Math Note

数学一 笔记

Audentis Fortuna iuvat.

整理：XYL
整理时间：March 26, 2025
Email: xyl_27@outlook.com

Version: 1.0.0

目　　录

1　高等数学 3

1.1　函数极限与连续 3

1.1.1　有界性、单调性、奇偶性、周期性 3

1.1.2　初等函数 3

1.1.3　函数极限计算 4

1.1.4　函数连续与间断 4

1.1.5　综合 4

1.2　数列极限 5

1.3　一元函数微分学概念 6

1.4　一元函数微分学计算 8

1.5　一元函数微分学几何应用 10

1.6　一元函数微分学的应用 11

1.7　一元函数微分学的物理应用 12

1.8　一元函数积分学的概念 12

2　线性代数 14

3　概率论与数理统计 15

第 1 章
高等数学

1. 区间再现
2. 梅林变换
3. 拉普拉斯变换
4. 有理函数积分
5. 费曼积分

1.1 函数极限与连续

1.1.1 有界性、单调性、奇偶性、周期性

1. 严格单调函数必然有反函数
2. 双曲正余弦函数的积分和导数
3. 反双曲正弦函数的积分和导数 (奇函数)
4. 单调性：内偶则偶，内奇则外
5. 任意一个函数都可以写成一个奇函数加上偶函数之和
6. 求导（积分）一次，奇偶性互换

1.1.2 初等函数

1. $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha; 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$
2. 反三角函数的恒等式

1.1.3 函数极限计算

1. 当$x \to 0$时,$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(1+x)$.
2. 当$x \to 0$时,1-$(\cos x)^a \sim \frac{1}{2}ax^2, a \neq 0$, 如: 当$x \to 0$时, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, 1-\sqrt{\cos x} \sim \frac{1}{4}x^2$.
3. $(1+x)^{\frac{1}{x}} - e \sim -\frac{e}{2}x \quad (x \to 0^+)$
4. $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0(\beta, \alpha > 0)$
5. $\lim u^\nu = \lim \left\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)\nu} = \mathrm{e}^{\lim (u-1)\nu}$

题目

1. 设函数 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2+nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1+n\sin^2 \pi x}$，则 $f(x) =$___
2. 已知极限 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + xf(x)}{\sin x^3} = 0$，则 $\lim_{x \to 0} \frac{2+f(x)}{x^2} =$ ___。
3. 设函数$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$在$x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为$ax+bx^2+cx^3$, 则a, b, c为多少
4. 计算 $\lim_{x \to 0}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$

1.1.4 函数连续与间断

1. 判断连续性的 3 个条件: 极限存在，值存在，极限等于值. 其中极限存在是必须左右极限都存在且相等
2. 第一类间断点 (可去或跳跃)：存在有限的左、右极限，如 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}, x=0$
3. 第二类间断点 (无穷或振荡)：左、右极限至少有一个不存在或无穷大，如 $f(x) = \sin\frac{1}{x^2}, x=0$

题目

1. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

1.1.5 综合

- 1.4 函数 $f(x) = \lim_{t \to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()。

  (A) 连续

  (B) 有可去间断点

  (C) 有跳跃间断点

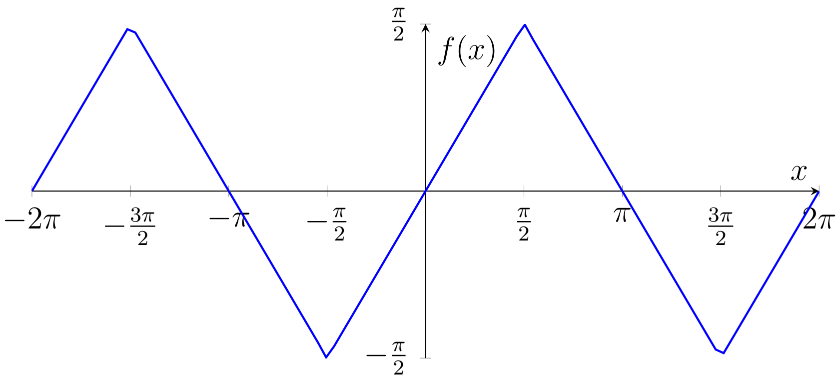
  (D) 有无穷间断点

- 1.6 设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，$x\in[0,1]$，定义函数列：

$$f_1(x)=f(x),\quad f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots,\quad f_n(x)=f[f_{n-1}(x)](n=1,2,3,\cdots),$$

  则 $f_n(x)=$ ____。

- 1.11 设 $f(x)=\arcsin(\sin x)$，画出 $f(x)$ 的图形。



- 1.12 求极限 $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$。
- 1.14 已知 $\lim_{x\to0}\left[a\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值。

1.2 数列极限

递推数列求极限

1. 收敛数列的任意子列也收敛
2. 二次平均数（二阶矩开根）大于等于算术平均数
3. $\sin x<x<\tan x\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$
4. $\arctan x<x<\arcsin x\quad(0<x<1)$
5. $\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}\quad(x>0)$
6. $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad(x>0)$
7. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}}$

题目

1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$, 其中 $a_1+a_2+\cdots+a_m$ 非负。

2. *** 设 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，求 $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n^2}$。

3. 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限。

4. (1) 证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内有唯一实根 a；

   (2) 设 $-1\le x_i\le 1$，定义 $x_{n+1}=\cos x_n$，$n=1,2,\cdots$，证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，且极限值就是 (1) 中的 a。

5. “存在正整数 N，当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le\frac{1}{n}$ 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()。

   (A) 充分不必要条件
   (B) 必要不充分条件
   (C) 充分必要条件
   (D) 既不充分也不必要条件

6. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a\ne 0$，则当 n 充分大时，有 ()。

   (A) $|a_n|>\frac{|a|}{2}$
   (B) $|a_n|<\frac{|a|}{2}$
   (C) $a_n>a-\frac{1}{n}$
   (D) $a_n<a+\frac{1}{n}$

7. 设$x_1=2, x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3(n=2,3,\cdots)$, 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$存在, 并求其值.

1.3 一元函数微分学概念

1. 可导必连续，连续不一定可导

2. 求函数在 0 处的导数时先判断奇偶 (求导奇偶互换)，若奇则 0

3. $[(\mathrm{e}^x-1)g(x)]'=\mathrm{e}^x g(x)+(\mathrm{e}^x-1)g'(x)$

4. 绝对值函数在零点不可导,

题目

1. 设 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}$，$x\in\mathbb{R}$，则 $f^{(4)}(0)=$ ________

2. 设 $f(x)$ 是二阶可导且以 2 为周期的奇函数，$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$，记 $M=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，

$$N=f'\left(\frac{3}{2}\right),\ K=f''(0).$$

则 ()。

(A) $M<N<K$
(B) $M>N>K$
(C) $M<K<N$
(D) $M>K>N$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则 $f(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的 ()。

(A) 充要条件
(B) 充分非必要条件
(C) 必要非充分条件
(D) 既非充分又非必要条件

4. 设函数

$$\begin{aligned}f_1(x)&=(x^2-1)|x^3+x^2-2x-2|,\\ f_2(x)&=(x^2-1)|x^3-2x^2-x+2|,\\ f_3(x)&=(x^2-1)|x^3+3x^2-2x-6|,\end{aligned}$$

将函数 $f_i(x)(i=1,2,3)$ 的不可导点个数记为 n_i，则 ()。

(A) $n_2<n_1<n_3$
(B) $n_1<n_2<n_3$
(C) $n_3<n_2<n_1$
(D) $n_2<n_3<n_1$

5. 设函数 $f(u)$ 可导，且 $y=f(x^2)$，当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=()$。

(A) -1
(B) 0.1
(C) 0.5
(D) 1

6. 3.2 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的 ()。# 用定义

   (A) 充分必要条件
   (B) 充分但非必要条件
   (C) 必要但非充分条件
   (D) 既非充分又非必要条件

7. 3.4 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$。当自变量有增量 Δx 时，函数 $y=f(x)$ 的增量为 Δy，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-dy$ 是 dy 的 ()。
   (A) 高阶无穷小
   (B) 低阶无穷小
   (C) 同阶非等价无穷小
   (D) 等价无穷小

8. 3.7 证明：(1) 若 $F(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$ 连续，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，当 $\lim_{x\to x_0^+}F'(x)=A$ 时，有 $F'_+(x_0)=A$；

   (2) 若 $F(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0](\delta>0)$ 连续，在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内可导，当 $\lim_{x\to x_0^-}F'(x)=A$ 时，有 $F'_-(x_0)=A$。

9. 3.8 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{\pi}{x}, & x<0,\\ A, & x=0,\\ ax^2+b, & x>0,\end{cases}$，求常数 A,a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$。

1.4 一元函数微分学计算

1. 多个乘法求导不好求时，可以尝试化成两项相乘

2. 分段点用导数的定义求导

3. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

5. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

7. $(\sec x)' = \sec x \tan x$

8. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

9. $(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

10. $(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

11. $y_x^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x_y^{'}}$

12. 反函数的二阶导数 $x_{yy}^{''} = -\frac{y_{xx}^{''}}{(y_x^{'})^3}$

13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^{'}}{F_y^{'}}$

14. 隐函数求二阶导时注意代入一阶导 y'

15. 莱布尼茨公式求高阶导 $uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

16. $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

题目

1. 设 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$，则当 $n \geq 3$ 时，$f^{(n)}(0) = (\quad)$。

   (A) $-\frac{n!}{n-2}$
   (B) $\frac{n!}{n-2}$
   (C) $-\frac{(n-2)!}{n}$
   (D) $\frac{(n-2)!}{n}$

2. 4.5 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内具有任意阶导数，且 $f'(x) = e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则当 $n \geq 1$ 时，

$$f^{(n)}(2) = \_\_$$

3. 4.7 已知 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $g(0) = g'(0) = 0$，设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

证明：$f(x)$ 的导函数在 $x=0$ 处连续。

1.5 一元函数微分学几何应用

1. 判断极值的第三充分条件
2. 一个可导点不可能同时是极值点和拐点
3. 不可导点，可能既是极值点，又是拐点
4. 多项式函数拐点和极值点个数判断:
5. $f(x)=x^2$ 图像凹，国内：下凸，凹； 国际：凸，convex
   - $\mathbf{k_1}$为$\mathbf{n_i=1}$的个数
   - $\mathbf{k_2}$为$\mathbf{n_i}$是偶数且$\mathbf{n_i\neq 1}$的个数
   - $\mathbf{k_3}$为$\mathbf{n_i}$是奇数且$\mathbf{n_i\neq 1}$的个数
   - 极值点个数为 $k_1+2k_2+k_3-1$
   - 极值点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2$
6. 渐近线的判断：铅直渐近线 $x=a$，水平渐近线 $y=b$，斜渐近线 $y=kx+b$，通过极限计算
7. 切线斜率的增量和弧长的增量比为平均曲率
8. 曲率公式 $k=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$
9. 曲率半径 $R=\frac{1}{k}$

题目

1. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则 ()。

   (A) $f(1)>f(-1)$ (B) $f(1)<f(-1)$ (C) $|f(1)|>|f(-1)|$ (D) $|f(1)|<|f(-1)|$
2. 判断 $y=|xe^{-x}|$在$x=0,$点$(0,0)$ 的极值点和拐点
3. 曲线 $f(x)=(x-1)^2(x-3)^3$ 的拐点个数为 ()。
4. 5.1 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$。若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 ()。

   (A) $f'(a)<0$ (B) $f'(a)>0$ (C) $f''(a)<0$ (D) $f''(a)>0$
5. 5.5 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 ____

1.6 一元函数微分学的应用

1. 费马定理
2. 平均值定理
3. 拉格朗日中值定理
4. 柯西中值定理
5. 介值定理
6. 罗尔定理，构造，部分题目需要多次构造
   (a) $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$
   (b) $[f(x)f'(x)]' = f(x)f''(x) + f'(x)^2$
   (c) $[f(x)e^{g(x)}]' = f'(x)e^{g(x)} + f(x)g'(x)e^{g(x)}$
   (d) $[f(x)/x]' = (f'(x)x - f(x))/x^2$
   (e) $[\frac{f(x)}{f'(x)}]' = \frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{f'(x)^2}$
   (f) $[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
7. 一族函数

题目

1.

设函数$f(x)$满足$f(0)=0$, 且当$x>0$时,$f(x)<0$,$f'(x)<0$,$f'(x)>0$, 则当$0<a<x<b$时, 有

(A)$xf(x)>af(a)$ (B)$bf(b)>xf(x)$ (C)$xf(a)>af(x)$ (D)$xf(b)>bf(x)$

2. 设函数 $f(x)$ 在 [0,1] 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 ( ).

(A) 当 $f'(x)<0$ 时 , $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(C) 当 $f'(x)>0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(B) 当 $f'\prime(x)<0$ 时 , $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(D) 当 $f'\prime(x)>0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 证明：在区间 (-1,1) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'''(\xi)=3$.

4. 若$3a^2-5b<0$, 则方程$x^5+2ax^3+3bx+4c=0$有几个实根

5. 证明$2^x - x^2 - 1 = 0$ 有且仅有三个根

6. 证明: $\left(\ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)^2 < \frac{1}{x(1+x)^2}(x > 0)$.

7. 6.6 已知 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续，在 (0,1) 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明：

   (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

   (2) 存在 $\eta, \tau \in (0, 1), \eta \neq \tau$, 使得 $f'(\eta)f'(\tau) = 1$.

8. 6.7 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $(0 < a < b)$, 在 (a, b) 内可导，且 $f(a) \neq f(b)$. 证明：存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(\eta)}{b+a}$.

9. 6.8 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数，c 是 (0,1) 内任意一点.

   (1) 写出 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式，

   (2) 证明 $|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

1.7 一元函数微分学的物理应用

1.8 一元函数积分学的概念

1. 0 到 1 的积分：$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$

2. 可导则连续则可积则有界

3. 广义积分可以用不等式放缩或比较判别判断敛散性

4. $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$,p>1 收敛，0<=p<=1 发散

5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$,p>1 发散，0<=p<=1 收敛

题目

1. 设可导函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的值域是 $[0, +\infty)$，$f(0) = 0$，$f'(x) > 0$，$x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数。记 $I = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b \varphi(y)dy$，常数 $a, b > 0$，当 $a < \varphi(b)$ 时，则（）。

   (A) $I > ab$

   (B) $I < ab$

(C) $I = ab$

(D) I 与 ab 的大小关系不确定

2. 设$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\mathrm{d}x, N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\mathrm{d}x$,则.

(A)M<1<N

(B)M<N<1

(C)N<M<1

(D)1<M<N

第 2 章

线性代数

第 3 章

概率论与数理统计