

# 线性基

## Linear Basis

**Idea:** 从二进制的角度看待每个数，每一位可以类比为向量空间的一维，每一维只有 0 和 1 两种取值。 $n$  个数就是  $n$  个 64 维的向量（`long long` 为例），它们构成了 64 维向量空间的一个子空间。这个子空间中允许异或运算，两个向量相异或即每一维相异或。

线性基是一组数，构成这个子空间的一个基底，也即满足以下性质：

- 原集合的任一元素可由线性基中的一些元素相异或得到；
- 线性基是满足上述条件的最小集合；
- 线性基没有异或为 0 的子集：否则违背第二条；
- 线性基的选取元素方案不同，异或值不同：否则存在子集异或为 0。

**Code:**

`p[]` 是存储线性基中的数组，`p[i]` 存储最高位为  $i$  的数字。

```
1  LL p[70];
2  inline bool insert(LL x){
3      for(int i = 62; i >= 0; i--){
4          if((x >> i) == 0) continue;
5          if(!p[i]){ p[i] = x; return true; } // insert successfully
6          else      x ^= p[i];
7      }
8      return false; // fail to insert
9  }
10 inline void norm(){ // normalization
11     for(int i = 62; i >= 0; i--){
12         if(p[i])
13             for(int j = 62; j > i; j--){
14                 if((p[j] >> i) & 1)
15                     p[j] ^= p[i];
16     }
17     inline bool exist(LL x){
18         for(int i = 62; i >= 0; i--){
19             if((x >> i) == 0) continue;
20             if(!p[i]) return false;
21             else      x ^= p[i];
22         }
23         return true;
```

```

24 }
25 inline LL xorMax(){
26     LL res = 0;
27     for(int i = 62; i >= 0; i--)
28         res = max(res, res ^ p[i]);
29     return res;
30 }
31 inline LL xorMin(){
32     for(int i = 0; i <= 62; i++)
33         if(p[i]) return p[i];
34     return 0;
35 }
36 inline LL kthMin(LL k){ // kth minimum number (excluding 0)
37     // be sure normalized beforehand
38     LL res = 0;
39     vector<LL> tmp;
40     for(int i = 0; i <= 62; i++)
41         if(p[i]) tmp.push_back(p[i]);
42     if(k >= (1ll << tmp.size())) return -1;
43     for(int i = tmp.size() - 1; i >= 0; i--)
44         if((k >> i) & 1) res ^= tmp[i];
45     return res;
46 }

```