反演原理

Inversion Principle

已知：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}a_{k,n}f(k)$$

反演：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}g(k)$$

反演原理

下面探究怎样的函数能够反演：

由于

$$\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}g(k)=\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}\sum_{i=0}^{k}a_{i,k}f(i)=\sum_{i=0}^{n}f(i)\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}$$

要使之等于 $f(n)$，则必有：

$$\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}=[i=n]$$

即满足该式的函数能够反演。

二项式反演

令 $a_{i,n}=b_{i,n}=(-1)^i\binom{n}{i}$，则：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}&=\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k+i}\binom{n}{k}\binom{k}{i}\\
&=\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k+i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} && \text{三项式版恒等式}\\
&=(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}(-1)^k\binom{n-i}{k-i}\\
&=\binom{n}{i}\sum_{t=0}^{n-i}(-1)^t\binom{n-i}{t} && t=k-i\\
&=\binom{n}{i}(1-1)^{n-i} && \text{二项式定理}\\
&=[i=n]
\end{aligned}$$

满足反演原理！故得到**二项式反演**公式：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(k)\iff f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}g(k)$$

或写作另一个形式：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)\iff f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k)$$

莫比乌斯反演

令 $a_{i,n}=[i\mid n],b_{i,n}=\mu\left(\frac{n}{d}\right)[i\mid n]$，则：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}&=\sum_{k=i}^{n}[i\mid k][k\mid n]\mu\left(\frac{n}{k}\right)\\
&=[i\mid n]\sum_{r\mid d}\mu\left(\frac{d}{r}\right) && \text{设 } k=ri,n=di\\
&=[i\mid n][d=1] && \text{定义：}\sum_{k\mid n}\mu(k)=[n=1]\\
&=[i=n]
\end{aligned}$$

满足反演原理！故得到**莫比乌斯反演**公式：

$$g(n)=\sum_{d\mid n}f(d)\iff f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

集合反演

令 $a_{T,S}=b_{T,S}=[T\subseteq S](-1)^{|T|}$，则：

$$\begin{aligned}
\sum_{R=T}^{S}a_{T,R}b_{R,S}&=\sum_{R=T}^{S}[T\subseteq R][R\subseteq S](-1)^{|T|+|R|}\\
&=[T\subseteq S]\sum_{R'\subseteq S'}(-1)^{|R'|} && \text{设 } R=R'+T,S=S'+T\\
&=[T\subseteq S]\sum_{|R'|=0}^{|S'|}\binom{|S'|}{|R'|}(-1)^{|R'|}\\
&=[T\subseteq S](1-1)^{|S'|} && \text{二项式定理}\\
&=[T\subseteq S][|S'|=0]\\
&=[T=S]
\end{aligned}$$

满足反演原理！故得到**集合反演**公式：

$$g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|}f(T)\iff f(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|}g(T)$$

或写作另一个形式：

$$g(S)=\sum_{T\subseteq S}f(T)\iff f(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}g(T)$$

斯特林反演

令 $a_{i,n}=(-1)^i\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix},b_{i,n}=(-1)^i\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}$，则：

$$\begin{aligned}
\sum_{k}a_{i,k}b_{k,n}&=\sum_{k}(-1)^i\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}(-1)^k\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\\
&=(-1)^{n-i}\sum_{k}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\\
&=(-1)^{n-i}[i=n] && \text{反转公式}\\
&=[i=n]
\end{aligned}$$

满足反演原理！故得到**斯特林反演**公式：

$$g(n)=\sum_{k}(-1)^k\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}f(k)\iff f(n)=\sum_{k}(-1)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}g(k)$$

或写作另一个形式：

$$g(n) = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} f(k) \iff f(n) = \sum_k (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] g(k)$$
$$g(n) = \sum_k \left[{n \atop k} \right] f(k) \iff f(n) = \sum_k (-1)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\} g(k)$$