Université Paul Sabatier

Master 2 DC - **Modèles d'incertitude, de raisonnement et de décision** - 2019-2020

Documents autorisés : notes de cours

Exercice 1 -Partage (6 points)

Un consortium de trois firmes a décroché un contrat de construction d'un nouvel avion, pour une rétribution globale de 20 unités de monnaie (cette unité est un multiple d'euros). La réalisation est scindée en trois tâches : structure, propulsion, avionique. Chaque firme est capable d'accomplir les trois tâches, mais pour des coûts différents. Le tableau suivant donne le coût $c(i, j)$ pour la firme $i \in \{A, B, C\}$ d'accomplir la tâche $j \in \{1, 2, 3\}$, en unités de monnaie.

	1	2	3
A	7	5	7
B	6	5	10
C	4	6	6

Il est convenu que chaque firme se verra confier une tâche. Le problème est d'allouer les tâches aux firmes puis de partager la rétribution globale de 20 unités.

On notera $\mathbf{x} = \langle x_A, x_B, x_C \rangle$ l'allocation qui confie les tâches x_A, x_B, x_C respectivement aux firmes A, B, C. Par exemple $\langle 1, 2, 3 \rangle$ alloue la tâche 1 à A, la tâche 2 à B, la tâche 3 à C. On notera $\mathbf{r} = (r_A, r_B, r_C)$ le vecteur des rétributions des firmes, avec bien sûr $r_A + r_B + r_C = 20$.

1. Quelle est l'allocation qui dégage le surplus (bénéfice) commun maximum ? On notera $\mathbf{x}^*$ cette allocation.

2. Dans ce problème de partage, la part d'une firme est constituée de la tâche qui lui revient, associée à la rétribution de cette firme.

   Formalisez dans ce contexte le test «*l'allocation* $\mathbf{x}$*, associée au vecteur de rétributions* $\mathbf{r}$ *est sans envie*».

   Instanciez le test précédent pour l'allocation $\mathbf{x}^*$ de manière à obtenir un système d'inégalités sur le vecteur des rétributions. Écrivez ces inégalités sous la forme $r_i \geq r_{i'} + z$ (sans chercher à réduire le système).

   Vérifiez que l'allocation $\mathbf{x}^*$ associée au vecteur de rétributions $(8, 6, 6)$ est sans envie.

3. Quelles autres méthodes de répartition des rétributions pourriez-vous suggérer ? (on ne demande pas de calculer les solutions, seulement d'en indiquer le principe).

Exercice 2 - Decision sous incertitude (4 pt)

Rappels :
- En theorie des fonctions de croyance, on appelle "Element Focal" un ensemble A de poids $m(A) > 0$.
- On dit que les element focaux sont consonants si ils forment une chaine d'inclusion $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$
- Si les element focaux sont consonants la mesure Pl est une mesure de possibilité,
i.e. $\forall B, C, Pl(B \cup C) = \max(PL(B), Pl(C))$

On reprend le problème de choix d'investissement immobilier, en considérant que le marché va monter, une stagnation restant plausible - le cas d'une baisse du marché n'étant toutefois totalement pas à exclure. Le problème étant en réalité à utilités additives, on va utiliser une intégrale de Choquet et modéliser la connaissance dans le cadre des fonctions de croyances.

On a trois elements focaux $\{Fort\}$, $\{Fort, Stable\}$, $\{Fort, Stable, Faible\}$. On pose :

$$m(\{Fort\}) = \alpha,\ m(\{Fort, Stable\}) = \beta,\ m(\{Fort, Stable, Faible\} = \gamma \qquad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Le tableau des revenus est le suivant :

	Fort	Moyen	Faible	
Residence	500	-100	-500	
Immeuble	700	100	-300	
Appartements	800	200	-200	
Aucun	0	0	0	

On suppose que le decideur a une fonction d'utilité neutre $u(x) = x$.

1. Dessiner un diagramme de Venn indiquant les elements focaux
2. Calculer $Pl(\{Fort\}), Pl(\{Faible\}), Pl(\{Stable\}), Pl(\{Fort, Stable\}), Pl(\{Fort, Stable, faible\})$
3. Calculer $Bel(\{Fort\}), Bel(\{Fort, Stable\}), Bel(\{Fort, Stable, faible\})$
4. A quelle conditions sur α et β le décideur pessimiste préférera investir plutôt que de s'abstenir ? quel investissement préfèrera t il alors faire ?
5. Donner un exemple de valeurs pour α, β, γ tels que on a interet à acheter