse. La probabilité d'être sage lorsqu'on est heureux est estimée par un expert (dont nous taisons le nom) à 0.9, et à 0.7 lorsqu'on est triste.

- 1) (2 pts) Formalisez les connaissances ci-dessus à l'aide d'un réseau causal probabiliste sur les 5 variables (donnez la structure et les tables).
- 2) (2 pts) M et S sont-elles d-séparées par B ? que peut-on en déduire sur la probabilité de S sachant B et M ?
- 3) (2 pts) Afin d'établir si l'égalité $P(A|C, M, B, S) = P(A|C, M, B)$ est vraie ou fausse, exprimez ce problème en termes de d-séparation puis tranchez sur la véracité de cette égalité.
- 4) (2 pts) Même question pour l'égalité $P(C|S, A) = P(C|S)$.
- 5) (3 pts) Proposez un arbre de groupes de jonction (non trivial) qui représente le réseau RB, quelle est la taille du plus gros groupe de cet arbre? justifiez que cette taille est optimale.
- 6) (3 pts) Calculez $P(B)$: vous donnerez les formules sans passer à l'application numérique. Par la suite, on note $\alpha = P(B = \text{heureux})$.
- 7) (1 pt) Calculez numériquement la probabilité qu'un étudiant soit créatif motivé, isolé et heureux (donnez le résultat avec 4 chiffres après la virgule)
- 8) (2 pts) Donnez la formule permettant de connaître la probabilité que l'étudiant soit insensé et heureux en fonction de α ?
- 9) (3 pts) On apprend que l'étudiant est sage, quel est la probabilité qu'il soit créatif? Vous expliquerez le raisonnement sans faire l'application numérique.