Contrôle terminal du Mercredi 4 janvier 2023 (durée 40 mn)

Durée 40mn. Seuls matériels autorisés : une feuille A4 Recto-Verso et de quoi écrire.

On considère un réseau bayésien RB composé de cinq variables.

Variables	Description
C	Créativité (élevée, faible) avec une probabilité de 0.6 qu'il soit élevé.
M	Motivation pour les études (motivé, boaf)
A	Relations Amicales (sociable, isolé) avec une probabilité de 0.8 d'être sociable.
B	Bonheur (heureux, triste)
S	Sagesse (sage, insensé)

Le réseau présente les liens suivants :

- $C \rightarrow M$: la créativité peut rendre les études plus intéressantes, ce qui augmente la motivation.
- $A \rightarrow M$: parce que le fait d'avoir un groupe d'amis qui vous soutiennent peut vous motiver et vous encourager à étudier.

$\Rightarrow$ On considère que la probabilité d'être motivé par les études pour un étudiant créatif et sociable est de 0.9, pour un étudiant créatif isolé de 0.7, pour un étudiant non créatif et sociable de 0.6 et pour un étudiant non créatif et isolé de 0.4.

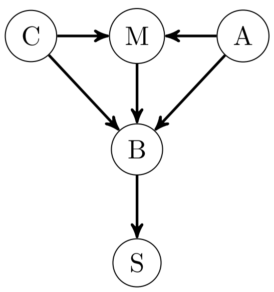
- $C \rightarrow B$: parce que la créativité peut donner un sentiment d'accomplissement et d'épanouissement, ce qui peut contribuer au bonheur.
- $M \rightarrow B$: de la même manière la motivation peut donner un sentiment d'accomplissement donc contribuer au bonheur.
- $A \rightarrow B$: car avoir des amis qui vous soutiennent peut vous apporter joie et bonheur.

$\Rightarrow$ On précise les probabilités suivantes avec la convention que C est une abréviation pour C ="élevé" et $\overline{C}$ pour C ="faible", et de même pour M et A :
$P(B|C,M,A) = 0.9$; $P(B|C,M,\overline{A}) = 0.8$; $P(B|C,\overline{M},A) = 0.7$; $P(B|C,\overline{M},\overline{A}) = 0.2$; $P(B|\overline{C},M,A) = 0.8$; $P(B|\overline{C},M,\overline{A}) = 0.6$; $P(B|\overline{C},\overline{M},A) = 0.5$; $P(B|\overline{C},\overline{M},\overline{A}) = 0.4$.

- $B \rightarrow S$: car être heureux peut conduire à une perspective plus claire et équilibrée, pouvant contribuer à la sagesse. La probabilité d'être sage lorsqu'on est heureux est estimée par un expert (dont nous tairons le nom) à 0.9, et à 0.7 lorsqu'on est triste.

1) **(2 pts)** Formalisez les connaissances ci-dessus à l'aide d'un réseau causal probabiliste sur les 5 variables (donnez la structure et les tables).

Corrigé



$P(C)$	$eleve$	$faible$
	0.6	0.4

$P(A)$	$sociable$	$isole$
	0.8	0.2

$P(M\|CA)$	CA	$C\overline{A}$	$\overline{C}A$	$\overline{CA}$
$M = motive$	0.9	0.7	0.6	0.4
$M = boaf$	0.1	0.3	0.4	0.6

$P(B\|CMA)$	CMA	$CM\overline{A}$	$C\overline{M}A$	$C\overline{MA}$	$\overline{C}MA$	$\overline{C}M\overline{A}$	$\overline{CM}A$	$\overline{CMA}$
$B = heureux$	0.9	0.8	0.7	0.2	0.8	0.6	0.5	0.4
$B = triste$	0.1	0.2	0.3	0.8	0.2	0.4	0.5	0.6

$P(S\|B)$	$B = heureux$	$B = triste$
$S = sage$	0.9	0.7
$S = insense$	0.1	0.3

Noté sur **5 points** finalement.

2) **(2 pts)** M et S sont-elles d-séparées par B ? que peut-on en déduire sur la probabilité de S sachant B et M ?

Corrigé

sur la chaîne $MCBS$ la connexion en C est divergente et C n'est pas dans $\{B\}$ donc l'information passe, mais la connexion en B est série et contient B donc l'information ne passe pas. Sur la chaîne MBS série avec B ne passe pas. Sur la chaîne $MABS$ idem que $MCBS$. Donc oui d-séparés par B. Donc M et S sont indép sachant B : $P(S|B,M) = P(S|B)$

3) **(2 pts)** Afin d'établir si l'égalité $P(A|C,M,B,S) = P(A|C,M,B)$ est vraie ou fausse, exprimez ce problème en termes de d-séparation puis tranchez sur la véracité de cette égalité.

Corrigé

A et S sont-elles d-séparées par $\{C, M, B\}$
la chaîne A M C B S est convergente en M avec M (ou un de ses descendants) dans $\{CMB\}$, puis divergente en C qui est dans CMB donc liaison coupée
la chaîne AMBS série en M avec M dans CMB donc coupée
la chaîne ABS série en B avec B dans CMB donc coupée
bien d-séparées donc l'égalité est vraie car A est indépendante de S sachant CMB.

4) **(2 pts)** Même question pour l'égalité P(C|S,A)=P(C|S).

Corrigé

est-ce que S d-sépare C de A
CMA liaison convergente avec un descendant de M dans $\{S\}$, la liaison n'est pas coupée donc l'égalité est fausse les deux variables ne sont pas indépendantes sachant S.

5) **(3 pts)** Proposez un arbre de groupes de jonction (non trivial) qui représente le réseau RB, quelle est la taille du plus gros groupe de cette arbre ? justifiez que cette taille est optimale.

Corrigé

CMBA — B — BS
taille 4 car il faut un groupe qui contienne B et ses 3 parents

6) **(3 pts)** Calculez $P(B)$: vous donnerez les formules sans passer à l'application numérique. Par la suite, on note $\alpha = P(B = heureux)$.

Corrigé

on initialise t_{CMBA} avec $t_{CMBA} = P(C) \times P(A) \times P(M|C, A) \times P(B|C, M, A)$ qui est égale à la proba conjointe car $P(A|C) = P(A)$ car C et A sont d-séparés (liaison coupées car convergente en M ou convergente en B) donc $t_{CMBA} = P(C, M, B, A)$
pour obtenir $P(B)$ on marginalise : $P(B) = \sum_{CMA} P(CMBA)$

7) **(1 pt)** Calculez numériquement la probabilité qu'un étudiant soit créatif motivé, isolé et heureux (donnez le résultat avec 4 chiffres après la virgule)

Corrigé

$P(C = eleve, A = isole, M = motive, B = heureux) = 0.6 * 0.2 * 0.7 * 0.8 = 0.0672$

8) **(2 pts)** Donnez la formule permettant de connaître la probabilité que l'étudiant soit insensé et heureux en fonction de α ?

Corrigé

on transmet le message P(B) vers la table t_{BS} qui contient $P(S|B)$ ce qui permettra d'avoir la table $t_{BS} = P(B, S)$. $P(B = heureux, S = insense) = 0.1 * \alpha$.

9) **(3 pts)** On apprend que l'étudiant est sage, quel est la probabilité qu'il soit créatif ? Vous expliquerez le raisonnement sans faire l'application numérique.

Corrigé

intégration de l'évidence sage dans $t^*_{BS} = P(B, S = sage) =$

$P(S, B)$	$B = heureux$	$B = triste$
$S = sage$	0.9α	$0.7(1-\alpha)$
$S = insense$	0	0

puis transfert de message de t^*_{BS} vers t_{CMBA} : marginalisation de t^*_{BS} pour trouver $P(B, sage)$,
$t^*_{CMBA} = t_{CMBA} * P(B, sage)/P(B)$ donnant $t^*_{CMBA} = P(CMBA, sage)$
d'où par marginalisation : $P(C = elevee, S = sage) = \sum_{BMA} t^*_{CMBA}$
ou encore $P(elevee, sage) = \sum_{MA} t^*_{C=elevee,M,B=heureux,A} * 0.9 + \sum_{MA} t^*_{C=elevee,M,B=triste,A} * 0.7$
finalement $P(C = elevee|S = sage) = P(C = elevee, S = sage)/P(sage)$
avec $P(sage) = \sum_B t_{SB} = 0.9 * \alpha + 0.7 * (1 - \alpha) = 0.7 + 0.2\alpha$.