上下界网络流

无源汇上下界可行流

是否存在一个流网络，使得每条边流量满足这条边的上下界限制：$lb(u,v) \leqslant f(u,v) \leqslant ub(u,v)$。

为了满足下界要求，我们先假设每条边已经流了 $lb(u,v)$ 的流量，那么此时边的容量可以改为 $ub(u,v) - lb(u,v)$。

但假设后流量不一定是平衡的，如果我们直接跑最大流，那么最大流网络加上下界网络也不一定平衡。因此，我们欲对该图做一些修改，使得最大流网络加上下界网络对于原图而言恰巧平衡。

假设在下界网络中，一个点的入流减去出流为 M. 那么：

- 若 $M = 0$，即下界网络平衡，不加边；
- 若 $M > 0$，即入流多于出流，则从附加源点 S 向它连一条容量为 M 的边，这样，相当于最大流网络从外界多索取了 M 的流量，而这索取的流量实质来源是下界流多出的流量。
- 若 $M < 0$，即入流小于出流，则从它向附加汇点 T 连一条容量为 $|M|$ 的边，这样，相当于最大流网络向外界扔出了 $|M|$ 的流量，而这扔出的流量实质来源是为了弥补下界流少的流量而增加的流量。

建好图后跑最大流，如果一个点的附加边都是满流的，说明它最终流量平衡了；所以，当且仅当 S 连出的边和 T 连进的边都满流时，存在可行流。

有源汇上下界可行流

相比无源汇，有源汇允许源点和汇点流量不平衡。所以我们只需要将其转化成源汇也满足流量平衡，就直接套用无源汇上下界可行流了。

注意到源点流出的流量正好是汇点流入的流量，所以只需要从汇点连一条容量 INF 的边回到源点，就完成了转化。

有源汇上下界最大流

首先跑一遍有源汇上下界可行流判断是否有解，如果有解，再在**删去附加边之后的**残量网络里跑一遍最大流，二者相加即是答案。

但事实上，我们只需要更改源汇点为题目的源汇点，然后直接跑最大流就行了。具体原理是：设原图的源汇点分别是 s 和 t，在跑一遍可行流后，$t \to s$ 这条边的流量就是可行流的流量，或者说，$s \to t$ 的现容量就是可行流的流量。现在跑 s 到 t 的最大流，由于 S 只有出边且 T 只有入边，所以它们的附加边对现在的图没有影响，而流满 $s \to t$ 这个可行流之后，这条附加边也没有了影响，所以就相当于一个在原图中执行了一半的最大流，自然继续执行下去即可。

有源汇上下界最小流

首先跑一遍有源汇上下界可行流判断是否有解，如果有解，删去 $t \to s$ 后从 t 向 s 跑一遍最大流，二者相减即是答案。