Université Paul Sabatier

Master 2 DC - **Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision** - 2019-2020

Documents autorisés : notes de cours

Exercice 1 -Partage (6 points)

Un consortium de trois firmes a décroché un contrat de construction d'un nouvel avion, pour une rétribution globale de 20 unités de monnaie (cette unité est un multiple d'euros). La réalisation est scindée en trois tâches : structure, propulsion, avionique. Chaque firme est capable d'accomplir les trois tâches, mais pour des coûts différents. Le tableau suivant donne le coût $c(i, j)$ pour la firme $i \in \{A, B, C\}$ d'accomplir la tâche $j \in \{1, 2, 3\}$, en unités de monnaie.

	1	2	3
A	7	5	7
B	6	5	10
C	4	6	6

Il est convenu que chaque firme se verra confier une tâche. Le problème est d'allouer les tâches aux firmes puis de partager la rétribution globale de 20 unités.

On notera $\mathbf{x} = \langle x_A, x_B, x_C \rangle$ l'allocation qui confie les tâches x_A, x_B, x_C respectivement aux firmes A, B, C. Par exemple $\langle 1, 2, 3 \rangle$ alloue la tâche 1 à A, la tâche 2 à B, la tâche 3 à C. On notera $\mathbf{r} = (r_A, r_B, r_C)$ le vecteur des rétributions des firmes, avec bien sûr $r_A + r_B + r_C = 20$.

1. Quelle est l'allocation qui dégage le surplus (bénéfice) commun maximum ? On notera $\mathbf{x}^*$ cette allocation.

   Réponse :
   $\mathbf{x}^* = \langle 3, 2, 1 \rangle$. *Cette allocation dégage un surplus (bénéfice) commun maximum égal à 4.*

2. Dans ce problème de partage, la part d'une firme est constituée de la tâche qui lui revient, associée à la rétribution de cette firme.
   Formalisez dans ce contexte le test «*l'allocation* $\mathbf{x}$*, associée au vecteur de rétributions* $\mathbf{r}$ *est sans envie*».
   Instanciez le test précédent pour l'allocation $\mathbf{x}^*$ de manière à obtenir un système d'inégalités sur le vecteur des rétributions. Écrivez ces inégalités sous la forme $r_i \geq r_{i'} + z$ (sans chercher à réduire le système).
   Vérifiez que l'allocation $\mathbf{x}^*$ associée au vecteur de rétributions $(8, 6, 6)$ est sans envie.

   Réponse :
   L'allocation $\mathbf{x}$ *accompagnée des rétributions* $\mathbf{r}$ *est sans envie lorsque*

   $$\textit{pour tout couple d'agents } i, i' \in \{A, B, C\} : \; r_i - c(i, x_i) \geq r_{i'} - c(i, x_{i'})$$

   A n'envie pas B : $r_A - 7 \geq r_B - 5$;
   A n'envie pas C : $r_A - 7 \geq r_C - 7$;
   B n'envie pas A : $r_B - 5 \geq r_A - 10$;
   B n'envie pas C : $r_B - 5 \geq r_C - 6$;
   C n'envie pas A : $r_C - 4 \geq r_A - 6$;
   C n'envie pas B : $r_C - 4 \geq r_B - 6$;
   Soit :
   $r_A \geq r_B + 2$;
   $r_A \geq r_C$;
   $r_B \geq r_A - 5$;
   $r_B \geq r_C - 1$;
   $r_C \geq r_A - 2$;
   $r_C \geq r_B - 2$;

On vérifie :
$8 \geq 6 + 2$;
$8 \geq 6$;
$6 \geq 8 - 5$;
$6 \geq 6 - 1$;
$6 \geq 8 - 2$;
$6 \geq 6 - 2$;

3. Quelles autres méthodes de répartition des rétributions pourriez-vous suggérer ? (on ne demande pas de calculer les solutions, seulement d'en indiquer le principe).

Réponse :

(a) *égaliser les bénéfices (bénéfice = rétribution moins coût), ce qui revient à rembourser les coûts engagés puis diviser également le surplus*

(b) *partager la rétribution globale proportionnellement aux coûts engagés*

(c) *utiliser la solution de Shapley (partage de surplus).*

Remarque : ces trois solutions ne sont pas sans envie, mais on ne demandait pas aux étudiants ni de les calculer ni de le montrer.

Exercice 2 - Decision sous incertitude (4 pt)

Rappels :
- En theorie des fonctions de croyance, on appelle "Element Focal" un ensemble A de poids $m(A) > 0$.
- On dit que les element focaux sont consonants si ils forment une chaine d'inclusion $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$
- Si les element focaux sont consonants la mesure Pl est une mesure de possibilité,
i.e. $\forall B, C, Pl(B \cup C) = \max(PL(B), Pl(C))$

On reprend le problème de choix d'investissement immobilier, en considérant que le marché va monter, une stagnation restant plausible - le cas d'une baisse du marché n'étant toutefois totalement pas à exclure. Le problème étant en réalité à utilités additives, on va utiliser une intégrale de Choquet et modéliser la connaissance dans le cadre des fonctions de croyances.

On a trois elements focaux $\{Fort\}$, $\{Fort, Stable\}$, $\{Fort, Stable, Faible\}$. On pose :

$$m(\{Fort\}) = \alpha,\ m(\{Fort, Stable\}) = \beta,\ m(\{Fort, Stable, Faible\} = \gamma \qquad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Le tableau des revenus est le suivant :

	Fort	Moyen	Faible	
Residence	500	-100	-500	
Immeuble	700	100	-300	
Appartements	800	200	-200	
Aucun	0	0	0	

On suppose que le decideur a une fonction d'utilité neutre $u(x) = x$.

1. Dessiner un diagramme de Venn indiquant les elements focaux

2. Calculer $Pl(\{Fort\}), Pl(\{Faible\}), Pl(\{Stable\}), Pl(\{Fort, Stable\}), Pl(\{Fort, Stable, faible\})$

   Réponse :
   $Pl(\{Fort\}) = \alpha + \beta + \gamma = 1,\ Pl(\{Faible\}) = \gamma,\ Pl(\{Stable\}) = \beta + \gamma,\ Pl(\{Fort, Stable\}) = 1,$
   $Pl(\{Fort, Stable, faible\}) = 1$

3. Calculer $Bel(\{Fort\}), Bel(\{Fort, Stable\}), Bel(\{Fort, Stable, faible\})$

   Réponse :
   $Bel(\{Fort\}) = \alpha, Bel(\{Fort, Stable\}) = \alpha + \beta, Bel(\{Fort, Stable, faible\}) = 1$

4. A quelle conditions sur α et β le décideur pessimiste préférera investir plutôt que de s'abstenir ? quel investissement préfèrera t il alors faire ?

   Réponse :
   $Ch_{Bel}(residence) = -500.Bel(\{Fort, Stable, faible\}) + 400.Bel(\{Fort, Stable\}) + 600.Bel(\{Stable\}) =$
   $-500.1 + 400.\alpha + 600.(\alpha + \beta)$
   $Ch_{Bel}(Immeube) = -300.Bel(\{Fort, Stable, faible\}) + 400.Bel(\{Fort, Stable\}) + 600.Bel(\{Stable\}) =$
   $-300.1 + 400.\alpha + 600.(\alpha + \beta)$
   $Ch_{Bel}(Appartements) = -200.Bel(\{Fort, Stable, faible\}) + 400.Bel(\{Fort, Stable\}) + 600.Bel(\{Stable\}) =$
   $-200.1 + 400.\alpha + 600.(\alpha + \beta)$
   La decision meillere decision entre ces trois là est "Appartement", quels que soient α et β et γ.
   $Ch_{Bel}(Aucun) = 0$;
   Donc on achete (un appartement) ssi $-200 + 400.\alpha + 600.(\alpha + \beta) \geq 0$

5. Donner un exemple de valeurs pour α, β, γ tels que on a interet à acheter

   Réponse :

$\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 0$ $\gamma = \frac{2}{3}$ *(*$Bel(Appartement) = -200 + \frac{1}{3}1000$*)*