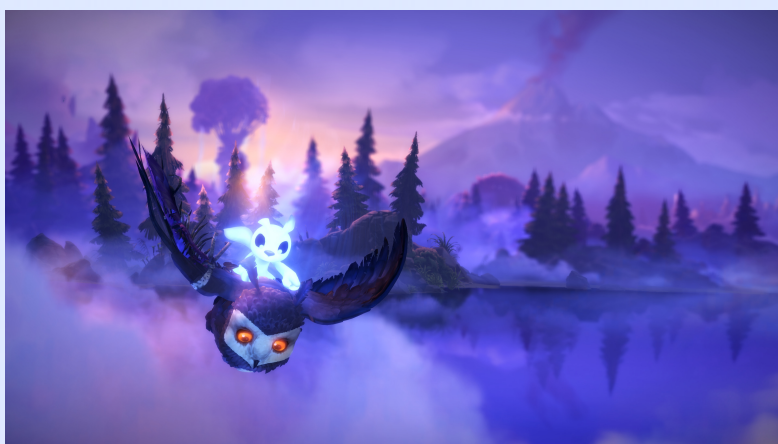


---

# Math Note

## 数学一 笔记

---



Audentis Fortuna iuvat.

---

整理: XYL  
整理时间: May 21, 2025  
Email: [xyl\\_27@outlook.com](mailto:xyl_27@outlook.com)

---

Version: 1.0.0

# 目 录

---

<b>1</b>	<b>高等数学</b>	<b>3</b>
1.1	函数极限与连续 . . . . .	3
1.1.1	有界性、单调性、奇偶性、周期性 . . . . .	3
1.1.2	初等函数 . . . . .	3
1.1.3	函数极限计算 . . . . .	4
1.1.4	函数连续与间断 . . . . .	4
1.1.5	综合 . . . . .	4
1.2	数列极限 . . . . .	5
1.3	一元函数微分学概念 . . . . .	8
1.4	一元函数微分学计算 . . . . .	10
1.5	一元函数微分学几何应用 . . . . .	11
1.6	一元函数微分学的应用 . . . . .	12
1.7	一元函数微分学的物理应用 . . . . .	13
1.8	一元函数积分学的概念 . . . . .	13
1.9	一元函数积分学的计算 . . . . .	15
1.10	一元函数积分学的几何应用 . . . . .	17
1.11	一元函数积分学的应用 . . . . .	17
<b>2</b>	<b>线性代数</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>概率论与数理统计</b>	<b>19</b>

# 第 1 章

## 高等数学

---

1. 区间再现
2. 梅林变换
3. 拉普拉斯变换
4. 有理函数积分
5. 费曼积分

### 1.1 函数极限与连续

#### 1.1.1 有界性、单调性、奇偶性、周期性

1. 严格单调函数必然有反函数
2. 双曲正余弦函数的积分和导数
3. 反双曲正弦函数的积分和导数 (奇函数)
4. 单调性：内偶则偶，内奇则外
5. 任意一个函数都可以写成一个奇函数加上偶函数之和
6. 求导（积分）一次，奇偶性互换

#### 1.1.2 初等函数

1.  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ ;  $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$
2. 反三角函数的恒等式

### 1.1.3 函数极限计算

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$ .
2. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - (\cos x)^a \sim \frac{1}{2}ax^2, a \neq 0$ , 如: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \sqrt{\cos x} \sim \frac{1}{4}x^2$ .
3.  $(1+x)^{\frac{1}{x}} - e \sim -\frac{e}{2}x \quad (x \rightarrow 0^+)$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0 (\beta, \alpha > 0)$
5.  $\lim u^\nu = \lim \left\{ [1 + (u-1)]^{\frac{1}{u-1}} \right\}^{(u-1)\nu} = e^{\lim(u-1)\nu}$

#### 题目

1. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n \sin^2 \pi x}$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 已知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + xf(x)}{\sin x^3} = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设函数  $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$  在  $x=0$  处的 3 次泰勒多项式为  $ax + bx^2 + cx^3$ , 则  $a, b, c$  为多少
4. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}$

### 1.1.4 函数连续与间断

1. 判断连续性的 3 个条件: 极限存在, 值存在, 极限等于值. 其中极限存在是必须左右极限都存在且相等
2. 第一类间断点 (可去或跳跃): 存在有限的左、右极限, 如  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x=0$
3. 第二类间断点 (无穷或振荡): 左、右极限至少有一个不存在或无穷大, 如  $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}, x=0$

#### 题目

1.  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$  的第二类间断点的个数为

### 1.1.5 综合

- 1.4 函数  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内  $\bigcirc$ 。

(A) 连续

(B) 有可去间断点

(C) 有跳跃间断点

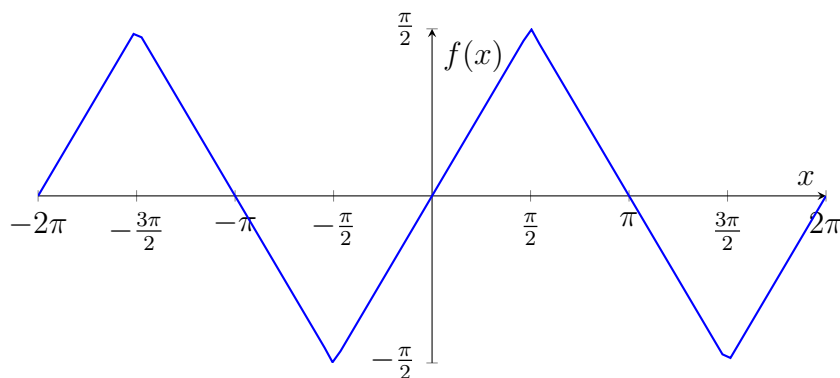
(D) 有无穷间断点

- 1.6 设函数  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $x \in [0, 1]$ , 定义函数列:

$$f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = f[f_1(x)], \dots, \quad f_n(x) = f[f_{n-1}(x)] (n = 1, 2, 3, \dots),$$

则  $f_n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 1.11 设  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ , 画出  $f(x)$  的图形。



- 1.12 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ 。
- 1.14 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ a^{\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}} + (1+|x|)^{\frac{1}{x}} \right]$  存在, 求  $a$  的值。

## 1.2 数列极限

递推数列求极限

1. 收敛数列的任意子列也收敛
2. 二次平均数（二阶矩开根）大于等于算术平均数
3.  $\sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$
4.  $\arctan x < x < \arcsin x \quad (0 < x < 1)$
5.  $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
6.  $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x \quad (x > 0)$
7.  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$
8. 单调有界：单调性常用作商，作差，微分中值定理；有界通常用，数学归纳法，不等式放缩。

表 1.1: 常见数列极限类型及解法速查表

类型	一般形式	解法	示例
多项式分式	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$	同除最高次项	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n} = \frac{3}{2}$
根式差	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an+b} - \sqrt{cn+d})$	— 有理化 (乘共轭式)	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$
递推数列	$a_{n+1} = f(a_n)$	1. 假设极限存在, 解方程 $L = f(L)$ 2. 验证单调有界性	$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ 收敛于 2
求和式 (黎曼和)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$	转化为定积分 $\int_0^1 f(x)dx$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$
指数型 ( $1^\infty$ )	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$	利用 $e^a$ 定义或对数化	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$
夹逼定理型	复杂数列 $a_n$ 满足 $b_n \leq a_n \leq c_n$	找到 $b_n, c_n$ 使 $\lim b_n = \lim c_n = L$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
Stolz 定理	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ ( $b_n$ 单调趋于 $\infty$ )	若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ , 则原极限为 $L$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$
连分数	$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n}$	1. 设极限 $L$ 解方程 2. 归纳法证有界性	$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ 收敛于 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
阶乘型	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$	夹逼定理或比值判别法	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
三角函数型	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$	利用连续性: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = 1$
交错数列	$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n b_n$	若 $b_n \rightarrow 0$ 则极限为 0, 否则发散	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

2. 判断  $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \pm\infty$  时极限不存在, 可以通过找一条趋于  $x_0$  或  $\pm\infty$  的路径, 这条路径上极限不存在; 或找到两条特殊路径, 在这两条路径上函数的极限不相等.

例 4.7 证明下列极限不存在.

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x\pi$

Handwritten notes for (1):

- $x_n = 1/n\pi$ ,  $\sin x_n = 0$
- $x_n = 1/(2n\pi)$ ,  $\sin x_n = 1$

Handwritten notes for (2):

- $x_n = n \rightarrow \infty$ ,  $\sin x_n = 0$
- $x_n = n + \frac{1}{2} \rightarrow \infty$ ,  $\sin x_n = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$

### 题目

- 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$ , 其中  $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$  非负.
- \*\*\* 设  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^2}$ .
- 设  $0 < x_1 < 3$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 并求此极限.
- (1) 证明方程  $x = \cos x$  在  $(0, \frac{\pi}{3})$  内有唯一实根  $a$ ;  
(2) 设  $-1 \leq x_i \leq 1$ , 定义  $x_{n+1} = \cos x_n$ ,  $n = 1, 2, \cdots$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且极限值就是 (1) 中的  $a$ .
- “存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时, 恒有  $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$  是数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$  的  $\bigcirc$ 。  
(A) 充分不必要条件  
(B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件  
(D) 既不充分也不必要条件
- 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时, 有  $\bigcirc$ 。  
(A)  $|a_n| > \frac{|a|}{2}$   
(B)  $|a_n| < \frac{|a|}{2}$   
(C)  $a_n > a - \frac{1}{n}$   
(D)  $a_n < a + \frac{1}{n}$
- 设  $x_1 = 2$ ,  $x_n + (x_n - 4)x_{n-1} = 3$  ( $n = 2, 3, \cdots$ ), 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求其值.

### 1.3 一元函数微分学概念

1. 可导必连续, 连续不一定可导
2. 求函数在 0 处的导数时先判断奇偶 (求导奇偶互换), 若奇则 0
3.  $[(e^x - 1)g(x)]' = e^x g(x) + (e^x - 1)g'(x)$
4. 绝对值函数在零点不可导,

#### 题目

1. 设  $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 则  $f^{(4)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 设  $f(x)$  是二阶可导且以 2 为周期的奇函数,  $f(\frac{1}{2}) > 0, f'(\frac{1}{2}) > 0$ , 记  $M = f(-\frac{1}{2})$ ,

$$N = f'(\frac{3}{2}), K = f''(0).$$

则  $\bigcirc$ 。

- (A)  $M < N < K$   
 (B)  $M > N > K$   
 (C)  $M < K < N$   
 (D)  $M > K > N$

3. 设  $f(x)$  在  $x = a$  处连续,  $F(x) = f(x)|x - a|$ , 则  $f(a) = 0$  是  $F(x)$  在  $x = a$  处可导的  $\bigcirc$ 。  
 (A) 充要条件  
 (B) 充分非必要条件  
 (C) 必要非充分条件  
 (D) 既非充分又非必要条件

4. 设函数

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x^2 - 1)|x^3 + x^2 - 2x - 2|, \\ f_2(x) &= (x^2 - 1)|x^3 - 2x^2 - x + 2|, \\ f_3(x) &= (x^2 - 1)|x^3 + 3x^2 - 2x - 6|, \end{aligned}$$

将函数  $f_i(x)(i = 1, 2, 3)$  的不可导点个数记为  $n_i$ , 则  $\bigcirc$ 。



(A)  $n_2 < n_1 < n_3$

(B)  $n_1 < n_2 < n_3$

(C)  $n_3 < n_2 < n_1$

(D)  $n_2 < n_3 < n_1$

5. 设函数  $f(u)$  可导, 且  $y = f(x^2)$ , 当自变量  $x$  在  $x = -1$  处取得增量  $\Delta x = -0.1$  时, 相应的函数增量  $\Delta y$  的线性主部为 0.1, 则  $f'(1) = ()$ 。

(A) -1

(B) 0.1

(C) 0.5

(D) 1

6. 3.2 设函数  $f(x) = |x^3 - 1|\varphi(x)$ , 其中  $\varphi(x)$  在  $x = 1$  处连续, 则  $\varphi(1) = 0$  是  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导的  $\bigcirc$ 。# 用定义

(A) 充分必要条件

(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件

(D) 既非充分又非必要条件

7. 3.4 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且  $f'(x_0) \neq 0$ 。当自变量有增量  $\Delta x$  时, 函数  $y = f(x)$  的增量为  $\Delta y$ , 则当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta y - dy$  是  $dy$  的  $\bigcirc$ 。

(A) 高阶无穷小

(B) 低阶无穷小

(C) 同阶非等价无穷小

(D) 等价无穷小

8. 3.7 证明: (1) 若  $F(x)$  在  $[x_0, x_0 + \delta)(\delta > 0)$  连续, 在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内可导, 当  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F'(x) = A$  时, 有  $F'_+(x_0) = A$ ;

(2) 若  $F(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0](\delta > 0)$  连续, 在  $(x_0 - \delta, x_0)$  内可导, 当  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F'(x) = A$  时, 有  $F'_-(x_0) = A$ 。

---

9. 3.8 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x < 0, \\ A, & x = 0, \\ ax^2 + b, & x > 0, \end{cases}$  求常数  $A, a, b$  的值, 使  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 并求  $f'(0)$ 。

## 1.4 一元函数微分学计算

1. 多个乘法求导不好求时, 可以尝试化成两项相乘
2. 分段点用导数的定义求导
3.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6.  $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
7.  $(\sec x)' = \sec x \tan x$
8.  $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
9.  $(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
10.  $(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
11.  $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}{\frac{dy}{dy}} = \frac{1}{x_y}$
12. 反函数的二阶导数  $x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$
13.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$
14. 隐函数求二阶导时注意代入一阶导  $y'$
15. 莱布尼茨公式求高阶导  $uv^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$
16.  $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

题目

---

1. 设  $f(x) = x^2 \ln(1-x)$ , 则当  $n \geq 3$  时,  $f^{(n)}(0) = ( )$ 。

- (A)  $-\frac{n!}{n-2}$   
 (B)  $\frac{n!}{n-2}$   
 (C)  $-\frac{(n-2)!}{n}$   
 (D)  $\frac{(n-2)!}{n}$

2. 4.5 设函数  $f(x)$  在  $x=2$  的某邻域内具有任意阶导数, 且  $f'(x) = e^{f(x)}$ ,  $f(2) = 1$ , 则当  $n \geq 1$  时,

$$f^{(n)}(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. 4.7 已知  $g(x)$  在  $x=0$  处二阶可导, 且  $g(0) = g'(0) = 0$ , 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

证明:  $f(x)$  的导函数在  $x=0$  处连续。

## 1.5 一元函数微分学几何应用

- 判断极值的第三充分条件
- 一个可导点不可能同时是极值点和拐点
- 不可导点, 可能既是极值点, 又是拐点
- 多项式函数拐点和极值点个数判断:
- $f(x) = x^2$  图像凹, 国内: 下凸, 凹; 国际: 凸, convex
  - $k_1$  为  $n_i = 1$  的个数
  - $k_2$  为  $n_i$  是偶数且  $n_i \neq 1$  的个数
  - $k_3$  为  $n_i$  是奇数且  $n_i \neq 1$  的个数
  - 极值点个数为  $k_1 + 2k_2 + k_3 - 1$
  - 极值点个数为  $k_1 + 2k_2 + 3k_3 - 2$
- 渐近线的判断: 铅直渐近线  $x = a$ , 水平渐近线  $y = b$ , 斜渐近线  $y = kx + b$ , 通过极限计算
- 切线斜率的增量和弧长的增量比为平均曲率

8. 曲率公式  $k = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$

9. 曲率半径  $R = \frac{1}{k}$

### 题目

1. 设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(x)f'(x) > 0$ , 则  $\bigcirc$ 。  
(A)  $f(1) > f(-1)$  (B)  $f(1) < f(-1)$  (C)  $|f(1)| > |f(-1)|$  (D)  $|f(1)| < |f(-1)|$
2. 判断  $y = |xe^{-x}|$  在  $x = 0$ , 点  $(0, 0)$  的极值点和拐点
3. 曲线  $f(x) = (x-1)^2(x-3)^3$  的拐点个数为  $\bigcirc$ 。
4. 5.1 设函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  具有二阶导数, 且  $g''(x) < 0$ 。若  $g(x_0) = a$  是  $g(x)$  的极值, 则  $f[g(x)]$  在  $x_0$  取极大值的一个充分条件是  $\bigcirc$ 。  
(A)  $f'(a) < 0$  (B)  $f'(a) > 0$  (C)  $f''(a) < 0$  (D)  $f''(a) > 0$
5. 5.5 曲线  $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$  的拐点坐标为 \_\_\_\_\_

## 1.6 一元函数微分学的应用

1. 费马定理
2. 平均值定理
3. 拉格朗日中值定理
4. 柯西中值定理
5. 介值定理
6. 罗尔定理, 构造, 部分题目需要多次构造

(a)  $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$

(b)  $[f(x)f'(x)]' = f(x)f''(x) + f'(x)^2$

(c)  $[f(x)e^{g(x)}]' = f'(x)e^{g(x)} + f(x)g'(x)e^{g(x)}$

(d)  $[f(x)/x]' = (f'(x)x - f(x))/x^2$

(e)  $[\frac{f(x)}{f'(x)}]' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f'(x)^2}$

(f)  $[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

7. 一族函数

## 题目

1.

设函数  $f(x)$  满足  $f(0) = 0$ , 且当  $x > 0$  时,  $f(x) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$ , 则当  $0 < a < x < b$  时, 有

(A)  $xf(x) > af(a)$  (B)  $bf(b) > xf(x)$  (C)  $xf(a) > af(x)$  (D)  $xf(b) > bf(x)$

2. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上二阶可导, 且  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 则 ( ).

(A) 当  $f'(x) < 0$  时,  $f(\frac{1}{2}) < 0$

(C) 当  $f'(x) > 0$  时,  $f(\frac{1}{2}) < 0$

(B) 当  $f''(x) < 0$  时,  $f(\frac{1}{2}) < 0$

(D) 当  $f''(x) > 0$  时,  $f(\frac{1}{2}) < 0$

3. 设函数  $f(x)$  在区间  $[-1,1]$  上具有三阶连续导数, 且  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ , 证明: 在区间  $(-1,1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f'''(\xi) = 3$ .

4. 若  $3a^2 - 5b < 0$ , 则方程  $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$  有几个实根

5. 证明  $2^x - x^2 - 1 = 0$  有且仅有三个根

6. 证明:  $(\ln \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x})^2 < \frac{1}{x(1+x)^2} (x > 0)$ .

7. 6.6 已知  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明:

(1) 存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f(\xi) = 1 - \xi$ ;

(2) 存在  $\eta, \tau \in (0,1), \eta \neq \tau$ , 使得  $f'(\eta)f'(\tau) = 1$ .

8. 6.7 设函数  $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续 ( $0 < a < b$ ), 在  $(a,b)$  内可导, 且  $f(a) \neq f(b)$ . 证明: 存在  $\xi, \eta \in (a,b)$ , 使得  $\frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(\eta)}{b+a}$ .

9. 6.8 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上具有二阶导数, 且满足条件  $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$ , 其中  $a, b$  都是非负常数,  $c$  是  $(0,1)$  内任意一点.

(1) 写出  $f(x)$  在点  $x = c$  处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式,

(2) 证明  $|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}$ .

## 1.7 一元函数微分学的物理应用

## 1.8 一元函数积分学的概念

1. 0 到 1 的积分:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$

---

2. 可导则连续则可积则有界
3. 广义积分可以用不等式放缩或比较判别判断敛散性
4.  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, p > 1$  发散,  $0 < p < 1$  收敛
5.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, p > 1$  发散,  $0 < p \leq 1$  收敛

6.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$$

收敛,  $0 < p < 1$ ,发散,  $p \geq 1$ .

7.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$$

发散,  $0 < p \leq 1$ ,收敛,  $p > 1$ .

### 题目

1. 设可导函数  $y = f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的值域是  $[0, +\infty)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $x = \varphi(y)$  是  $y = f(x)$  的反函数。记  $I = \int_0^a f(x) dx + \int_0^b \varphi(y) dy$ , 常数  $a, b > 0$ , 当  $a < \varphi(b)$  时, 则  $\circ$ 。

(A)  $I > ab$ (B)  $I < ab$ (C)  $I = ab$ (D)  $I$  与  $ab$  的大小关系不确定

2. 设  $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx$ ,  $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx$ , 则.

(A)  $M < 1 < N$ (B)  $M < N < 1$ (C)  $N < M < 1$ (D)  $1 < M < N$

3. 若反常积分

$$\int_1^{\infty} \left( e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1} \right) x^k dx$$

收敛, 则  $k$  的取值范围是\_\_。

4. 以下反常积分发散的是  $\bigcirc$ 。

(A)

$$\int_1^{+\infty} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] dx$$

(B)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

(C)

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sin x}$$

(D)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

5. 确定参数  $\alpha$  的范围, 使得以下积分收敛:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$$

6. 判断积分  $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$  的敛散性

7.  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)x^{1-p}} dx$  收敛, 求  $p$  取值范围

8. 8.5  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n + \frac{1}{i}}$

9. 8.7 讨论  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$  的敛散性, 其中  $p$  为任意实数。

## 1.9 一元函数积分学的计算

1.  $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

2.  $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln |\csc x + \cot x| + C$

3.  $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

4.  $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

5.  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

6.  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

---

$$7. \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$8. \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$9. \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$10. \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$11. \int -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arccos \frac{x}{a} + C$$

$$12. \int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$13. \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \right) + C$$

$$14. \int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

$$15. \int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

1. 三角代换

2. 根式代换

3. 倒代换

4. 复杂函数代换

5. 有理函数：待定系数，万能公式

6. 定积分区间再现

7. 华里士公式：“点火公式”

8. 根式代换技巧

根式形式	常用代换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \sin \theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a \tan \theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \sec \theta$

技巧 1.  $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x}$

技巧 2. 三角有理式的积分：谁是奇函数凑谁，都是偶凑  $\tan$

技巧 3. 三角积分没思路，尝试除  $\cos^2 x$ ，凑  $d\tan x$

技巧 4. 分子写成分母的形式



技巧 5. 保证整体性和一致性, 需仔细观察

技巧 6. 对复杂部分求导

技巧 7. 幂函数升次

技巧 8. 有理积分, 分母次数较高, 尝试倒代换

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin bx)' \\ e^{ax} & \sin bx \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} + C = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + C;$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\cos bx)' \\ e^{ax} & \cos bx \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} + C = \frac{ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

题目


- $\int_0^1 x \arcsin \sqrt{4x - 4x^2} dx$
- $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \sin t| dt \quad (x \geq 0)$  在  $x \rightarrow 0^+$  处的二次泰勒多项式为  $a + bx + cx^2$ , 则  $abc = \underline{\hspace{1cm}}$ 。
- 求 
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2 - 2x}}$$
- (伽马函数) 计算  $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$  ( $n$  为非负整数)。

## 1.10 一元函数积分学的几何应用

## 1.11 一元函数积分学的应用

题目

• 1

 例 11.3  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (n+1)x^n \ln(1+x) dx = (\quad).$

(A)  $\ln 2$

(B) 1

(C)  $e^2$

(D)  $+\infty$

• 2

## 第 2 章

### 线性代数

---

## 第 3 章

### 概率论与数理统计

---