KINX9AD1 – IA et Décision – Examen Terminal – 5 janvier 2022

Documents autorisés: 2 feuilles manuscrites (recto-verso)

Questions de cours (5 points)

- Citer deux differences entre la procedure de Knaster et la procédure adjusted Winner
- Est il vrai que que toute allocation satisfaisant le test de proportionnalité satisfait le test d'absence d'envie ? si oui le montrer, si non donner un contre exemple

Exercice 1 (8 points)

On considère un espace quadrillé en 4 colonnes (W, X, Y et Z) et quatre lignes (1, 2, 3 et 4) - soit seize sous zones. Des capteurs surveillent un navire present dans cette zone.

	W	X	Y	Z
1	☐ W1	☐ X1	☐ Y1	☐ Z1
2	☐ W2	☐ X2	☐ Y2	☐ Z2
3	☐ W3	☐ X3	☐ Y3	☐ Z3
2	☐ W4	☐ X4	☐ Y4	☐ Z4

1. Le capteur 1 estime que le navire est en colonne W avec une probabilité de 0.7, en colonne Z avec une probabilité de 0 , en colonne X ou Y avec une probabilité 0.3.
   - 1.1 Modéliser l'information fournie par le capteur 1 par une fonction de masse m_1.
   - 1.2 Donner un encadrement de la probabilité que le navire soit en zone $W1$ d'après ce seul capteur (d après cette seule fonction de masse)
2. Le capteur 2 estime que le navire est en ligne 1 avec une probabilité de 0.8, en lignes 2 ou 3 avec une probabilité 0.2 et en ligne 4 avec un probabilité 0.
   - 2.1 Modéliser l'information fournie par le capteur 2 par une fonction de masse m_2.
   - 2.2 Donner un encadrement de la probabilité que le navire soit en zone $W1$ d'après ce seul capteur (d'après cette seule fonction de masse)
3. La théorie des fonctions de croyance est fréquemment utilisée pour faire de la fusion d'information. Classiquement, on fusionne deux fonctions de masses m_1 et m_2 en une fonction $m_{1,2}$:

   $$\forall A, m_{1,2}(A) = \Sigma_{B,C,A=B\cap C} m_1(B) * m_2(C)$$

   Ce qui revient à faire l'intersection de chaque element focal de la premiere fonction de masse avec chaque element focal de la seconde, et de lui attribuer le produit des deux poids. Lorsqu'un même ensemble A est obtenu de deux manières différentes, on somme les poids ainsi attribués. Si l'une des intersections est vide, son poids va sur l'ensemble vide (et $m_{1,2}(\emptyset)$ mesure de degré de contradiction entre les sources à fusionner)

   - 3.1 Appliquer cette règle de fusion pour fusionner les informations issues des deux capteurs (détailler le calcul).
   - 3.2 Dans quelle mesure est il certain que le navire soit en $W1$? dans quelle mesure est ce plausible ?
   - 3.3 Dans quelle mesure est il certain que le navire soit en zone nord ouest $\{W1, W2, X1, X2\}$? dans quelle mesure est ce plausible ?

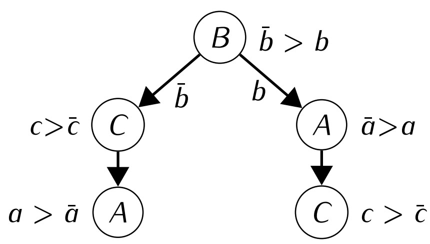
- 3.4 On envisage de porter secours à ce navire : l'envoi d'un bateau à moteur sur une zone unique coute x et rapporte z si le navire est trouvé, rien sinon; l'envoi d'un bateau à moteur sur k zones contigues coute $x + (k-1)\frac{x}{2}$ - et rapporte z si le navire est trouvé.
  Pour chacune des actions suivantes, calculer son utilité pessimiste (pour l'exemple, on peut supposer $x = 16, z = 100$ et une fonction d'utilité lineraire).
  - Envoyer les secours en zone $W1$ (action de cout x)
  - Envoyer les secours parcourir toute la ligne 1 (action de cout $x + \frac{3}{2}x$)
  - Envoyer les secours parcourir tout la zone nord ouest (action de cout $x + \frac{3}{2}x$)

  A partir de quelle valeur de x a t on interet à ne pas se limiter à la zone $W1$?

Exercice 2 (3,5 points)

On considère des alternatives définies par trois variables binaires A, B, C, de domaines respectifs $\underline{A} = \{a, \bar{a}\}$, $\underline{B} = \{b, \bar{b}\}$, $\underline{C} = \{c, \bar{c}\}$.

Question 2.1 Soit $\succ$ l'ordre linaire sur l'ensemble des alternatives représenté par l'arbre lexicographique ci-contre.



1. Des deux alternative $a\bar{b}\bar{c}$ et $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, laquelle est préférée à l'autre ?
2. Quelle est l'alternative optimale / la plus préférée ?
3. Quelle est la meilleure alternative avec $B = b$?

Question 2.2 Soit l'ordre linéaire suivant :
$abc \succ ab\bar{c} \succ a\bar{b}c \succ a\bar{b}\bar{c} \succ \bar{a}bc \succ \bar{a}\bar{b}c \succ \bar{a}b\bar{c} \succ \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Donnez un arbre de préférences lexicographiques qui représente cet ordre.

Question 2.3 Démontrer qu'on ne peut pas représenter l'ordre de la question précédente avec une utilité additive. Définissez une utilité additive généralisée qui représente cet ordre, et telle que chacune des "sous"-utilités ne porte que sur 1 ou 2 variables

Exercice 3 (3,5 points)

On considère une utilité additive généralisée u défini sur un espace où les alternatives sont définies par 4 variables A, B, C, D :

$$u(a, b, c, d) = u_1(a, b) + u_2(b, c) + u_3(c, d)$$

où les u_is sont définies par les tables ci-contres. On veut calculer l'alternative optimale.

	u_1
a_1b_1	3
a_1b_2	8
a_2b_1	0
a_2b_2	9

	u_2
b_1c_1	4
b_1c_2	0
b_2c_1	8
b_2c_2	1

	u_3
c_1d_1	0
c_1d_2	0
c_1d_3	2
c_2d_1	4
c_2d_2	1
c_2d_3	8

Question 3.1 Calculer la table de u_1^* définie par : $u_1^*(b) = \max_a u_1(a, b)$ pour tout $b \in \underline{B}$. On indiquera dans la table l'instanciation de A pour laquelle chaque valeur est atteinte.
Démontrer que $\max_{abc} u(a, b, c) = \max_{bc}(u_1^*(b) + u_2(b, c) + u_3(c, d))$. (On rappelle que $\max_{x,y} f(x, y) = \max_x \big(\max_y f(x, y)\big)$.)
Erreur : manque "d" dans les param. de u ci-dessus, il fallait :
$\max_{abcd} u(a, b, c, d) = \max_{bcd}(u_1^*(b) + u_2(b, c) + u_3(c, d))$

Question 3.2 Calculer de même la table de u_2^* définie par : $u_2^*(c) = \max_b(u_1^*(b) + u_2(b, c))$ pour tout $c \in \underline{B}$.
Quelle paire $(c, d) \in \underline{C} \times \underline{D}$ maximise $u_2^* + u_3$?

Question 3.3 Quelle alternative maximise u, et quelle est sa valeur ?

Question 3.4 On considère maintenant une utilité v additive généralisée définie par :

$$v(a, b, c, d) = v_1(a, b) + v_2(a, c) + v_3(b, d) + v_4(c, d).$$

Expliquer comment décomposer le calcul d'une alternative qui maximise v.