数论函数

Number Theory Functions

积性函数 Multiplicable function

Definition：

- $\forall x,y\in\mathbb{N}_+$，$\gcd(x,y)=1$，都有 $f(xy)=f(x)f(y)$，则称 $f(x)$ 是**积性函数。**
- $\forall x,y\in\mathbb{N}_+$，都有 $f(xy)=f(x)f(y)$，则称 $f(x)$ 是 **完全积性函数。**

Properties：若 $f(x),g(x)$ 均为积性函数，则下列函数也是积性函数：

$$
\begin{aligned}
h(x) &= f(x^p)\\
h(x) &= f^p(x)\\
h(x) &= f(x)g(x)\\
h(x) &= \sum_{d\mid x} f(d)g\left(\frac{x}{d}\right)
\end{aligned}
$$

Examples：

- 单位函数：$\epsilon(n)=[n=1]$
- 恒等函数：$\mathrm{id}_k(n)=n^k$
    - $k=1$ 时，$\mathrm{id}(n)=n$ 即标号函数
- 常数函数：$1(n)=1$
- 除数函数：$\sigma_k(n)=\sum\limits_{d\mid n}d^k$
    - $k=0$ 时，$\sigma_0(n)=d(n)=\sum\limits_{d\mid n}1$ 即约数个数函数
    - $k=1$ 时，$\sigma(n)=\sum\limits_{d\mid n}d$ 即约数和函数
- 欧拉函数：$\varphi(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)=1]$
- 莫比乌斯函数：$\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & \exists d>1: d^2\mid n\\ (-1)^{\omega(n)} & \text{otherwise}\end{cases}$，其中，$\omega(n)$ 表示 n 的不同质因数个数

欧拉函数 Euler's totient function

Definition：$\varphi(n)$ 表示小于等于 n 的与 n 互质的数的个数。

Theorem：设 $n=\prod\limits_{i=1}^k{p_i}^{r_i}$ （由**唯一分解定理**给出），则：

$$\varphi(n)=n\cdot\prod_{i=1}^k\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Intuitive proof：对于 p_i 来说，p_i 及其倍数是 n 的因数，占比 $\frac{1}{p_i}$，则非 p_i 或其倍数者占比 $\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$；故既非 p_1 倍数、又非 p_2 倍数……又非 p_k倍数的数占比 $\prod\limits_{i=1}^k\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$，故 $\varphi(n)=n\cdot\prod\limits_{i=1}^k\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

Properties：

- 设 p 是素数，$\varphi(p)=p-1$.（由定义显然）
- 设 p 是素数，$n=p^k$，则 $\varphi(n)=p^k-p^{k-1}$.
- 积性：若 $(a,b)=1$，则 $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.
- 对于素数 p：$\varphi(n\cdot p)=\begin{cases}\varphi(n)\cdot p&p\mid n\\\varphi(n)\cdot(p-1)&p\nmid n\end{cases}$.
- 小于等于 n 与 n 互质的数的总和为 $\varphi(n)\cdot\frac{n}{2}$.

  证明：若 m 与 n 互质，则 $n-m$ 也与 n 互质，故所有小于等于 n 与 n 互质的数的平均数为 $\frac{n}{2}$，故总和为 $\varphi(n)\cdot\frac{n}{2}$.
- $n=\sum\limits_{d\mid n}\varphi(d)$.

  证明：设 $f(x)$ 表示 $\gcd(k,n)=x\ (k\leqslant n)$ 的数的个数，则 $n=\sum\limits_{i=1}^nf(i)$。又 $\gcd(k,n)=x\iff\gcd\left(\frac{k}{x},\frac{n}{x}\right)=1$，所以 $f(x)=\varphi\left(\frac{n}{x}\right)$，故 $n=\sum\limits_{i=1}^n\varphi\left(\frac{n}{i}\right)=\sum\limits_{d\mid n}\varphi(d)$.

Code（应用公式求出单个 $\varphi(n)$）：

Complexity：$O(\sqrt{n})$

```
int getPhi(int n){
    int res = n;
    for(int i = 2; i * i <= n; i++){
        if(n % i == 0){
            res = res / i * (i - 1);
            while(n % i == 0)
                n /= i;
        }
    }
    if(n > 1)   res = res / n * (n - 1);
    return res;
}
```

Code（线性筛）：

Complexity: $O(n)$

```
int phi[N], pList[N], pID;
bool notP[N];
void Euler(int n){
    notP[0] = notP[1] = 1;
    phi[1] = 1;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        if(notP[i] == 0){
            pList[++pID] = i;
            phi[i] = i - 1;
        }
        for(int j = 1; j <= pID; j++){
            if(1ll * i * pList[j] > n)  break;
            notP[i * pList[j]] = 1;
            if(i % pList[j] == 0){
                phi[i * pList[j]] = phi[i] * pList[j];
                break;
            }
            else    phi[i * pList[j]] = phi[i] * (pList[j] - 1);
        }
    }
}
```

莫比乌斯函数 Möbius function

Definition: $\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & \exists d>1: d^2 \mid n\\ (-1)^k & n=p_1p_2\cdots p_k\end{cases}$

Properties:

- $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}=\epsilon(n).$

  证明：设 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i}$，则 $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i=(1+(-1))^k=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}.$

  推论：$[\gcd(i,j)=1] \iff \sum\limits_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)$

- $\sum\limits_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\varphi(n)}{n}.$
- 积性：若 $(a,b)=1$，则 $\mu(a\times b)=\mu(a)\times\mu(b)$.（由定义易证）

Code（线性筛）：

Complexity: $O(n)$

```
int mu[N], pList[N], pID;
bool notP[N];
void Euler(int n){
    notP[0] = notP[1] = 1;
    mu[1] = 1;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        if(notP[i] == 0){
            pList[++pID] = i;
            mu[i] = -1;
        }
        for(int j = 1; j <= pID; j++){
            if(1ll * i * pList[j] > n)  break;
            notP[i * pList[j]] = 1;
            if(i % pList[j] == 0){
                mu[i * pList[j]] = 0;
                break;
            }
            else    mu[i * pList[j]] = -mu[i];
        }
    }
}
```

狄利克雷卷积 Dirichlet Convolution

Definition：两个数论函数 f,g 的 $\textbf{Dirichlet}$ 卷积为：

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

或

$$(f*g)(n)=\sum_{ab=n}f(a)g(b)$$

Properties：

- 满足交换律：

  $$f*g=g*f$$

  易证。

- 满足结合律：

  $$(f*g)*h=f*(g*h)$$

  从外往内计算就容易知道，多个函数的 $\textbf{Dirichlet}$ 卷积就是遍历自变量乘积为 n 的所有可能的函数值相乘的和。

- 满足分配律：

  $$(f+g)*h=f*h+g*h$$

  易证。

- $\epsilon(n)$ 是 $\textbf{Dirichlet}$ 卷积的单位元，即任何函数卷 $\epsilon(n)$ 均为它本身。

- 积性函数的 $\textbf{Dirichlet}$ 卷积仍为积性函数。

  证明：令 $h=f*g$。设 $(n,m)=1$，则 $h(n)\times h(m)=\sum\limits_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)\times\sum\limits_{k|m}f(k)g\left(\frac{m}{k}\right)$，考虑前者的第 i 项和后者的第 j 项相乘得出的项：$f(d_i)g\left(\frac{n}{d_i}\right)\times f(k_j)g\left(\frac{m}{k_j}\right)=f(d_ik_j)g\left(\frac{nm}{d_ik_j}\right)$，当 d_i 遍历所有 n 的因子、k_j 遍历所有 m 的因子时，由于 n,m 互质，d_ik_j 遍历了所有 nm 的因子。故

$h(n) \times h(m) = \sum_{d|nm} f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right) = h(n \times m).$

- 逆元：对于 $f(1) \neq 0$ 的函数 $f(n)$，$\exists\, g(n)$ 使得 $f(n) * g(n) = \epsilon(n)$.

  事实上，有：

$$g(n) = \frac{1}{f(n)}\left([n=1] - \sum_{d|n,d>1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)\right)$$

  或：

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(n)} & n = 1 \\ -\frac{1}{f(n)} \sum_{d|n,d>1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) & n > 1 \end{cases}$$

  注意这是一个**递归**定义。

  注意：积性函数必有逆（因为积性函数一定有 $f(1) = 1 \neq 0$），且逆元也是积性函数。

Examples：

$$\begin{aligned}
\epsilon = \mu * 1 &\iff \epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \\
d = 1 * 1 &\iff d(n) = \sum_{d|n} 1 \\
\sigma = \mathrm{id} * 1 &\iff \sigma(n) = \sum_{d|n} d \\
\varphi = \mu * \mathrm{id} &\iff \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\
\mathrm{id} = \varphi * 1 &\iff \mathrm{id}(n) = n = \sum_{d|n} \varphi(d)
\end{aligned}$$

其他性质 Properties

除上述卷积的例子以外，其他有关积性函数的性质。

$$d(i \cdot j) = \sum_{x|i} \sum_{y|j} [\gcd(x, y) = 1]$$

$$\varphi(i \cdot j) = \varphi(i)\varphi(j) \frac{\gcd(i, j)}{\varphi(\gcd(i, j))}$$

莫比乌斯反演 Möbius Inversion

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

或写成 $\textbf{Dirichlet}$ 卷积形式：

$$f = g * 1 \iff g = f * \mu$$

Proof：运用卷积，因为 $\mu(n)$ 是 $1(n)$ 的逆元，即 $\mu * 1 = \epsilon$，所以有：

$$f = g * 1 \iff f * \mu = g * 1 * \mu \iff f * \mu = g$$

常用技巧#1：数论分块

假设我们要求含有 $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ 的和式（例如 $\sum\limits_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$），发现其中有很多项值其实是相同的。例如：$\left\lfloor \frac{60}{21} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{60}{22} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{60}{30} \right\rfloor$，所以我们考虑能否把它们放在一起算。换句话说，我们要找到**最大的** r，使 $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor$. 可以证明：$r = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor} \right\rfloor$.

> 首先，$\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{r}$，于是 $r \leqslant \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor}$，故 $r = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor} \right\rfloor$. 其次，$r \leqslant n$ 显然，需要证明 $r \geqslant l$：$r = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n}{\frac{n}{l}} \right\rfloor = \lfloor l \rfloor = l$. 证毕。

于是乎，我们把 $[l, r]$ 视为一块，分块求和。

可以证明：块数不会超过 $2\sqrt{n}$.

> 当 $i < \sqrt{n}$ 时，$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 最多一个数一块，最多 $\sqrt{n}$ 块；当 $i \geqslant \sqrt{n}$ 时，$\left(\frac{n}{2}, n\right]$ 是一块，$\left(\frac{n}{3} \frac{n}{2}\right]$ 是一块，……，$\left(\frac{n}{\sqrt{n}+1}, \frac{n}{\sqrt{n}}\right]$ 是一块，最多 $\sqrt{n}$ 块。证毕。

Complexity：$O(\sqrt{n})$

Code：

以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{k}{i}\right\rfloor\cdots$ 为例：

```
for(long long l = 1, r; l <= n; l = r + 1){
    if(k / l == 0)  r = n;
    else    r = min(n, k / (k / l));
    ... // calculate the ans
}
```

常用技巧#2：提取公因数

两个和式情形：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d,i)\xlongequal{i\to di}\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}f(d,di)$$

即考虑 d 对答案的贡献：凡是 d 的倍数都会对答案有贡献。

三个和式情形：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|\gcd(i,j)}f(d,i,j)\xlongequal{i\to di,j\to dj}\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor}f(d,di,dj)$$

即考虑 d 对答案的贡献：凡 d 是 i,j 的公因子就会对答案有贡献。

更多和式可类似拓展。

常用技巧#3：技巧2的逆过程

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor}f(p,d)=\sum_{1\leqslant p\cdot d\leqslant n}f(p,d)\xlongequal{T=p\cdot d}\sum_{T=1}^{n}\sum_{p|T}f\left(p,\frac{T}{p}\right)$$

常用技巧#4：一种预处理

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d, n)$$

上式的预处理方式：枚举 d，将 $d \mid n$ 的 $g(n)$ 加上贡献 $f(d, n)$.

复杂度是 $O(nH(n))$，大概是 $O(n \lg n)$ 的。