反演原理

Inversion Principle

已知：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}a_{k,n}f(k)$$

反演：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}g(k)$$

反演原理

下面探究怎样的函数能够反演：

由于

$$\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}g(k)=\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}\sum_{i=0}^{k}a_{i,k}f(i)=\sum_{i=0}^{n}f(i)\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}$$

要使之等于 $f(n)$，则必有：

$$\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}=[i=n]$$

即满足该式的函数能够反演。

二项式反演

令 $a_{i,n}=b_{i,n}=(-1)^i\binom{n}{i}$，则：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} a_{i,k} b_{k,n} &= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k+i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \\
&= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k+i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} && \text{三项式版恒等式} \\
&= (-1)^{i} \binom{n}{i} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k} \binom{n-i}{k-i} \\
&= \binom{n}{i} \sum_{t=0}^{n-i} (-1)^{t} \binom{n-i}{t} && t = k-i \\
&= \binom{n}{i} (1-1)^{n-i} && \text{二项式定理} \\
&= [i=n]
\end{aligned}
$$

满足反演原理！故得到**二项式反演**公式：

$$
g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} f(k) \iff f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} g(k)
$$

或写作另一个形式：

$$
g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) \iff f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)
$$

莫比乌斯反演

令 $a_{i,n} = [i \mid n]$, $b_{i,n} = \mu\left(\frac{n}{d}\right)[i \mid n]$，则：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} a_{i,k} b_{k,n} &= \sum_{k=i}^{n} [i \mid k][k \mid n] \mu\left(\frac{n}{k}\right) \\
&= [i \mid n] \sum_{r \mid d} \mu\left(\frac{d}{r}\right) && \text{设 } k = ri, n = di \\
&= [i \mid n][d=1] && \text{定义：} \sum_{k \mid n} \mu(k) = [n=1] \\
&= [i=n]
\end{aligned}
$$

满足反演原理！故得到**莫比乌斯反演**公式：

$$
g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)
$$

集合反演

令 $a_{T,S} = b_{T,S} = [T \subseteq S](-1)^{|T|}$，则：

$$
\begin{aligned}
\sum_{R=T}^{S} a_{T,R} b_{R,S} &= \sum_{R=T}^{S} [T \subseteq R][R \subseteq S](-1)^{|T|+|R|} \\
&= [T \subseteq S] \sum_{R' \subseteq S'} (-1)^{|R'|} && \text{设 } R = R' + T, S = S' + T \\
&= [T \subseteq S] \sum_{|R'|=0}^{|S'|} \binom{|S'|}{|R'|} (-1)^{|R'|} \\
&= [T \subseteq S](1-1)^{|S'|} && \text{二项式定理} \\
&= [T \subseteq S][|S'| = 0] \\
&= [T = S]
\end{aligned}
$$

满足反演原理！故得到**集合反演**公式：

$$
g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|} f(T) \iff f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|} g(T)
$$

或写作另一个形式：

$$
g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) \iff f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} g(T)
$$

斯特林反演

令 $a_{i,n} = (-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$，$b_{i,n} = (-1)^i \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$，则：

$$
\begin{aligned}
\sum_k a_{i,k} b_{k,n} &= \sum_k (-1)^i \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} (-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \\
&= (-1)^{n-i} \sum_k (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{n-i} [i = n] && \text{反转公式} \\
&= [i = n]
\end{aligned}
$$

满足反演原理！故得到**斯特林反演**公式：

$$
g(n) = \sum_k (-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k) \iff f(n) = \sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k)
$$

或写作另一个形式：

$$
\begin{aligned}
g(n) = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k) &\iff f(n) = \sum_k (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k) \\
g(n) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} f(k) &\iff f(n) = \sum_k (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} g(k)
\end{aligned}
$$