Chapitre 1

Le réseau causal : Un modèle graphique de la causalité

Les avantages d'un modèle graphique sont entre autres :

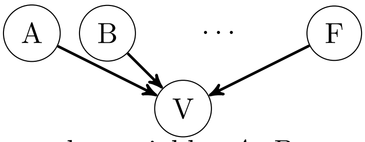
- La polyvalence : on peut exploiter le même modèle pour évaluer, prévoir, diagnostiquer, ou optimiser des décisions, ce qui contribue à rentabiliser l'effort de construction du modèle.
- Un recueil d'expertise facilité : la représentation des connaissances consiste simplement à relier des causes et des effets par des arcs. De nombreuses expériences montrent qu'il est souvent plus facile pour un expert de formaliser ses connaissances sous forme de graphe causal que sous forme de système à base de règles, en particulier parce que la formulation de règles sous la forme **SI** $\cdots$ **ALORS** est très contraignante.
- Il existe des techniques d'apprentissage de la structure à partir de données.

Le formalisme des réseaux causaux couplé à la théorie des probabilités a conduit aux *réseaux causaux probabilistes*, cas particuliers des *réseaux Bayésiens.*

> Rappels en théorie des graphes.
>
> **Définition 1** (graphe orienté (DG))**.** *Un graphe orienté (DG pour « directed graph ») est un couple* (V, E) *où* V *est un ensemble fini de sommets (nœuds) et* E *une relation binaire (irréflexive (pour un graphe sans boucle)) sur* V*. Le couple* (v, w) *élément de* E *représente un arc (orienté) de* v *vers* w*.*
>
> **Définition 2** (graphe non-orienté)**.** *Un graphe non orienté est un graphe (V, E) où la relation E est symétrique. On appelle arête la relation symétrique entre deux sommets.*
>
> **Définition 3** (chaîne, chemin, circuit)**.** *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe. Une séquence de sommets* $(v_0, \ldots, v_n)$ *est une chaîne de longueur* n *entre* v_0 *et* v_n *ssi pour tout* $i \in [1, n]$ *on a* (v_{i-1}, v_i) *dans* E *ou* (v_i, v_{i-1}) *dans* E*.*
> *Une séquence de sommets* $(v_0, \ldots, v_n)$ *est un chemin de longueur* n *entre* v_0 *et* v_n *ssi pour tout* $i \in [1, n]$ *on a* (v_{i-1}, v_i) *dans* E*.*
> *Un chemin ou une chaîne est simple ssi elle ne possède pas plusieurs fois le même arc.*
> *Un circuit de longueur* n *est un chemin simple* $(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_0)$*.*

Définition 4 (réseau causal)**.** *Un réseau causal est un graphe orienté sans circuit (appelé DAG pour « directed acyclic graph »), dont les sommets représentent les variables et les arcs sont des liens d' influence directe. On suppose que toutes les dépendences directes sont mentionnées dans le réseau.*

Un arc $\text{A} \longrightarrow \text{B}$ représente une dépendance fonctionnelle entre A et B, "A cause/influence B".

La situation 

représente le fait que V dépend directement uniquement des valeurs des variables A, B, ..., et F.

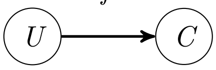
Bien que l'arc soit orienté, l'information peut circuler dans les 2 sens : *S'il existe une relation causale de A vers B (ou plus généralement une corrélation entre A et B), toute information sur l'état de A peut modifier la connaissance que j'ai de l'état de B et réciproquement.*

Exemple 1. *Trois urnes u_1, u_2 et u_3 contiennent respectivement une boule blanche bu_1 et une boule noire nu_1, deux boules blanches (notées b_1u_2, et b_2u_2) et deux boules noires n_1u_3, n_2u_3.*

Considérons la situation dans laquelle on a 5 tubes qui mènent chacun à une urne, deux tubes mènent à l'urne 1, deux tubes à l'urne 2 et un tube à l'urne 3, l'expérience consiste à choisir un tube au hasard et à extraire une boule de l'urne. On a donc $\Omega = \{bu_1, nu_1, b_1u_2, b_2u_2, n_1u_3, n_2u_3\}$.

On considère la variable U (resp. C) qui associe à chaque élément de Ω l'urne le contenant (resp. sa couleur). U prend 3 valeurs $\mathscr{D}_U = \{u_1, u_2, u_3\}$, C prend deux valeurs : b et n.

L'expérience consiste à choisir une urne au hasard, à y prendre une boule et relever sa couleur. Les deux variables U et C représentent un ensemble exhaustif et mutuellement exclusif d'éventualités (l'ensemble des valeurs possibles). Nous pouvons donc représenter par le réseau suivant l'influence de la connaissance de la valeur de U sur la connaissance de la valeur de C.



Nous connaissons :

$$P(\mathscr{U}) : P(u_1) = P(u_2) = 2/5, P(u_3) = 1/5$$
$$P(C|U) : P(b|u_1) = P(n|u_1) = 1/2, P(b|u_3) = P(n|u_2) = 0, P(b|u_2) = P(n|u_3) = 1$$

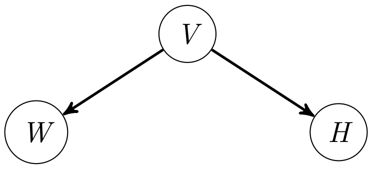
Nous saurons donc calculer $P(\mathscr{U}|C)$.

Exemple 2 (les routes verglacées)**.** *J'attends impatiemment l'arrivée de William et d'Hector. Hector et William sont connus pour être de piètres conducteurs : si les rues sont verglacées, ils auront très probablement un accident.*

J'apprends que William a eu un accident. Je pense que c'est à cause du verglas et qu'il y a un fort risque qu'Hector aussi soit retardé par un accident (sans info sur V, W et H sont liés).

En sortant de mon bureau, je constate qu'il fait chaud : pas de verglas. Je pense alors que William n'a pas eu de chance et je décide d'attendre Hector encore un moment.

Pour formaliser l'histoire, considérons les 3 variables binaires suivantes : V (présence de Verglas), H (accident d'Hector) et W (accident de William). La présence de verglas est une cause directe d'accident pour William et Hector. Une information sur V a donc pour effet d'accroître la certitude sur l'état de H et de W. On peut représenter la situation par le graphe :



Quand j'ai su que William avait eu un accident, j'ai raisonné en « remontant » un arc de causalité. J'ai pensé que c'était probablement lié au verglas ce qui augmente la certitude sur l'état de V donc de H. Quand je constate qu'il ne peut pas y avoir de verglas, l'accident de William n'induit plus maintenant la présence de verglas (mais plutôt la simple maladresse). L'accident de William n'a plus d'influence sur la situation d'Hector.

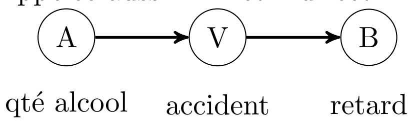
Quand on n'a aucune information sur V alors W et H sont dépendantes, mais quand l'état de V est connu avec certitude, W et H sont indépendantes.

1 Circulation de l'information dans un réseau causal

(à part les liaison directes)

Connexion série de A à B

Appelée aussi « Effet indirect »

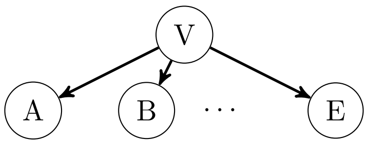


A influence directement V qui a son tour influence directement B. De même une information sur B influera sur la certitude de A à travers V. Mais si l'état de V est connu, une information sur l'état de A n'apportera rien pour la connaissance de l'état de B, puisque B est uniquement influencé par V. Nous dirons que A et B sont séparées étant donné V. Quand l'état (la valeur) d'une variable sera connu, on dit que la variable est instanciée.

Exemple 3. *A = qté d'alcool absorbée pendant la soirée, V = accident de la route en rentrant, B = retard. Si je sais que mon ami a eu un accident (V), le fait de connaître qu'il n'a rien bu pendant la soirée (A) ne m'apprend rien de plus sur son retard (B).*

Connexion divergente de A à B

Appelée aussi « Cause commune »



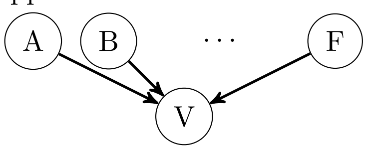
V est une cause directe de A, B, ..., E. L'information peut circuler entre les fils de V tant que l'état de V n'est pas connu. On dira que les variables A, B, ..., E sont séparées étant donné V.

Exemple 2 (suite) *Variables V, W et H en connexion divergente connectées par V.*

Propriété 1 (connexion divergente/série)**.** *Une information peut être transmise au travers d'une connexion divergente ou série sauf si la variable de connexion est instanciée.*

Connexion convergente entre A et B

Appelée aussi « Effet commun »

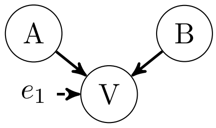


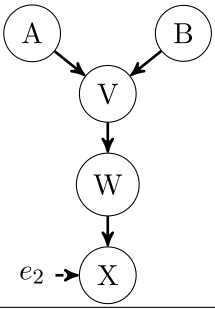
Si on ignore tout sur V sauf ce qui peut être inféré de A, B, ..., F alors les parents de V sont séparés : Une information sur l'état de A n'aura aucune influence sur la connaissance de l'état de B.

Exemple 4. *V = RetardLéo, A = Embouteillages, B = PbRéveil. Le fait qu'il y ait des embouteillages (valeur de A) n'a aucun lien avec le fait que le réveil soit en panne (valeur de B). Si Léo est en retard (valeur de V), j'ai tendance à croire qu'il y a des embouteillages. Si maintenant j'apprends que son réveil est en panne, je suis rassurée sur l'éventualité d'embouteillages.*

Propriété 2 (connexion convergente)**.** *Une information peut être transmise à travers une connexion convergente si la variable de la connexion ou l'un de ses descendants a reçu une information (de manière directe ou non).*

Définition 5. *Une évidence e sur une variable V est une information (plus ou moins certaine) sur son état (représentée par un sommet non encerclé origine d'un arc pointillé vers V). Si l'assertion donne l'état exact de la variable il s'agit d'évidence dure appelée aussi instanciation (représenté par un arc en trait plein).*





Le blocage dans le cas de connexion série ou divergente requiert l'évidence dure.
Alors que l'ouverture d'une connexion convergente intervient pour tout type d'évidence.

2 La d-séparation

Le "d" vient du fait que le graphe est orienté (directed separation).

Les trois cas décrits dans la section précédente permettent de couvrir tous les cas de transmission d'information entre des variables non directement reliées.

Définition 6 (d-séparation)**.** *Les variables A et B d'un réseau causal sont d-séparées ssi sur toute chaîne entre A et B il existe une variable V telle que :*

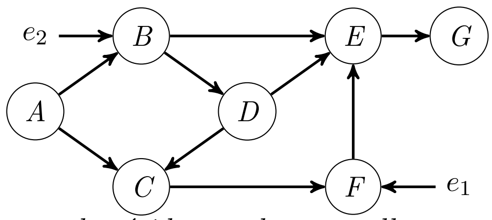
a) la connexion en V est série ou divergente avec l'état de V connu, ou

b) la connexion en V est convergente et ni V ni aucun de ses descendants n'a reçu d'évidence.

Si les variables A et B ne sont pas d-séparées, elles sont connectées.

Remarque 1. *Si A et B sont connectées, une modification de notre connaissance de A n'induit pas nécessairement une modification de notre connaissance de B. En revanche, si A et B sont d-séparées, une information sur l'état de A n'a aucun impact sur la connaissance de l'état de B. La d-séparation permet de pouvoir traiter des parties du réseau indépendamment.*

Exemple 5.



e_1 et e_2 sont des évidences dures, quelles sont les variables connectées indirectement à A ? $\{D, E, G\}$ car ABD bloquée, mais ACD conv avec info sur un descendant donc ouverte, $ACDE$ avec D div donc ouverte, $ACDEG$ avec E série sans info.

Définition 7 (d-séparation généralisée)**.** *X, Y et Z dénotant trois ensembles de sommets disjoints deux à deux dans un DAG, nous dirons que Z d-sépare X et Y ssi toute chaîne c_i entre un sommet de X et un sommet de Y contient un sommet V_i tel que :*

a) la connexion en V_i est série ou divergente et V_i appartient à Z ou

b) la connexion en V_i est convergente et ni V_i, ni sa descendance n'appartiennent à Z.

Intuitivement, X et Y sont d-séparés par Z signifie que le passage de l'information entre X et Y est bloqué dans le cas où la seule information connue dans le graphe concerne Z.

Exemple 5 (suite) *Dans le graphe de cet exemple, trouvez un ensemble qui d-sépare $\{A\}$ de $\{E\}$. Notons que $\{B, C\}$ ou $\{B, F\}$ ne d-sépare pas A de E car F est un descendant de C convergent qui appartient à Z. $\{B, D, F\}$ ou $\{B, C, D\}$ séparent A de E (il faut bloquer la liaison série $ACFE$ en donnant C ou F et ensuite la seule façon de bloquer $ACDE$ est D).*