Комбинаторное исчисление Шуберта

Матвеев Сергей M3338

Зимняя школа по математике

1 Геометрические аспекты

$Gr(k,n) = \{V \subset \mathbb{C}^n \ dim(B) = k\}$ - грасманиан
$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = \mathbb{C}^n$
$dimF_i = i$
$F_.$ - флаг
Можно просто думать про базис, где $E_i = spane_1, \dots, e_i$
Пусть есть два флага: $E_., F_.$
$max(0, i+j-n) \leq dim(E_i \cap F_j) \leq min(i,j)$
Для одинаковых флагов $dim(E_i \cap E_j) = min(i,j)$
$E_i = span(e_1, \dots, e_i)$
$F_j = span(e_n, e_{n-1}, \dots, e_{n-j+1})$ - тоже флаг
$dim(E_i \cap F_j) = max(0, i+j-n)$
Эти флаги называются флагами общего положения
$V \in Gr(k,m); e_1, \dots, e_n$ - базис $\mathbb{C}^n$
$M_{k\times n}, rank(M) = k$
$V(M)$ - эту матрица будет иметь вид, где в каждой строке есть единичка и после нее сколько-то нулей
Где в строке i будет $k - i + \lambda_i$ - ноль
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ - это разбиение / диаграмма Юнга
$F_.$ - флаг
Клетка Шуберта это $\Omega_\lambda(F_.) = \{V \in Gr(k,n) | pos(V, F_.) = \lambda\}$
$Gr(k,n) =$ разбиение λ - диаграмма в $k \times n - k$ $\Omega_\lambda(F_.)$
$Gr(2,4) = \Omega_0(F_.) \cup \Omega_1(F_.) \cup \Omega_2(F_.) \cup \Omega_{2^T}(F_.) \cup \Omega_3(F_.) \cup \Omega_4(F_.)$
$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots, \lambda_k$ - размер диаграммы
Утверждение $dim\Omega_\lambda(F_.) = k(n-k) - |\lambda|$
Или $codim\Omega_\lambda(F_.) = |\lambda|$
Количество нулей - $|\lambda| + k(k-1)$
Количество единиц - k
Тогда у нас остается $kn - (|\lambda| + (k-1)k) - k$ - позиций где мы можем расставить чиселки
Цикл Шуберта - $X_\lambda(F_.) = \overline{\Omega_\lambda(F_.)} = \perp\!\!\perp_{\mu \geq \lambda} \Omega_\mu(F_.)$
$\lambda'-$ это λ с дополнительным квадратиком, то есть у нас единичка переедет на одну ячейку вправо

$Gr(2,4), \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$, n $= 4$ - прямые в $\mathbb{C}^4$
E_2^i - плоскость в $\mathbb{C}^4$ которая содержит Λ_i и $\{0\}$
$E_\cdot^i$ - флаг E_1^i и E_3^i выбр (общего положения)
$X_1(E_\cdot^1) \cap X_1(E_\cdot^2) \cap X_1(E_\cdot^3) \cap X_1(E_\cdot^4)$ - это какое-то число элементов в $Gr(2,4)$
$X_1(E_\cdot^i)$ - это двухмерные плоскости которые пересекают λ_i
Получается $X_1(E_\cdot^1) \cap X_1(E_\cdot^2) \cap X_1(E_\cdot^3) \cap X_1(E_\cdot^4)$ - это количество прямых, которые пересекают $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$
$\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}$ - m диаграмм Юнга
$|\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(m)}|$
$E_\cdot^{(1)}, \dots, E_\cdot^{(m)}$ - флаги общего положения
Тогда возникает вопрос (Исчисление Шуберта), сколько точек в $(X_{\lambda^{(1)}}(E_\cdot^1) \cap \dots \cap X_{\lambda^{(m)}}(E_\cdot^m))$
λ, μ, η - три диаграммы в $k \times (n-k) : |\eta| = |\lambda| + |\mu|$
Коэффициент Литтлвуда-Ричардсона
$C_{\lambda,\mu}^{\eta} = \#(X_\lambda() \cap X_\mu() \cap X_\eta())$