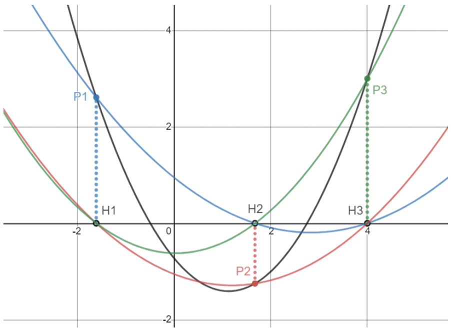
拉格朗日插值

Lagrange Interpolation

Idea：给定 n 个点 $P_i(x_i, y_i)$，求过这 n 个点的 $n-1$ 次多项式 $f(x)$.



我们对于每个 i，找到一个多项式函数 $g_i(x)$ 使之过 P_i 和所有 $j\neq i$ 的 $(x_j, 0)$. 容易知道，$g_i(x)$ 可以如下构造：

$$g_i(x)=y_i\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

这样就可以有 $g_i(x_j)=0\ (j\neq i)$ 以及 $g_i(x_i)=y_i$.

现在把所有 $g_i(x)$ 加起来，就得到了 $f(x)$：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}g_i(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

因为，如此有：$f(x_j)=\sum\limits_{i=0}^{n}g_i(x_j)=y_j$，也即 $f(x)$ 过所有点 $P_i(x_i, y_i)$.

Implemention：分子和分母分别计算后再算逆元相乘，复杂度的瓶颈就不会在求逆元上。

Complexity：$O(n^2)$

Code：

```cpp
int n, k;
pair<int, int> p[N];

int main(){
    scanf("%d%d", &n, &k);
    for(int i = 1; i <= n; i++)
        scanf("%d%d", &p[i].first, &p[i].second);
    int ans = 0; // ans = f(k)
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        int up = p[i].second, dn = 1;
        for(int j = 1; j <= n; j++){
            if(j == i)  continue;
            up = 1ll * up * (k - p[j].first) % MOD;
            dn = 1ll * dn * (p[i].first - p[j].first) % MOD;
        }
        if(up < MOD)    up += MOD;
        if(dn < MOD)    dn += MOD;
        ans = (ans + 1ll * up * fpow(dn, MOD-2) % MOD) % MOD;
    }
    printf("%d\n", ans);
    return 0;
}
```