KINX9AD1 – IA et Décision – Examen de Rattrapage – 12 juin 2024

Documents autorisés : 1 feuille manuscrite (recto-verso)

Question de cours - Théorie des jeux (2 points)

— Un équilibre de Nash pur est il toujours Pareto optimal ?

— Est il vrai que tout jeu simultané en forme normale admet un équilibre pur ? un équilibre mixte ?

Exercice 1 (4 points)

Le parlement de Micronésie est composé de trois partis politiques, A, B, et C, qui ont respectivement 45, 49 et 6 représentants. Ils doivent voter pour décider s'ils vont adopter un projet de loi de dépenses de 100 millions de dollars et comment cette somme doit être répartie entre les partis. Un vote majoritaire, c'est-à-dire un minimum de 51 voix, est nécessaire pour faire passer toute législation, et si le projet de loi n'est pas adopté, alors aucun des partis ne recoit rien - les 100 millions ne sont pas depensés. Combien d'argent est-il juste pour chaque parti de réclamer ?

Idée : Ce problème peut être vu comme un problème de partage équitable, avec $N = \{A, B, C\}$. Certaines coalitions (celles qui rassemblent au moins 51 personnes) sont des coalitions gagnantes, c'est-à-dire suffisantes pour l'adoption du projet de loi si tous leurs membres choisissent de voter en sa faveur. À chaque coalition $S \subseteq N$, on assigne $v(S) = 1$ si la coalition est gagnante (si le nombre de représentants dans la coalition est supérieur à 51), $v(S) = 0$ sinon. Par exemple $v(\{B\}) = 0$, $v(\{C\}) = 0$ mais $v(\{B, C\}) = 1$.

1. Calculer $v(\{A\})$, $v(\{A, C\})$ et $v(\{A, B, C\})$.

2. La valeur de Shapley de chaque joueur (de chaque parti) estime le pouvoir qu'il a dans l'assemblée ; donner les valeurs de Shapley de A, B et C, et donc le montant que chacun peut reclamer sur les 100 millions disponibles.

Exercice 2 (7 points)

Pour un problème de détection d'obstacle en robotique mobile, on utilise des capteurs fiabilité connue. Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a qu'un objet (qu'un obstacle) dans l'espace, et que cet espace comporte deux zones α et β, disjointes (typiquement : α serait la moitié gauche de l'espace, β la moitié droite).

1. Dans un premier temps, on sait qu'un capteur A de fiabilité 0.7 a detecté l'objet dans la zone α de l'espace ce qui peut etre modélisé par la fonction de masse suivante :

$$m_A(\{\alpha\}) = 0.7 \qquad m_A(\{\alpha, \beta\}) = 1 - 0.7 = 0.3$$

a) Dans quelle mesure est il certain que l'objet soit en zone α ? dans quelle mesure est ce plausible ?

b) Dans quelle mesure est il certain que l'objet soit en zone β ? dans quelle mesure est ce plausible ?

2. On sait maintenant que deux capteurs A (fiabilité 0.7) et B (fiabilité 0.6) on détecté l'objet en zone α.

a) Modéliser l'information fournie par B par une fonction de croyance m_B

b) Donner la fonction de masse $m_{A,B}$ obtenue en fusionant les fonctions de masse m_A et m_B pour recouper les deux informations [1]

c) Apres fusion, dans quelle mesure est il certain que l'objet soit en α ? dans quelle mesure est ce plausible ?

d) Quel est le niveau de contradiction des deux informations ?

3. On apprend enfin qu'un troiseme capteur, C, de fiabilité 0.8 a détecté l'objet en zone β.

a) Modéliser l'information fournie par C par une fonction de croyance m_c puis fusionner cette information avec les deux informations precedentes

b) Apres fusion, dans quelle mesure est il certain (resp. plausible) que l'objet soit en α ?

c) Quel est le niveau de contradiction des trois informations ?

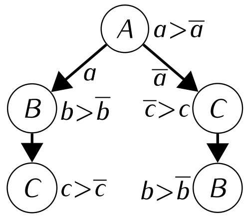
1. On a vu en cours théorie des fonctions de croyance est fréquemment utilisée pour faire de la fusion d'information. Classiquement, on fusionne deux fonctions de masses m_1 et m_2 en une fonction $m_{1,2}$:

$$\forall X, m_{1,2}(X) = \Sigma_{Y,Z:X=Y\cap Z} m_1(Y) * m_2(Z)$$

Ce qui revient à faire l'intersection de chaque element focal de la premiere fonction de masse avec chaque element focal de la seconde, et de lui attribuer le produit des deux poids. Lorsqu'un même ensemble A est obtenu de deux manières différentes, on somme les poids ainsi attribués. Si l'une des intersections est vide, son poids va sur l'ensemble vide (et $m_{1,2}(\emptyset)$ mesure de degré de contradiction entre les sources à fusionner)

Exercice 3 (3 points)

On considère des alternatives définies par trois attributs binaires A, B, C, de domaines respectifs $\underline{A} = \{a, \overline{a}\}$, $\underline{B} = \{b, \overline{b}\}$, $\underline{C} = \{c, \overline{c}\}$, et l'arbre de préférences lexicographiques ϕ_0 ci-contre.



Question 3.1 Donnez l'ordre linéaire $\succ_{\phi_0}$ sur l'ensemble des alternatives qui correspond à ϕ_0. Démontrez qu'on ne peut pas représenter cet ordre $\succ_{\phi_0}$ avec une utilité additive.

Question 3.2 On veut représenter cet ordre avec une utilité additive de degré 2, de la forme $v(o) = u_1(o[AC]) + u_2(o[B])$. Donnez les équations que doivent vérifier les paramètres des tables des utilités u_1 et u_2.

On dit qu'un modèle de préférences ϕ est *consistant* avec un ensemble de comparaisons *deux à deux* $\mathcal{D}$ si pour chaque comparaison $(o_1, o_2) \in \mathcal{D}$, on a $o_1 \succ_\phi o_2$.

Question 3.3 Pourquoi n'existe-t-il pas d'arbre de préférence lexicographique, avec une seule variable par nœud, qui soit consistant avec l'ensemble de comparaisons suivant : $\mathcal{D} = \{(ab\overline{c}, a\overline{b}c), (a\overline{b}c, \overline{a}b\overline{c}), (\overline{a}bc, abc)\}$.

Exercice 4 (4 points)

On considère une utilité additive généralisée u définie sur un espace où les alternatives sont définies par 5 variables A, B, C, D, E :

$$u(abcde) = u_1(ac) + u_2(bc) + u_3(cd) + u_4(de)$$

où les u_is sont définies par les tables ci-contres.

	u_1
a_1c_1	15
a_1c_2	7
a_2c_1	12
a_2c_2	9

	u_2
b_1c_1	1
b_1c_2	0
b_2c_1	3
b_2c_2	1

	u_3
c_1d_1	1
c_1d_2	2
c_2d_1	10
c_2d_2	12

	u_4
d_1e_1	6
d_1e_2	5
d_1e_3	4
d_2e_1	2
d_2e_2	3
d_2e_3	2

Question 4.1 Calculer l'alternative o^* qui maximise u, et son utilité $u(o^*)$. On pourra commencer par calculer la table de u_1^*, définie pour tout $c \in \underline{C}$ par $u_1^*(c) = \max_{a \in \underline{A}} u_1(ac)$; de même que la table de u_2^*, définie pour tout $c \in \underline{C}$ par $u_2^*(c) = \max_{b \in \underline{B}} u_2(bc)$. On prendra bien soin de bien montrer la séquence de calculs, prouvant que l'alternative trouvée est bien optimale.

On considère maintenant une utilité v additive généralisée définie par :

$$v(abcde) = u_0(ab) + u(abcde) = u_0(ab) + u_1(ac) + u_2(bc) + u_3(cd) + u_4(de)$$

où u_0 est une utilité sur $\underline{A} \times \underline{B}$. (La table de u_0 n'est pas donnée.)

Question 4.2 Expliquer comment décomposer le calcul d'une alternative qui maximise v. (On ne demande pas d'exécuter ces calculs.)