Master 2 DC
UE Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision

Décembre 2017
Notes de cours autorisées

NB : Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des explications

Exercice 1 (5pt)

On souhaite représenter un ensemble de relations causales entre variables par un réseau Bayésien.

- Une visite en Inde (I) peut causer un SRAS (S)
- Être fumeur (F) augmente la fréquence des cancers du poumon (C)
- Être fumeur (F) augmente aussi la fréquence des bronchites (B)
- Une radiographie aux rayons (X) permet souvent d'observer les opacifications des poumons (O)
- Le SRAS (S) engendre des opacifications des poumons (O)
- La cancer des poumons (C) engendre des opacifications des poumons (O)
- Les opacifications des poumons entraînent une respiration courte (R)
- Une bronchite peut également entraîner une respiration courte (R)

1) Dessiner le graphe orienté sans circuit (DAG) définissant un réseau Bayésien qui représente les relations de causalité indiquées au dessus. Donner son graphe des facteurs. Écrire la probabilité jointe *P(I,S,F,C,B,O,R,X)* en fonction des probabilités conditionnelles définies par le DAG. Donner son graphe moral.

2) Donner la couverture de Markov (minimale) de la variable *O*.

3) Indiquer si les d-séparabilités suivantes sont vraies :

<O | {I,S,C,F,B,R} | X> *<O | {S,C} | F>* *<B | {F} | O>*

Pour chaque question, on listera les chaînes reliant les deux variables en explicitant les propriétés qui montrent la (ou l'absence de) d-séparation ou on dessinera le DAG avec le parcours de la « Bayes ball ».

4) Trianguler le graphe moral du réseau bayésien avec 1 arête additionnelle. Construire un « *junction tree* » associé à ce graphe triangulé (on indiquera comment on procède, on indiquera les clusters et les séparateurs obtenus).

5) On observe un fumeur qui revient d'Inde et dont la respiration est courte (*F=v, I=v, R=v*). On affecte les variables *F, I, R* en conséquence. On souhaite calculer la probabilité conditionnelle marginale *P(S | F=v, I=v, R=v)* qu'il ait un SRAS en s'appuyant sur le *junction tree* précédent. Donner un ordre d'élimination des clusters qui aboutisse au calcul d'une fonction marginale $\Phi(S)$ sur la seule variable *S* (SRAS). Que faut il faire pour obtenir *P(S | F=v, I=v, R=v) à partir de* $\Phi(S)$?

Exercice 2-A (3pt)

On dispose des connaissances générales suivantes concernant la vaccination grippale :

A1 Si je suis une personne à risque, je suis bien vaccinée
A2 Si le vaccin était périmé, je ne suis pas bien vaccinée
A3 Si j'ai une forte fièvre, j'ai très probablement la grippe
A4 Si je suis bien vaccinée, normalement je n'ai pas la grippe

et des faits suivants :

O1 J'ai une forte fièvre
O2 Je suis une personne à risque
O3 Le vaccin que j'ai reçu était périmé

On se place en logique propositionnelle et on utilisera ***exclusivement*** les symboles suivants : *ris* (je suis une personne à risque), *vac* (je suis bien vaccinée), *per* (le vaccin était périmé), *ff* (j'ai une forte fièvre), *gr* (j'ai la grippe).

L'incertitude relative et la présence éventuelle d'exceptions est représentée par la stratification suivante : les faits sont jugés plus prioritaires que les assertions A1 et A2, elles-mêmes jugées plus prioritaires que les assertions A3 et A4.

1) Ecrire les connaissances sous la forme d'une base stratifiée BC : (BC1, BC2, BC3).

2) Déterminer les sous-bases INCL-préférées de BC puis les sous-bases CARD-préférées de BC.

3) On s'intéresse aux littéraux suivants : gr, $\neg gr$, vac, $\neg vac$. Que peut-on conclure avec le principe universel (UNI) appliqué aux sous-bases INCL-préférées (resp. CARD-préférées) ?

Exercice 2-B (4pt)

On veut représenter les connaissances et faits de l'exercice 1-A, avec les mêmes importances, en utilisant un modèle graphique de type « *cost function network* » (min,+), avec 5 variables *ris*, *vac*, *per*, *ff*, et *gr* ayant comme domaine $\{v,f\}$ (vrai, faux) et une échelle de coûts $B=\{0,1,\ldots,50\}$.

Chaque information (*A1, A2, A3, A4, O1, O2* ou *O3*) sera associée à une fonction locale. Cette fonction associe un coût non nul aux affectations qui violent l'information associée. Pour la strate BC1, la plus importante, le coût non nul utilisé est 10. Pour la strate BC3, la moins importante, il est seulement de 1. Ainsi, la fonction φ^{O1}_{ff} qui représente O1 et porte sur la variable *ff* vérifie

$$\varphi^{O1}_{ff}(v) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^{O1}_{ff}(f) = 10$$

1) Dessiner le graphe des facteurs (*factor graph)* du modèle graphique. Chaque information/fait sera représentée par une fonction locale spécifique (il doit y avoir 7 fonctions représentées).

2) Pour une affectation donnée *x* de toutes les variables, une fonction locale telle que $\varphi_S(x[S]) = 0$ est dite satisfaite. On note *BCS(x)* l'ensemble des informations dont la fonction locale associée est satisfaite par *x*. Proposer une valeur de coût entre 1 et 50 pour la strate BC2 qui garantisse que *BCS(x)* décrive l'ensemble des sous-bases CARD-préférées quand *x* décrit l'ensemble des solutions optimales du modèle graphique. Justifier votre choix.

3) Dessiner la micro structure du modèle graphique (les fonctions unaires seront représentées par des boucles). On ne dessinera pas les arêtes de coût zéro.

4) On souhaite calculer les solutions x de coût minimum du problème en utilisant un processus répété d'élimination de variables. Indiquer la variable qu'il est peu judicieux d'éliminer en premier, expliquer pourquoi. Donner un ordre complet d'élimination judicieux. Est-il parfait ?

Exercice 3 (5 pt)

Un consortium de trois firmes a décroché un contrat de construction d'un nouvel avion, pour une rétribution globale de 20 M €. La réalisation est scindée en trois tâches : structure, propulsion, avionique. Chaque firme est capable d'accomplir les trois tâches, mais pour des coûts différents – indiqués par le tableau suivant.

	tâche 1	tâche 2	tâche 3
Firme A	7	5	7
Firme B	6	5	10
Firme C	4	6	6

Il est convenu que chaque firme se verra confier une tâche. Le problème est d'allouer les tâches aux firmes puis de partager la rétribution globale de 20 Meuros.

On notera x = (xA, xB, xC) l'allocation qui confie les tâches xA, xB, xC respectivement aux firmes A,B,C.
Par exemple x=(1,2,3) alloue la tâche 1 à A, la tâche 2 à B, la tâche 3 à C.
On notera r= (rA, rB, rC) le vecteur des rétributions des firmes, avec bien sûr $r_A + r_B + r_C = 20$.

1) Quelle est l'allocation x* qui dégage le bénéfice commun maximum ?

2) On considère que la part d'une firme est constituée de la tâche qui lui revient, associée à sa rétribution.

a) Formalisez dans ce contexte le test « l'allocation x associée au vecteur r est sans envie ».
b) Instanciez ce test pour l'allocation x* de manière à obtenir un système d'inégalités sur le vecteur des rétributions. Ecrivez ces inégalités sous la forme $r_i \geq r_{i'} + z$
c) Vérifiez que l'allocation x* associée au vecteur de rétributions (8, 6, 6) est sans envie.

3) Quelles autres méthodes de répartition des rétributions pourriez-vous suggérer ? (on ne demande pas de calculer les solutions, seulement d'en indiquer le principe).

Exercice 4 (4 pt)

Une personne souhaite acheter des vêtements (une veste, un pantalon et une chemise) pour une cérémonie. Elle exprime les préférences suivantes (dont la sémantique est Ceteris Paribus) :

P1 : *Je préfère une veste noire à une veste blanche*
P2 : *Je préfère un pantalon noir à un pantalon blanc*
P3 : *Si la veste et le pantalon ont la même couleur, je préfère une chemise rouge à une chemise blanche, sinon je préfère une chemise blanche*

On considère donc 3 variables binaires : V (veste) de domaine {Vb, Vn} (Vb représente veste blanche)
P (pantalon) de domaine {Pb, Pn}
C (chemise) de domaine {Cb, Cr}

1) Représenter les préférences **P1, P2, P3** par un CP-net.

2) Donner la comparaison induite par ce CP-net pour chacune des paires d'options suivantes :

a) VbPnCb et VbPbCr

b) VnPbCr et VbPbCb

3) On considère maintenant les préférences **P4** et **P5** suivantes :
P4 : Je préfère une veste blanche et un pantalon noir à une veste noire et un pantalon blanc
P5 : Je préfère une chemise blanche à une chemise rouge quelles que soient les couleurs de la veste et du pantalon.
On souhaite représenter les préférences **P1, P2, P4, P5** par une utilité U décomposable de la forme U(V, P, C) = U1(V, P) + U2(C).
On pose U1(Vn, Pn) = 4, U1(Vb, Pn) = 3, U1(Vn, Pb) = 2, U1 (Vb, Pb) = 1.
Proposer des valeurs pour la fonction U2.
