二项式系数

Binomial Coefficients

定义

二项式系数：

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!}, & k \geqslant 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

注意上式中，$k \in \mathbb{Z}$，而 r 可以是**任意实数**（甚至**复数**）。

- 只有当 r, k 取非负整数时，$\binom{r}{k}$ 才有组合解释。但是，鉴于二项式系数还有许多其他用途，所以将范围推广至实数；
- 可以把 $\binom{r}{k}$ 视为 r 的 k 次多项式，此观点常常有用；
- 下指标 k 是非整数的情形应用很少，故这里不考虑。

常用恒等式

最重要的十个二项式系数恒等式：

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,	整数 $n \geqslant k \geqslant 0$	阶乘展开式
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,	整数 $n \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$	对称恒等式
$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$,	整数 $k \neq 0$	吸收/提取恒等式
$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$,	$k \in \mathbb{Z}$	加法恒等式
$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$,	$k \in \mathbb{Z}$	上指标反转
$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$,	$m, k \in \mathbb{Z}$	三项式版恒等式
$\sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k} = (x+y)^r$,	整数 $r \geqslant 0$ 或者 $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert < 1$	二项式定理
$\sum_{k \leqslant n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$,	$n \in \mathbb{Z}$	平行求和法
$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$,	整数 $m, n \geqslant 0$	上指标求和法
$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$,	$n \in \mathbb{Z}$	范德蒙德卷积公式

形象化记忆：

行/列	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

加法恒等式
吸收/提取恒等式
平行求和法
上指标求和法

范德蒙德卷积系列

范德蒙德卷积公式：

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

范德蒙德卷积公式有如下**推论**：

$$\begin{aligned}
&\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n} && \text{,整数 } l \geqslant 0,\ m,n \in \mathbb{Z} \\
&\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l} && \text{,整数 } l \geqslant 0,\ m,n \in \mathbb{Z} \\
&\sum_{k \leqslant l} \binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m-1}{l-m-n} && \text{,整数 } l,m,n \geqslant 0 \\
&\sum_{-q \leqslant k \leqslant l} \binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1} && \text{,整数 } m,n \geqslant 0, \text{整数 } l+q \geqslant 0
\end{aligned}$$

> 注意**对称性+上指标反转**可以把上/下指标中的变量给移动到下/上指标去。上述的推论都可以通过**不断进行对称和反转**得到。
>
> 私以为，范德蒙德卷积和它的最后一个推论最为方便记忆，一个是下指标和为定值，一个是上指标和为定值，其他情况都可以**对称性+上指标反转**进行移动来转化。
>
> 注意：对称性只能用在上指标为**正整数**时！

范德蒙德卷积公式中，令 $r = s = n$ 可得：

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

二项式定理系列

类比二项式定理，有**多项式定理**：

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

其中，

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}$$

称为**多项式系数**。

在二项式定理中，为 x,y 赋值可得：

令 $x=y=1$：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

令 $x=1,y=-1$：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

由上一条性质容易推出：

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=2^{n-1}$$

令 $x=1,y=2$：

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$$

二项式反演

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(k)\iff f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}g(k)$$

或另一个形式：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)\iff f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}g(k)$$

证明：由于 f 与 g 完全对称，只需要证明必要性。已知 $g(n)=\sum\limits_{k}\binom{n}{k}(-1)^k f(k)$，那么：

$$
\begin{aligned}
\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k g(k) &= \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k \sum_j \binom{k}{j}(-1)^j f(j) \\
&= \sum_j f(j) \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+k} && \text{求和号换序} \\
&= \sum_j f(j) \sum_k (-1)^{j+k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} && \text{三项式版恒等式} \\
&= \sum_j f(j)\binom{n}{j} \sum_t (-1)^t \binom{n-j}{t} && \text{令 } t=k-j \\
&= \sum_j f(j)\binom{n}{j}(1-1)^{n-j} && \text{二项式定理} \\
&= \sum_j f(j)\binom{n}{j}[n=j] \\
&= f(n)
\end{aligned}
$$

证毕。