卡特兰数

Catalan Numbers

定义

C_n 满足递归式：

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

其中，$C_0 = 1$.

递归式

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

同样的 $C_0 = 1$.

通项公式

根据上述 1 阶递归关系，累乘可以推出通项公式：

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

也可以根据定义式，通过生成函数推导：设 $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，则：

$$\begin{aligned} G^2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} C_n C_{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^n \\ &= \frac{1}{z} G(z) - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

解得：$G(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$，取 $G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$：

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) \\
&= \frac{1}{2z}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4z)^n\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4z)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-2\right)}{n!}(4z)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3))}{n!}z^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{n!}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{(n-1)!}z^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}z^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}z^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}z^{n}
\end{aligned}
$$

所以：

$$
C_n = [z^n]G(z) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}
$$

应用

Dyck words

n 个 1 和 n 个 -1 的排列中，满足任意项的前缀和均非负的排列个数为 C_n.

$$
\begin{array}{ll}
1,1,-1,1,-1,-1 & \text{valid} \\
1,-1,-1,1,-1,1 & \text{invalid}
\end{array}
$$

证：对于一个不合法的排列，找到使它第一个不合法的位置，将其前面所有数反转，得到一个 $n+1$ 个 1 和 $n-1$ 个 -1 构成的排列。如此，所有不合法排列和所有 $n+1$ 个 1 和 $n-1$ 个 -1 构成的排列之间构成一个双射关系，共有 $\binom{2n}{n-1}$ 个。总数减去不合法的排列数即使答案：$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$，也就是卡特兰数 C_n. 证毕。

合法括号序列数

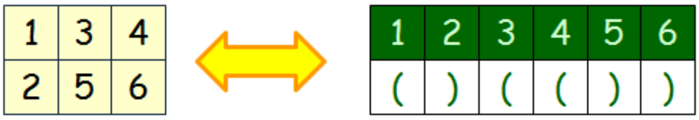
n 个 `(` 和 n 个 `)` 构成的合法字符串数是 C_n。

把 `(` 视为 1，把 `)` 视为 -1，等价于 $\textbf{Dyck words}$ 问题。

标准 Young 表

将 $1\sim 2n$ 填入一个 $2\times n$ 的方格表中，每一行自左向右、每一列自上向下都是严格递增的。

设第一行表示 `(` 的位置，第二行表示 `)` 的位置，则：



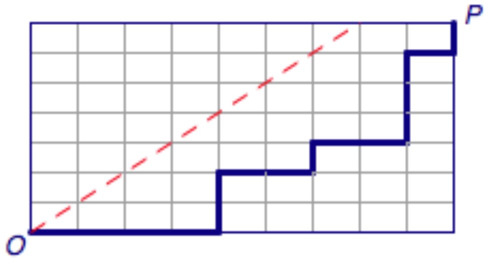
等价于 **Dyck words** 问题。

进出栈方案数

进栈记为 1，出栈记为 -1，等价于 **Dyck words** 问题。

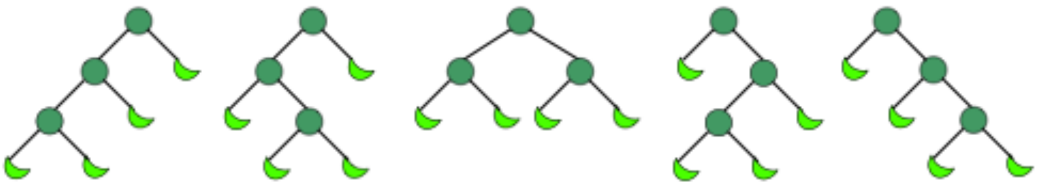
不跨越对角线的向右/向上走方案数

m 行 n 列矩形中，每次可以向右或向上走，不允许走到 $y > x$ 处，求方案数。



用和 **Dyck words** 相同的考虑方式，可得答案为：$\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m-1} = \binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{n+1}$。当 $m = n$ 时，答案即卡特兰数。

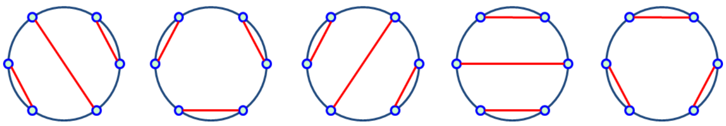
$n+1$ 个叶节点的满二叉树个数



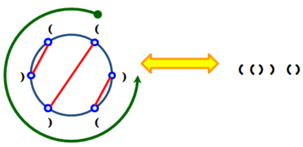
向左记为 1，向右记为 -1，等价于 **Dyck words** 问题。

圆内不相交弦的个数

圆周上有 $2n$ 个点，以这些点为端点连互不相交的 n 条弦，求不同的连法总数。

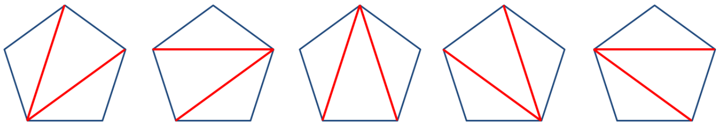


从某个点开始逆时针前进，遇到新的弦标 1，旧的弦标 -1，等价于 **Dyck words** 问题。

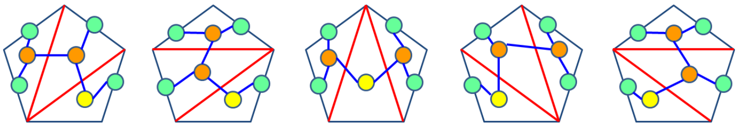


凸多边形的三角剖分

凸 $n+2$ 边形的三角剖分方案数为 C_n.

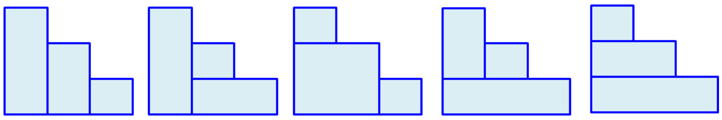


对于凸 $n+2$ 边形，固定某一条边，包括该边的三角形作为根，其他三角形作为其他内点，其他边作为叶子。相邻三角形代表的内点之间连线、其三角形代表的内点和该三角形中属于原来多边形的边之间连线，则得到有 $n+1$ 个叶子节点的满二叉树。

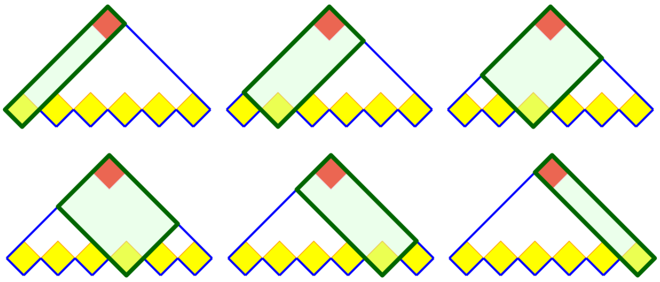


阶梯形的矩形剖分

用 n 个矩形拼成 n 阶梯形，方案数为 C_n.



考虑顶端和 n 个“尖”，有以下 n 种情形：



可递归进行，于是 $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0$，这就是卡特兰数的定义式。