快速傅立叶变换

Fast Fourier Transfrom

Introduction：多项式在系数表示下的乘法需要 $O(n^2)$ 的时间，但在点值表示下的乘法仅需 $O(n)$ 的时间，**离散傅立叶变换（DFT）**提供了将多项式从系数表示转换到点值表示的方法，而其逆运算（IDFT）将多项式从点值表示转换到系数表示。为了方便，我们常选用**单位复数根**作为这些点。利用单位复数根的性质，**快速傅立叶变换（FFT）**采用分治的思路将复杂度降低至 $O(n\lg n)$ ——分别计算奇数项和偶数项，然后合并；而运用可逆矩阵与范德蒙德矩阵等知识，可以推出逆FFT的公式，并发现其与FFT有惊人的相似性。递归实现的FFT效率不是很高，常数大，可将其改为迭代形式，不过自底而上的迭代实现需要知道递归树中叶子节点的顺序——我们发现该顺序正好是位逆序置换，可以预处理出来。

Idea：

- **系数表达**：用向量 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 表示一个 $n-1$ 次多项式：$A(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^i$.

  点值表达：用 n 个点值对所组成的集合 $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_{n-1},y_{n-1})\}$ 表示多项式，其中所有 x_k 各不相同且 $y_k=A(x_k)$. 可以证明，n 个点能唯一确定一个 $n-1$ 次多项式。显然，一个多项式有多种不同的点值表示方法。

  系数表达转点值表达：取 n 个不同横坐标，算一下它们的纵坐标，得到 n 个点。这样做是 $\Theta(n^2)$ 的，使用 **FFT** 可做到 $\Theta(n\lg n)$.

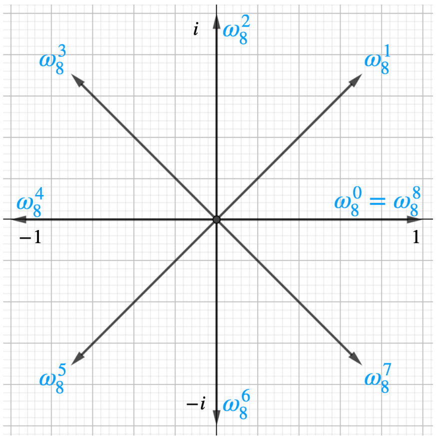
  点值表达转系数表达：运用拉格朗日插值可以 $\Theta(n^2)$ 求出系数表达，使用 **IFFT** 可做到 $\Theta(n\lg n)$.

- **单位复数根**：n 次单位复数根是满足 $\omega^n=1$ 的那些复数 ω，正好有 n 个：$e^{2\pi ik/n}$, $k=0,1,\cdots,n-1$. 证明：

  $$\omega^n=\left(e^{2\pi ik/n}\right)^n=e^{2\pi ik}=(-1)^{2k}=1\qquad\blacksquare$$

  称 $\omega_n=e^{2\pi i/n}=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 为主 n 次单位根，其他单位复数根都是 ω_n 的幂次。

  如果画出复平面，则 n 个 n 次单位复数根：$\omega_n^0,\omega_n^1,\cdots,\omega_n^n$ 把平面分均分成了 n 块（注意复数相乘=模长相乘，幅角相加）：



- **单位复数根的基本性质**：
  - **消去引理**：对任意整数 $n\geqslant 0,\ k\geqslant 0,\ d\geqslant 0$，有：

    $$\omega_{dn}^{dk}=\omega_n^k$$

    证：

    $$\omega_{dn}^{dk}=e^{2\pi idk/dn}=e^{2\pi ik/n}=\omega_n^k\qquad\blacksquare$$

    > 直观理解：分成 dn 份的第 dk 个点和分成 n 份的第 k 个点显然是同一个点。

  - **推论**：对任意偶数 $n>0$，有：

    $$\omega_n^{n/2}=\omega_2=-1$$

    > 直观理解：分成偶数份时，中间那个点显然是 $(-1,0)$.

  - **折半引理**：如果 $n>0$ 为偶数，那么 n 个 n 次单位复数根的平方的集合就是 $n/2$ 个 $n/2$ 次单位复数根的集合。

    证：对于 $\forall k\in[0,n/2)$，根据单位复数根的运算和消去引理有：

    $$\left(\omega_n^k\right)^2=\left(\omega_n^{k+n/2}\right)^2=\omega_n^{2k}=\omega_{n/2}^k\qquad\blacksquare$$

> 直观理解：注意这里单位复数根相乘其实就是幅角相加（长度始终为 1），所以 $(\omega_n^k)^2$ 就是分成 n 份的第 $2k$ 份。

- **求和引理**：对任意整数 $n \geqslant 1$ 和不能被 n 整除的非负整数 k，有：

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^k)^j = 0$$

  证：等比数列求和公式也适用于复数：

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^k)^j = \frac{1-(\omega_n^k)^n}{1-\omega_n^k} = \frac{\omega_n^{nk}-1}{\omega_n^k-1} = \frac{\omega_1^k-1}{\omega_n^k-1} = 0 \qquad \blacksquare$$

- **DFT**：系数表达 $\to$ 点值表达

  特殊地选取 n 个点：对于多项式 $A(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i x^i$，我们取它在 n 个 n 次单位复数根 $\omega_n^0, \omega_n^1, \cdots, \omega_n^{n-1}$ 处的点为其点值表达。即设

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega_n^{ki}$$

  称向量 $y=(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 为系数向量 $a=(a_0, a_1, \cdots a_{n-1})$ 的离散傅立叶变换。

  上述过程只说明了我们选点的特殊，直接算仍是 $\Theta(n^2)$，**FFT** 利用复数单位根的性质将其优化到 $\Theta(n\lg n)$.

- **FFT**：采用分治策略

  假设 n 是 2 的幂次！

  按照下标的奇偶分组，设 $\begin{cases} A^{[0]}(x)=a_0+a_2x+a_4x^2+\cdots+a_{n-2}x^{n/2-1} \\ A^{[1]}(x)=a_1+a_3x+a_5x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n/2-1} \end{cases}$，于是：

$$A(x)=\left(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}\right)+\left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\right)=A^{[0]}(x^2)+xA^{[1]}(x^2)$$

  所以，欲求 $A(x)$ 在 $\omega_n^0, \omega_n^1, \cdots, \omega_n^{n-1}$ 处的取值，只需要求 $A^{[0]}(x)$ 和 $A^{[1]}(x)$ 在 $(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \cdots, \left(\omega_n^{n-1}\right)^2$ 处的取值。

  注意，根据折半引理，上述 n 个值其实是 $n/2$ 个 $n/2$ 次单位复数根 $\omega_{n/2}^0, \omega_{n/2}^1, \cdots, \omega_{n/2}^{n/2-1}$，每个数恰好出现 2 次。所以，我们把原问题划分成了两个规模为一半的子问题，于是 **FFT** 的复杂度为：$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)=\Theta(n\lg n)$.

- **IDFT**：点值表达 $\to$ 系数表达

  现在我们已经能在 $\Theta(n\lg n)$ 的时间内将系数表达转换到点值表达，那我们需要转换回去，即完成逆运算。

  我们将 $y_k=A(\omega_n^k)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\omega_n^{ki}$ 写作矩阵形式 $y=V_na$：

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \cdots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

  这里 V_n 是一个由 ω_n 的幂次填充而成的范德蒙德矩阵。

  注意，系数表达就是指向量 a，点值表达就是指向量 y，所以我们只需要解出 $a=V_n^{-1}y$，就完成了点值表达到系数表达的转换。

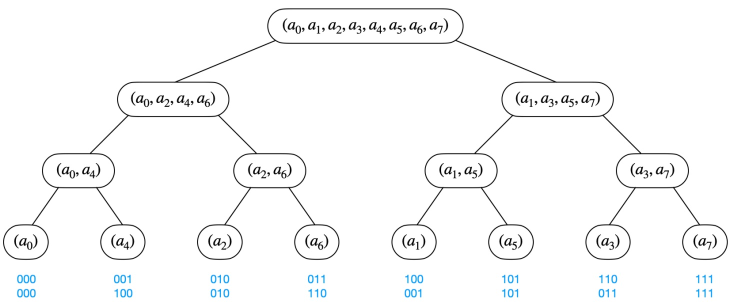
  对于范德蒙德矩阵，可以验证，V_n^{-1} 的 (j,k) 处元素为 ω_n^{-kj}/n（$j,k=0,1,\cdots,n-1$），所以我们有：

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_k^i \omega_n^{-ki}$$

  于是乎，我们用 ω_n^{-1} 替换 ω_n，互换 a 和 y，将计算结果的每个元素都除以 n，就可以套用之前的 **FFT** 过程在 $\Theta(n\lg n)$ 的时间内完成 **IDFT** 的运算。

- **FFT** 的高效实现

  递归实现 **FFT** 的效率不高，我们考虑自底向上迭代实现。自底向上要解决的一个问题就是递归树中叶节点的顺序，我们作递归树如下：



  发现，递归树的叶子顺序正好是它在原序列中下标的**位逆序置换**。预处理出位逆序置换的结果，我们可以完成迭代版 **FFT** 的实现。

ATT：n 要选取 2 的整数幂。

Reference：《算法导论》P527-541.

Code：

```cpp
struct Complex{
    double real, imag;
    Complex(){ real = imag = 0; }
    Complex(double r, double i){ real = r, imag = i; }
    Complex operator + (Complex &A){ return Complex(real+A.real, imag+A.imag); }
    Complex operator - (Complex &A){ return Complex(real-A.real, imag-A.imag); }
    Complex operator * (Complex &A){ return Complex(real*A.real-imag*A.imag, real*A.imag+imag*A.real); }
};

namespace FFT{
    int n;
    vector<int> rev;
    inline void preprocess(int _n, int _m){
        int cntBit = 0;
        for(n = 1; n <= _n + _m; n <<= 1, cntBit++);
        // n == 2^cntBit is a upper bound of _n+_m
        rev.resize(n);
        for(int i = 0; i < n; i++)
            rev[i] = (rev[i>>1]>>1) | ((i&1) << (cntBit-1));
            // rev[k] is bit-reversal permutation of k
    }
    inline void fft(vector<Complex> &A, int flag){
        // flag == 1: DFT; flag == -1: IDFT
        A.resize(n);
        for(int i = 0; i < n; i++) if(i < rev[i]) swap(A[i], A[rev[i]]);
        for(int m = 2; m <= n; m <<= 1){
            Complex wm(cos(2*PI/m), flag * sin(2*PI/m));
            for(int k = 0; k < n; k += m){
                Complex w(1, 0);
                for(int j = 0; j < m / 2; j++){
                    Complex t = w * A[k+j+m/2], u = A[k+j];
                    A[k+j] = u + t, A[k+j+m/2] = u - t;
                    w = w * wm;
                }
            }
        }
        if(flag == -1)
            for(int i = 0; i < n; i++)
                A[i].real /= n;
    }
}

int main(){
    // ... input
    FFT::preprocess(n, m);
    FFT::fft(f, 1); // f used to be coefficients, now they're point-values
    FFT::fft(g, 1); // g used to be coefficients, now they're point-values
    for(int i = 0; i < FFT::n; i++) f[i] = f[i] * g[i];
    FFT::fft(f, -1); // f used to be point-values, now they're coefficients
    // ... output
    return 0;
}
```