Université Paul Sabatier

Master 2 DC - **Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision**

novembre 2016

Documents autorisés : notes de cours

Exercice 1 - Complexité (6 points)

Soit un graphe $G = \langle V, E \rangle$, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Un k-coloriage de G est une affectation $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ telle que $\forall \{i, j\} \in E$, $f(i) \neq f(j)$. Le problème k-COLORIAGE est le problème de déterminer s'il existe un k-coloriage de G. 3-COLORIAGE est NP-complet, tandis qu'il existe un algorithme de complexité polynomiale pour 2-COLORIAGE.

Un graphe G est *nonbicolore* s'il n'existe pas de 2-coloriage de G. Un graphe G est *tricolore* s'il existe un 3-coloriage de G mais il n'existe pas de 2-coloriage de G. Un graphe G est *multicolore* s'il n'existe pas de 3-coloriage de G. Une instance du problème NONBICOLORE/TRICOLORE/MULTICOLORE est un graphe G et la question associée est de savoir si G est (respectivement) nonbicolore/tricolore/multicolore.

1. Démontrez que NONBICOLORE appartient à la classe de complexité P.
2. Démontrez que TRICOLORE est un problème NP-complet.
3. Démontrez que MULTICOLORE appartient à la classe de complexité coNP.

Exercice 2 - Décision (8 points)

On considère un problème de choix collectif multi-agent de choix d'un tracé de Tramway dans une communauté urbaine. Les n agents sont les représentants des n communes. Le profil de vote des agents est le suivant (8 communes et 5 projets) :

Agents	Agent 1	$a > b > e > c > d$
	Agent 2	$b > c > d > e > a$
	Agent 3	$c > b > a > d > e$
	Agent 4	$c > d > a > e > b$
	Agent 5	$d > a > e > c > b$
	Agents 6, 7 et 8	$e > b > a > c > d$

Table 1

On se propose d'étudier l'intérêt pour ce type de problème de de plusieurs approches : d'abord des règles de vote (question 1, 2 et 3) puis des règles de décision, le maximin, le leximin et la règle de minimisation des envies (questions 4) avant de conclure (question 5)

Question 1

Y a-t-il un vainqueur de Condorcet ?

Question 2

Déterminer le(s) vainqueur(s) selon les règles de vote STV ("Single Transferable Vote") et de la pluralité (majorité à un tour),

Question 3

On choisit comme règle de vote la pluralité, avec comme règle de départage des ex-aequo la priorité $d > c > b > a > e$ (en cas d'ex aequo, la décision de choix entre les ex aequos est laissée au ministre des transports). Un neuvième votant, qui connaît les votes des autres, a comme préférences $a > b > c > d > e$. A-t-il intérêt à voter de façon sincère ou à manipuler ?

Question 4

Afin de permettre une expression fine des préférences, on demande à chacun des agents d'attribuer une note entre 0 et 1 à chacune des alternatives. On peut donc caractériser toute alternative a par vecteur $a =< a_1, ..., a_n >\in [0, 1] \times ... \times [0, 1]$: a_i est la note donnée à a par l'agent i.

Ce qui donne le tableau d'évaluations suivant :

		trajet a	*trajet b*	*trajet c*	*trajet d*	*trajet e*
Agents	Agent 1	0.8	0.5	0.1	0	0.2
	Agent 2	0.1	0.8	0.5	0.4	0.2
	Agent 3	0.3	0.5	0.7	0.2	0.1
	Agent 4	0.3	0.1	0.7	0.5	0.2
	Agent 5	0.5	0	0.1	0.8	0.2
	Agents 6, 7 et 8	0.3	0.5	0.2	0.1	0.8

Table 1

En choix collectif, la faible satisfaction d'un agent ne peut pas être compensée par la forte satisfaction d'un autre : par exemple, dans notre problème, on doit assurer un service aussi haut que possible sur toutes les communes, et éviter qu'une commune ne se sente lésée par rapport à une autre. On cherche avant tout à maximiser la satisfaction du moins satisfait des agents.

1. Quelle est l'ordre de préférence collectif sur les cinq tracés au sens de minimisation des envies ? commenter le résultat.
2. Quelle est l'ordre de préférence collectif sur les cinq tracés au sens règle maximin ? au sens de la règle du leximin ?

Question 5

Recommander une règle de choix collectif pour le problème de choix collectif de tracé de Tramway décrit en introduction et justifier votre réponse.

Exercice 3 - Incertitude (6 points)

Cours

Soit m une fonction qui affecte à chaque sous-ensemble E de Ω un nombre $m(E)$ dans l'intervalle unité [0,1], la somme de ces nombres valant 1. $m(E)$ est la probabilité pour qu'on ne dispose que de l'information $x \in E$ sur la localisation d'un objet x de Ω.

- Qu'exprime la fonction de masse m quand $m(\Omega) = 1$?
- Donner, dans le cas général, l'expression du degré de certitude $Bel(B)$ et du degré de plausibilité $Pl(B)$ d'un événement B en fonction de m.
- Quel est le lien entre Pl et Bel ?
- Quand ces fonctions sont-elles des mesures de nécessité (Bel) et de possibilité (Pl) ?
- Quand se réduisent-elles à des mesures de probabilité ?

Fusion de témoignages incertains

On a pu isoler quatre suspects qui se trouvaient non loin du lieu d'un vol lorsqu'il a été commis, à savoir $S = \{Pierre, Paul, Jacques, Yves\}$ dont les descriptions fournies lors de leurs interpellations sont respectivement [1] :

Nom	**cheveux**	**taille**
Pierre	blonds	grande
Paul	blonds	petite
Jacques	bruns	moyenne
Yves	blancs	petite

Deux élements d'information sont disponibles, que l'on va chercher à recouper.

1. L'enquêteur a trouvé quelques cheveux blonds sur les lieux du vol. Il pense que la probabilité pour qu'il s'agisse des cheveux laissés par le voleur durant l'agression est 0.9.
   - Quel est le sous-ensemble de personnes compatibles avec l'information fournie.
   - Quelle est la probabilité pour que l'information ne soit pas pertinente ?
   - Quelle est la fonction de masse m_1 induite par cette information sur le référentiel des personnes $S = \{Pierre, Paul, Jacques, Yves\}$, qui à chaque sous-ensemble de A de suspects, donne la probabilité $m(A)$ pour qu'on sache seulement que le coupable est parmi A ?
2. La personne agressée n'a pas vraiment bien vu son agresseur car il faisait sombre dans la pièce où a eu lieu le vol, mais elle croit qu'il était petit avec une probabilité 0.6 (et donc 0.4 qu'il ne le soit pas).
   - Quels sont les sous-ensembles de personnes compatibles avec ce que croit la personne agressée (c'est à dire respectivement agresseur petit ou non).
   - Quelle est la fonction de masse m_2 induite par cette information sur le référentiel des personnes $\{Pierre, Paul, Jacques, Yves\}$?
3. Quelle sorte de mesures d'incertain sont induites sur $\{Pierre, Paul, Jacques, Yves\}$ par ces informations : possibilité, probabilité, fonction de croyance ?
4. Fusionner les deux informations à l'aide de la règle de combinaison de Dempster.
5. Calculer le degré de certitude qu'il soit coupable, et le degré de certitude qu'il ne le soit pas. Comparer ces degrés avec les mêmes degrés calculés à l'aide de chacune des informations prises isolément. Que conclure sur la règle de Dempster ? Est- il légitime d'utiliser cette règle dans le problème ?

1. Ici, on ne cherche pas à représenter le sens de ces mots avec des ensembles flous.