反演原理

Inversion Principle

已知：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}a_{k,n}f(k)$$

反演：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}g(k)$$

反演原理

下面探究怎样的函数能够反演：

由于

$$\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}g(k)=\sum_{k=0}^{n}b_{k,n}\sum_{i=0}^{k}a_{i,k}f(i)=\sum_{i=0}^{n}f(i)\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}$$

要使之等于 $f(n)$，则必有：

$$\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}=[i=n]$$

即满足该式的函数能够反演。

二项式反演

令 $a_{i,n}=b_{i,n}=(-1)^{i}\binom{n}{i}$，则：

$$\begin{aligned}\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,n}&=\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k+i}\binom{n}{k}\binom{k}{i}\\&=\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k+i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}&&\text{三项式版恒等式}\\&=(-1)^{i}\binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k}\binom{n-i}{k-i}\\&=\binom{n}{i}\sum_{t=0}^{n-i}(-1)^{t}\binom{n-i}{t}&&t=k-i\\&=\binom{n}{i}(1-1)^{n-i}&&\text{二项式定理}\\&=[i=n]\end{aligned}$$

满足反演原理！故得到二项式反演公式：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}f(k)\iff f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}g(k)$$

或写作另一个形式：

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)\iff f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k)$$

莫比乌斯反演

令 $a_{i,n}=[i\mid n], b_{i,n}=\mu\left(\frac{n}{d}\right)[i\mid n]$，则：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} a_{i,k} b_{k,n} &= \sum_{k=i}^{n} [i\mid k][k\mid n]\mu\left(\frac{n}{k}\right) \\
&= [i\mid n]\sum_{r\mid d}\mu\left(\frac{d}{r}\right) && \text{设 } k=ri, n=di \\
&= [i\mid n][d=1] && \text{定义：} \sum_{k\mid n}\mu(k)=[n=1] \\
&= [i=n]
\end{aligned}
$$

满足反演原理！故得到**莫比乌斯反演**公式：

$$
g(n)=\sum_{d\mid n} f(d) \iff f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)
$$

集合反演

令 $a_{T,S}=b_{T,S}=[T\subseteq S](-1)^{|T|}$，则：

$$
\begin{aligned}
\sum_{R=T}^{S} a_{T,R} b_{R,S} &= \sum_{R=T}^{S} [T\subseteq R][R\subseteq S](-1)^{|T|+|R|} \\
&= [T\subseteq S]\sum_{R'\subseteq S'}(-1)^{|R'|} && \text{设 } R=R'+T, S=S'+T \\
&= [T\subseteq S]\sum_{|R'|=0}^{|S'|}\binom{|S'|}{|R'|}(-1)^{|R'|} \\
&= [T\subseteq S](1-1)^{|S'|} && \text{二项式定理} \\
&= [T\subseteq S][|S'|=0] \\
&= [T=S]
\end{aligned}
$$

满足反演原理！故得到**集合反演**公式：

$$
g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|} f(T) \iff f(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|} g(T)
$$

或写作另一个形式：

$$
g(S)=\sum_{T\subseteq S} f(T) \iff f(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|} g(T)
$$

斯特林反演

令 $a_{i,n}=(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}, b_{i,n}=(-1)^i \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$，则：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k} a_{i,k} b_{k,n} &= \sum_{k}(-1)^i \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}(-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \\
&= (-1)^{n-i}\sum_{k}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{n-i}[i=n] && \text{反转公式} \\
&= [i=n]
\end{aligned}
$$

满足反演原理！故得到**斯特林反演**公式：

$$
g(n)=\sum_{k}(-1)^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k) \iff f(n)=\sum_{k}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k)
$$

或写作另一个形式：

$$
g(n)=\sum_{k}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k) \iff f(n)=\sum_{k}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g(k)
$$

$$
g(n)=\sum_{k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} f(k) \iff f(n)=\sum_{k}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} g(k)
$$