生成树

Spanning Tree

Kruskal

Idea：贪心。每次找最小边权的边，若其两端点都不在当前的树中，则将该边加入生成树中。用并查集来维护端点是否在树中。

Complexity：$O(E\lg E+E\alpha(V))$ 【路径压缩+启发式合并】

Code：

```
struct Edge{
    int u, v, dis;
    bool operator < (const Edge &a) const{
        return dis < a.dis;
    }
}edge[M<<1];

int n, m, x, y, z, fa[N], ans;

int findfa(int x){
    if(x != fa[x])  fa[x] = findfa(fa[x]);
    return fa[x];
}
void unionn(int x, int y){
    fa[findfa(y)] = findfa(x);
}

int main(){
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for(int i = 1; i <= n; i++)
        fa[i] = i;
    for(int i = 1; i <= m; i++)
        scanf("%d%d%d", &edge[i].u, &edge[i].v, &edge[i].dis);
    sort(edge + 1, edge + m + 1);
    int cnt = 0;
    for(int i = 1; i <= m; i++){
        if(findfa(edge[i].u) != findfa(edge[i].v)){
            unionn(edge[i].u, edge[i].v);
            cnt++;
            ans += edge[i].dis;
            if(cnt == n - 1)
                break;
        }
    }
    if(cnt != n - 1)
        return puts("orz"), 0;
    printf("%d\n", ans);
    return 0;
}
```

Prim

Idea：维护集合 S，凡在集合 S 中的点都已经纳入已有生成树中。每次选取距离集合 S 的最近的不在 S 中的点加入 S，并更新与之相连的所有点的距离。（类比 **Dijkstra**）

Complexity：

- $O(V^2+E)$ 【朴素实现】
- $O((V+E)\lg V)$ 【小根堆实现（随时删除旧节点）】
- $O((V+E)\lg E)$ 【优先队列实现】
- $O(E+V\lg V)$ 【斐波那契堆实现】

Code：

```cpp
struct Node{
    LL dis;
    int num;
    bool operator < (const Node &a) const{
        return a.dis < dis;
    }
};

LL dis[N];
bool inS[N];
void prim(){
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        dis[i] = INF;
        inS[i] = 0;
    }
    priority_queue<Node> q;
    dis[1] = 0;
    q.push( (Node){0, 1} );
    while(!q.empty()){
        Node cur = q.top();
        q.pop();
        if(inS[cur.num])    continue;
        inS[cur.num] = 1;
        ans += cur.dis;
        for(int i = head[cur.num]; i; i = edge[i].nxt){
            if(dis[edge[i].to] > edge[i].len){
                dis[edge[i].to] = edge[i].len;
                q.push( (Node){dis[edge[i].to], edge[i].to} );
            }
        }
    }
}
```

Boruvka

Idea：假设当前最小生成森林的边集为 E，形成了一些连通块，定义一个连通块的最小边是它连向其他连通块的边中权值最小的那条。每一轮我们把所有最小边加入 E，然后更新新的连通块的最小边。当所有连通块都没有最小边时找到了最小生成树（森林）。

Complexity：$O((V+E)\lg V)$

Code：

```cpp
int fa[N];
int findfa(int x){ return x == fa[x] ? x : fa[x] = findfa(fa[x]); }
void unionn(int x, int y){ fa[findfa(y)] = findfa(x); }

int mndis[N], mark[N];
vector<int> ans; // ans stores edges in MST
void Boruvka(){
    for(int i = 1; i <= n; i++) fa[i] = i;
    while(1){
        vector<bool> vis(m+5);
        for(int i = 1; i <= n; i++) mndis[i] = INF, mark[i] = 0;
        for(int i = 1; i <= m; i++){
            if(findfa(edge[i].u) == findfa(edge[i].v))  continue;
            if(mndis[findfa(edge[i].u)] > edge[i].dis){
                mndis[findfa(edge[i].u)] = edge[i].dis;
                mark[findfa(edge[i].u)] = i;
            }
            if(mndis[findfa(edge[i].v)] > edge[i].dis){
                mndis[findfa(edge[i].v)] = edge[i].dis;
                mark[findfa(edge[i].v)] = i;
            }
        }
        bool ok = true;
        for(int i = 1; i <= n; i++){
            if(findfa(i) != i)  continue;
            if(mark[i] && !vis[mark[i]]){
                ok = false;
                ans.pb(mark[i]);
                unionn(edge[mark[i]].u, edge[mark[i]].v);
                vis[mark[i]] = true;
            }
```

```
        }
        if(ok)  break;
    }
}
```

次小生成树

Idea：用 **Kruskal** 或 **Prim** 算法得到最小生成树后，枚举未出现在最小生成树中的边，添加这条边后，树上会形成一个环，把该环中最大的边删去，即得到非严格次小生成树；倘若求严格次小生成树，则需要记录环中最大边和严格小于最大边的次大边，当最大边与枚举的非树边相等时，删去次大边。

实现方法采用倍增法求 LCA，每次求解非树边两端点的 LCA，同时维护最大边权与次大边权。

ATT：我的倍增法求 LCA 最后一步并没有走到 LCA 处（`fa[x][0]` 和 `fa[y][0]` 才是 LCA），所以维护边权信息的时候不要忘了最后还有的这两条边。

Code（严格次小生成树）：

```
#include<cstdio>
#include<algorithm>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int N = 100005;
const int M = 300005;

int n, m, rt;
LL sum, ans = 1e16;

struct LCA{
    struct Edge{
        int nxt, to, dis;
    }edge[M<<1];
    int head[N], edgeNum;
    void addEdge(int from, int to, int dis){
        edge[++edgeNum] = (Edge){head[from], to, dis};
        head[from] = edgeNum;
    }

    int fa[N][25], dep[N];
    LL mx1[N][25], mx2[N][25];
    void dfs(int x, int f, int depth){
        dep[x] = depth, fa[x][0] = f;
        for(int i = head[x]; i; i = edge[i].nxt){
            if(edge[i].to == f) continue;
            dfs(edge[i].to, x, depth+1);
            mx1[edge[i].to][0] = edge[i].dis;
            mx2[edge[i].to][0] = 0;
        }
    }
    void init(){
        for(int j = 1; (1 << j) <= n; j++){
            for(int i = 1; i <= n; i++){
                if(fa[i][j-1]){
                    fa[i][j] = fa[fa[i][j-1]][j-1];
                    mx1[i][j] = max(mx1[i][j-1], mx1[fa[i][j-1]][j-1]);
                    mx2[i][j] = max(mx2[i][j-1], mx2[fa[i][j-1]][j-1]);
                    if(mx1[i][j-1] != mx1[fa[i][j-1]][j-1])
                        mx2[i][j] = max(mx2[i][j], min(mx1[i][j-1], mx1[fa[i][j-1]][j-1]));
                }
            }
        }
    }
    inline void update(LL mx1, LL mx2, LL &res1, LL &res2){
        if(res1 < mx1)  res2 = max(res1, mx2), res1 = mx1;
        else if(res1 == mx1)    res2 = max(res2, mx2);
        else    res2 = max(res2, mx1);
    }
    int lca(int x, int y, LL &max1, LL &max2){
        if(dep[x] < dep[y]) swap(x, y);
        for(int i = 20; i >= 0; i--){
```

```
            if(dep[x] - (1 << i) >= dep[y]){
                update(mx1[x][i], mx2[x][i], max1, max2);
                x = fa[x][i];
            }
        }
        if(x == y)  return x;
        for(int i = 20; i >= 0; i--){
            if(fa[x][i] && fa[x][i] != fa[y][i]){
                update(mx1[x][i], mx2[x][i], max1, max2);
                update(mx1[y][i], mx2[y][i], max1, max2);
                x = fa[x][i], y = fa[y][i];
            }
        }
        update(mx1[x][0], mx2[x][0], max1, max2);
        update(mx1[y][0], mx2[y][0], max1, max2);
        return fa[x][0];
    }
}lca;

struct Edge{
    int u, v, dis;
    bool inMST;
    bool operator < (const Edge &A) const{ return dis < A.dis; }
}edge[M];

int fa[N];
int findfa(int x){ return x == fa[x] ? x : fa[x] = findfa(fa[x]); }
inline void unionn(int x, int y){ fa[findfa(y)] = findfa(x); }

void Kruskal(){
    for(int i = 1; i <= n; i++) fa[i] = i;
    sort(edge+1, edge+m+1);
    int cnt = 0;
    for(int i = 1; i <= m; i++){
        if(findfa(edge[i].u) == findfa(edge[i].v))  continue;
        unionn(edge[i].u, edge[i].v);

        lca.addEdge(edge[i].u, edge[i].v, edge[i].dis);
        lca.addEdge(edge[i].v, edge[i].u, edge[i].dis);
        edge[i].inMST = true;
        if(!rt) rt = edge[i].u;

        sum += edge[i].dis;
        cnt++;
        if(cnt == n - 1)    break;
    }
}

int main(){
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for(int i = 1; i <= m; i++)
        scanf("%d%d%d", &edge[i].u, &edge[i].v, &edge[i].dis);
    Kruskal();

    lca.dfs(rt, 0, 1);
    lca.init();

    for(int i = 1; i <= m; i++){
        if(edge[i].inMST)   continue;
        LL mx1 = 0, mx2 = 0;
        lca.lca(edge[i].u, edge[i].v, mx1, mx2);
        if(edge[i].dis > mx1)   ans = min(ans, sum - mx1 + edge[i].dis);
        else    ans = min(ans, sum - mx2 + edge[i].dis);
    }
    printf("%lld\n", ans);
    return 0;
}
```

瓶颈生成树

Definition：所有生成树中，最大边权最小的生成树称为瓶颈生成树。

Theorem：最小生成树是瓶颈生成树的充分不必要条件，即最小生成树一定是瓶颈生成树，而瓶颈生成树不一定是最小生成树。

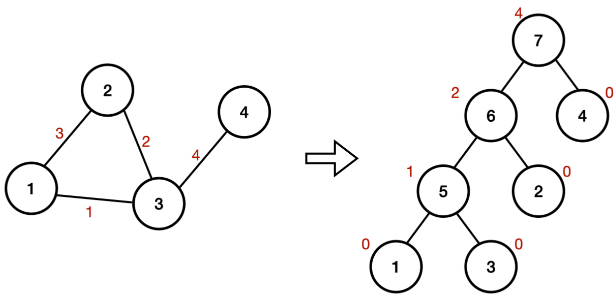
最小瓶颈路

Definition：从 x 到 y 的最小瓶颈路是所有从 x 到 y 的简单路径中最大边权最小的路径。

Theorem：最小生成树上从 x 到 y 的路径一定是一条最小瓶颈路（但是最小瓶颈路上的路径不一定在任何一棵最小生成树上）

Kruskal 重构树

Definition：在执行 **Kruskal** 算法的过程中，我们会从小到大依次加边。首先新建 n 个集合，每个集合恰有一个节点，点权为 0。每一次加边会合并两个集合，我们可以新建一个点，点权为加入边的边权，同时将两个集合的根节点分别设为新建点的左儿子和右儿子。然后我们将两个集合和新建点合并成一个集合。将新建点设为根。如此，在进行 $n-1$ 轮之后我们得到了一棵恰有 n 个叶子的二叉树，同时每个非叶子节点恰好有两个儿子。这棵树就叫 **Kruskal** 重构树。（摘自 oi-wiki）



Properties：

- **Kruskal** 重构树上任一节点权值 $\geqslant$ 其子节点权值，类似大根堆。
- 最小生成树上 x 到 y 路径中的最大值等于 **Kruskal** 重构树上 x 和 y 的 LCA 的点权。

  换句话说，到 x 的简单路径的最大边权 $\leqslant val$ 的所有点 y 都在 **Kruskal** 重构树的某一棵子树内，这个子树的根节点是 x 到根的路径上最浅的权值 $\leqslant val$ 的点。

ATT：我的代码中，**Kruskal** 重构树的大小为 $rt = 2n - 1$，且以 rt 为根节点。注意在之后的操作中把 n 换成 rt。

Code：

```
int n, m, rt; // rt is the root of 'Kruskal Tree'

int val[N]; // points' value of 'Kruskal Tree'
struct Edge{
    int nxt, to;
}edge[N<<1];
int head[N], edgeNum;
void addEdge(int from, int to){
    edge[++edgeNum] = (Edge){head[from], to};
    head[from] = edgeNum;
}

namespace MST{
    int fa[N];
    int findfa(int x){ return x == fa[x] ? x : fa[x] = findfa(fa[x]); }
    inline void unionn(int x, int y){ fa[findfa(y)] = findfa(x); }

    struct Edge{
        int u, v, dis;
        bool operator < (const Edge &A) const{ return dis < A.dis; }
    }edge[M];
    void Kruskal(){
        rt = n;
        for(int i = 1; i <= n * 2; i++) fa[i] = i; // pay attention to *2
        sort(edge+1, edge+m+1);
```

```cpp
        int cnt = 0;
        for(int i = 1; i <= m; i++){
            if(findfa(edge[i].u) == findfa(edge[i].v))  continue;

            // build the tree:
            ++rt;
            addEdge(rt, findfa(edge[i].u)), addEdge(findfa(edge[i].u), rt);
            addEdge(rt, findfa(edge[i].v)), addEdge(findfa(edge[i].v), rt);
            unionn(rt, edge[i].u), unionn(rt, edge[i].v);
            val[rt] = edge[i].dis;

            cnt++;
            if(cnt == n - 1)    break;
        }
    }
}

int main(){
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for(int i = 1; i <= m; i++)
        scanf("%d%d%d", &MST::edge[i].u, &MST::edge[i].v, &MST::edge[i].dis);
    MST::Kruskal();

    // now the Kruskal tree is rooted at rt (rt == 2n-1)
    // do something...

    return 0;
}
```

矩阵树定理 Matrix-Tree Theorem

无向图情形

定义度数矩阵：

$$D_{ij}=\begin{cases}\deg(i) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

设 $\#e(i,j)$ 表示 i 和 j 之间的边数，定义邻接矩阵：

$$A_{ij}=A_{ji}=\begin{cases}0 & i=j\\ \#e(i,j) & i\neq j\end{cases}$$

定义 **Laplace** 矩阵（亦称 **Kirchhoff** 矩阵）：

$$L_{ij}=D_{ij}-A_{ij}$$

矩阵树定理（无向图行列式形式）：对于任意 i，都有：

$$\text{生成树个数}=\det L\begin{pmatrix}1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\\1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\end{pmatrix}$$

其中，$L\begin{pmatrix}1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\\1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\end{pmatrix}$ 表示除去 L 的第 i 行和第 i 列后构成的子矩阵。

也就是说，**Laplace** 矩阵的任意 $n-1$ 阶主子式都相等，且等于生成树个数。

矩阵树定理（无向图特征值形式）：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 为 L 的 $n-1$ 个非零特征值，那么有：

$$\text{生成树个数}=\frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$$

有向图情形

定义出度矩阵和入度矩阵：

$$D^{\text{out}}_{ij}=\begin{cases}\deg^{\text{out}}(i) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad,\quad D^{\text{in}}_{ij}=\begin{cases}\deg^{\text{in}}(i) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

设 $\#e(i,j)$ 表示 i 和 j 之间的边数，定义邻接矩阵：

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \#e(i,j) & i \neq j \end{cases}$$

定义出度和入度的 **Laplace** 矩阵：

$$L_{ij}^{\text{out}} = D_{ij}^{\text{out}} - A_{ij} \quad , \quad L_{ij}^{\text{in}} = D_{ij}^{\text{in}} - A_{ij}$$

矩阵树定理（有向图根向形式）：

$$\text{以 } k \text{ 为根的根向树形图个数} = \det L^{\text{out}} \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n \\ 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n \end{pmatrix}$$

矩阵树定理（有向图叶向形式）：

$$\text{以 } k \text{ 为根的叶向树形图个数} = \det L^{\text{in}} \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n \\ 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n \end{pmatrix}$$