同余

Congruence

性质

- 自反，传递，对称
- 加法、减法、乘法、幂次
- **除法**：若 $ac \equiv bc \pmod m$，则：

  $$a \equiv b \pmod{\frac{m}{\gcd(c,m)}}$$

  证：设 $ac = km + bc$，则 $a = b + \frac{km}{c}$。由于 $a - b = \frac{km}{c} = \frac{k\frac{m}{\gcd(c,m)}}{\frac{c}{\gcd(c,m)}} \in \mathbb{Z}$，故 $\frac{c}{\gcd(c,m)} \mid k$。可设 $k = k' \cdot \frac{c}{\gcd(c,m)}$，于是 $a = b + k'\frac{m}{\gcd(c,m)}$，故 $a \equiv b \pmod{\frac{m}{\gcd(c,m)}}$. 证毕。

- 若 $a \equiv b \pmod m$，$n \mid m$，则 $a \equiv b \pmod n$.

  证：设 $a = km + b$，$m = rn$，则 $a = krn + b = k'n + b$，故 $a \equiv b \pmod n$. 证毕。

九余数定理

一个十进制数的所有数位相加与它本身模 9 同余。即：设 $n = \overline{b_m b_{m-1} b_1 b_0}$，则 $n \equiv \sum\limits_{i=0}^{m} b_i \pmod 9$.

证：

$$\begin{aligned} n &\equiv 10^m b_m + \cdots + 10 b_1 + b_0 \\ &\equiv 1^m b_m + \cdots + 1^1 b_1 + 1^0 b_0 \\ &= \sum_{i=0}^{m} b_i \pmod 9 \end{aligned}$$

证毕。

进一步，任一 p 进制数 $n = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_p$ 所有数位相加与它本身模 b 同余的充要条件是：$p \equiv 1 \pmod b$，或写作 $b \mid (p-1)$.

证：

充分性：

$$\begin{aligned} n &\equiv b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0 \\ &= b_m 1^m + b_{m-1} 1^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0 \\ &\equiv \sum_{i=0}^{m} b_i \pmod b \end{aligned}$$

必要性：假设 $p \equiv c \pmod b$，则

$$\begin{aligned} n &\equiv b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0 \\ &\equiv b_m c^m + b_{m-1} c^{m-1} + \cdots + b_1 c + b_0 \\ &\equiv b_m + b_{m-1} + \cdots + b_1 + b_0 \pmod b \end{aligned}$$

于是有：

$$b \mid b_m(c^m - 1) + b_{m-1}(c^{m-1} - 1) + \cdots + b_1(c - 1)$$

如果 $b \nmid (c-1)$，显然上式不能对所有的 n 成立（只消取 $m = 1, b_1 = 1$ 就不能成立），故 $b \mid (c-1)$，于是 $p \equiv c \equiv 1 \pmod b$. 证毕。

概念

- **剩余类** Residue class：

  $$\overline{r}_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv r \pmod n\}$$

  即所有模 n 余 r 的数的集合。
- **完全剩余系** Complete residue system：n 个模 n 不同于的整数构成一个模 n 的完全剩余系。
- **缩剩余系** Ruduced residue system：完全剩余系中取出所有与 n 互质的数（共有 $\varphi(n)$ 个）。

威尔逊定理 Wilson's theorem

p 为质数的充要条件是：

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

Proof:

充分性：$(p-1)! \equiv -1 \pmod p \iff p \mid (p-1)!+1$。设 $a \mid p \quad (a < p)$，则 $a \mid (p-1)!+1$；又 $a \mid (p-1)!$，而 $\gcd((p-1)!, (p-1)!+1) = 1$，故只能是 $a = 1$，所以 p 是质数；

必要性：只需证：$(p-2)! \equiv 1 \pmod p$。当 $p = 2$ 时，成立；当 $p > 2$ 时，p 是奇数，现在证明：$2, 3, \cdots, p-2$ 这偶数个数字可以两两配对，使得每一对都互为模 p 意义下的逆元。首先，对于 $x < p$，一定能找到 $y < p$ 使得 x, y 互为逆元；其次，对于 $2 \leqslant x \leqslant p-2$，$x$ 不可能是自己的逆元；再次，假设 x, y 互为逆元，则必不会有第三者 $z < p$ 与 x 或 y 为逆元，综上易知，$2, 3, \cdots, p-2$ 可以两两配对形成逆元对。于是，$(p-2)! \equiv 1 \pmod p$ 成立。证毕。