斯特林数

Stirling Numbers

定义

第一类斯特林数（斯特林轮换数）：$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ 表示将 n 个元素排成 k 个**轮换**的方案数。这里，**轮换**是指环形排列，可以转动而相等。

第二类斯特林数（斯特林子集数）：$\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}$ 表示将一个有 n 件物品的集合划分成 k 个非空子集的方案数。

递归式

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix}n-1\\k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}n-1\\k-1\end{Bmatrix}$$

组合证明即可。

n	$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\9\end{bmatrix}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$	$\left\{ {n \atop 5} \right\}$	$\left\{ {n \atop 6} \right\}$	$\left\{ {n \atop 7} \right\}$	$\left\{ {n \atop 8} \right\}$	$\left\{ {n \atop 9} \right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

通项公式

m 个位置，每个位置可以选择 n 种颜料上色，则共有 n^m 种方案；换一个角度，枚举一共用的 k 种颜色，把 m 分成 k 个子集，每个子集一种颜色，加起来也是总方案数。所以我们有：

$$n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {m \atop k} \right\} k!$$

实施二项式反演，得到：

$$n! \left\{ {m \atop n} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^m (-1)^{n-k}$$

这即是通项公式。

也可以写成**卷积**的样子：

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{i^n}{i!} \cdot \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}$$

恒等式

《具体数学》6.1节

重要恒等式：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \qquad \text{递归式}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \qquad \text{递归式}$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} \qquad \text{在幂之间转换}$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \qquad \text{在幂之间转换}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k \qquad \text{在幂之间转换}$$

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = [m=n] \qquad \text{反转公式}$$

$$\sum_{k,m} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = [m=n] \qquad \text{反转公式}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \\ -n \end{Bmatrix} \qquad \text{对偶性}$$

其他：

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} = \sum_k \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_k \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$$

$$m!\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k} \qquad \text{通项公式}$$

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (m+1)^{n-k}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} n^{\underline{n-k}} = n!\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} / k!$$

$$\begin{Bmatrix} m+n+1 \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} k \begin{Bmatrix} n+k \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}$$

$$\binom{n}{m} = \sum_k \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{m-k}$$

$$n^{\underline{n-m}}[n \geqslant m] = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{m-k}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-m \end{Bmatrix} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \begin{Bmatrix} m+k \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ l+m \end{Bmatrix} \binom{l+m}{l} = \sum_k \begin{Bmatrix} k \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-k \\ m \end{Bmatrix} \binom{n}{k}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ l+m \end{bmatrix} \binom{l+m}{l} = \sum_k \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-k \\ m \end{bmatrix} \binom{n}{k}$$

斯特林反演

$$g(n) = \sum_k (-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k) \iff f(n) = \sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k)$$

另一种形式：

$$
g(n)=\sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k) \iff f(n)=\sum_k (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k)
$$
$$
g(n)=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} f(k) \iff f(n)=\sum_k (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} g(k)
$$

证明：

必要性：

$$
\begin{aligned}
\sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k) &= \sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \sum_j (-1)^j \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} f(j) \\
&= \sum_j (-1)^{n-j} f(j) \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} \\
&= \sum_j (-1)^{n-j} f(j) [n=j] && \text{反转公式} \\
&= f(n)
\end{aligned}
$$

充分性：

$$
\begin{aligned}
\sum_k (-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k) &= \sum_k (-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \sum_j (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} g(j) \\
&= \sum_j (-1)^{n-j} g(j) \sum_k (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} \\
&= \sum_j (-1)^{n-j} g(j) [n=j] && \text{反转公式} \\
&= g(n)
\end{aligned}
$$

证毕。