Суб-финслерова геометрия и выпуклая тригонометрия

Матвеев Сергей М3338

Зимняя школа по математике

1 Постановка задачи

Пусть дана плоскость $\mathbb{R}^2$ и фигура S_0, $l \to min, S = S_0$
Если мерить по евклиду, то ответ это просто круг, но давайте мерить расстояния по другому, то ответ может быть другим, например в L^1 это квадрат
Давайте научимся решать эту задачу, методами вариационного исчисления
У нас есть глобальное (неудобное ограничение), пусть мы нарисовали часть кривой, тогда ее длину мы можем посчитать сразу, а вот площадь нет, давайте действовать по другому
$l = (x(t), y(t)), t \in [0, 1]$
$\mathbb{R}^2$
$x(0) = x(1)$
$y(0) = y(1)$
По формуле Грина $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (xy' - x'y)dt = S_0$
$l = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}dt \to min$
$z(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t (x(s)y'(s) - x'(s)y(s))ds \Leftrightarrow z(0) = 0, z'(t) = \dfrac{1}{2}(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))$
$\mathbb{R}^3(x(t), y(t), z(t))$
$x(0) = x(1)$
$y(0) = y(1)$
$z(0) = z(1) = S_0$
$l = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}dt \to min$
$Z' = \dfrac{1}{2}(xy' - x'y)$ - неголономная связь
Мы рассматриваем кривые удолетворяющие условию: $a(x, y, z)x' + b(x, y, z)y' + c(x, y, z)z' = 0(*)$
Задача, когда $\forall A, B \in \mathbb{R}^3, \exists$ кривая (*) соединяющая и A и B
Суб-Риманова геометрия - у нас дано многообращие и в кадой точке у нас

есть касательное подпространство разрешенных направлений, а Финслерова означает, что мы мерием расстояние как-то по другому
Когда мы ищем минимум, у нас может быть их несколько (действительно, давайте просто придумаем дурацкие параметризации), давайте тогда перейдем к такой задаче
$\int_0^1 (x'^2 + y'^2)dt \to min$
Коши-Буняковского:
$f = \sqrt{x'^2 + y'^2}, g = 1 \int_0^1 fgdt \le (\int_0^1 f^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 g^2)^{\frac{1}{2}}$
$l \le \sqrt{E}, E \to min$
Кривая называется натурально параметризованной, если скорость в каждой точке является константой
У нас получается задача:
$\int_0^1 (x'^2 + y'^2)dt \to min$
$\frac{1}{2}\int_0^1 (xy' - x'y)dt = S_0$
Давайте напишем лаграндиан:
$\mathcal{L} = \lambda_0 \int_0^1 (x'^2 + y'^2)dt + \frac{\lambda_1}{2} \int_0^1 (xy' - x'y)dt - \lambda_1 S_0$
$\mathcal{L}' = 0$
Теперь начнем писать уравнение Эйлера-Лагранжа:
$\frac{d}{dt} L'_{x'} = L'_x$
$\frac{d}{dt} L'_{y'} = L'_y$
$L = \lambda_0(x'^2 + y'^2) + \frac{\lambda_1}{2}(xy' - x'y)$
$\frac{d}{dt}(2\lambda_0 x' - \frac{\lambda_1}{2} y) = \frac{\lambda_1}{2} y'$
$\frac{d}{dt}(2\lambda_0 y' + \frac{\lambda_1}{2} x) = -\frac{\lambda_1}{2} x'$
Тогда если решения существуют то они являются решениями системы:
$\begin{cases} 2\lambda_0 x'' = \lambda_1 y' \\ 2\lambda_0 y'' = -\lambda_1 x' \end{cases}$

1. Аномальный случай: $\lambda_0 = 0, \lambda_1 \ne 0$ $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = const, y(t) = const$ - скучно
2. $\lambda_0 \ne 0 \Rightarrow$ Б.о.о $\lambda_1 = \frac{1}{2}$
   $\begin{cases} x'' = \lambda_1 y' \\ y'' = -\lambda_1 x' \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = R\cos(\theta) \\ y' = R\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ R' = \dfrac{2x'x'' + 2y'y''}{2R} \\ \theta = \arctan(\dfrac{y'}{x'}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R' = x''\cos(\theta) + y''\sin(\theta) \\ \theta' = -\dfrac{1}{R}(y''\cos(\theta) - x''\sin(\theta)) \end{cases}$$

$$R' = \lambda_1 R\sin(\theta)\cos(\theta) + (-\lambda_1)R\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

$$\theta' = \frac{-1}{R}(-\lambda_1 R\cos^2(\theta) - \lambda_1 R\sin^2(\theta))$$

$$\begin{cases} R' = 0 \\ \theta' = \lambda_1 \end{cases}$$

$\theta = at = b$ и просто подставим

Пусть $\|\cdot\|$ - какая-то норма на $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} l \to min \\ S = S_0 \end{cases}$$

$$l = \int_0^1 \|(x'(t), y'(t))\| \, dt$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 (xy' - x'y)dt$$

$$E = \int_0^1 \|(x', y')\|^2 \, dt \to min$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 (xy' - x'y)dt = S_0$$

$$\mathcal{L} = \lambda_0 \int_0^1 \|(x', y')\|^2 \, dt + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 (xy' - x'y)dt - \lambda_1 S_0$$

$$L = \lambda_0 \|(x', y')\|^2 + \frac{\lambda_1}{2}(xy' - x'y)$$

$$\|x', y'\| = R$$

Теперь давайте посмотрим на общий случай:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(2\lambda_0 RR'_{x'} = \lambda_1 y') \\ \dfrac{d}{dt}(2\lambda_0 RR'_{y'} = -\lambda_1 x') \\ R = \|(x', y')\| \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x, y) : \|(x, y)\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\|(x, y)\|_1 = |x| = |y|$$

$$\|(x, y)\|_\infty = max(|x|, |y|)$$

$$\|(x, y)\|_e = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

$\alpha > 1$
$\|(x,y)\|_\alpha = (|x|^\alpha + |y|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

2 Выпуклая тригонометрия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - выпуклое компактное множество, $o \in int\Omega$
$\forall\theta \in [0, 2S(\Omega))$
$A_\theta = (\cos_\Omega \theta, \sin_\Omega \theta)$ если $\theta \notin [0, 2S(\Omega)) \Rightarrow$ периодическая с периодом $2S(\Omega)$
$\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \{(x,y)\}$
$\Omega^\circ \subset \mathbb{R}^{2*} = \{(p,q)\}$
Определение. Поляры.
$\Omega^\circ = \{(p,q) : \forall(x,y) \in \Omega, px + qy \leq 1\}$
Теорема. О биполяре
$\Omega-$ выпуклая, замкнутая и $o \in \Omega$, то $\Omega^{\circ\circ} = \Omega$
Доказательство
1. $\Omega \subset \Omega^{\circ\circ}$
$\forall(x,y) \in \Omega\ \forall(p,q) \in \Omega^\circ$
$px + qy \leq 1$
$\Omega^{\circ\circ} = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y} : \forall(p,q) \in \Omega\ \widetilde{x}p + \widetilde{y}q \leq 1)\}$
2. $\Omega^{\circ\circ} \backslash \Omega = \emptyset \Rightarrow (p,q) \in \Omega^\circ$
$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \notin \Omega^{\circ\circ}$

$B_\psi = (\cos_{\Omega^\circ} \psi, \sin_{\Omega^\circ} \psi)$
Определение
$\theta \leftrightarrow \theta^\circ$
Касательная в A_θ к Ω опр ед B_{θ° из Ω°
Теорема Пифагора
$\cos_\Omega \theta \cos_{\Omega^\circ} \psi + \sin_\Omega \theta \sin_{\Omega^\circ} \psi \leq 1$
Но $\cos_\Omega \theta \cos_{\Omega^\circ} \theta^\circ + \sin_\Omega \theta \sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ = 1$
$px + qy \leq 1$
Теорема о дифф
$\cos'_\Omega \theta = -\sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ$
$\sin'_\Omega \theta = \cos_{\Omega^\circ} \theta^\circ$
Давайте напишем полярную замену координат

$$\begin{cases} x = R\cos_\Omega \theta \\ y = R\sin_\Omega \theta \\ |J| = R \end{cases}$$

Если $(x(t), y(t))$ - некоторая кривая на $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$
$R' = ?, \theta' = ?$
$x' = R'\cos_\Omega \theta - R\theta' \sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ$
$y' = R'\sin_\Omega \theta + R\theta' \cos_{\Omega^\circ} \theta^c irc$
$R' = x'\cos_{\Omega^\circ} \theta' + y' \sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ$
$\theta' = \dfrac{1}{R}(y'\cos_\Omega \theta - x'\sin_\Omega \theta)$