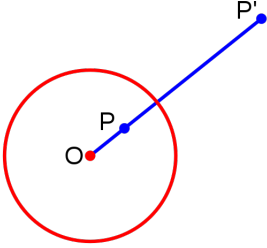


反演变换

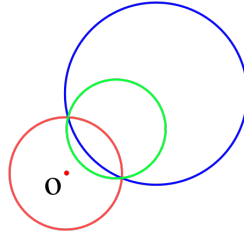
Inversion

Definition: 反演中心 O , 反演半径 R , 若平面上两点 P, P' 满足: P' 在射线 OP 上且 $|OP| \cdot |OP'| = R^2$, 则称 P 与 P' 互为反演点。



Properties:

- 圆 O 外的点的反演点在圆 O 内; 圆 O 内的点的反演点在圆 O 外; 圆 O 上的点的反演点为其自身。
- 不过点 O 的圆 A , 其反演图形也是不过点 O 的圆。



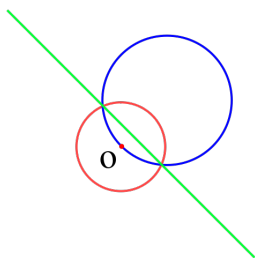
设 $O(x_0, y_0)$, 圆 A 的反演圆为 B , 半径分别为 r_1, r_2 , 坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 可以得到关系式:

$$(|OA| - r_1)(|OB| + r_2) = (|OA| + r_1)(|OB| - r_2) = R^2$$

解这个关系式可以得到一些结果:

$$\begin{aligned}\frac{|OA|}{|OB|} &= \frac{r_1}{r_2} \\ r_2 &= \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{|OA| - r_1} - \frac{1}{|OA| + r_1} \right) \\ r_1 &= \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{|OB| - r_2} - \frac{1}{|OB| + r_2} \right) \\ x_2 &= x_0 + \frac{r_2}{r_1} (x_1 - x_0) \\ y_2 &= y_0 + \frac{r_2}{r_1} (y_1 - y_0)\end{aligned}$$

- 过点 O 的圆的反演图形是一条不过点 O 的直线, 方向向量垂直于圆心连线, 与 O 相距 $\frac{R^2}{2r}$.



- 相切图形的反演图形相切。

Code:

(1) 圆 A 关于反演中心 O , 反演半径 R 的反演圆 (调用前保证 A 不过 O)

```
1 Circle getInversionC2C(Point O, double R, Circle A){
2     double OA = Length(A.p - O);
3     double rB = R * R / 2 * (1 / (OA - A.r) - 1 / (OA + A.r));
4     double xB = O.x + rB / A.r * (A.p.x - O.x);
5     double yB = O.y + rB / A.r * (A.p.y - O.y);
6     return Circle(Point(xB, yB), rB);
7 }
```

(2) 圆 A 关于反演中心 O , 反演半径 R 的反演直线 (调用前保证 A 过 O)

```
1 Line getInversionC2L(Point O, double R, Circle A){
2     Point P = (A.p - O) / Length(A.p - O) * R * R / A.r / 2;
3     Vector v = Normal(A.p - O);
4     return Line(P, v);
5 }
```

(3) 直线 L 关于反演中心 O , 反演半径 R 的反演圆 (调用前保证 L 不过 O , 返回结果是一个过 O 的圆)

```
1 Circle getInversionL2C(Point O, double R, Line L){
2     Point P = PointLineProjection(O, L);
3     double d = Length(P - O);
4     double r = R * R / d / 2;
5     Vector v = (P - O) / Length(P - O) * r;
6     return Circle(O + v, r);
7 }
```