欧拉数

Eulerian Numbers

定义

欧拉数：$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{k}$ 表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的有 k 个升高的排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 的个数。也即，有 k 个地方 $\pi_j<\pi_{j+1}$.

递归式

$$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{k}=(k+1)\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n-1}{k}+(n-k)\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n-1}{k-1}$$

组合证明即可。

n	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{0}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{1}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{2}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{3}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{4}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{5}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{6}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{7}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{8}$	$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{9}$
0	1									
1	1	0								
2	1	1	0							
3	1	4	1	0						
4	1	11	11	1	0					
5	1	26	66	26	1	0				
6	1	57	302	302	57	1	0			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

恒等式

$$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{k}=\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{n-1-k}$$

对称性

$$x^n=\sum_k\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{k}\binom{x+k}{n}$$

Worpitzky 恒等式

$$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+1}{k}(m+1-k)^n(-1)^k$$

$$m!\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{m}=\sum_k\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{k}\binom{k}{n-m}$$

$$\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{m}=\sum_k\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}\binom{n-k}{m}(-1)^{n-k-m}k!$$