Delaunay 三角剖分

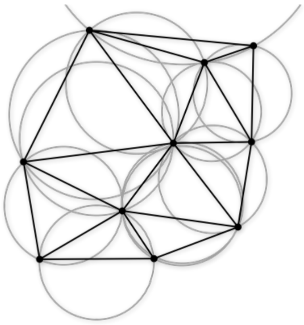
Delaunay Triangulation

定义

三角剖分：给定一个点集，连线使整个图形被细分为若干三角形。

点集 P 的 **Delaunay** 三角剖分 $\mathrm{DT}(P)$ 满足条件：

- 空圆性：任意三角形外接圆内没有其他点；若无四点共圆，则 $\mathrm{DT}(P)$ 唯一。
- 最大化最小角：在 P 的所有三角剖分中，$\mathrm{DT}(P)$ 形成的三角形的最小角最大。

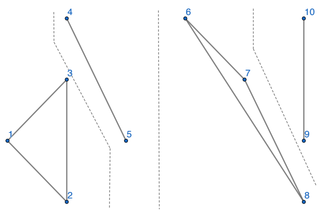


性质

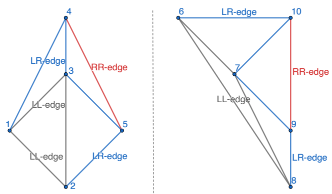
1. 最接近：以最接近的三点形成三角形，且各线段（三角形的边）皆不相交。
2. 唯一性：不论从区域何处开始构建，最终都将得到一致的结果（点集中任意四点不能共圆）。
3. 最优性：任意两个相邻三角形构成的凸四边形的对角线如果可以互换的话，那么两个三角形六个内角中最小角度不会变化。
4. 最规则：如果将三角剖分中的每个三角形的最小角进行升序排列，则 Delaunay 三角剖分的排列得到的数值最大。
5. 区域性：新增、删除、移动某一个顶点只会影响邻近的三角形。
6. 具有凸边形的外壳：三角剖分最外层的边界形成一个凸多边形的外壳。

分治算法构造 Delaunay 三角剖分

1. 将所有点按照横坐标排序；
2. 不断地二分治，直到每一个子点集大小不超过 3，此时，每一个子点集自然形成三角形或线段；

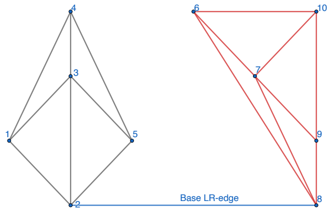


3. 回溯时，我们有三种边：LL-edge, RR-edge, LR-edge，分别表示左子点集内部的边，右子点集内部的边，连接左右子集新加的边；为了维持 DT 的性质，可能需要删除部分 LL-edge 和 RR-edge，但不会新增 LL-edge 或 RR-edge。



合并操作如下：

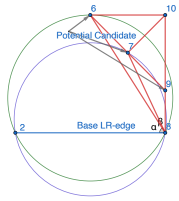
1. 插入 base LR-edge，即最底部的不与任何 LL-edge 和 RR-edge 相交的边；

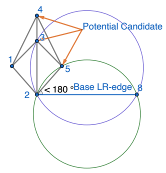


2. 找到与 base LR-edge 右端点相连的若干 RR-edge，检验它们的端点是否满足条件：

   - RR-edge 与 base LR-edge 夹角 $< 180°$；
   - base LR-edge 两端点与该端点确定的圆内无其他点。

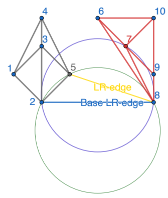
   满足上述条件的点作为右侧的可能点。对于左侧，同理可得到左侧的可能点。





若只有一个可能点，则一条 LR-edge 被添加，删除与之相交的 LL-edge 和 RR-edge；

否则，当左右点集均存在可能点时，检查一侧的可能点的圆是否包含另一侧的点，若包含则不符合。



3. 以添加的 LR-edge 作为新的 base LR-edge，重复上述过程，直到合并完成。