

Комбинаторика представлений классических групп Ли

Матвеев Сергей М3338

Зимняя школа по математике

1 Введение в группы Ли

Определение. Группа Ли - группа + гладкое многообразие такое что $(a, b) \rightarrow ab; a \rightarrow a^{-1}$ - гладкие функции

Классические группы Ли

1) $G = GL_n$ - обратимые линейные преобразования \mathbb{C}^n

2) $G \subset GL_n (Av, Aw) = (v, w); \forall A \in G$

$O_n \sim (l_i, l_j) = \delta_{ij}$

$SO_n \det A = 1$

$()$ - симплективная форма

$n = 2m$

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, j = 2i \\ -1, i = 2j \\ 0 \end{cases}$$

$$S_{p_{2m}} \\ \mathbb{C}^{2m} = \mathbb{C} \oplus (\mathbb{C}^m)^+$$

G - группа Ли

V - представитель G , если \exists гладкий гомоморфизм групп:

$\rho : G \rightarrow GL(V)$

$v \in V$

$G \in Av := \rho(A)v$

$W \subset V$ - подпредставитель

$AW \subset W$

$\forall A \in G$

{подпредставитель V } = $\{\{0\}, V\} \Leftrightarrow V$ - неприводима

V, W - представители $V \otimes W$

$A(v \otimes w) = Av \otimes Aw$

$G \subset GL_n \rightarrow$ алгебра Ли $\mathcal{G} \subset \mathcal{GL}_n$ - все линейные преобразования \mathbb{C}^n

$\mathcal{G} = \{a \in \mathcal{H}_n, \exp a \subset G\}$

V - представление алгебры Ли $\Rightarrow \exists$ линейное отображение $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}(V)$

$\rho([a, b]) = [\rho(a), \rho(b)]$

V, W - представления $\mathcal{G} \Rightarrow V \otimes W$ - представление

$$a(v \otimes w) = (av) \otimes w + v \otimes (aw)$$

2 Комбинаторные объекты

Теорема имеется биекция Неприводимые, полиномиальные, представимые $GL_n \leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \lambda_i \geq \lambda_j, i < j$