

斯特林数

Stirling Numbers

定义

第一类斯特林数（斯特林轮换数）： $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$

$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ 表示将 n 个元素排成 k 个轮换的方案数。这里，轮换是指环形排列，可以转动而相等。

第二类斯特林数（斯特林子集数）： $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ 表示将一个有 n 件物品的集合划分成 k 个非空子集的方案数。

递归式

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$$

组合证明即可。

n	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 6 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 7 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 8 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 9 \end{smallmatrix} \right]$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

<i>n</i>	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 7 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 8 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 9 \end{matrix} \right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

通项公式

m 个位置，每个位置可以选择 *n* 种颜料上色，则共有 *n^m* 种方案；换一个角度，枚举一共用的 *k* 种颜色，把 *m* 分成 *k* 个子集，每个子集一种颜色，加起来也是总方案数。所以我们有：

$$n^m=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} k!$$

实施二项式反演，得到：

$$n!\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} =\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}k^m(-1)^{n-k}$$

这即是通项公式。

也可以写成卷积的样子：

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} =\sum_{i=0}^ki^n\cdot \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}$$

恒等式

《具体数学》6.1节

重要恒等式：

$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (n-1)\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]$	递归式
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$	递归式
$x^n=\sum_k\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}=\sum_k\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k}x^{\overline{k}}$	在幂之间转换
$x^{\overline{n}}=\sum_k\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k$	在幂之间转换
$x^n=\sum_k\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-k}x^{\overline{k}}$	在幂之间转换
$\sum_k\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k}=[m=n]$	反转公式
$\sum_{k,m}\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{n-k}=[m=n]$	反转公式
$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} -k \\ -n \end{matrix} \right\}$	对偶性

其他：

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}$$
$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right] = \sum_k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \binom{k}{m}$$
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k}$$
$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \sum_k \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$$
$$m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}$$
$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} (m+1)^{n-k}$$
$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] n^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] / k!$$
$$\left\{ \begin{matrix} m+n+1 \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^m k \left\{ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right\}$$
$$\left[\begin{matrix} m+n+1 \\ m \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^m (n+k) \left[\begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right]$$
$$\binom{n}{m} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{m-k}$$
$$n^{\overline{n-m}} [n \geq m] = \sum_k \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^{m-k}$$
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left[\begin{matrix} m+k \\ k \end{matrix} \right]$$
$$\left[\begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right] = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left\{ \begin{matrix} m+k \\ k \end{matrix} \right\}$$
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ l+m \end{matrix} \right\} \binom{l+m}{l} = \sum_k \binom{k}{l} \left\{ \begin{matrix} n-k \\ m \end{matrix} \right\} \binom{n}{k}$$
$$\left[\begin{matrix} n \\ l+m \end{matrix} \right] \binom{l+m}{l} = \sum_k \left[\begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} n-k \\ m \end{matrix} \right] \binom{n}{k}$$

通项公式

斯特林反演

$$g(n) = \sum_k (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} f(k) \iff f(n) = \sum_k (-1)^k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] g(k)$$

另一种形式：

$$g(n) = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} f(k) \iff f(n) = \sum_k (-1)^{n-k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] g(k)$$
$$g(n) = \sum_k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] f(k) \iff f(n) = \sum_k (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} g(k)$$

证明：

必要性：

$$\begin{aligned} \sum_k (-1)^k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] g(k) &= \sum_k (-1)^k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \sum_j (-1)^j \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} f(j) \\ &= \sum_j (-1)^{n-j} f(j) \sum_k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} \\ &= \sum_j (-1)^{n-j} f(j) [n=j] \\ &= f(n) \end{aligned}$$

反转公式

充分性：

$$\begin{aligned} \sum_k (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} f(k) &= \sum_k (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \sum_j (-1)^j \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] g(j) \\ &= \sum_j (-1)^{n-j} g(j) \sum_k (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] \\ &= \sum_j (-1)^{n-j} g(j) [n=j] \\ &= g(n) \end{aligned}$$

反转公式

证毕。