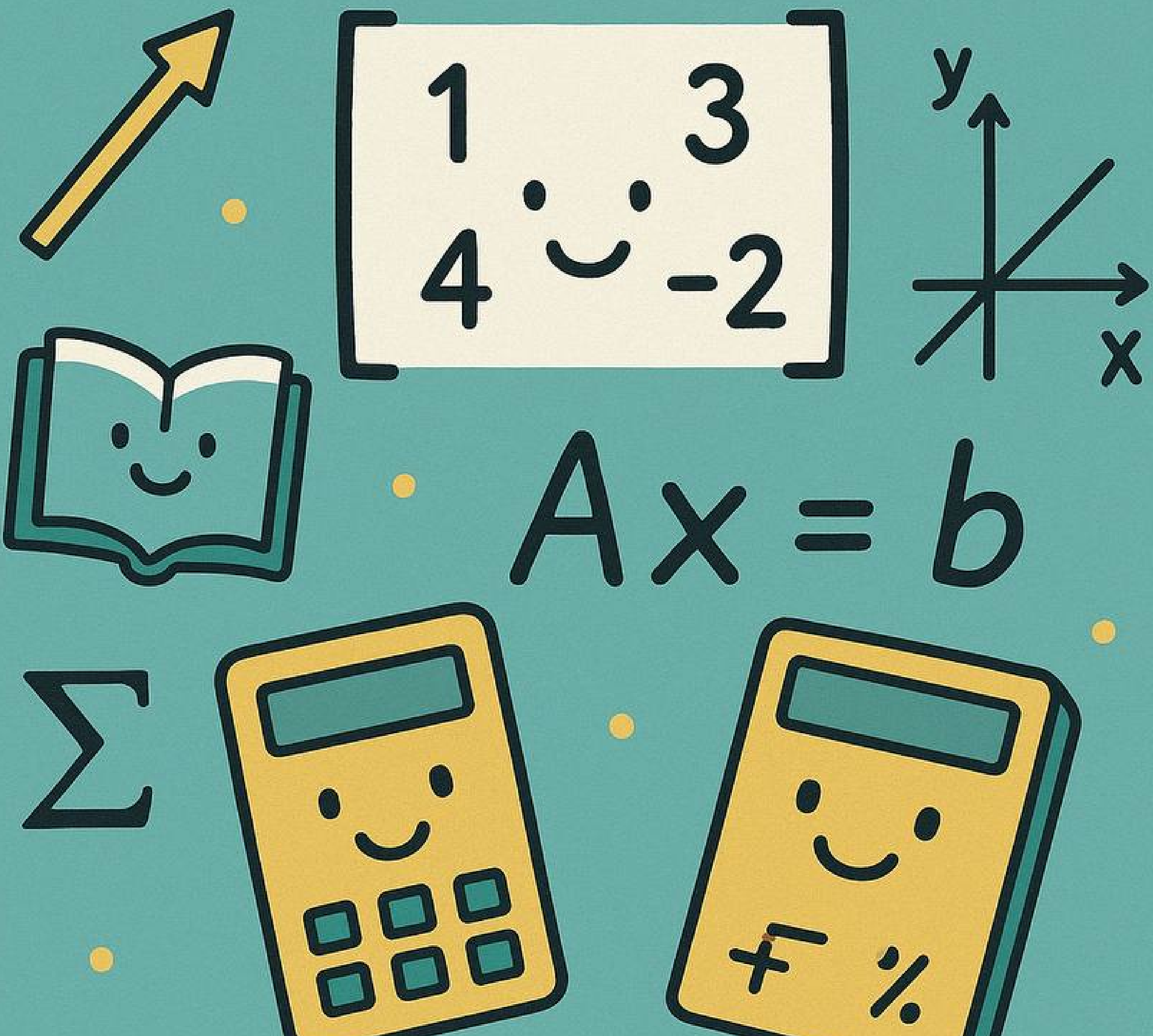
A Friendly Introduction to LINEAR ALGEBRA



A Friendly Introduction to Linear Algebra

Belajar Aljabar Linear dengan Cara yang Berbeda

Alwin
Sahira

31 Mei 2025

Penulis

Alwin

Universitas Indonesia
Depok, Indonesia

`alwinnear@gmail.com`

Sahira Almahira Kannajmi

Universitas Gadjah Mada
D.I. Yogyakarta, Indonesia

`almahira.sahira0123@gmail.com`

Buku ini merupakan hasil kolaborasi untuk memberikan pembelajaran Aljabar Linear yang lebih mudah dipahami.

Daftar Isi

Pengantar Ramah Aljabar Linear

Selamat datang, penjelajah matematika! Kamu sedang memulai petualangan yang akan mengubah cara kamu memandang angka, ruang, dan hubungan di sekitar kita. Aljabar Linear bukan sekadar kumpulan rumus yang harus dihafal—ini adalah bahasa universal yang digunakan untuk mendeskripsikan dunia, mulai dari efek visual di video game favoritmu hingga algoritma yang menentukan film apa yang muncul di beranda Netflix.

Mengapa Buku Ini Berbeda?

Buku ini dirancang dengan filosofi sederhana: **matematika adalah cerita**, bukan deretan simbol yang menakutkan. Setiap konsep akan kita mulai dari pertanyaan sederhana, visualisasi yang jelas, dan contoh-contoh yang bisa kamu temui dalam kehidupan sehari-hari. Alih-alih langsung terjun ke definisi formal, kita akan membangun intuisi terlebih dahulu, kemudian mengembangkannya menjadi pemahaman yang kuat dan aplikatif.

Peta Perjalanan: 10 Bab Menuju Penguasaan

Perjalanan kita terdiri dari 10 bab yang tersusun secara sistematis, dari fondasi dasar hingga aplikasi yang menakjubkan:

Bagian I: Fondasi Kokoh (Bab 1-3)

Bab 1 - Mengapa Aljabar Linear? Kita mulai dengan menjawab pertanyaan fundamental: "Untuk apa sih ini?" Melalui contoh gambar digital, optimasi sederhana, dan sistem persamaan dari kehidupan nyata, kamu akan melihat bahwa Aljabar Linear ada di mana-mana.

Bab 2 - Vektor: Besar dan Arah Berkenalan dengan "panah ajaib" yang punya informasi lengkap tentang besar dan arah. Dari gerak robot hingga kecepatan angin, vektor adalah cara kita mendeskripsikan dunia yang bergerak.

Bab 3 - Ruang Vektor: Span dan Basis Bagaimana sekumpulan vektor bisa "membangun" seluruh dimensi? Konsep span, kebebasan linear, dan basis akan membuka mata kamu tentang struktur matematika yang mendasari ruang di sekitar kita.

Bagian II: Alat-Alat Canggih (Bab 4-6)

Bab 4 - Sistem Persamaan dan Matriks Matriks bukan sekadar tabel angka—ini adalah cara yang sangat efisien untuk menyimpan dan memanipulasi informasi. Kita akan melihat bagaimana masalah nyata berubah menjadi sistem persamaan, lalu menjadi matriks.

Bab 5 - Operasi Baris Elementer & Eliminasi Gauss "Jurus-jurus sakti" untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan cara yang sistematis dan elegan. Ini adalah algoritma yang bahkan komputer gunakan!

Bab 6 - Transformasi Linear Bagaimana kita bisa memutar, mencerminkan, atau mengubah bentuk objek secara matematis? Transformasi linear adalah jembatan antara aljabar dan geometri yang akan membuka dunia grafik komputer, animasi, dan robotika.

Bagian III: Konsep Mendalam (Bab 7-8)

Bab 7 - Determinan & Matriks Invers Determinan memberitahu kita tentang "perubahan volume" setelah transformasi, sedangkan invers matriks adalah cara untuk "membatalkan" suatu transformasi. Konsep-konsep ini fundamental dalam banyak aplikasi.

Bab 8 - Eigenvalue & Eigenvector Konsep yang terdengar menakutkan ini sebenarnya tentang "arah-arah istimewa" yang tidak berubah saat ditransformasi. Ini adalah kunci di balik teknologi facial recognition, analisis getaran, dan banyak lagi.

Bagian IV: Aplikasi dan Eksplorasi (Bab 9-10)

Bab 9 - Aplikasi Dunia Nyata Saatnya melihat kekuatan sesungguhnya! Dari kompresi gambar JPG hingga sistem rekomendasi, kita akan membedah aplikasi-aplikasi menakjubkan dari konsep yang telah kita pelajari.

Bab 10 - Latihan & Eksplorasi Lanjutan Tantangan kreatif, proyek mini, dan soal-soal yang akan menguji sekaligus memperdalam pemahamanmu. Plus, petunjuk untuk menjelajahi topik-topik lanjutan.

Cara Terbaik Menggunakan Buku Ini

- **Jangan terburu-buru.** Setiap konsep dibangun di atas konsep sebelumnya. Pastikan kamu benar-benar memahami satu bab sebelum lanjut ke bab berikutnya.
- **Kerjakan latihan.** Matematika adalah olahraga—kamu tidak bisa jago hanya dengan membaca. Setiap latihan dirancang untuk memperkuat pemahaman dengan cara yang menyenangkan.
- **Visualisasikan.** Manfaatkan diagram dan gambar yang disediakan. Jika perlu, gambar ulang dengan tanganmu sendiri untuk memperkuat intuisi geometris.
- **Hubungkan dengan dunia nyata.** Setiap kali kamu menemukan konsep baru, tanyakan pada diri sendiri: "Di mana saya bisa menemukan ini dalam kehidupan sehari-hari?"
- **Bertanya dan bereksplorasi.** Jika ada yang tidak jelas, jangan langsung menyerah. Coba baca ulang bagian sebelumnya, kerjakan contoh sederhana, atau diskusikan dengan teman.

Pesan untuk Perjalanan

Aljabar Linear adalah salah satu cabang matematika paling indah dan aplikatif yang pernah ada. Konsep-konsepnya sederhana namun sangat kuat, dan aplikasinya tersebar di hampir setiap bidang—dari seni digital hingga kecerdasan buatan, dari ekonomi hingga fisika kuantum.

Yang terpenting, ingatlah bahwa setiap matematikawan hebat pernah menjadi pemula. Setiap konsep yang sekarang terasa sulit akan menjadi intuisi natural setelah kamu melatihnya dengan cukup. Nikmati prosesnya, rayakan setiap "aha moment", dan jangan takut untuk membuat kesalahan—kesalahan adalah bagian penting dari pembelajaran.

Selamat menjelajah! Mari kita mulai petualangan menakjubkan ini di Bab 1.

Kami menulis bukan karena kami tahu banyak — tapi karena kami ingin menyederhanakan apa yang sulit, agar kamu tidak perlu merasa sendirian saat belajar:)

Alwin & Sahira
Tim Penulis A Friendly Introduction to Linear Algebra

"The best way to learn mathematics is to do mathematics."
- Paul Halmos, matematikawan

Bab 1

Mengapa Aljabar Linear?

Selamat datang, para petualang matematika! Siap untuk menjelajah dunia baru yang seru dan penuh manfaat? Mungkin sebagian dari kalian mendengar kata "Aljabar Linear" dan langsung membayangkan rumus-rumus rumit dan konsep yang bikin pusing. Tenang saja! Buku ini akan menjadi teman baik kalian dalam perjalanan ini. Kita akan belajar Aljabar Linear dengan cara yang berbeda: lebih banyak cerita, lebih banyak gambar, dan yang paling penting, kita akan fokus untuk mengerti "mengapa" dan "bagaimana" sesuatu bekerja, bukan hanya menghafal.

Anggap saja Aljabar Linear ini seperti sebuah "bahasa" atau "alat super" canggih. Dengan bahasa ini, kita bisa menjelaskan banyak hal di dunia nyata, mulai dari bagaimana game di HP-mu menampilkan grafis yang keren, sampai bagaimana para ilmuwan menganalisis data untuk menemukan obat baru. Dengan alat super ini, kita bisa memecahkan masalah-masalah yang tadinya terlihat mustahil. Jadi, mari kita singkirkan dulu rasa takut atau bosan yang mungkin pernah muncul saat belajar matematika. Di sini, kita akan bersenang-senang sambil belajar!

1.1 Aljabar Linear dalam Keseharian Kita: Lebih Dekat dari yang Kamu Kira!

Mungkin kalian bertanya-tanya, "Memangnya Aljabar Linear ini dipakai di mana saja, sih? Apa gunanya buat saya yang masih SMA?" Percaya atau tidak, konsep-konsep Aljabar Linear ada di sekitar kita, bahkan sering kita gunakan tanpa sadar!

1.1.1 Gambar Digital: Dari Piksel ke Matriks Ajaib!

Pernahkah kamu penasaran bagaimana layar HP atau komputermu bisa menampilkan fotomu, video, atau gambar-gambar keren lainnya dengan begitu jelas? Rahasianya ada pada Aljabar Linear, lho!

Komputer sebenarnya tidak "melihat" gambar seperti kita. Ia melihat gambar sebagai kumpulan dari jutaan titik-titik super kecil yang disebut piksel. Setiap piksel ini memiliki warna tertentu. Nah, bagaimana komputer mengingat warna dari setiap piksel ini? Dengan angka!

Kumpulan angka-angka yang merepresentasikan warna dari semua piksel ini kemudian disusun rapi dalam sebuah "kotak" atau "tabel" besar yang disebut matriks. Matriks ini seperti peta yang memberi tahu komputer warna apa yang harus ditampilkan di setiap titik di layar.

- **Gambar Hitam Putih (Binary Image):** Ini jenis yang paling sederhana. Bayangkan gambar logo sekolahmu yang hanya terdiri dari warna hitam dan putih. Setiap piksel hitam bisa diwakili angka 0 dan setiap piksel putih dengan angka 1 (atau sebaliknya). Jadi, seluruh gambar logomu disimpan sebagai matriks yang isinya hanya angka 0 dan 1! Sebagai contoh, kalau kita punya gambar sederhana seperti huruf "L" pada grid 3×3, matriksnya bisa jadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Gambar Abu-abu (Grayscale Image):** Kalau gambarnya punya banyak gradasi abu-abu, seperti foto hitam putih zaman dulu? Setiap piksel diwakili angka antara 0 (untuk hitam pekat) sampai 255 (untuk putih bersih). Angka di antaranya menunjukkan tingkat keabu-abuan.

- **Gambar Berwarna (RGB Image):** Nah, ini yang paling sering kita lihat! Setiap warna pada piksel dibentuk dari campuran tiga warna dasar: Merah (Red), Hijau (Green), dan Biru (Blue). Jadi, untuk gambar berwarna, komputer biasanya menggunakan tiga matriks terpisah: satu untuk intensitas warna merah, satu untuk hijau, dan satu untuk biru. Setiap elemen dalam matriks ini juga bernilai antara 0-255. Ketika tiga matriks ini "ditumpuk", jadilah gambar berwarna yang kita lihat!

Lalu, apa hubungannya dengan Aljabar Linear? Operasi-operasi dalam Aljabar Linear (yang akan kita pelajari nanti, seperti penjumlahan matriks atau perkalian matriks) digunakan untuk melakukan banyak hal keren pada gambar digital. Misalnya, untuk mengubah kecerahan foto, menerapkan filter Instagram, memutar gambar, memperbesar atau memperkecil, bahkan untuk membuat efek spesial di film animasi dan video game! Jadi, setiap kali kamu edit foto, kamu sebenarnya sedang memanfaatkan kekuatan Aljabar Linear!

1.1.2 Memecahkan Masalah Nyata: Dari Belanjaan Ibu sampai Strategi Bisnis

Selain urusan gambar, Aljabar Linear juga jagoan dalam membantu kita mengambil keputusan dan memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Banyak situasi di mana kita punya sumber daya terbatas dan harus membuat pilihan terbaik.

Bayangkan seorang ibu rumah tangga yang ingin mengatur keuangan keluarga. Ia perlu mengelompokkan pengeluaran untuk kebutuhan pokok (makanan, transportasi, sewa rumah) dan keinginan (hiburan, baju baru). Dengan prinsip yang mirip dengan Aljabar Linear, ia bisa membuat anggaran agar semua kebutuhan terpenuhi tanpa boros.

Atau contoh lain, seorang pedagang kue ingin membuat dua jenis kue: cokelat dan keju. Ia punya persediaan tepung dan gula yang terbatas. Kue cokelat butuh sekian gram tepung dan sekian gram gula, sedangkan kue keju butuh jumlah yang berbeda. Pedagang ini ingin tahu, berapa banyak masing-masing kue harus ia buat agar untungnya paling besar, tapi bahan bakunya tidak sampai habis atau kurang? Nah, masalah seperti ini bisa dimodelkan dan dipecahkan dengan Aljabar Linear! Kita bisa menentukan kombinasi produksi yang optimal.

Bahkan dalam skala yang lebih besar, misalnya dalam menentukan harga tiket pesawat yang berubah-ubah tergantung waktu pemesanan dan ketersediaan kursi, atau bagaimana perusahaan mengalokasikan sumber daya (tenaga kerja, mesin, bahan baku) untuk berbagai proyek agar efisien, semuanya melibatkan sistem yang kompleks di mana banyak faktor saling terkait. Aljabar Linear menyediakan alat untuk menganalisis keterkaitan ini dan mencari solusi terbaik.

Intinya, Aljabar Linear membantu kita memahami sistem di mana ada banyak variabel (hal yang nilainya bisa berubah) yang saling mempengaruhi. Dengan mengubah masalah nyata menjadi model matematika, kita bisa menggunakan kekuatan Aljabar Linear untuk menemukan jawaban.

1.2 Pintu Gerbang Aljabar Linear: Sistem Persamaan Linear (SPL)

Salah satu "pintu masuk" paling umum dan fundamental untuk belajar Aljabar Linear adalah melalui sesuatu yang mungkin sudah pernah kalian singgung sedikit di SMP: Sistem Persamaan Linear atau sering disingkat SPL.

Apa itu SPL? Secara sederhana, SPL adalah sekumpulan dua atau lebih persamaan linear yang melibatkan variabel-variabel yang sama. "Linear" artinya pangkat tertinggi dari setiap variabelnya adalah satu (tidak ada x^2 atau y^3). Tujuan kita adalah mencari nilai-nilai untuk variabel-variabel tersebut yang bisa memenuhi semua persamaan dalam sistem itu secara bersamaan.

Yuk, kita lihat bagaimana SPL muncul dari masalah sehari-hari dan bagaimana cara menyelesaikannya!

1.2.1 Contoh Kasus 1: Misteri Harga Apel dan Jeruk

Mari kita pecahkan sebuah misteri belanja buah-buahan menggunakan SPL!

Soal Naratif

Dina membeli 2 kg apel dan 3 kg jeruk dengan total harga Rp61.000. Di toko buah yang sama, Rian membeli 1 kg apel dan 2 kg jeruk dengan total harga Rp37.000. Berapakah harga 1 kg apel dan harga 1 kg jeruk di toko tersebut?

Model Matematis: Menerjemahkan Cerita ke Bahasa Matematika

Langkah pertama seorang detektif matematika adalah mengubah cerita ini menjadi bentuk persamaan. Kita perlu "kode" atau simbol untuk harga apel dan harga jeruk yang belum kita ketahui.

- Misalkan harga 1 kg apel adalah x rupiah.
- Misalkan harga 1 kg jeruk adalah y rupiah.

Mengapa kita menggunakan x dan y? Ini adalah variabel, yaitu simbol yang mewakili nilai yang belum kita ketahui dan ingin kita cari.

Sekarang, kita terjemahkan informasi dari belanjaan Dina dan Rian:

- Belanjaan Dina: 2 kg apel ($2x$) dan 3 kg jeruk ($3y$) totalnya Rp61.000. Persamaannya: $2x + 3y = 61000$ (Persamaan 1)

- Belanjaan Rian: 1 kg apel ($1x$ atau x) dan 2 kg jeruk ($2y$) totalnya Rp37.000. Persamaannya: $x + 2y = 37000$ (Persamaan 2)

Tada! Kita sekarang punya dua persamaan linear dengan dua variabel (x dan y). Inilah yang disebut Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV). Tugas kita adalah mencari nilai x dan y yang benar untuk kedua persamaan ini.

Langkah Penyelesaian: Membongkar Misteri Harga dengan Eliminasi

Ada beberapa cara untuk menyelesaikan SPLDV, salah satunya adalah metode eliminasi. Tujuan metode eliminasi adalah "menghilangkan" salah satu variabel untuk sementara, sehingga kita bisa menemukan nilai variabel lainnya.

Menyamakan Koefisien Salah Satu Variabel Kita lihat koefisien (angka di depan variabel) dari x dan y.

Persamaan 1: $2x + 3y = 61000$

Persamaan 2: $x + 2y = 37000$

Agar bisa mengeliminasi x, koefisien x di kedua persamaan harus sama (atau berlawanan tanda). Lebih mudah menyamakan koefisien x pada Persamaan 2 menjadi 2, seperti pada Persamaan 1. Caranya, kalikan seluruh Persamaan 2 dengan 2:

Persamaan 2 dikali 2: $(x + 2y = 37000) \times 2 \Rightarrow 2x + 4y = 74000$ (Persamaan 2 Baru)

Mengapa dikalikan? Agar koefisien x sama, sehingga saat kita kurangkan kedua persamaan, variabel x akan "hilang".

Mengeliminasi Variabel x Sekarang kita punya:

Persamaan 1: $2x + 3y = 61000$

Persamaan 2 Baru: $2x + 4y = 74000$

Kurangkan Persamaan 1 dari Persamaan 2 Baru (atau sebaliknya, hasilnya akan sama hanya beda tanda di awal):

$$\begin{aligned}
(2x + 4y) - (2x + 3y) &= 74000 - 61000 \\
2x + 4y - 2x - 3y &= 13000 \\
y &= 13000
\end{aligned}$$

Aha! Kita temukan harga 1 kg jeruk (y) adalah Rp13.000.

Mencari Variabel x (Substitusi) Setelah nilai y ketemu, kita bisa masukkan (substitusikan) nilai $y = 13000$ ini ke salah satu persamaan awal untuk mencari x. Pilih persamaan yang terlihat lebih sederhana, misalnya Persamaan 2 (yang asli):

$$\begin{aligned}
x + 2y &= 37000 \\
x + 2(13000) &= 37000 \\
x + 26000 &= 37000 \\
x &= 37000 - 26000 \\
x &= 11000
\end{aligned}$$

Ketemu! Harga 1 kg apel (x) adalah Rp11.000.

Mengapa mensubstitusi nilai yang sudah ketemu? Untuk menggunakan informasi yang sudah kita dapat (harga jeruk) untuk menemukan informasi yang belum diketahui (harga apel) dari salah satu hubungan awal yang kita punya.

Ringkasan Hasil dan Pengecekan

Jadi, harga 1 kg apel adalah Rp11.000 dan harga 1 kg jeruk adalah Rp13.000.

Pentingnya Pengecekan Selalu baik untuk mengecek jawaban kita ke kedua persamaan awal untuk memastikan tidak ada kesalahan hitung.

- Persamaan 1 (Dina): $2(11000) + 3(13000) = 22000 + 39000 = 61000$. Cocok!
- Persamaan 2 (Rian): $1(11000) + 2(13000) = 11000 + 26000 = 37000$. Cocok!

Catatan Tambahan:

- Mengapa langkah ini penting? Menyelesaikan SPL adalah keterampilan dasar dalam Aljabar Linear yang digunakan untuk memecahkan berbagai masalah yang jauh lebih kompleks, dari analisis rangkaian listrik hingga optimasi dalam bisnis.
- Kesalahan umum yang sering terjadi: Salah tanda saat mengurangkan persamaan, atau salah hitung saat mengalikan persamaan dengan konstanta. Jadi, ketelitian sangat penting!
- Tips mudah mengingat ini: Selalu tulis ulang persamaan dengan rapi setiap kali kamu melakukan operasi. Jika perlu, gunakan warna berbeda untuk menandai variabel yang ingin dieliminasi.

1.2.2 Contoh Kasus 2: Menentukan Komposisi Larutan Kimia

Sekarang, mari kita lihat contoh lain yang sedikit berbeda, yaitu menentukan komposisi suatu campuran.

Soal Naratif

Seorang laboran ingin membuat 100 ml larutan dengan konsentrasi zat aktif sebesar 24%. Ia memiliki dua jenis larutan stok: Larutan A dengan konsentrasi zat aktif 10% dan Larutan B dengan konsentrasi zat aktif 30%. Berapa mililiter masing-masing Larutan A dan Larutan B yang harus dicampurkan?

Model Matematis

Kita perlu menentukan volume masing-masing larutan yang dibutuhkan.

- Misalkan volume Larutan A yang dibutuhkan adalah a ml.
- Misalkan volume Larutan B yang dibutuhkan adalah b ml.

Dari soal, kita tahu dua hal:

- Total volume larutan yang ingin dibuat adalah 100 ml: $a + b = 100$ (Persamaan 1)
- Total kandungan zat aktif dalam campuran adalah 24% dari 100 ml, yaitu $0.24 \times 100 = 24$ ml. Kandungan zat aktif dari Larutan A adalah 10% dari a, yaitu $0.10a$. Kandungan zat aktif dari Larutan B adalah 30% dari b, yaitu $0.30b$. Jadi, total zat aktif: $0.10a + 0.30b = 24$ (Persamaan 2)

Kita mendapatkan SPLDV:

1. $a + b = 100$
2. $0.10a + 0.30b = 24$

Langkah Penyelesaian: Membongkar Komposisi dengan Substitusi

Kali ini, kita coba gunakan metode substitusi.

Ekspresikan Satu Variabel dalam Variabel Lain Dari Persamaan 1, kita bisa dengan mudah mengubahnya menjadi ekspresi untuk a (atau b). Misal, kita buat a dalam bentuk b:

$a = 100 - b$ (Persamaan 1 Modifikasi)

Mengapa ini dilakukan? Untuk menggantikan a di Persamaan 2 dengan ekspresi yang hanya mengandung variabel b, sehingga Persamaan 2 menjadi persamaan dengan satu variabel saja yang lebih mudah dipecahkan.

Substitusikan ke Persamaan Lain Masukkan ekspresi $a = 100 - b$ ke dalam Persamaan 2:

$$\begin{aligned}
0.10(100 - b) + 0.30b &= 24 \\
10 - 0.10b + 0.30b &= 24 \quad \text{(sifat distributif perkalian)} \\
10 + 0.20b &= 24 \\
0.20b &= 24 - 10 \\
0.20b &= 14 \\
b &= \frac{14}{0.20} = \frac{1400}{20} = 70
\end{aligned}$$

Jadi, volume Larutan B yang dibutuhkan adalah 70 ml.

Mencari Variabel a Substitusikan nilai $b = 70$ kembali ke Persamaan 1 Modifikasi:

$$\begin{aligned}
a &= 100 - b \\
a &= 100 - 70 \\
a &= 30
\end{aligned}$$

Jadi, volume Larutan A yang dibutuhkan adalah 30 ml.

Ringkasan Hasil dan Pengecekan

Dibutuhkan 30 ml Larutan A dan 70 ml Larutan B.

- Total volume: $30 \text{ ml} + 70 \text{ ml} = 100 \text{ ml}$. (Cocok dengan permintaan soal)
- Total zat aktif: $(0.10 \times 30) + (0.30 \times 70) = 3 \text{ ml} + 21 \text{ ml} = 24 \text{ ml}$. (Cocok, karena 24% dari 100 ml adalah 24 ml)

> **Tips untuk desimal:** Jika kamu tidak suka bekerja dengan desimal, kamu bisa mengalikan seluruh Persamaan 2 dengan 100 (atau 10, tergantung jumlah angka di belakang koma) untuk menghilangkan desimalnya.
> Persamaan 2: $0.10a + 0.30b = 24$
> Dikalikan 100: $10a + 30b = 2400$.
> Ini mungkin lebih mudah dihitung bagi sebagian orang.

Kedua contoh di atas menunjukkan bagaimana masalah sehari-hari dapat diterjemahkan menjadi sistem persamaan linear. Kemampuan untuk membuat model matematika ini adalah langkah awal yang sangat penting sebelum kita bisa menggunakan "alat super" Aljabar Linear.

Tabel 1.1: Dari Cerita ke Matematika: Contoh Pemodelan SPLDV

Informasi dari Soal Cerita	**Variabel yang Digunakan**	**Persamaan Matematika yang Terbentuk**
Contoh 1: Apel dan Jeruk		
Dina: 2 kg apel, 3 kg jeruk, total Rp61.000	x = harga 1 kg apel y = harga 1 kg jeruk	$2x + 3y = 61000$
Rian: 1 kg apel, 2 kg jeruk, total Rp37.000	(variabel sama)	$x + 2y = 37000$
Contoh 2: Campuran Larutan		
Total volume campuran 100 ml	a = volume Larutan A b = volume Larutan B	$a + b = 100$
Larutan A 10% zat aktif, Larutan B 30% zat aktif, campuran akhir 24% zat aktif (dari 100 ml)	(variabel sama)	$0.10a + 0.30b = 24$

Melihat bagaimana cerita diubah menjadi baris-baris persamaan dalam tabel ini dapat membantu memperjelas proses pemodelan. Seringkali, bagian tersulit bukanlah menyelesaikan persamaannya, melainkan menerjemahkan masalah nyata ke dalam bahasa matematika yang tepat.

1.3 Latihan Reflektif dan Pemodelan Awal

Sekarang giliranmu untuk sedikit merenung dan mencoba!

1.3.1 Pertanyaan Reflektif

1. Pernahkah kamu mengalami situasi di kehidupan sehari-hari yang mirip dengan contoh-contoh di atas, di mana kamu harus mencari tahu nilai beberapa hal yang saling terkait? Coba ceritakan singkat.

2. Menurutmu, apa saja variabel (hal yang nilainya berubah-ubah atau tidak diketahui) dan informasi (data pasti) dalam situasi yang kamu ceritakan tadi yang bisa dimodelkan secara matematis?

3. Mengapa kemampuan menerjemahkan masalah sehari-hari ke dalam model matematika itu penting menurutmu, bahkan jika kamu tidak berencana menjadi ilmuwan atau insinyur?

Meluangkan waktu untuk refleksi seperti ini membantu kita menghubungkan apa yang dipelajari dengan pengalaman pribadi. Ini membuat matematika terasa lebih hidup dan relevan, bukan sekadar kumpulan angka dan simbol. Kemampuan pemodelan ini sebenarnya adalah bentuk dari problem solving yang berguna di banyak bidang.

1.3.2 Latihan Dasar Pemodelan

Untuk latihan berikut, kamu tidak perlu menyelesaikan sistem persamaannya. Cukup tuliskan model matematikanya saja (sistem persamaannya).

1. Harga 5 buku tulis dan 2 pensil adalah Rp27.000. Harga 3 buku tulis dan 3 pensil adalah Rp22.500. Jika harga 1 buku tulis adalah b rupiah dan harga 1 pensil adalah p rupiah, tuliskan sistem persamaan linearnya!

2. Jumlah dua buah bilangan adalah 75. Selisih kedua bilangan itu (bilangan yang lebih besar dikurangi bilangan yang lebih kecil) adalah 15. Jika bilangan pertama adalah x dan bilangan kedua adalah y (dengan $x > y$), tuliskan sistem persamaan linearnya!

Di bab berikutnya, kita akan berkenalan dengan konsep lain yang sangat fundamental dalam Aljabar Linear, yaitu vektor. Siap untuk petualangan selanjutnya?

Bab 2

Vektor - Besar dan Arah

Selamat melanjutkan petualangan kita di dunia Aljabar Linear! Di Bab 1, kita sudah melihat bagaimana sistem persamaan linear bisa membantu memecahkan masalah sehari-hari. Sekarang, kita akan berkenalan dengan salah satu "aktor utama" dalam Aljabar Linear, yaitu vektor. Mungkin kata "vektor" terdengar asing atau malah mengingatkan pada pelajaran Fisika. Jangan khawatir, kita akan memulainya dari yang paling dasar dan intuitif!

2.1 Apa Itu Vektor? Lebih dari Sekadar Angka!

Bayangkan kamu sedang bermain game petualangan di HP. Karaktermu ingin bergerak dari satu titik ke titik lain. Untuk memberi perintah pada karakter itu, tidak cukup hanya memberitahu "seberapa jauh" ia harus bergerak. Kamu juga perlu memberitahu "ke mana arah" ia harus bergerak, kan? Nah, informasi yang memuat "seberapa jauh" (besar) dan "ke mana arah" inilah yang disebut vektor.

2.1.1 Vektor sebagai Panah Ajaib: Intuisi Awal

Cara paling mudah untuk membayangkan vektor adalah sebagai sebuah panah.

Gambar 2.1: Vektor sebagai panah dengan pangkal dan ujung

Panah ini punya dua ciri penting:

1. **Panjang Panah:** Menunjukkan besar (magnitude) dari vektor tersebut. Semakin panjang panahnya, semakin besar nilainya. Misalnya, jika vektor mewakili kecepatan, panah yang lebih panjang berarti kecepatan yang lebih tinggi. Jika mewakili perpindahan, panah yang lebih panjang berarti jarak perpindahan yang lebih jauh.
2. **Arah Panah:** Menunjukkan arah ke mana vektor itu menunjuk. Ini bisa berupa arah mata angin (Timur, Barat Laut), arah gerakan (maju, mundur, ke atas), atau arah dalam sistem koordinat.

Jadi, vektor bukan sekadar angka biasa (yang hanya punya besar, seperti suhu 25 derajat Celcius, atau massa 5 kg - besaran seperti ini disebut skalar). Vektor adalah besaran yang punya besar DAN arah. Memahami ini adalah kunci awal untuk mengerti konsep vektor.

2.1.2 Vektor di Sekitar Kita: Angin, Gerak, dan Posisi

Konsep vektor ini sebenarnya sangat sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, terutama dalam ilmu Fisika dan navigasi.

- **Arah dan Kecepatan Angin:** Ketika pembawa acara prakiraan cuaca mengatakan, "Angin bertiup dengan kecepatan 15 km/jam ke arah Tenggara," informasi ini adalah sebuah vektor. "15 km/jam" adalah besarnya, dan "Tenggara" adalah arahnya.
- **Gerak Mobil atau Pesawat:** Sebuah mobil bergerak 50 km ke Timur, lalu berbelok dan bergerak 30 km ke Utara. Setiap segmen perjalanan ini (50 km ke Timur, 30 km ke Utara) dapat direpresentasikan sebagai vektor. Pesawat yang terbang dari satu kota ke kota lain juga mengalami perpindahan yang merupakan vektor.
- **Perpindahan Posisi:** Bayangkan kamu berjalan dari tempat dudukmu menuju pintu kelas. Perpindahan posisimu dari kursi ke pintu adalah sebuah vektor. Ia memiliki jarak (besar) dan arah tertentu.
- **Gaya:** Ketika kamu mendorong meja, kamu memberikan gaya pada meja tersebut. Gaya ini memiliki kekuatan (besar) dan arah dorongan. Jadi, gaya juga merupakan besaran vektor.

Banyak sekali besaran fisika lainnya yang merupakan vektor, seperti percepatan, momentum, medan listrik, dan medan magnet. Dengan memahami vektor, kita bisa mendeskripsikan dan menganalisis fenomena-fenomena ini dengan lebih baik. Ini menunjukkan bahwa vektor bukan hanya konsep matematika abstrak, tetapi alat yang sangat berguna untuk memahami dunia di sekitar kita.

2.2 Bermain dengan Vektor: Operasi Dasar

Setelah kenalan dengan apa itu vektor, sekarang saatnya kita coba "bermain-main" dengannya. Apa yang terjadi kalau dua vektor atau lebih digabungkan? Bagaimana kalau ukuran sebuah vektor diubah? Mari kita selidiki operasi-operasi dasar pada vektor.

2.2.1 Menjumlahkan Vektor 2D: Petualangan dari Rumah ke Toko, Lalu ke Sekolah

Misalkan kamu melakukan perjalanan berantai: pertama dari Rumah (R) ke Toko (T), lalu dari Toko (T) ke Sekolah (S).

- Perjalanan dari Rumah ke Toko bisa kita wakili dengan vektor $\vec{RT}$ (panah dari R ke T).

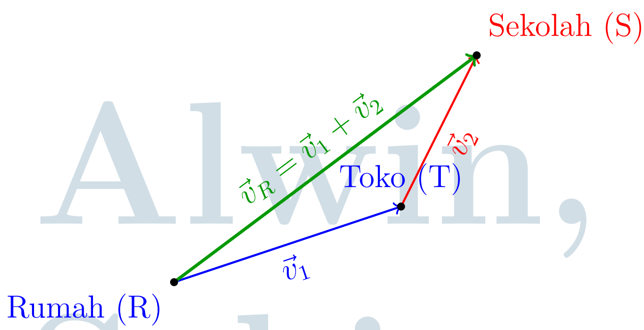
- Perjalanan dari Toko ke Sekolah bisa kita wakili dengan vektor $\vec{TS}$ (panah dari T ke S).

Jika kita ingin tahu perpindahan totalmu dari Rumah langsung ke Sekolah, itu sama saja dengan menjumlahkan kedua vektor perjalanan tadi: $\vec{RS} = \vec{RT} + \vec{TS}$. Vektor $\vec{RS}$ ini disebut vektor resultan atau hasil penjumlahan vektor.

Menggambar Penjumlahan Vektor (Metode Segitiga atau Tip-to-Tail)

Cara menggambarnya mudah:

1. Gambar vektor pertama ($\vec{RT}$).
2. Lalu, dari ujung vektor pertama (titik T), gambarlah vektor kedua ($\vec{TS}$).
3. Vektor hasil penjumlahannya ($\vec{RS}$) adalah panah yang ditarik dari pangkal vektor pertama (titik R) ke ujung vektor kedua (titik S).



Gambar 2.2: Penjumlahan vektor menggunakan metode segitiga

Metode ini sering disebut metode "ujung-ke-pangkal" (tip-to-tail) atau metode segitiga karena ketiga vektor tersebut membentuk segitiga.

Representasi Vektor dalam Koordinat (x, y)

Selain dengan gambar, kita juga bisa menyatakan vektor menggunakan angka dalam sistem koordinat. Ini disebut komponen vektor.

Misalkan titik Rumah (R) adalah titik asal (0,0).

- Jika untuk pergi dari Rumah $(0, 0)$ ke Toko (T) kamu bergerak 3 satuan ke kanan (sumbu x positif) dan 1 satuan ke atas (sumbu y positif), maka koordinat Toko (T) adalah $(3, 1)$. Vektor $\vec{v}_1 = \vec{RT}$ bisa ditulis sebagai:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Angka 3 adalah komponen x, dan angka 1 adalah komponen y. Kita menggunakan notasi matriks kolom seperti ini.

- Kemudian, dari Toko $(3, 1)$ ke Sekolah (S). Misalkan Sekolah (S) berada di koordinat $(4, 3)$. Maka, pergerakan dari T ke S adalah:

  - Perubahan x: $4 - 3 = 1$ (1 satuan ke kanan)
  - Perubahan y: $3 - 1 = 2$ (2 satuan ke atas)

Jadi, vektor $\vec{v}_2 = \vec{TS}$ bisa ditulis sebagai:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Langkah Hitung Penjumlahan Vektor (Penjumlahan Komponen)

Untuk menjumlahkan dua vektor secara aljabar (menggunakan angka), kita cukup menjumlahkan komponen-komponen yang bersesuaian (komponen x dengan komponen x, komponen y dengan komponen y):

$$\vec{v}_R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Interpretasi Hasil

Hasil penjumlahan $\vec{v}_R = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ berarti perpindahan total dari Rumah ke Sekolah adalah 4 satuan ke kanan dan 3 satuan ke atas. Jika Rumah ada di $(0, 0)$, maka Sekolah ada di $(4, 3)$, yang sesuai dengan koordinat S pada gambar kita. Jadi, penjumlahan vektor itu seperti mencari "jalan pintas" atau perpindahan efektif dari serangkaian pergerakan.

Catatan Tambahan:

- Mengapa langkah ini penting? Penjumlahan vektor adalah dasar untuk memahami bagaimana berbagai pengaruh (seperti gaya-gaya yang bekerja pada satu benda, atau beberapa kecepatan yang dialami benda) bergabung menjadi satu hasil akhir.
- Kesalahan umum: Salah menjumlahkan komponen (misalnya, komponen x dari vektor pertama dijumlahkan dengan komponen y dari vektor kedua). Ingat, selalu jumlahkan komponen yang sejenis: x dengan x, y dengan y!

2.2.2 Mengubah Ukuran Vektor: Perkalian Skalar

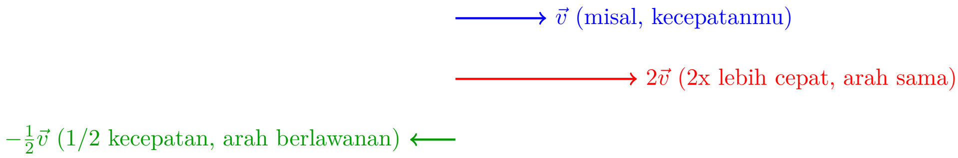
Sekarang, bagaimana jika kita ingin mengubah "ukuran" atau panjang sebuah vektor, tapi arahnya tetap sama atau berlawanan? Di sinilah perkalian skalar berperan. Ingat, skalar adalah angka biasa (bukan vektor).

Narasi Visual

- Misalkan kamu berlari ke arah Timur. Kecepatan larimu bisa diwakili oleh vektor $\vec{v}$.

- Jika temanmu berlari ke arah Timur juga, tetapi dua kali lebih cepat darimu, maka vektor kecepatannya adalah $2\vec{v}$. Panjang panahnya menjadi dua kali lipat dari $\vec{v}$, tetapi arahnya tetap sama (Timur).
- Jika ada orang lain berjalan santai ke arah yang berlawanan (Barat) dengan setengah dari kecepatanmu, vektor kecepatannya bisa ditulis sebagai $-\frac{1}{2}\vec{v}$. Panjang panahnya menjadi setengah dari $\vec{v}$, dan arahnya berbalik 180 derajat (karena ada tanda negatif).

Angka 2 dan $-\frac{1}{2}$ dalam contoh ini adalah skalar.



Gambar 2.3: Perkalian skalar dengan vektor

Representasi Vektor dalam Koordinat (x, y)

Misalkan vektor kecepatan awalmu $\vec{v}$ adalah 2 satuan ke kanan (Timur) dan 0 satuan ke atas/bawah:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Langkah Hitung Perkalian Skalar (Perkalian Skalar dengan Komponen)

Untuk mengalikan sebuah vektor dengan skalar, kita kalikan setiap komponen vektor tersebut dengan skalar itu.

- Untuk $2\vec{v}$:
$$2\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 \\ 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- Untuk $-\frac{1}{2}\vec{v}$:
$$-\frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}) \times 2 \\ (-\frac{1}{2}) \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpretasi Hasil

- $2\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$: Kecepatan menjadi 4 satuan ke kanan (dua kali lipat dari 2 satuan), arah tetap.
- $-\frac{1}{2}\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$: Kecepatan menjadi 1 satuan ke kiri (setengah dari 2 satuan, dan arah berlawanan karena komponen x menjadi negatif), arah y tetap 0.

Jadi, perkalian skalar itu seperti "memperbesar" atau "memperkecil" panjang vektor. Jika skalarnya positif, arah vektor tetap. Jika skalarnya negatif, arah vektor berbalik 180 derajat. Jika skalar antara -1 dan 1 (tapi bukan 0), vektornya memendek. Jika skalar lebih besar dari 1 atau lebih kecil dari -1, vektornya memanjang.

Tips mudah:

- Skalar positif ($k > 0$) $\Rightarrow$ arah sama, panjang berubah.
- Skalar negatif ($k < 0$) $\Rightarrow$ arah berlawanan, panjang berubah.
- Skalar $k = 0 \Rightarrow$ hasilnya vektor nol $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Perkalian skalar ini akan sangat penting saat kita membahas kombinasi linear di bab berikutnya, di mana kita "mencampur" beberapa vektor dengan "takaran" skalar yang berbeda-beda.

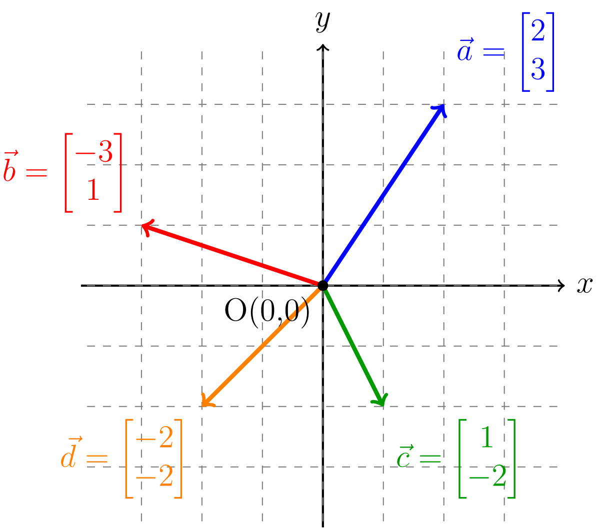
2.2.3 Vektor dalam Peta Koordinat (x, y)

Seperti yang sudah kita singgung, vektor pada bidang dua dimensi (2D) dapat direpresentasikan sebagai pasangan angka (x, y) atau, yang lebih umum kita gunakan dalam Aljabar Linear, dalam bentuk matriks kolom:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- x adalah komponen horizontal (seberapa jauh pergerakan ke kanan jika positif, atau ke kiri jika negatif).
- y adalah komponen vertikal (seberapa jauh pergerakan ke atas jika positif, atau ke bawah jika negatif).

Mari kita lihat beberapa contoh vektor yang digambarkan pada sistem koordinat Kartesius:



Gambar 2.4: Contoh vektor-vektor dalam sistem koordinat Kartesius

- **Vektor Posisi:** Jika pangkal sebuah vektor berada di titik asal $O(0, 0)$, maka komponen-komponen vektornya sama dengan koordinat titik ujung panahnya. Misalnya, vektor $\vec{a}$ di atas adalah vektor posisi dari titik $(2, 3)$.

- **Vektor Perpindahan (antara dua titik sembarang):** Tidak semua vektor berpangkal di titik asal. Jika sebuah vektor $\vec{PQ}$ menghubungkan titik $P(x_1, y_1)$ ke titik $Q(x_2, y_2)$, maka komponen-komponen vektor $\vec{PQ}$ adalah:

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

  Ini sama dengan "berapa perubahan di sumbu x" dan "berapa perubahan di sumbu y" untuk bergerak dari P ke Q.

  Contoh: Vektor dari titik $P(1, 2)$ ke $Q(5, 4)$ adalah $\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Artinya, untuk pindah dari P ke Q, kita bergerak 4 satuan ke kanan dan 2 satuan ke atas.

Representasi vektor menggunakan koordinat ini adalah jembatan krusial antara ide geometris (panah dengan arah dan panjang) dan dunia aljabar (angka yang bisa dihitung). Dengan komponen-komponen ini, kita bisa melakukan operasi vektor secara presisi menggunakan perhitungan aljabar, bukan hanya perkiraan dari gambar. Ini akan menjadi dasar untuk hampir semua kalkulasi vektor yang lebih lanjut.

2.3 Latihan Mengasah Kemampuan Vektor

Saatnya menguji pemahamanmu tentang vektor! Kerjakan soal-soal berikut dengan teliti.

2.3.1 Soal Dasar (3 soal)

1. Diberikan dua vektor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$.
   (a) Hitunglah $\vec{u} + \vec{v}$.
   (b) Gambarkan vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{u} + \vec{v}$ dalam satu sistem koordinat (gunakan metode segitiga atau jajar genjang untuk hasil penjumlahannya).

2. Jika $\vec{w} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$, hitunglah:
   (a) $2\vec{w}$
   (b) $-\frac{1}{3}\vec{w}$
   (c) Gambarkan $\vec{w}$, $2\vec{w}$, dan $-\frac{1}{3}\vec{w}$ pada sistem koordinat yang berbeda atau dengan warna berbeda.

3. Sebuah partikel bergerak dari titik $A(-2, 5)$ ke titik $B(3, -1)$. Tentukan vektor perpindahan $\vec{AB}$ dalam bentuk komponen.

2.3.2 Variasi Soal (3 soal)

4. Diberikan $\vec{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Hitunglah $\vec{p} - \vec{q}$. (Petunjuk: Ingat bahwa $\vec{p} - \vec{q}$ sama dengan $\vec{p} + (-\vec{q})$). Gambarkan $\vec{p}$, $\vec{q}$, $-\vec{q}$, dan $\vec{p} - \vec{q}$.

5. Tentukan vektor satuan yang searah dengan vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.
   (Petunjuk: Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya 1. Pertama, hitung panjang vektor $\vec{a}$ menggunakan teorema Pythagoras: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kemudian, bagi setiap komponen $\vec{a}$ dengan panjangnya: $\hat{u}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \begin{bmatrix} x/|\vec{a}| \\ y/|\vec{a}| \end{bmatrix}$).

6. Jika $3\vec{x} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$, tentukan komponen-komponen vektor $\vec{x}$.

2.3.3 Soal Tantangan (2 soal)

7. Tiga buah gaya bekerja pada sebuah paku yang tertancap di dinding. Gaya-gaya tersebut adalah $\vec{F_1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ Newton, $\vec{F_2} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ Newton, dan $\vec{F_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \end{bmatrix}$ Newton.
   (a) Tentukan vektor gaya resultan (total gaya) yang bekerja pada paku tersebut.

(b) Gambarkan ketiga gaya tersebut (dengan pangkal yang sama di titik asal) dan gaya resultannya.

8. Sebuah pesawat kecil terbang dengan kecepatan relatif terhadap udara sebesar $\vec{v}_{pu} = \begin{bmatrix} 150 \\ 20 \end{bmatrix}$ km/jam (komponen x ke Timur, komponen y ke Utara). Angin bertiup dengan kecepatan $\vec{v}_{ag} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix}$ km/jam (ke Barat).

   (a) Tentukan vektor kecepatan pesawat relatif terhadap tanah ($\vec{v}_{pg} = \vec{v}_{pu} + \vec{v}_{ag}$).

   (b) Seberapa cepat pesawat itu sebenarnya bergerak relatif terhadap tanah (hitung besar/magnitudo dari $\vec{v}_{pg}$)?

2.4 Ringkasan Operasi Vektor Dasar (2D)

Tabel 2.1: Ringkasan Operasi Vektor Dasar (2D)

Operasi	**Deskripsi Geometris (Visual)**	**Operasi Aljabar (Komponen)** untuk $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$, skalar k
Penjumlahan Vektor	Metode Segitiga (sambungkan ujung $\vec{u}$ ke pangkal $\vec{v}$; resultan dari pangkal $\vec{u}$ ke ujung $\vec{v}$). Atau Metode Jajar Genjang (jika pangkal sama).	$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{bmatrix}$
Pengurangan Vektor	Sama dengan $\vec{u} + (-\vec{v})$. Vektor $-\vec{v}$ punya panjang sama dengan $\vec{v}$ tapi arah berlawanan. Lalu jumlahkan.	$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{bmatrix}$
Perkalian Skalar	Panjang vektor dikalikan $\lvert k \rvert$. Jika $k > 0$, arah sama. Jika $k < 0$, arah berlawanan.	$k\vec{u} = \begin{bmatrix} k \cdot u_x \\ k \cdot u_y \end{bmatrix}$

Tabel ini diharapkan bisa menjadi rangkuman cepat untukmu. Penting untuk memahami hubungan antara representasi geometris (gambar panah) dan representasi aljabar (hitungan komponen), karena keduanya saling melengkapi. Di bab selanjutnya, kita akan menggunakan vektor-vektor ini untuk "membangun" sesuatu yang lebih besar, yaitu ruang vektor!

Bab 3

Ruang Vektor – Span dan Basis

Kita sudah semakin jauh nih dalam petualangan Aljabar Linear! Di Bab 2, kita telah berkenalan dengan vektor, si panah ajaib yang punya besar dan arah, serta cara menjumlahkan dan mengubah ukurannya. Sekarang, kita akan naik level. Kita akan melihat bagaimana sekumpulan vektor bisa "membangun" atau "menjangkau" area tertentu, dan bagaimana kita bisa menemukan "set pembangun" yang paling efisien. Selamat datang di dunia Ruang Vektor, khususnya konsep Span dan Basis!

3.1 Menjelajahi Dunia dengan Kombinasi Vektor: Konsep Span

Bayangkan kamu adalah seorang penjelajah. Kamu punya beberapa "alat gerak" utama, yang dalam bahasa kita adalah vektor. Dengan mengkombinasikan alat-alat gerak ini, sejauh mana kamu bisa menjelajahi duniamu?

3.1.1 Pertanyaan Pembuka: Seberapa Jauh Kita Bisa Pergi?

Mari kita mulai dengan beberapa pertanyaan sederhana untuk memancing intuisimu:

Satu Arah Gerak: Jika kamu hanya punya satu jenis langkah, misalnya "satu langkah ke Timur" (ini adalah sebuah vektor, sebut saja $\vec{v}$). Kamu bisa mengambil beberapa langkah $\vec{v}$ ke Timur (misalnya $3\vec{v}$), atau beberapa langkah ke arah berlawanan yaitu Barat (misalnya $-2\vec{v}$), atau bahkan diam di tempat ($0\vec{v}$). Wilayah mana saja yang bisa kamu jangkau?

Tentu saja, kamu hanya bisa bergerak maju-mundur di sepanjang satu garis lurus yang searah dengan langkahmu itu. Kamu tidak akan pernah bisa mencapai titik yang ada di samping kiri atau kanan garis itu.

Dua Arah Gerak (Tidak Searah): Sekarang, bagaimana jika kamu punya dua jenis langkah yang arahnya berbeda? Misalnya, langkah pertama $\vec{v_1}$ adalah "satu langkah ke Timur", dan langkah kedua $\vec{v_2}$ adalah "satu langkah ke Utara". Dengan mengkombinasikan kedua jenis langkah ini (misalnya, 3 langkah $\vec{v_1}$ lalu 2 langkah $\vec{v_2}$, atau -1 langkah $\vec{v_1}$ lalu 4 langkah $\vec{v_2}$), bisakah kamu menjangkau semua titik di sebuah lapangan datar yang luas (bidang dua dimensi)?

Intuisimu mungkin mengatakan, "Iya, sepertinya bisa!" Dan itu benar.

Pertanyaan-pertanyaan ini sebenarnya sedang menggiring kita ke sebuah konsep penting yang disebut span.

3.1.2 Span: Jangkauan Gerak Vektor

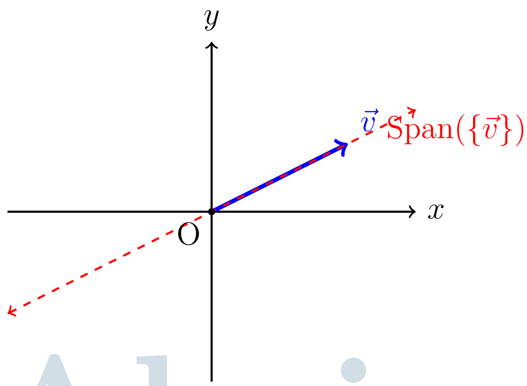
Secara formal namun tetap intuitif, span (atau rentang) dari satu atau lebih vektor adalah himpunan SEMUA kemungkinan vektor (atau titik tujuan) yang bisa kamu capai dengan cara:

1. Mengalikan masing-masing vektor awalmu dengan berbagai angka skalar (positif, negatif, atau nol).
2. Kemudian, menjumlahkan hasil-hasil perkalian skalar tersebut.

Mari kita visualisasikan:

Span dari Satu Vektor (misal $\vec{v}$) di Bidang 2D:

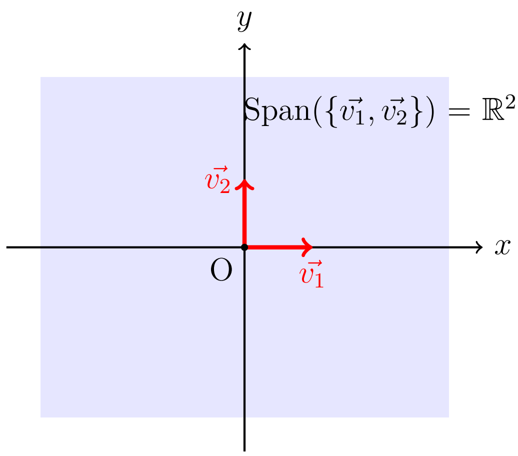
Seperti yang kita diskusikan tadi, jika kamu hanya punya satu vektor $\vec{v}$ (yang bukan vektor nol), maka semua kemungkinan $k\vec{v}$ (untuk skalar k berapapun) akan membentuk sebuah garis lurus yang melewati titik asal $(0, 0)$ dan searah dengan $\vec{v}$.



Gambar 3.1: Sistem koordinat x-y. Vektor $\vec{v}$ dari O ke (2,1) berwarna biru. Garis putus-putus merah membentang tak hingga melewati O dan (2,1), melambangkan Span dari $\vec{v}$

Span dari Dua Vektor $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ di Bidang 2D:

Vektor $\vec{v_1}$ memungkinkan kita bergerak ke kanan atau kiri (sepanjang sumbu x). Vektor $\vec{v_2}$ memungkinkan kita bergerak ke atas atau bawah (sepanjang sumbu y). Dengan mengkombinasikan keduanya, kita bisa mencapai titik manapun di seluruh bidang xy ($\mathbb{R}^2$). Jadi, $\text{Span}(\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\})$ adalah seluruh bidang $\mathbb{R}^2$.



Gambar 3.2: Sistem koordinat x-y. Vektor $\vec{v_1}$ sepanjang sumbu x positif. Vektor $\vec{v_2}$ sepanjang sumbu y positif. Seluruh bidang diarsir tipis biru, menandakan $\text{Span}(\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\})$ adalah seluruh $\mathbb{R}^2$.

Span dari Dua Vektor yang Searah (Kolinear) di Bidang 2D:

Misalkan $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa $\vec{v_2} = 2\vec{v_1}$. Artinya, kedua vektor ini menunjuk ke arah yang sama persis, hanya beda panjang. Jika kamu hanya punya dua arah gerak ini, kamu tetap saja hanya bisa bergerak maju-mundur di sepanjang garis yang searah dengan $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kamu tidak mendapatkan "kebebasan" baru dari vektor kedua. Jadi, $\text{Span}(\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\})$ dalam kasus ini tetaplah sebuah garis lurus, bukan seluruh bidang.

Visualisasi ini penting. Span memberitahu kita "dimensi" dari ruang yang bisa "dibangun" oleh sekumpulan vektor. Bisa jadi sebuah garis (1D), sebuah bidang (2D), atau bahkan ruang yang lebih tinggi dimensinya (yang akan kita bayangkan nanti).

3.1.3 Kombinasi Linear: Resep Membuat Vektor Baru

Istilah "mengkombinasikan" vektor-vektor awal dengan skalar lalu menjumlahkannya punya nama khusus: **kombinasi linear**.

Jika kita punya vektor-vektor $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ dan skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$, maka ekspresi:

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_n\vec{v_n}$$

disebut sebagai **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$.

Kamu bisa membayangkannya seperti sebuah "resep" untuk membuat vektor baru:

- Ambil c_1 "porsi" dari vektor $\vec{v_1}$.
- Ambil c_2 "porsi" dari vektor $\vec{v_2}$.
- Dan seterusnya...
- Lalu, "campurkan" semua hasil porsi tersebut (jumlahkan secara vektor).

Contoh Sederhana:

Diberikan vektor $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (satu langkah ke kanan) dan $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (satu langkah ke atas).

Kita ingin membuat vektor target $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Bisakah $\vec{w}$ ditulis sebagai kombinasi linear dari $\vec{v_1}$ dan $\vec{v_2}$?

Ya! Kita bisa memilih skalar $c_1 = 3$ dan $c_2 = 2$.

Maka, $3\vec{v_1} + 2\vec{v_2} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{w}$.

Ini artinya, untuk mencapai titik (atau vektor posisi) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dari titik asal, kamu perlu mengambil 3 "porsi" $\vec{v_1}$ dan 2 "porsi" $\vec{v_2}$.

Jadi, Span dari sekumpulan vektor adalah himpunan semua vektor yang bisa dihasilkan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor tersebut. Para skalar $c_1, c_2, \ldots$ bisa berupa angka riil apa saja. Dengan mengubah-ubah nilai skalar ini, kita menjelajahi seluruh "ruang" yang direntang oleh vektor-vektor awal.

3.2 Membedah Span dan Basis: Contoh-Contoh Kunci

Sekarang setelah kita punya gambaran tentang span dan kombinasi linear, mari kita gunakan kemampuan detektif matematika kita untuk menyelidiki beberapa kasus penting. Ini akan membantu kita memahami konsep-konsep yang lebih dalam seperti kebebasan linear dan basis.

3.2.1 Uji Keanggotaan: Apakah Vektor Ini Bagian dari Span?

Ini adalah pertanyaan fundamental: Jika kita punya sekumpulan vektor "pembangun" (misalnya $\vec{v_1}$ dan $\vec{v_2}$), dan kita punya satu vektor "target" (misalnya $\vec{w}$), bagaimana cara kita tahu apakah $\vec{w}$ bisa "dibuat" dari kombinasi linear $\vec{v_1}$ dan $\vec{v_2}$? Dengan kata lain, apakah $\vec{w}$ berada di dalam $\text{Span}(\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\})$?

Contoh Komplit 1:

Apakah vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ada dalam span dari vektor $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$?

1. Model Matematis:

Kita mencari skalar c_1 dan c_2 sehingga berlaku:

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{w}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lakukan perkalian skalar dan penjumlahan vektor di sisi kiri:

$$\begin{bmatrix} 1c_1 \\ 2c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c_2 \\ -1c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. Membentuk Sistem Persamaan Linear (SPL):

Agar dua vektor sama, komponen-komponen yang bersesuaian harus sama. Jadi, kita dapatkan dua persamaan linear:

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 7 \quad \text{(dari komponen x atau baris pertama)} \\ 2c_1 - c_2 &= 4 \quad \text{(dari komponen y atau baris kedua)} \end{aligned}$$

Lihat! Pertanyaan tentang keanggotaan span telah berubah menjadi pertanyaan tentang apakah SPLDV ini punya solusi untuk c_1 dan c_2. Kita kembali ke materi Bab 1!

3. Langkah Penyelesaian SPLDV:

Kita bisa gunakan metode eliminasi atau substitusi. Mari kita coba eliminasi. Kalikan Persamaan 2 dengan 3 agar koefisien c_2 berlawanan:

Persamaan 1: $c_1 + 3c_2 = 7$

Persamaan 2 dikali 3: $(2c_1 - c_2 = 4) \times 3 \Rightarrow 6c_1 - 3c_2 = 12$

Sekarang jumlahkan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 7 \\ \underline{6c_1 - 3c_2} &\underline{= 12} \\ 7c_1 &= 19 \end{aligned}$$

Maka, $c_1 = \frac{19}{7}$.
Substitusikan $c_1 = \frac{19}{7}$ ke Persamaan 1 (asli):

$$\frac{19}{7} + 3c_2 = 7$$

$$3c_2 = 7 - \frac{19}{7} = \frac{49}{7} - \frac{19}{7} = \frac{30}{7}$$

$$c_2 = \frac{30}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{7}$$

4. Interpretasi Hasil:
Karena kita berhasil menemukan nilai untuk $c_1 = \frac{19}{7}$ dan $c_2 = \frac{10}{7}$ (artinya, SPL punya solusi), maka vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ADALAH kombinasi linear dari $\vec{v_1}$ dan $\vec{v_2}$.

Jadi, $\vec{w}$ berada di dalam Span($\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$).

Jika dalam proses penyelesaian SPL kita menemukan kontradiksi (misalnya, $0 = 5$), itu berarti SPL tidak punya solusi. Dalam kasus itu, $\vec{w}$ tidak akan berada dalam span dari $\vec{v_1}$ dan $\vec{v_2}$.

Kaitan antara "apakah suatu vektor ada dalam span" dengan "apakah sistem persamaan linear yang bersesuaian memiliki solusi" adalah koneksi yang sangat fundamental. Ini menunjukkan bagaimana alat aljabar (SPL) bisa digunakan untuk menjawab pertanyaan geometris (span).

3.2.2 Bebas atau Terikat? Memahami Kebebasan Linear (Independensi Linear)

Sekarang, mari kita perhatikan kumpulan vektor pembangun itu sendiri. Apakah ada di antara mereka yang "berlebihan"? Maksudnya, apakah ada satu vektor dalam kumpulan itu yang sebenarnya bisa "dibuat" dari kombinasi vektor-vektor lainnya? Atau, apakah setiap vektor dalam kumpulan itu memberikan kontribusi "arah informasi" yang unik dan tidak bisa digantikan oleh yang lain?

Ini membawa kita ke konsep **kebebasan linear** (atau independensi linear).

Sekumpulan vektor $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ disebut **bebas linear** (linearly independent) jika satu-satunya cara untuk membuat kombinasi linear mereka sama dengan vektor nol ($\vec{0}$) adalah dengan membuat semua skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bernilai nol.

Jadi, persamaan $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_n\vec{v_n} = \vec{0}$ hanya memiliki solusi trivial, yaitu $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$.

Secara intuitif, ini berarti tidak ada satu vektor pun dalam himpunan itu yang bisa ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Semuanya benar-benar "mandiri" dan memberikan "arah" yang tidak bisa diwakili oleh yang lain.

Sebaliknya, jika ada solusi lain selain solusi trivial (artinya, minimal ada satu skalar c_i yang tidak nol) yang membuat kombinasi linear tersebut menghasilkan vektor nol, maka himpunan vektor itu disebut **bergantung linear** (linearly dependent).

Secara intuitif, ini berarti setidaknya ada satu vektor dalam himpunan itu yang "berlebihan" atau "redundan" karena ia bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Ia tidak memberikan informasi arah baru yang fundamental.

Contoh Komplit 2:

Apakah himpunan vektor $S = \{\vec{v_1} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}\}$ bebas linear atau bergantung linear?

1. Model Matematis:

Kita harus menyelidiki solusi dari persamaan $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$:

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Ini menghasilkan SPL homogen:

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Penyelesaian SPL Homogen:

Dari Persamaan 1, kita dapat $c_1 = -3c_2$.
Substitusikan ini ke Persamaan 2:

$$2(-3c_2) + 6c_2 = 0$$

$$-6c_2 + 6c_2 = 0$$

$$0 = 0$$

Pernyataan $0 = 0$ adalah selalu benar. Ini menandakan bahwa sistem ini memiliki tak hingga banyaknya solusi, bukan hanya $c_1 = 0, c_2 = 0$. Misalnya, jika kita pilih $c_2 = 1$ (ini tidak nol!), maka $c_1 = -3(1) = -3$. Jadi, $c_1 = -3, c_2 = 1$ adalah salah satu solusi non-trivial.

3. Interpretasi Hasil:

Karena ada solusi non-trivial (misalnya $c_1 = -3, c_2 = 1$) untuk $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$, maka himpunan S adalah **bergantung linear**.

Apa artinya ini secara geometris? Jika kita perhatikan, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 3\vec{v_1}$. Jadi, vektor $\vec{v_2}$ sebenarnya adalah kelipatan dari $\vec{v_1}$. Keduanya terletak pada garis yang sama. Vektor $\vec{v_2}$ tidak memberikan "arah baru" yang tidak bisa dicapai oleh $\vec{v_1}$ saja. Ia "redundan". Jika kita punya $\vec{v_1}$, kita tidak benar-benar "butuh" $\vec{v_2}$ untuk menentukan garis yang sama.

Contoh lain (bebas linear):

Bagaimana dengan himpunan $T = \{\vec{u_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$?

Persamaan $c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2} = \vec{0}$ menjadi:

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Satu-satunya solusi di sini adalah $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$. Jadi, himpunan T adalah **bebas linear**. Vektor $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (gerak horizontal) tidak bisa dibuat dari $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ (gerak vertikal), dan sebaliknya. Keduanya memberikan informasi arah yang independen.

Kebebasan linear adalah tentang "efisiensi" dalam merepresentasikan suatu ruang. Vektor-vektor yang bergantung linear membawa informasi yang tumpang tindih. Jika sebuah himpunan vektor bebas linear, maka tidak ada vektor yang bisa "dihilangkan" dari himpunan tersebut tanpa memperkecil span-nya.

3.2.3 Fondasi Ruang Vektor: Menemukan Basis dan Dimensi

Kita sekarang sampai pada dua konsep yang sangat penting: **basis** dan **dimensi**.

Definisi Intuitif Basis:

Bayangkan kamu ingin membangun sebuah "rumah" (ini adalah ruang vektor yang ingin kamu jelajahi atau deskripsikan). Kamu membutuhkan satu set "batu bata" (ini adalah vektor-vektor) yang paling efisien. Set batu bata ini harus memenuhi dua syarat:

1. **Cukup untuk membangun seluruh rumah:** Artinya, kombinasi linear dari batu-bata ini harus bisa menjangkau setiap sudut rumah. Dalam bahasa matematika, himpunan vektor tersebut harus merentang (span) seluruh ruang vektor.

2. **Tidak ada batu bata yang sia-sia:** Artinya, tidak ada satu batu bata pun yang bisa dibuat dari kombinasi batu bata lainnya. Setiap batu bata memberikan kontribusi unik. Dalam bahasa matematika, himpunan vektor tersebut harus bebas linear.

Nah, himpunan vektor yang memenuhi kedua syarat ini (merentang ruang vektor DAN bebas linear) disebut **basis** untuk ruang vektor tersebut. Basis adalah seperti "kerangka acuan" atau "set instruksi gerak paling dasar" untuk ruang vektor itu.

Dimensi:

Jumlah vektor dalam sebuah basis untuk suatu ruang vektor disebut **dimensi** dari ruang vektor tersebut. Dimensi memberitahu kita "seberapa besar" atau "seberapa banyak derajat kebebasan" yang ada dalam ruang itu.

- Sebuah garis memiliki dimensi 1 (butuh 1 vektor basis).
- Sebuah bidang (seperti $\mathbb{R}^2$) memiliki dimensi 2 (butuh 2 vektor basis).
- Ruang tiga dimensi tempat kita hidup ($\mathbb{R}^3$) memiliki dimensi 3 (butuh 3 vektor basis).

Contoh Komplit 3:

Tentukan apakah himpunan $S = \{\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$ (bidang xy). Jika ya, berapakah dimensinya?

1. Uji Syarat Pertama: Apakah S merentang $\mathbb{R}^2$?

Artinya, bisakah setiap vektor sembarang $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ ditulis sebagai kombinasi linear $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}$?

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Persamaan ini selalu punya solusi: kita bisa pilih $c_1 = x$ dan $c_2 = y$. Karena kita selalu bisa menemukan c_1 dan c_2 untuk setiap $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, maka S merentang $\mathbb{R}^2$.

2. Uji Syarat Kedua: Apakah S bebas linear?

Kita selesaikan $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Satu-satunya solusi adalah $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$. Jadi, S adalah bebas linear.

3. Kesimpulan Basis dan Dimensi:

Karena S memenuhi kedua syarat (merentang $\mathbb{R}^2$ DAN bebas linear), maka $S = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ adalah sebuah basis untuk $\mathbb{R}^2$. Ini sering disebut **basis standar** untuk $\mathbb{R}^2$.

Jumlah vektor dalam basis S adalah 2. Jadi, dimensi dari $\mathbb{R}^2$ adalah 2.

Contoh lain (bukan basis):

Apakah himpunan $T = \{\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^2$?

- **Merentang $\mathbb{R}^2$?** Ya. Bahkan, $\{\vec{u_1}, \vec{u_3}\}$ saja sudah cukup untuk merentang $\mathbb{R}^2$ (bisa dibuktikan dengan cara yang sama seperti uji span sebelumnya, akan ada solusi untuk $c_1\vec{u_1} + c_3\vec{u_3} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$). Jadi, penambahan $\vec{u_2}$ tidak mengubah span-nya.

- **Bebas linear?** Tidak. Seperti yang kita lihat sebelumnya, $\vec{u_2} = 2\vec{u_1}$. Jadi, ada ketergantungan linear. Misalnya, $2\vec{u_1} - 1\vec{u_2} + 0\vec{u_3} = \vec{0}$ adalah kombinasi linear non-trivial yang menghasilkan vektor nol.

Karena T tidak bebas linear (ada vektor redundan), maka T bukanlah basis untuk $\mathbb{R}^2$, meskipun ia merentang $\mathbb{R}^2$. Basis haruslah himpunan perentang yang "paling hemat", tanpa ada anggota yang bisa diwakili oleh anggota lainnya.

Memahami konsep basis dan dimensi ini sangat krusial karena mereka memberikan struktur fundamental pada ruang vektor. Mereka akan menjadi landasan untuk banyak topik lebih lanjut, seperti transformasi linear dan nilai eigen.

3.3 Latihan dan Proyek Kreatif

Saatnya menguji pemahamanmu tentang span, kebebasan linear, basis, dan dimensi!

3.3.1 10 Latihan Soal (dari mudah ke menantang):

Soal Dasar (3 soal):

1. Tuliskan vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (Artinya, carilah c_1 dan c_2 sehingga $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{w}$).

2. Apakah himpunan $S = \{\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}\}$ bebas linear atau bergantung linear? Jelaskan mengapa dengan menunjukkan apakah ada solusi non-trivial untuk $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{0}$.

3. Manakah dari himpunan vektor berikut yang merentang $\mathbb{R}^2$? Berikan alasan singkat.

   (a) $\{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\}$

   (b) $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\}$

   (c) $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

Variasi Soal (4 soal):

4. Diberikan vektor-vektor di $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Apakah $\vec{u}$ berada dalam $\text{Span}(\{\vec{a}, \vec{b}\})$?

5. Tunjukkan bahwa himpunan $B = \{\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ adalah sebuah basis untuk $\mathbb{R}^2$. (Tunjukkan bahwa B merentang $\mathbb{R}^2$ dan bebas linear).

6. Carilah semua nilai k sehingga himpunan vektor $\{\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ 9 \end{bmatrix}\}$ bergantung linear. (Petunjuk: Himpunan dua vektor bergantung linear jika satu vektor adalah kelipatan skalar dari yang lain, atau jika SPL homogen $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$ punya solusi non-trivial).

7. Jika diketahui bahwa $\text{Span}(\{\vec{u}, \vec{v}\})$ di $\mathbb{R}^2$ hanyalah sebuah garis lurus (bukan seluruh bidang $\mathbb{R}^2$), apa yang bisa kamu simpulkan tentang hubungan antara vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$?

Soal Tantangan (3 soal):

8. Apakah himpunan $S = \{\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^3$? Selidiki syarat merentang dan kebebasan linearnya.

9. Misalkan W adalah himpunan semua vektor di $\mathbb{R}^2$ berbentuk $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ di mana $x = 2y$.
   (a) Tunjukkan bahwa W adalah sebuah sub-ruang dari $\mathbb{R}^2$ (artinya, tertutup terhadap penjumlahan vektor dan perkalian skalar).
   (b) Temukan sebuah basis untuk W dan tentukan dimensinya. (Petunjuk: Setiap vektor di W bisa ditulis sebagai $\begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$).

10. Jika $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ adalah sebuah basis untuk $\mathbb{R}^3$, apakah himpunan $\{\vec{x}+\vec{y}, \vec{y}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{x}\}$ juga selalu merupakan basis untuk $\mathbb{R}^3$? Berikan argumen atau contoh penyangkal.

3.3.2 Proyek Mini: Merancang Gerak Robot di Grid 2D

Bayangkan kamu sedang memprogram sebuah robot kecil yang bisa bergerak di atas lantai keramik yang sangat luas, membentuk sebuah grid (seperti papan catur tak terbatas). Robot ini hanya bisa bergerak mengikuti perintah vektor yang kamu berikan.

Tugas:

1. Tentukan Perintah Gerak Dasar:

- Robotmu hanya memiliki DUA perintah gerak dasar (vektor) yang bisa kamu tentukan sendiri. Misalnya, $\vec{m_1}$ = "1 langkah ke kanan dan 0 langkah ke atas" dan $\vec{m_2}$ = "0 langkah ke kanan dan 1 langkah ke atas".
- Tuliskan vektor-vektor $\vec{m_1}$ dan $\vec{m_2}$ yang kamu pilih dalam bentuk komponen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
- Gambarkan kedua vektor ini pada sistem koordinat (grid).

2. Jelajahi Span:

- Jelaskan dengan kata-katamu sendiri apa itu span dari kedua vektor gerak dasarmu ($\vec{m_1}$ dan $\vec{m_2}$).
- Area mana saja di grid yang bisa dijangkau oleh robotmu hanya dengan menggunakan kombinasi dari $\vec{m_1}$ dan $\vec{m_2}$ (dengan skalar berapa pun)? Gambarkan atau arsirlah span ini pada gridmu.

3. Uji Basis:

- Apakah himpunan vektor $\{\vec{m_1}, \vec{m_2}\}$ yang kamu pilih membentuk sebuah basis untuk semua kemungkinan posisi di grid 2D (anggap saja $\mathbb{R}^2$)?
- Jelaskan jawabanmu berdasarkan konsep span (apakah mereka merentang seluruh grid?) dan kebebasan linear (apakah salah satu vektor gerakmu berlebihan atau bisa dibuat dari yang lain?).

4. Tentukan Dimensi:

- Jika himpunanmu membentuk basis, berapakah dimensi dari ruang gerak robotmu? Apa artinya angka dimensi ini?

5. Mencapai Target:

- Pilih 3 posisi target (koordinat (x, y)) yang berbeda di grid.
- Untuk setiap target, tuliskan kombinasi linear dari $\vec{m}_1$ dan $\vec{m}_2$ yang dibutuhkan robot untuk mencapai target tersebut dari titik asal $(0, 0)$. (Artinya, temukan skalar c_1 dan c_2 sehingga $c_1\vec{m}_1 + c_2\vec{m}_2 =$ vektor posisi target).

(Bonus untuk Penjelajah Sejati):

- Bagaimana jika robotmu hanya punya SATU perintah gerak dasar (misalnya, hanya $\vec{m}_1$)? Apa span-nya? Apakah itu basis untuk $\mathbb{R}^2$?
- Bagaimana jika robotmu punya TIGA perintah gerak dasar, misalnya $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, dan $\vec{m}_3 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$ (perintah ketiga adalah hasil penjumlahan dua perintah pertama)? Apakah himpunan $\{\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3\}$ ini bebas linear? Apakah ia membentuk basis untuk $\mathbb{R}^2$? Jelaskan!

Proyek mini ini bertujuan agar kamu bisa "merasakan" langsung bagaimana konsep-konsep abstrak seperti span dan basis bekerja dalam konteks yang lebih konkret dan kreatif. Jangan takut untuk bereksperimen dengan pilihan vektor gerak dasarmu!

Memahami perbedaan dan hubungan antara ketiga konsep ini sangat penting. Span memberitahu kita apa yang bisa kita "bangun". Kebebasan linear memberitahu kita tentang efisiensi "bahan bangunan" kita. Dan basis adalah set "bahan bangunan" yang optimal: cukup untuk membangun segalanya, dan tidak ada yang terbuang. Dengan ini, kita telah meletakkan fondasi yang kuat untuk menjelajahi topik-topik Aljabar Linear yang lebih menantang dan menarik!

Alwin,
Sahira.

Tabel 3.1: Perbandingan Konsep Kunci: Span, Kebebasan Linear, dan Basis (di $\mathbb{R}^2$)

Konsep	**Pertanyaan Kunci yang Dijawab**	**Definisi Intuitif**	**Syarat Utama**	**Contoh di $\mathbb{R}^2$**	**Non-Contoh di $\mathbb{R}^2$**
Span	Area/ruang apa yang bisa dijangkau oleh kombinasi vektor-vektor ini?	Semua titik/vektor yang bisa "dibangun" dari sekumpulan vektor awal.	(Konsep deskriptif tentang jangkauan)	Span dari $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ adalah seluruh $\mathbb{R}^2$. Span dari $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ adalah garis $y = x$.	—
Kebebasan Linear	Apakah ada vektor dalam himpunan ini yang "berlebihan" atau bisa dibuat dari yang lain?	Setiap vektor dalam himpunan memberikan informasi "arah" yang unik dan tidak redundan.	$c_1\vec{v_1} + \ldots + c_n\vec{v_n} = \vec{0}$ hanya jika semua $c_i = 0$.	$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ bebas linear.	$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}$ bergantung linear.
Basis	Apa set "batu bata" pembangun yang paling minimal dan efisien untuk suatu ruang?	Himpunan vektor yang cukup untuk membangun seluruh ruang, dan tidak ada yang sia-sia.	1. Harus merentang ruang vektor 2. Harus bebas linear	$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$. $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ juga basis untuk $\mathbb{R}^2$.	$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ bukan basis (merentang tapi tidak bebas linear). $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ bukan basis untuk $\mathbb{R}^2$ (bebas linear tapi tidak merentang $\mathbb{R}^2$).

Bab 4

Sistem Persamaan dan Matriks

Selamat datang di Bab 4! Di bab ini, kita akan memulai petualangan seru untuk melihat bagaimana masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari bisa kita ubah menjadi bentuk matematika yang lebih terstruktur, yaitu sistem persamaan linear. Lalu, kita akan berkenalan dengan "matriks", sebuah alat bantu yang sangat berguna untuk menuliskan sistem persamaan ini dengan lebih rapi dan efisien. Yuk, kita mulai!

4.1 Dari Cerita ke Sistem Persamaan Linear, Lalu ke Matriks

4.1.1 Pengantar: Bagaimana Masalah Sehari-hari Bisa Jadi Matematika?

Pernahkah kamu mencoba memecahkan teka-teki atau merencanakan sesuatu yang melibatkan beberapa hal yang belum diketahui nilainya? Misalnya, kamu ingin membeli beberapa jenis jajanan untuk pesta ulang tahunmu dengan anggaran tertentu. Kamu tahu harga masing-masing jajanan, tapi kamu perlu mencari tahu berapa banyak dari setiap jenis yang bisa kamu beli agar uangmu pas. Atau, bayangkan sebuah permainan "tebak angka" di mana ada beberapa petunjuk yang menghubungkan angka-angka misterius tersebut.

Situasi-situasi seperti ini, di mana ada beberapa kuantitas yang tidak diketahui dan beberapa informasi yang menghubungkannya, seringkali bisa kita modelkan atau gambarkan menggunakan matematika. Salah satu caranya adalah dengan menggunakan sistem persamaan linear. Jangan khawatir dengan istilahnya, kita akan belajar pelan-pelan. Intinya, kita akan mengubah cerita atau masalah menjadi serangkaian "kalimat matematika" yang disebut persamaan. Ini adalah langkah awal yang sangat penting, karena dengan mengubahnya ke bentuk matematika, kita bisa menggunakan alat-alat matematika yang ampuh untuk menemukan solusinya. Banyak siswa mungkin bertanya, "Kapan sih ini akan terpakai?" Nah, dengan melihat bagaimana masalah nyata bisa diubah menjadi bentuk matematika, kita akan mulai melihat kegunaan dari aljabar linear ini.

4.1.2 Mengubah Soal Cerita menjadi Sistem Persamaan Linear (SPL)

Langkah pertama adalah menerjemahkan soal cerita ke dalam bahasa matematika. Prosesnya seperti ini:

1. **Identifikasi apa yang tidak diketahui**: Apa saja sih yang ingin kita cari nilainya dalam soal cerita tersebut? Ini akan menjadi "variabel" kita.

2. **Beri nama variabel**: Biasanya kita menggunakan huruf seperti x, y, z untuk mewakili nilai-nilai yang tidak diketahui tersebut.

3. **Terjemahkan hubungan menjadi persamaan**: Setiap informasi atau batasan dalam soal cerita biasanya bisa diubah menjadi satu persamaan matematika.

Mari kita lihat beberapa contoh agar lebih jelas.

Contoh 1: Belanja Sederhana di Toko Buku

Bayangkan Kia pergi ke toko buku. Dia membeli 4 buku tulis, 2 pulpen, dan 3 pensil dengan total harga Rp26.000. Di toko yang sama, Dina membeli 3 buku tulis, 3 pulpen, dan 1 pensil dengan total harga Rp21.000. Sementara itu, Dika membeli 3 buku tulis dan 1 pensil dengan total harga Rp12.000. Bagaimana kita bisa menentukan harga masing-masing barang jika kita hanya tahu total belanja mereka?

Langkah 1: Baca soal dengan teliti. Apa yang tidak kita ketahui? Harga satuan buku tulis, harga satuan pulpen, dan harga satuan pensil. Inilah yang ingin kita cari.

Langkah 2: Tentukan variabel. Mari kita sepakati:

- Misalkan harga 1 buku tulis adalah x rupiah.
- Misalkan harga 1 pulpen adalah y rupiah.
- Misalkan harga 1 pensil adalah z rupiah.

Mengapa kita memilih ini sebagai variabel? Karena inilah nilai-nilai yang ditanyakan atau perlu kita ketahui untuk memecahkan masalahnya.

Langkah 3: Terjemahkan setiap kalimat kunci menjadi persamaan.

- **Belanja Kia**: "Kia membeli 4 buku tulis, 2 pulpen, dan 3 pensil dengan harga Rp26.000."

  Ini berarti: (4 dikali harga buku) + (2 dikali harga pulpen) + (3 dikali harga pensil) = 26.000.

  Dalam bentuk variabel: $4x + 2y + 3z = 26000$.

  Mengapa koefisiennya 4, 2, dan 3? Karena itu adalah jumlah masing-masing barang yang dibeli Kia. Mengapa ini membentuk persamaan? Karena total harga dari kombinasi barang tersebut diketahui.

- **Belanja Dina**: "Dina membeli 3 buku tulis, 3 pulpen, dan 1 pensil dengan harga Rp21.000."

  Ini berarti: $3x + 3y + z = 21000$.

- **Belanja Dika**: "Dika membeli 3 buku tulis dan 1 pensil dengan harga Rp12.000."

  Karena Dika tidak membeli pulpen, berarti jumlah pulpennya 0.

  Ini berarti: $3x + 0y + z = 12000$ (atau $3x + z = 12000$).

Langkah 4: Susun sistem persamaan linearnya. Kita sekarang punya tiga persamaan:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z &= 26000 \\ 3x + 3y + z &= 21000 \\ 3x + 0y + z &= 12000 \end{aligned}$$

Inilah yang disebut Sistem Persamaan Linear (SPL). Proses penerjemahan langkah demi langkah ini sangat penting untuk dikuasai. Ini membantu kita membangun kemampuan untuk mengubah masalah nyata menjadi model matematika, bukan hanya sekadar meniru contoh.

Contoh 2: Produksi Mainan di Pabrik Kecil

Sebuah pabrik kecil membuat dua jenis mainan: mobil-mobilan dan boneka. Setiap mobil-mobilan membutuhkan 2 jam untuk perakitan dan 1 jam untuk pengecatan. Setiap boneka membutuhkan 1 jam untuk perakitan dan 2 jam untuk pengecatan. Jika pabrik memiliki total 80 jam kerja untuk perakitan dan 70 jam kerja untuk pengecatan yang tersedia setiap minggunya, berapa banyak masing-masing mainan yang bisa diproduksi agar semua waktu kerja terpakai?

Langkah 1: Apa yang tidak diketahui? Jumlah mobil-mobilan yang diproduksi dan jumlah boneka yang diproduksi.

Langkah 2: Tentukan variabel.

- Misalkan jumlah mobil-mobilan yang diproduksi adalah m.
- Misalkan jumlah boneka yang diproduksi adalah b.

Langkah 3: Terjemahkan informasi menjadi persamaan. Kita punya dua batasan sumber daya: waktu perakitan dan waktu pengecatan.

- **Waktu Perakitan**:

  Setiap mobil butuh 2 jam, jadi m mobil butuh $2m$ jam.

  Setiap boneka butuh 1 jam, jadi b boneka butuh $1b$ jam.

  Total waktu perakitan yang tersedia adalah 80 jam.

  Persamaan: $2m + b = 80$.

- **Waktu Pengecatan**:

  Setiap mobil butuh 1 jam, jadi m mobil butuh $1m$ jam.

  Setiap boneka butuh 2 jam, jadi b boneka butuh $2b$ jam.

  Total waktu pengecatan yang tersedia adalah 70 jam.

  Persamaan: $m + 2b = 70$.

Langkah 4: Susun sistem persamaan linearnya.

$$
\begin{aligned}
2m + b &= 80 \\
m + 2b &= 70
\end{aligned}
$$

Perhatikan bagaimana sumber daya (waktu perakitan dan pengecatan) menjadi dasar untuk membentuk persamaan-persamaan ini.

Contoh 3: Membuat Saus Spesial (Campuran Sederhana)

Seorang koki ingin membuat saus salad spesial dengan mencampurkan dua jenis saus yang sudah ada: Saus A (mengandung 10% cuka) dan Saus B (mengandung 25% cuka). Dia ingin membuat total 200 ml saus salad spesial dengan kandungan cuka keseluruhan sebesar 15%. Berapa ml Saus A dan Saus B yang harus dia campurkan?

Langkah 1: Apa yang tidak diketahui? Jumlah Saus A yang dibutuhkan (dalam ml) dan jumlah Saus B yang dibutuhkan (dalam ml).

Langkah 2: Tentukan variabel.

- Misalkan volume Saus A yang dibutuhkan adalah a ml.
- Misalkan volume Saus B yang dibutuhkan adalah b ml.

Langkah 3: Terjemahkan informasi menjadi persamaan. Kita punya dua informasi utama: total volume saus dan total kandungan cuka.

- **Total Volume Saus**:

  Jumlah Saus A ditambah jumlah Saus B adalah 200 ml.

  Persamaan: $a + b = 200$.

- **Total Kandungan Cuka**:

  Kandungan cuka dari Saus A adalah 10% dari a, yaitu $0.10a$.

  Kandungan cuka dari Saus B adalah 25% dari b, yaitu $0.25b$.

  Total kandungan cuka dalam 200 ml saus spesial adalah 15% dari 200 ml, yaitu $0.15 \times 200 = 30$ ml.

  Persamaan: $0.10a + 0.25b = 30$.

  (Untuk menghilangkan desimal, kita bisa kalikan persamaan ini dengan 100: $10a + 25b = 3000$. Ini adalah langkah opsional untuk mempermudah perhitungan nanti, tapi persamaan aslinya juga valid).

Langkah 4: Susun sistem persamaan linearnya.

$$a + b = 200$$
$$0.10a + 0.25b = 30 \quad (\text{atau } 10a + 25b = 3000)$$

Kemampuan untuk memodelkan berbagai situasi seperti belanja, produksi, atau campuran dengan struktur matematika yang sama (yaitu Sistem Persamaan Linear) adalah salah satu keindahan dan kekuatan dari matematika. Ini menunjukkan bagaimana sebuah konsep matematika bisa menjadi alat yang sangat serbaguna. Meskipun konteksnya berbeda-beda, tugas matematika dasarnya tetap sama: identifikasi variabel, temukan hubungan antar variabel tersebut, lalu tuliskan dalam bentuk persamaan.

4.1.3 Memperkenalkan Matriks: Cara Rapi Menuliskan Sistem Persamaan

Setelah kita berhasil mengubah soal cerita menjadi sistem persamaan linear, langkah selanjutnya adalah menuliskannya dalam bentuk yang lebih ringkas dan terstruktur yang disebut matriks. Bayangkan matriks ini seperti sebuah tabel atau lemari arsip khusus yang menyimpan semua angka-angka penting (koefisien dan konstanta) dari SPL kita dengan rapi.

Mengubah SPL 2 Variabel ke Bentuk Matriks

Mari kita ambil contoh SPL 2 variabel dari masalah produksi mainan tadi:

$$2m + b = 80$$
$$m + 2b = 70$$

Kita bisa menulis ulang SPL ini dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Coba perhatikan:

- Bagian pertama, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, adalah matriks koefisien. Angka-angkanya adalah koefisien dari variabel m dan b di setiap persamaan. Baris pertama matriks ini ($\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$) adalah koefisien dari persamaan pertama, dan baris kedua ($\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$) adalah koefisien dari persamaan kedua.
- Bagian kedua, $\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}$, adalah matriks variabel (atau vektor kolom variabel). Isinya adalah variabel-variabel yang kita cari.
- Bagian ketiga, $\begin{bmatrix} 80 \\ 70 \end{bmatrix}$, adalah matriks konstanta (atau vektor kolom konstanta). Isinya adalah angka-angka di sebelah kanan tanda sama dengan.

Selain bentuk perkalian matriks di atas, ada cara lain yang lebih sering kita gunakan untuk memulai proses penyelesaian, yaitu matriks augmented (atau matriks yang diperbesar). Untuk SPL di atas, matriks augmented-nya adalah:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 80 \\ 1 & 2 & 70 \end{array}\right]$$

Garis vertikal di tengah itu gunanya untuk memisahkan bagian koefisien (di sebelah kiri) dari bagian konstanta (di sebelah kanan). Jadi, matriks ini menyimpan semua informasi penting dari SPL kita dalam satu "paket".

Contoh Lain (2 Variabel): Misalkan kita punya SPL:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ x + 4y &= 10 \end{aligned}$$

Matriks koefisiennya: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Matriks variabelnya: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Matriks konstantanya: $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

Bentuk perkalian matriksnya:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Matriks augmented-nya:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

Mengubah SPL 3 Variabel ke Bentuk Matriks

Sekarang, mari kita gunakan contoh belanja Kia, Dina, dan Dika tadi:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z &= 26000 \\ 3x + 3y + z &= 21000 \\ 3x + 0y + z &= 12000 \end{aligned}$$

(Ingat, jika suatu variabel tidak ada, koefisiennya 0!)
Bentuk perkalian matriksnya adalah:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26000 \\ 21000 \\ 12000 \end{bmatrix}$$

Dan matriks augmented-nya adalah:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 26000 \\ 3 & 3 & 1 & 21000 \\ 3 & 0 & 1 & 12000 \end{array}\right]$$

Proses transisi dari SPL ke bentuk matriks ini adalah langkah fundamental. Penting untuk diingat bahwa matriks ini hanyalah cara penulisan baru untuk informasi yang sama. Namun, cara penulisan ini membuka jalan untuk metode penyelesaian yang sangat sistematis yang akan kita pelajari di Bab 5.

Pengenalan matriks bukan hanya sekadar untuk membuat notasi yang lebih rapi. Ini adalah langkah pertama menuju solusi yang bersifat algoritmik, di mana kita akan melakukan operasi pada susunan angka-angka ini secara langsung, bukan lagi pada variabel x, y, z. Meskipun SPL bisa diselesaikan dengan metode substitusi atau eliminasi yang mungkin sudah kalian kenal (yang melibatkan manipulasi persamaan dengan variabelnya), matriks memungkinkan kita untuk sementara "melupakan" variabel-variabel tersebut dan fokus pada hubungan numerik antar koefisien dan konstanta. Operasi Baris Elementer (OBE), yang akan menjadi bintang utama di Bab 5, akan bekerja langsung pada angka-angka dalam matriks ini. Jadi, "singkatan" ini sangat ampuh karena memungkinkan prosedur sistematis (algoritma) yang lebih mudah digeneralisasi dan bahkan bisa dijalankan oleh komputer.

4.2 Notasi Matriks: Bahasa Baru Kita

Sekarang kita sudah melihat bagaimana SPL bisa diubah menjadi matriks. Agar kita bisa "berkomunikasi" tentang matriks dengan lebih jelas, ada beberapa istilah dan notasi dasar yang perlu kita pahami.

4.2.1 Matriks Koefisien, Matriks Variabel, dan Matriks Konstanta (Ruas Kanan)

Seperti yang sudah kita singgung, sebuah sistem persamaan linear seperti:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

dapat ditulis dalam bentuk ringkas $AX = B$, di mana:

- A adalah **Matriks Koefisien**: Matriks ini berisi semua koefisien dari variabel-variabel. Setiap baris mewakili satu persamaan, dan setiap kolom mewakili satu variabel.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- X adalah **Matriks Variabel** (atau Vektor Variabel): Ini adalah matriks kolom yang berisi variabel-variabel yang nilainya ingin kita cari.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- B adalah **Matriks Konstanta** (atau Vektor Konstanta): Ini adalah matriks kolom yang berisi angka-angka di ruas kanan setiap persamaan.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Mengapa pemisahan ini berguna? Karena bentuk $AX = B$ adalah bentuk standar yang akan sering kita jumpai dan gunakan dalam aljabar linear. Ini menyederhanakan cara kita memandang dan memanipulasi sistem persamaan yang besar.

4.2.2 Matriks Augmented (Matriks yang Diperbesar): Menggabungkan Semuanya

Untuk keperluan penyelesaian SPL menggunakan metode seperti Eliminasi Gauss (yang akan kita pelajari di Bab 5), kita sering menggunakan **Matriks Augmented**, yang dinotasikan sebagai $[A|B]$. Matriks ini adalah gabungan dari matriks koefisien A dan matriks konstanta B, dengan sebuah garis vertikal sebagai pemisah untuk mengingatkan kita asal-usulnya.

Misalnya, untuk SPL 3 variabel dari contoh belanja tadi:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z &= 26000 \\ 3x + 3y + z &= 21000 \\ 3x + 0y + z &= 12000 \end{aligned}$$

Matriks augmented-nya adalah:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 26000 \\ 3 & 3 & 1 & 21000 \\ 3 & 0 & 1 & 12000 \end{array}\right]$$

Matriks augmented inilah yang akan menjadi "arena bermain" kita saat melakukan Operasi Baris Elementer di bab berikutnya.

4.2.3 Ordo Matriks dan Elemen Matriks

Setiap matriks memiliki ukuran dan elemen-elemen penyusunnya.

- **Baris dan Kolom**: Dalam sebuah matriks, susunan angka yang horizontal (mendatar) disebut baris, sedangkan susunan angka yang vertikal (tegak) disebut kolom.
- **Ordo Matriks**: Ordo atau ukuran sebuah matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Jika sebuah matriks memiliki m baris dan n kolom, maka ordonya adalah $m \times n$ (dibaca "m kali n").
- **Elemen Matriks**: Setiap angka yang ada di dalam matriks disebut elemen matriks. Untuk menunjukkan posisi suatu elemen, kita menggunakan notasi a_{ij}, yang berarti elemen tersebut berada pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Contoh: Perhatikan matriks P berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- Matriks P memiliki 2 baris dan 3 kolom. Jadi, ordo matriks P adalah 2×3.
- Elemen pada baris ke-1, kolom ke-1 adalah $p_{11} = 7$.
- Elemen pada baris ke-1, kolom ke-2 adalah $p_{12} = 4$.
- Elemen pada baris ke-2, kolom ke-3 adalah $p_{23} = 9$.
- Elemen $p_{21} = 2$.

Menguasai notasi dasar seperti ordo dan a_{ij} ini sangat penting. Dalam matematika, komunikasi yang presisi adalah kunci. Nantinya, saat kita mempelajari operasi antar matriks (seperti penjumlahan atau perkalian) atau melakukan Operasi Baris Elementer, aturan-aturannya akan sangat bergantung pada ordo matriks dan kita akan sering merujuk pada baris atau elemen tertentu. Memahami notasi ini dari sekarang akan mencegah banyak kebingungan di kemudian hari. Ini seperti belajar alfabet sebelum kita bisa merangkai kata dan kalimat.

4.3 Latihan Soal Bab 4

Untuk menguji pemahamanmu terhadap materi Bab 4, kerjakan langkah-langkah berikut untuk setiap soal cerita:

1. Identifikasi variabel-variabel yang tidak diketahui dan definisikan simbolnya.
2. Tuliskan sistem persamaan linear (SPL) yang merepresentasikan informasi dalam soal.
3. Nyatakan matriks koefisien (A), vektor variabel (X), dan vektor konstanta (B).
4. Bentuk matriks augmented $[A \mid B]$.

4.3.1 Soal Dasar

a) Rina membeli 2 buah apel dan 3 buah jeruk dengan total harga Rp13.000. Di toko yang sama, Adi membeli 1 buah apel dan 5 buah jeruk dengan total harga Rp15.000.

b) Jumlah dua bilangan adalah 30, dan selisihnya (bilangan pertama dikurangi bilangan kedua) adalah 6.

4.3.2 Variasi Soal

a) Sebuah tempat parkir menampung mobil dan motor. Diketahui total kendaraan sebanyak 25 unit, dengan jumlah seluruh roda 70 (mobil beroda 4, motor beroda 2). Tentukan SPL yang sesuai.

b) Ani, Budi, dan Cita membeli alat tulis sebagai berikut:

- Ani: 1 buku, 2 pensil, dan 1 penghapus seharga Rp10.000.
- Budi: 2 buku dan 1 pensil seharga Rp11.000 (tanpa penghapus).
- Cita: 1 pensil dan 1 penghapus seharga Rp4.000 (tanpa buku).

Tentukan SPL yang sesuai.

4.3.3 Soal Tantangan

a) Sebuah pabrik kimia ingin membuat 100 liter larutan asam dengan konsentrasi 36%. Tersedia tiga stok larutan:

- Larutan A: 20% asam.
- Larutan B: 30% asam.
- Larutan C: 50% asam.

Karena keterbatasan bahan, volume larutan A harus dua kali volume larutan B. Berapa liter masing-masing larutan yang harus dicampurkan?

Mengerjakan latihan ini akan memperkuat pemahaman bagaimana merepresentasikan masalah nyata ke dalam sistem persamaan dan matriks. Selamat berlatih!

Bab 5

Operasi Baris Elementer & Eliminasi Gauss

Selamat datang di Bab 5, bab yang sangat penting dalam perjalanan kita belajar Aljabar Linear! Di bab ini, kita akan mempelajari "jurus-jurus sakti" yang disebut Operasi Baris Elementer (OBE). Dengan OBE, kita bisa mengubah matriks, khususnya matriks augmented dari sebuah SPL, menjadi bentuk yang jauh lebih sederhana. Dari bentuk sederhana ini, solusi SPL-nya bisa kita temukan dengan mudah. Proses mengubah matriks ini kita kenal sebagai Eliminasi Gauss. Bab ini adalah prioritas utama, jadi pastikan kamu memahaminya dengan baik. Kita akan membahasnya langkah demi langkah dengan banyak contoh. Siap? Ayo mulai!

5.1 Apa itu Operasi Baris Elementer (OBE)?

5.1.1 Analogi Pembuka: Resep Masakan Ajaib

Bayangkan kamu punya sebuah resep masakan yang terdiri dari beberapa langkah (ini seperti sistem persamaan linear kita). Nah, saat kamu mengikuti resep itu, kamu boleh melakukan beberapa "modifikasi" pada urutan atau cara kamu melakukan langkah-langkah tersebut, asalkan hasil akhir masakannya tetap sama enaknya. Misalnya:

1. **Menukar urutan langkah:** Mungkin ada dua langkah yang urutannya bisa ditukar tanpa memengaruhi hasil akhir. (Ini mirip dengan menukar dua baris dalam matriks).

2. **Menggandakan atau membagi bahan dalam satu langkah:** Jika satu langkah resep menyuruhmu menggunakan 1 sendok teh garam, dan kamu ingin membuat masakan dua kali lipat lebih banyak, kamu bisa menggandakan semua bahan di langkah itu, termasuk garam menjadi 2 sendok teh. Selama semua bahan di langkah itu dikalikan dengan angka yang sama (dan bukan nol!), proporsinya tetap terjaga. (Ini mirip dengan mengalikan satu baris dengan skalar bukan nol).

3. **Menggabungkan informasi dari dua langkah:** Mungkin kamu bisa mengambil informasi dari satu langkah (misalnya, jumlah gula) dan menggunakannya untuk menyesuaikan langkah lain (misalnya, mengurangi jumlah pemanis buatan). (Ini mirip dengan menambahkan kelipatan satu baris ke baris lain).

Selama kamu melakukan "modifikasi" ini dengan benar dan hati-hati, rasa akhir masakanmu (solusi SPL-nya) tidak akan berubah! Inilah inti dari Operasi Baris Elementer. Kita menggunakan OBE untuk "menyulap" matriks augmented kita menjadi bentuk yang lebih sederhana, sehingga solusi SPL-nya bisa "terlihat" dengan jelas, tanpa mengubah solusi aslinya.

Mengapa kita butuh OBE? Tujuannya adalah untuk menyederhanakan matriks yang mewakili sistem persamaan linear. Dengan menyederhanakannya, kita bisa lebih mudah menemukan nilai variabel-variabel yang tidak diketahui. Proses ini seperti membersihkan kamar yang berantakan agar kita bisa menemukan barang yang kita cari dengan lebih mudah.

5.1.2 Memperkenalkan 3 Jenis OBE (satu per satu)

Ada tiga jenis Operasi Baris Elementer yang bisa kita lakukan pada sebuah matriks. Mari kita bahas satu per satu.

1. Menukar Dua Baris (Notasi: $R_i \leftrightarrow R_j$ atau $B_i \leftrightarrow B_j$)

Penjelasan Intuitif: Bayangkan kamu punya daftar belanjaan yang ditulis dalam beberapa baris. Jika kamu menukar urutan dua baris dalam daftar itu, apakah isi daftar belanjamu berubah? Tentu tidak! Hal yang sama berlaku untuk persamaan dalam SPL. Menukar posisi dua persamaan tidak akan mengubah solusi dari sistem tersebut. Dalam konteks matriks augmented, setiap baris mewakili satu persamaan. Jadi, menukar dua baris sama saja dengan menukar urutan dua persamaan.

Contoh 1 (Matriks Augmented 2×3): Misalkan kita punya matriks augmented:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Kita lihat elemen di baris pertama, kolom pertama (a_{11}) adalah 0. Untuk mempermudah perhitungan nanti (kita akan sering ingin elemen pertama di baris pertama ini bukan nol, idealnya 1), kita bisa menukar Baris 1 (R_1) dengan Baris 2 (R_2). Operasinya kita tulis: $R_1 \leftrightarrow R_2$.

Hasilnya:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Langkah ini dilakukan karena kita biasanya ingin ada angka bukan nol (dan nanti akan kita usahakan menjadi 1) di posisi "paling kiri atas" dari bagian matriks yang sedang kita kerjakan.

Contoh 2 (Matriks Augmented 3×4): Misalkan kita punya matriks augmented:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

Jika kita ingin elemen di pojok kiri atas (b_{11}) menjadi 1 (karena di Baris 3 ada angka 1 di kolom pertama), kita bisa menukar Baris 1 (R_1) dengan Baris 3 (R_3).

Operasinya: $R_1 \leftrightarrow R_3$.

Hasilnya:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Operasi menukar baris ini sering digunakan sebagai langkah awal untuk mengatur matriks agar lebih mudah diolah.

Catatan:

- **"Mengapa ini sah dilakukan?"** Setiap baris dalam matriks augmented mewakili sebuah persamaan. Menukar urutan persamaan dalam sebuah sistem tidak akan mengubah himpunan solusi dari sistem tersebut. Bayangkan kamu punya dua fakta: "Apel itu merah" dan "Langit itu biru". Kalau kamu tukar urutannya menjadi "Langit itu biru" dan "Apel itu merah", apakah kedua fakta itu jadi salah atau berubah maknanya? Tentu tidak! Solusi SPL adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi semua persamaan secara bersamaan, jadi urutan penulisannya tidak jadi masalah.
- **"Kesalahan umum":** Salah menyalin angka-angka ketika menulis ulang matriks setelah pertukaran. Terkadang, siswa hanya menukar beberapa elemen, bukan seluruh baris. Pastikan semua elemen dalam satu baris ikut pindah bersama-sama!
- **"Tips mudah mengingat ini":** Bayangkan kamu punya dua lembar kertas, masing-masing berisi satu persamaan. Kamu hanya memindahkan posisi lembaran kertas itu dalam tumpukan. Isi informasinya tidak berubah, hanya urutannya saja.

2. Mengalikan Baris dengan Skalar Bukan Nol (Notasi: $kR_i \to R_i$ atau $kB_i \to B_i$)

Penjelasan Intuitif: Misalkan kamu punya persamaan $x + y = 2$. Jika kamu mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan angka 3, persamaannya menjadi $3x+3y = 6$. Apakah nilai x dan y yang memenuhi persamaan pertama juga memenuhi persamaan kedua? Tentu saja! Solusinya tidak berubah. Yang penting, pengalinya tidak boleh nol. Jika dikalikan nol, persamaannya jadi $0 = 0$, dan kita kehilangan semua informasi awal!

Contoh 1 (Matriks Augmented 2×3): Misalkan kita punya matriks:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

Kita ingin membuat elemen pertama di Baris 1 (a_{11}) menjadi 1. Saat ini nilainya 2. Caranya adalah dengan mengalikan seluruh Baris 1 dengan $\frac{1}{2}$ (atau membagi dengan 2). Operasinya kita tulis: $\frac{1}{2}R_1 \to R_1$.

Perhitungannya:

- Elemen pertama baru: $\frac{1}{2} \times 2 = 1$
- Elemen kedua baru: $\frac{1}{2} \times 4 = 2$
- Elemen ketiga baru (konstanta): $\frac{1}{2} \times 10 = 5$
- Baris 2 tetap.

Hasilnya:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

Contoh 2 (Matriks Augmented 3×4): Misalkan kita punya matriks:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Kita ingin membuat elemen kedua di Baris 2 (b_{22}) menjadi 1. Saat ini nilainya -3. Kita bisa mengalikan seluruh Baris 2 dengan $-\frac{1}{3}$. Operasinya: $-\frac{1}{3}R_2 \to R_2$.

Perhitungannya untuk Baris 2:

- $0 \times (-\frac{1}{3}) = 0$
- $-3 \times (-\frac{1}{3}) = 1$
- $6 \times (-\frac{1}{3}) = -2$
- $9 \times (-\frac{1}{3}) = -3$

Baris 1 dan 3 tetap.
Hasilnya:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Operasi ini sangat berguna untuk menciptakan "1 utama" (leading one) yang akan kita bahas lebih lanjut nanti.

Catatan:

- **"Mengapa ini sah dilakukan?"** Karena jika kita mengalikan kedua sisi sebuah persamaan dengan bilangan tak nol ($k \neq 0$) yang sama, kita mendapatkan persamaan baru yang ekuivalen, artinya memiliki himpunan solusi yang sama dengan persamaan awal. Jika $P = Q$ adalah sebuah persamaan, maka $kP = kQ$ juga benar untuk $k \neq 0$.
- **"Kesalahan umum":** Mengalikan hanya beberapa elemen dalam satu baris, bukan semuanya (termasuk angka di sebelah kanan garis pada matriks augmented). Lupa bahwa skalar pengali harus diterapkan ke seluruh baris. Kesalahan fatal lainnya adalah mengalikan baris dengan nol, karena ini akan menghilangkan informasi dari persamaan tersebut (menjadi $0 = 0$).
- **"Tips mudah mengingat ini":** Pastikan setiap teman di satu baris itu mendapatkan perlakuan yang sama, yaitu dikalikan dengan angka skalar yang sama. Jangan ada yang terlewat!

3. Menambahkan Kelipatan Baris Lain ke Suatu Baris (Notasi: $R_i + kR_j \to R_i$ atau $B_i + kB_j \to B_i$)

Penjelasan Intuitif: Ini adalah "jurus" yang paling sering dipakai dan paling mirip dengan metode eliminasi yang mungkin sudah kamu kenal waktu belajar SPL di SMP atau awal SMA. Bayangkan kamu punya dua persamaan, sebut saja PersamaanAtas dan PersamaanBawah. Kamu boleh mengganti PersamaanBawah dengan PersamaanBawah + (sekian kali) PersamaanAtas. Tujuannya biasanya untuk menghilangkan salah satu variabel di PersamaanBawah.

Contoh 1 (Matriks Augmented 2×3): Misalkan kita punya matriks dari contoh sebelumnya:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

Kita ingin membuat elemen pertama di Baris 2 (a_{21}) menjadi 0. Saat ini nilainya 1. Kita bisa menggunakan Baris 1 sebagai "alat bantu". Agar a_{21} menjadi 0, kita perlu mengurangkan Baris 1 dari Baris 2 (atau menambahkan -1 kali Baris 1 ke Baris 2).

Operasinya kita tulis: $R_2 - R_1 \to R_2$ (atau $R_2 + (-1)R_1 \to R_2$).

Baris yang diubah adalah R_2. Baris R_1 tetap.

Perhitungan untuk elemen-elemen Baris 2 yang baru:

- Elemen kolom 1: $a_{21,\text{baru}} = a_{21,\text{lama}} - a_{11,\text{lama}} = 1 - 1 = 0$
- Elemen kolom 2: $a_{22,\text{baru}} = a_{22,\text{lama}} - a_{12,\text{lama}} = 3 - 2 = 1$
- Elemen kolom 3 (konstanta): $a_{23,\text{baru}} = a_{23,\text{lama}} - a_{13,\text{lama}} = 7 - 5 = 2$

Hasilnya:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Lihat! Elemen di bawah a_{11} (yang merupakan 1 utama kita) sekarang sudah menjadi 0. Inilah tujuan utama operasi ini dalam proses Eliminasi Gauss.

Contoh 2 (Matriks Augmented 3×4): Misalkan kita punya matriks:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

Kita ingin membuat elemen kedua di Baris 3 (b_{32}) menjadi 0. Saat ini nilainya -2. Kita bisa menggunakan Baris 2 sebagai "alat bantu" karena elemen b_{22} adalah 1 (ini memudahkan). Agar b_{32} yang bernilai -2 menjadi 0, kita perlu menambahkan 2 kali Baris 2 ke Baris 3.

Operasinya: $R_3 + 2R_2 \to R_3$.

Baris yang diubah adalah R_3. Baris R_1 dan R_2 tetap.

Perhitungan untuk elemen-elemen Baris 3 yang baru:

- Elemen kolom 1: $b_{31,\text{baru}} = b_{31,\text{lama}} + 2 \times b_{21,\text{lama}} = 0 + 2 \times 0 = 0$
- Elemen kolom 2: $b_{32,\text{baru}} = b_{32,\text{lama}} + 2 \times b_{22,\text{lama}} = -2 + 2 \times 1 = 0$ (Ini target kita!)
- Elemen kolom 3: $b_{33,\text{baru}} = b_{33,\text{lama}} + 2 \times b_{23,\text{lama}} = 3 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$
- Elemen kolom 4 (konstanta): $b_{34,\text{baru}} = b_{34,\text{lama}} + 2 \times b_{24,\text{lama}} = 7 + 2 \times 3 = 7 + 6 = 13$

Hasilnya:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 13 \end{array}\right]$$

Operasi ini adalah tulang punggung dari metode eliminasi.

Catatan:

- **"Mengapa ini sah dilakukan?"** Jika kita memiliki dua persamaan yang benar, katakanlah $P = Q$ (Persamaan 1) dan $S = T$ (Persamaan 2). Maka, jika kita mengganti Persamaan 1 dengan $(P + kS) = (Q + kT)$ (yaitu Persamaan 1 + k kali Persamaan 2), sistem persamaan yang baru akan memiliki solusi yang sama dengan sistem awal. Ini karena kita pada dasarnya menambahkan "sesuatu yang sama" (kS dan kT) ke kedua sisi persamaan $P = Q$.
- **"Kesalahan umum":** Kesalahan berhitung, terutama saat melibatkan bilangan negatif atau pecahan. Salah menentukan nilai k (pengali). Kesalahan yang sering terjadi adalah mengubah baris acuan (R_j) padahal seharusnya baris target (R_i) yang diubah. Lupa bahwa k bisa positif atau negatif (jika k negatif, berarti kita mengurangkan kelipatan baris lain).
- **"Tips mudah mengingat ini":**
  1. Tentukan dulu elemen mana yang mau kamu buat jadi nol (ini ada di baris target, R_i).
  2. Lihat elemen di kolom yang sama pada baris lain yang akan jadi acuan (pivot, biasanya di R_j).
  3. Pikirkan: "Elemen di R_j ini harus dikali berapa (k), supaya kalau ditambahkan ke elemen target di R_i, hasilnya jadi nol?"
  4. Ingat, baris yang ditulis di akhir notasi ($\to R_i$) adalah baris yang berubah. Baris acuan (R_j) tetap sama setelah operasi ini selesai.

Ketiga Operasi Baris Elementer ini—menukar baris, mengalikan baris dengan skalar tak nol, dan menambahkan kelipatan baris lain ke suatu baris—membentuk satu set "alat" yang lengkap. Artinya, dengan hanya menggunakan ketiga operasi ini, kita bisa menyederhanakan matriks apapun ke bentuk tertentu yang lebih mudah dianalisis (seperti Bentuk Eselon Baris atau Bentuk Eselon Baris Tereduksi) tanpa mengubah solusi dari sistem persamaan linear yang diwakilinya. Ini menunjukkan betapa kuatnya pemilihan operasi dasar yang tepat. Meskipun terlihat seperti "trik" sulap, ketiga OBE ini dipilih secara cermat dalam matematika karena mereka cukup ampuh untuk mencapai tujuan penyederhanaan dan cukup "aman" karena tidak mengubah esensi solusi masalah. Ini adalah fondasi dari algoritma Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan yang akan segera kita kuasai.

5.2 Eliminasi Gauss: Menyederhanakan Sistem dengan OBE

Setelah kita berkenalan dengan tiga jurus Operasi Baris Elementer (OBE), sekarang saatnya kita menggunakan jurus-jurus tersebut secara strategis! Tujuan kita adalah mengubah matriks augmented dari sebuah Sistem Persamaan Linear (SPL) menjadi bentuk yang lebih "cantik", lebih sederhana, sehingga solusinya bisa kita "baca" dengan lebih mudah. Proses sistematis menggunakan OBE untuk mencapai tujuan ini disebut Eliminasi Gauss.

5.2.1 Apa itu Bentuk Eselon Baris (Row Echelon Form / REF)?

Sebelum kita melangkah lebih jauh dengan Eliminasi Gauss, kita perlu tahu dulu target kita. Bentuk matriks yang ingin kita capai melalui Eliminasi Gauss disebut Bentuk Eselon Baris (Row Echelon Form, disingkat REF).

Intuisi: Bayangkan kita sedang merapikan angka-angka dalam matriks sehingga membentuk semacam "anak tangga" yang menurun ke kanan. Setiap "pijakan" anak tangga ini adalah angka 1, dan semua angka di bawah setiap pijakan tersebut adalah 0. Keren, kan?

Definisi Penting Sebelum Sifat-sifat REF:

- **Entri Utama (Leading Entry atau Pivot):** Dalam setiap baris matriks yang tidak seluruhnya terdiri dari angka nol, angka pertama dari kiri yang bukan nol disebut entri utama atau pivot. Jadi, kalau ada baris $[0\ 0\ 5\ 2]$, maka angka 5 adalah entri utamanya.
- **Baris Nol:** Sebuah baris disebut baris nol jika semua elemen atau entri di baris tersebut adalah angka nol. Contoh: $[0\ 0\ 0\ 0]$.

Sifat-sifat Bentuk Eselon Baris (REF): Sebuah matriks dikatakan dalam Bentuk Eselon Baris jika memenuhi semua kondisi berikut:

1. Jika sebuah baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka entri utama (pivot) di baris tersebut adalah angka 1. Angka 1 ini sering disebut 1 utama (leading 1).
   - Contoh: Di baris $[0\ 1\ 3\ -2]$, angka 1 adalah 1 utama.
   - Contoh bukan: Di baris $[0\ 2\ 4\ 6]$, entri utamanya 2, bukan 1. Jadi ini belum memenuhi sifat 1 REF.
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol (baris nol), maka semua baris nol tersebut harus dikelompokkan di bagian paling bawah matriks.
   - Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ (Salah, baris nol di tengah)} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Benar, baris nol di bawah)}$$

3. Untuk dua baris berurutan yang bukan baris nol, 1 utama pada baris yang lebih bawah harus terletak di kolom yang lebih ke kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi. Inilah yang menciptakan efek "anak tangga" menurun ke kanan.

    - Contoh (Perhatikan posisi 1 utama):

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \text{ (Benar, 1 utama makin ke kanan)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ \underline{1} & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 7 \end{bmatrix} \text{ (Salah, 1 utama di } R_2 \text{ lebih kiri dari } R_1\text{)}$$

Contoh Matriks REF dan Bukan REF: Mari kita lihat beberapa contoh:

Matriks dalam Bentuk Eselon Baris (REF):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Periksalah sendiri apakah matriks A, B, C, dan D memenuhi ketiga sifat REF di atas!

Matriks yang BUKAN dalam Bentuk Eselon Baris:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Alasan: Entri utama di } R_2 \text{ bukan 1)}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(Alasan: Baris nol tidak di paling bawah)}$$

$$G = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ \underline{1} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Alasan: 1 utama di } R_2 \text{ tidak lebih}$$

kanan dari R_1, dan ada angka 1 di bawah 1 utama R_1)

5.2.2 Langkah-langkah Eliminasi Gauss (Menuju REF)

Sekarang kita siap untuk melakukan Eliminasi Gauss! Proses ini menggunakan OBE secara sistematis.

Strategi Umum: Kita akan bekerja pada matriks augmented, kolom demi kolom, dari paling kiri ke paling kanan. Di setiap kolom (yang sedang kita kerjakan), kita akan berusaha:

1. Menciptakan 1 utama di posisi diagonal (atau posisi "pijakan tangga" berikutnya).

2. Membuat semua entri di bawah 1 utama tersebut menjadi nol.

Contoh Sistem 2×2 (Matriks Augmented 2×3)

Misalkan kita punya SPL:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 2x + 5y &= 12 \end{aligned}$$

Matriks augmented-nya:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 12 \end{array}\right]$$

Langkah 1: Fokus pada Kolom 1. **Tujuan 1.1:** Dapatkan 1 utama di posisi R_1C_1 (baris 1, kolom 1). Kita lihat, a_{11} sudah bernilai 1. Beruntung! Jadi, tidak perlu OBE untuk ini.

Tujuan 1.2: Buat nol di bawah 1 utama tersebut, yaitu pada posisi R_2C_1. Saat ini $a_{21} = 2$. Kita ingin mengubahnya menjadi 0 menggunakan R_1 sebagai acuan.

Operasi OBE yang tepat adalah: $R_2 - 2R_1 \to R_2$. (Artinya: Baris 2 yang baru adalah Baris 2 yang lama dikurangi 2 kali Baris 1 yang lama).

Mari kita hitung elemen-elemen baru untuk R_2:

- $a_{21,\text{baru}} = a_{21,\text{lama}} - 2 \times a_{11,\text{lama}} = 2 - 2 \times 1 = 0$

- $a_{22,\text{baru}} = a_{22,\text{lama}} - 2 \times a_{12,\text{lama}} = 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1$

- $a_{23,\text{baru}}(\text{konstanta}) = a_{23,\text{lama}} - 2 \times a_{13,\text{lama}} = 12 - 2 \times 7 = 12 - 14 = -2$

Matriks baru kita menjadi:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Kolom 1 sudah beres!

Langkah 2: Fokus pada Kolom 2 (dimulai dari Baris 2). **Tujuan 2.1:** Dapatkan 1 utama di posisi R_2C_2.

Saat ini $a_{22} = -1$. Kita ingin mengubahnya menjadi 1.

Operasi OBE yang tepat adalah: $(-1)R_2 \to R_2$. (Artinya: Kalikan semua elemen di Baris 2 dengan -1).

Mari kita hitung elemen-elemen baru untuk R_2:

- $a_{21,\text{baru}} = -1 \times 0 = 0$

- $a_{22,\text{baru}} = -1 \times (-1) = 1$

- $a_{23,\text{baru}}(\text{konstanta}) = -1 \times (-2) = 2$

Matriks baru kita menjadi:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Matriks ini sudah dalam Bentuk Eselon Baris (REF)! Semua sifat REF terpenuhi.

Substitusi Balik untuk Mendapatkan Solusi: Matriks REF terakhir ini setara dengan sistem persamaan:

1. $1x + 3y = 7 \rightarrow x + 3y = 7$
2. $0x + 1y = 2 \rightarrow y = 2$

Dari persamaan kedua, kita langsung dapat $y = 2$.
Sekarang, substitusikan nilai $y = 2$ ini ke persamaan pertama:

$$\begin{aligned} x + 3(2) &= 7 \\ x + 6 &= 7 \\ x &= 7 - 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, solusi SPL tersebut adalah $x = 1$ dan $y = 2$.
Proses mencari solusi dari matriks REF ini disebut substitusi balik, karena kita mulai dari variabel paling bawah (atau paling kanan dalam konteks persamaan) lalu bergerak "mundur" ke atas.

Contoh Sistem 3×3 (Matriks Augmented 3×4)

Misalkan SPL-nya adalah:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Matriks augmented-nya:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Langkah 1: Fokus Kolom 1. R_1C_1 sudah 1 (1 utama).
Buat nol di R_2C_1 (nilainya 2): $R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$
$R_{2,\text{baru}} = [2 - 2(1)\ 4 - 2(1)\ \ -3 - 2(2) \mid 1 - 2(9)] = [0\ 2\ \ -7 \mid \ -17]$
Matriks menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Buat nol di R_3C_1 (nilainya 3): $R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3$
$R_{3,\text{baru}} = [3 - 3(1)\ 6 - 3(1)\ \ -5 - 3(2) \mid 0 - 3(9)] = [0\ 3\ \ -11 \mid \ -27]$

Matriks menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Kolom 1 beres!

Langkah 2: Fokus Kolom 2 (mulai dari R_2). Buat 1 utama di R_2C_2 (nilainya 2): $\frac{1}{2}R_2 \to R_2$

$R_{2,\text{baru}} = [0\ \frac{1}{2}(2)\ \frac{1}{2}(-7) \mid \frac{1}{2}(-17)] = [0\ 1\ -\frac{7}{2} \mid -\frac{17}{2}]$

Matriks menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Buat nol di R_3C_2 (nilainya 3), menggunakan R_2 yang baru sebagai acuan: $R_3 - 3R_2 \to R_3$

$R_{3,\text{baru}}$:

- C1: $0 - 3(0) = 0$
- C2: $3 - 3(1) = 0$
- C3: $-11 - 3(-\frac{7}{2}) = -11 + \frac{21}{2} = -\frac{22}{2} + \frac{21}{2} = -\frac{1}{2}$
- C4: $-27 - 3(-\frac{17}{2}) = -27 + \frac{51}{2} = -\frac{54}{2} + \frac{51}{2} = -\frac{3}{2}$

Matriks menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Kolom 2 beres!

Langkah 3: Fokus Kolom 3 (mulai dari R_3). Buat 1 utama di R_3C_3 (nilainya $-\frac{1}{2}$): $(-2)R_3 \to R_3$

$R_{3,\text{baru}} = [0\ 0\ -2(-\frac{1}{2}) \mid -2(-\frac{3}{2})] = [0\ 0\ 1 \mid 3]$

Matriks menjadi (dan ini sudah REF!):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Kolom 3 beres, dan matriks kita sudah dalam Bentuk Eselon Baris!

Substitusi Balik: Dari matriks REF, kita punya sistem:

1. $x + y + 2z = 9$
2. $y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$
3. $z = 3$

Dari Persamaan 3: $z = 3$.
Substitusi $z = 3$ ke Persamaan 2:

$$\begin{aligned} y - \frac{7}{2}(3) &= -\frac{17}{2} \\ y - \frac{21}{2} &= -\frac{17}{2} \\ y &= -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Jadi, $y = 2$.
Substitusi $y = 2$ dan $z = 3$ ke Persamaan 1:

$$\begin{aligned} x + 2 + 2(3) &= 9 \\ x + 2 + 6 &= 9 \\ x + 8 &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Solusi: $x = 1, y = 2, z = 3$.
Contoh-contoh seperti ini, meskipun melibatkan pecahan, penting untuk dikerjakan dengan teliti.

Catatan Tambahan:

- **"Mengapa langkah ini penting?"** Setiap langkah dalam Eliminasi Gauss membawa kita lebih dekat ke bentuk "anak tangga" (REF) yang rapi. Dari bentuk ini, kita bisa mulai "membaca" solusi dari persamaan paling bawah, lalu naik ke atas satu per satu. Ini jauh lebih terstruktur daripada mencoba substitusi atau eliminasi secara acak pada sistem yang besar.
- **"Kesalahan umum yang sering terjadi":**
  - Kesalahan Aritmatika: Ini yang paling sering! Salah hitung penjumlahan, pengurangan, perkalian, atau pembagian, terutama jika ada bilangan negatif atau pecahan.
  - Salah Memilih/Menerapkan OBE: Misalnya, lupa mengalikan semua elemen satu baris dengan skalar, atau salah menentukan pengali k saat menambahkan kelipatan baris.
  - Tidak Sistematis: Melompat-lompat antar kolom atau baris tanpa menyelesaikan satu bagian dulu. Ini bisa membuat proses jadi berputar-putar dan tidak efisien.
  - Lupa Tujuan: Kehilangan arah mau dibawa ke mana matriksnya (lupa targetnya adalah REF).
- **"Tips mudah mengingat ini" (Algoritma Sederhana):**
  1. **Pilih Kolom:** Mulai dari kolom paling kiri yang belum "dibereskan".
  2. **Dapatkan 1 Utama:** Di kolom tersebut, usahakan angka 1 berada di baris paling atas yang mungkin (ini akan jadi 1 utama). Gunakan

OBE tukar baris jika ada angka 1 atau angka lain yang mudah dijadikan 1 di baris bawahnya. Jika tidak ada angka 1, tapi ada angka tak nol, kalikan baris tersebut dengan kebalikan angka itu untuk menjadikannya 1.

3. **Nolkan Bawahnya:** Gunakan 1 utama yang baru saja kamu buat untuk "membersihkan" semua angka di bawahnya (dalam kolom yang sama) menjadi 0. Lakukan ini dengan OBE $R_{\text{bawah}} - (\text{angka target}) \times R_{\text{atas}} \to R_{\text{bawah}}$.
4. **"Tutup Mata" dan Ulangi:** Anggap baris yang sudah memiliki 1 utama dan kolom yang sudah dibersihkan itu "selesai". Pindah ke kolom berikutnya dan baris berikutnya di bawah 1 utama tadi. Ulangi dari langkah 2 untuk sisa matriks yang lebih kecil.

Eliminasi Gauss pada dasarnya adalah sebuah algoritma. Ini bukan sekadar kumpulan trik acak, melainkan sebuah prosedur langkah demi langkah yang terstruktur. Jika diikuti dengan benar, algoritma ini dijamin akan menghasilkan Bentuk Eselon Baris (REF). Menekankan sifat algoritmik ini membantu kita melihatnya sebagai proses yang bisa dipelajari dan dikuasai secara sistematis, bukan sesuatu yang membutuhkan "keajaiban" atau tebakan. Pemahaman ini juga penting karena algoritma adalah konsep sentral dalam banyak bidang matematika dan ilmu komputer.

5.3 Gauss vs. Gauss-Jordan: Mana yang Lebih "Bersih"?

Kita sudah belajar Eliminasi Gauss yang membawa matriks augmented ke Bentuk Eselon Baris (REF), lalu kita pakai substitusi balik untuk dapat solusinya. Ternyata, ada "kakak" dari Eliminasi Gauss, yaitu Eliminasi Gauss-Jordan. Metode ini melanjutkan pekerjaan OBE hingga matriksnya mencapai bentuk yang lebih "bersih" lagi, yaitu Bentuk Eselon Baris Tereduksi (RREF). Dari RREF, solusinya bisa langsung terbaca tanpa perlu substitusi balik!

5.3.1 Apa Bedanya?

- **Eliminasi Gauss:** Berhenti di REF. Solusi didapat dengan substitusi balik.
- **Eliminasi Gauss-Jordan:** Lanjut dari REF ke RREF. Solusi langsung terlihat di matriks akhir.

Intinya, Eliminasi Gauss-Jordan melakukan lebih banyak OBE untuk membuat nol tidak hanya di bawah 1 utama, tetapi juga di atas 1 utama. Hasilnya adalah matriks yang sangat rapi, seringkali mendekati matriks identitas di bagian koefisiennya.

5.3.2 Apa itu Bentuk Eselon Baris Tereduksi (Reduced Row Echelon Form / RREF)?

Intuisi: Ini adalah versi "super rapi" dari REF. Kalau REF itu seperti tangga dengan pijakan angka 1 dan semua di bawah pijakan itu bersih (nol), maka RREF adalah tangga di mana tidak hanya di bawah pijakan yang bersih, tapi juga di atas pijakan (dalam kolom yang sama) semuanya nol! Jadi, setiap kolom yang punya 1 utama, elemen-elemen lain di kolom itu pasti nol. Ini membuat solusi SPL jadi sangat jelas terlihat, seperti $x =$ nilai, $y =$ nilai, $z =$ nilai.

Sifat-sifat RREF: Sebuah matriks ada dalam RREF jika memenuhi semua sifat REF, ditambah satu sifat lagi:

1. (Sama seperti REF) Jika sebuah baris tidak seluruhnya nol, maka entri utamanya adalah 1 (1 utama).
2. (Sama seperti REF) Jika ada baris nol, semua baris nol ada di paling bawah.
3. (Sama seperti REF) Untuk dua baris tak nol berurutan, 1 utama di baris bawah lebih ke kanan dari 1 utama di baris atas.
4. **(Sifat Tambahan untuk RREF)** Setiap kolom yang mengandung 1 utama memiliki angka nol di semua entri lainnya di kolom tersebut (baik di atas maupun di bawah 1 utama itu).

Contoh Matriks RREF:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan matriks P. Di kolom pertama, ada 1 utama di R_1C_1, dan elemen lain di kolom itu (yaitu R_2C_1 dan R_3C_1) adalah nol. Begitu juga untuk kolom kedua dan ketiga. Matriks I_3 adalah contoh matriks identitas, yang selalu dalam bentuk RREF.

5.3.3 Contoh Perbandingan: Menyelesaikan Sistem yang Sama

Mari kita gunakan lagi SPL 3×3 dari contoh Eliminasi Gauss di 5.2:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Setelah Eliminasi Gauss, kita mendapatkan REF:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

1. Penyelesaian dengan Eliminasi Gauss + Substitusi Balik

Kita sudah lakukan ini di 5.2 dan mendapatkan solusi $x = 1, y = 2, z = 3$.

2. Penyelesaian dengan Eliminasi Gauss-Jordan (melanjutkan dari REF ke RREF)

Tujuan kita sekarang adalah membuat nol juga di atas setiap 1 utama. Kita biasanya mulai dari 1 utama paling kanan-bawah, lalu bergerak ke kiri-atas.

Matriks awal (REF):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{array}\right] \quad \leftarrow R_3 \text{ (Pivot saat ini di } R_3C_3\text{)}$$

Target: Buat nol di atas 1 utama di R_3C_3. Nolkan elemen R_2C_3 (yang nilainya $-\frac{7}{2}$). Operasi: $R_2 + \frac{7}{2}R_3 \to R_2$.

$R_{2,\text{baru}}$:

- C1: $0 + \frac{7}{2}(0) = 0$
- C2: $1 + \frac{7}{2}(0) = 1$
- C3: $-\frac{7}{2} + \frac{7}{2}(1) = 0$
- C4: $-\frac{17}{2} + \frac{7}{2}(3) = -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Matriks menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Nolkan elemen R_1C_3 (yang nilainya 2). Operasi: $R_1 - 2R_3 \to R_1$.

$R_{1,\text{baru}}$:

- C1: $1 - 2(0) = 1$
- C2: $1 - 2(0) = 1$
- C3: $2 - 2(1) = 0$
- C4: $9 - 2(3) = 9 - 6 = 3$

Matriks menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \leftarrow R_2 \text{ (Pindah ke pivot berikutnya di } R_2C_2\text{)}$$

Target: Buat nol di atas 1 utama di R_2C_2. Nolkan elemen R_1C_2 (yang nilainya 1). Operasi: $R_1 - R_2 \to R_1$.

$R_{1,\text{baru}}$:

- C1: $1 - 0 = 1$
- C2: $1 - 1 = 0$

- C3: $0 - 0 = 0$
- C4: $3 - 2 = 1$

Matriks menjadi (dan ini sudah RREF!):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Solusi Langsung Terbaca dari RREF:

- Baris 1: $1x + 0y + 0z = 1 \Rightarrow x = 1$
- Baris 2: $0x + 1y + 0z = 2 \Rightarrow y = 2$
- Baris 3: $0x + 0y + 1z = 3 \Rightarrow z = 3$

Lihat! Solusinya $(x = 1, y = 2, z = 3)$ langsung muncul di kolom terakhir. Tidak perlu substitusi balik lagi.

5.3.4 Tabel Perbandingan Gauss vs. Gauss-Jordan

Untuk merangkum, mari kita bandingkan kedua metode ini:

Tabel 5.1: Perbandingan Eliminasi Gauss vs. Gauss-Jordan

Fitur	**Eliminasi Gauss (REF + Substitusi Balik)**	**Eliminasi Gauss-Jordan (RREF)**
Bentuk Akhir Matriks	Bentuk Eselon Baris (REF)	Bentuk Eselon Baris Tereduksi (RREF)
Langkah Akhir Solusi	Memerlukan substitusi balik	Solusi langsung terbaca dari matriks
Jumlah Operasi OBE	Umumnya lebih sedikit untuk mencapai REF	Umumnya lebih banyak untuk mencapai RREF
Kemudahan Membaca Solusi	Perlu perhitungan tambahan (substitusi)	Sangat mudah, langsung terlihat
Kapan Biasanya Dipakai?	Penyelesaian manual SPL (kadang lebih cepat jika hanya butuh solusi), dasar teori.	Mencari invers matriks, pemahaman konsep lebih dalam, ketika bentuk RREF diperlukan untuk analisis lebih lanjut (misalnya menentukan rank, basis), pemrograman komputer (karena lebih sistematis hingga akhir).
Kelebihan	Lebih sedikit langkah OBE untuk mencapai REF.	Tidak perlu substitusi balik. RREF itu unik (setiap matriks hanya punya satu RREF).
Kekurangan	Membutuhkan langkah substitusi balik. REF tidak unik (satu matriks bisa punya beberapa REF yang berbeda tapi ekuivalen).	Lebih banyak langkah OBE secara keseluruhan.

Pilihan antara Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan seringkali bergantung pada tujuan akhir kita. Jika kita hanya ingin mencari solusi satu SPL tertentu secara manual, Eliminasi Gauss yang diikuti substitusi balik mungkin terasa lebih cepat karena jumlah OBE-nya lebih sedikit. Namun, Eliminasi Gauss-Jordan menghasilkan bentuk RREF yang bersifat kanonik (standar dan unik untuk setiap matriks). Bentuk RREF ini sangat berguna untuk memahami konsep-konsep teoritis lebih lanjut dalam aljabar linear, seperti rank matriks, basis ruang vektor, dan juga merupakan metode standar untuk mencari invers matriks (yang akan kita pelajari nanti). Selain itu, karena Gauss-Jordan menghasilkan solusi akhir secara langsung tanpa langkah tambahan, ia lebih mudah diimplementasikan dalam program komputer.

Jadi, tidak ada satu metode yang "selalu lebih baik" dalam segala situasi. Gauss-Jordan memberikan penyederhanaan matriks yang lebih "lengkap", yang sangat berguna untuk banyak hal selain hanya menyelesaikan satu SPL. Untuk ujian di mana waktu terbatas dan hanya solusi SPL yang diminta, Eliminasi Gauss mungkin lebih praktis.

5.4 Checklist OBE & Tips Sukses Anti Pusing

Melakukan Operasi Baris Elementer, terutama untuk matriks yang agak besar, memang membutuhkan ketelitian dan kesabaran. Agar kamu tidak mudah pusing dan bisa mengerjakannya dengan sukses, berikut adalah daftar periksa langkah-langkah yang rapi, serta tabel kesalahan umum beserta tips menghindarinya.

5.4.1 Daftar Ringkasan Langkah yang Rapi (Strategi Umum untuk Eliminasi Gauss/Gauss-Jordan)

Berikut adalah panduan langkah demi langkah yang sistematis yang bisa kamu ikuti:

1. **Mulai dari Kiri Atas:**
    - Fokus pada kolom paling kiri yang belum semua elemen di bawah diagonal utamanya (atau posisi pivot yang diinginkan) adalah nol.
    - Dalam kolom ini, fokus pada baris paling atas yang belum memiliki 1 utama (atau belum digunakan sebagai baris pivot).
2. **Dapatkan 1 Utama (Leading 1):**
    - Lihat elemen di posisi pivot saat ini (misalnya a_{kk} untuk iterasi ke-k).
    - Jika elemen pivot adalah 0: Tukar baris saat ini dengan salah satu baris di bawahnya yang memiliki elemen tak nol di kolom pivot tersebut. Jika semua elemen di bawahnya juga nol di kolom itu, berarti kolom ini tidak memiliki pivot, jadi abaikan kolom ini dan pindah ke kolom berikutnya (kembali ke Langkah 1 untuk kolom baru).
    - Jika elemen pivot bukan 1 (dan bukan 0): Kalikan seluruh baris saat ini dengan kebalikan dari elemen pivot tersebut (misal, jika elemennya a, kalikan dengan $\frac{1}{a}$) untuk menjadikannya 1. Ini adalah 1 utama kita.
3. **Buat Nol di Bawah 1 Utama (untuk REF dan RREF):**
    - Untuk setiap baris di bawah baris yang baru saja kita buat 1 utamanya: Jika elemen di kolom 1 utama itu (sebut a_{target}) belum nol, lakukan operasi $R_{\text{target}} - a_{\text{target}} \times R_{\text{pivot}} \to R_{\text{target}}$. (Di sini R_{pivot} adalah baris yang memiliki 1 utama).
    - Ulangi untuk semua baris di bawah R_{pivot}.
4. **Pindah dan Ulangi untuk REF:**
    - Anggap baris yang sudah memiliki 1 utama dan kolom yang sudah "dibersihkan" di bawahnya itu "selesai".
    - Pindah ke baris berikutnya di bawah 1 utama tadi, dan ke kolom berikutnya di sebelah kanan 1 utama tadi.
    - Ulangi langkah 1-3 untuk sub-matriks yang tersisa.

- Lanjutkan hingga seluruh matriks berbentuk Bentuk Eselon Baris (REF). (Artinya, semua baris nol ada di bawah, dan setiap baris tak nol dimulai dengan 1 utama yang posisinya semakin ke kanan untuk baris yang lebih bawah).

5. **(Khusus Gauss-Jordan) Buat Nol di Atas 1 Utama (setelah REF tercapai):**

   - Setelah matriks dalam bentuk REF, mulailah dari 1 utama yang paling kanan-bawah.
   - Gunakan 1 utama ini untuk membuat semua elemen di atasnya (dalam kolom yang sama) menjadi nol. Lakukan operasi $R_{\text{target\_atas}} - a_{\text{target\_atas}} \times R_{\text{pivot\_bawah}} \to R_{\text{target\_atas}}$.
   - Setelah kolom itu beres (hanya 1 utama yang tak nol), pindah ke 1 utama berikutnya di sebelah kirinya (dan satu baris di atasnya). Ulangi proses membuat nol di atas 1 utama ini.
   - Lanjutkan hingga semua 1 utama hanya memiliki angka nol di atasnya (dan juga di bawahnya, karena itu sudah dilakukan untuk REF). Matriks kini dalam Bentuk Eselon Baris Tereduksi (RREF).

5.4.2 Tabel Kesalahan Umum dan Cara Menghindarinya

Ini sangat penting! Mengetahui di mana orang sering salah bisa membantumu menghindarinya.

Tabel 5.2: Kesalahan Umum dalam OBE dan Cara Menghindarinya

Kesalahan Umum	**Penyebab Umum**	**Cara Menghindari & Tips**
Kesalahan Aritmatika (salah hitung tambah, kurang, kali, bagi; terutama dengan angka negatif atau pecahan)	Kurang teliti, terburu-buru, salah menangani tanda negatif.	TULIS setiap langkah perhitungan kecil dengan jelas! Jangan mengandalkan ingatan. Periksa ulang setiap operasi. Gunakan kalkulator (jika diizinkan) hanya untuk konfirmasi, tapi kamu harus paham prosesnya. Hati-hati sekali dengan tanda negatif!
Salah Menerapkan OBE (misal, $R_1 + 2R_2 \to R_2$ padahal maksudnya $R_1 + 2R_2 \to R_1$)	Tidak paham notasi dengan benar.	Pahami: Baris yang ditulis di akhir notasi (setelah tanda panah $\to$) adalah baris yang diubah. Baris lain yang disebut (misal R_2 dalam $R_1 + 2R_2 \to R_1$) adalah "alat bantu" dan tidak berubah dalam operasi itu.
Mengalikan Baris dengan 0	Lupa syarat bahwa skalar pengali harus tak nol.	Ingat! Tujuan mengalikan baris adalah untuk membuat 1 utama atau menyederhanakan angka, bukan untuk menghilangkan semua informasi dari persamaan itu (menjadi $0 = 0$).
Lupa Mengoperasikan Semua Elemen dalam Satu Baris (termasuk kolom konstanta di matriks augmented)	Fokus hanya pada satu atau dua elemen yang ingin diubah (misal, membuat nol).	"Perlakukan semua elemen dalam satu baris secara adil!" Saat melakukan operasi pada satu baris, pastikan semua elemen di baris itu (dari ujung kiri sampai ujung kanan, termasuk bagian konstanta) ikut dihitung. Lingkari seluruh baris yang dioperasi sebagai pengingat.
Tidak Sistematis / Melompat-lompat Antar Kolom atau Baris	Tidak mengikuti alur yang disarankan (kiri ke kanan, atas ke bawah untuk REF).	Ikuti Checklist Langkah dengan disiplin. Selesaikan satu kolom (buat 1 utama, lalu nolkan di bawahnya) sebelum pindah ke kolom berikutnya. Untuk RREF, selesaikan nol di atas pivot secara sistematis juga.
Panik atau Malas dengan Pecahan	Anggapan bahwa pecahan itu sulit dan merepotkan.	Pecahan adalah temanmu di aljabar linear! Bekerja dengan hati-hati dan teliti. Jika memungkinkan, kadang-kadang urutan OBE yang cerdas bisa menunda munculnya pecahan (misal, tukar baris dulu jika itu menghasilkan angka yang lebih mudah dibagi).

Tabel 5.3: Kesalahan Umum dalam OBE dan Cara Menghindarinya

Salah Menyalin Angka-angka Matriks ke Langkah Berikutnya	Kurang fokus atau terburu-buru saat menulis ulang matriks.	Setelah setiap OBE, salin matriks hasil dengan sangat cermat. Sebelum lanjut ke OBE berikutnya, bandingkan sejenak matriks yang baru kamu tulis dengan matriks di langkah sebelumnya untuk memastikan tidak ada salah salin.
Memilih Pivot = 0 (tanpa menukar baris lebih dulu)	Lupa bahwa pivot (yang akan jadi pembagi atau acuan) harus tak nol.	Jika calon elemen pivotmu adalah 0, kamu harus menukarnya dengan baris di bawahnya yang memiliki elemen tak nol di kolom itu. Jika tidak ada baris seperti itu di bawahnya, berarti kolom itu tidak akan punya pivot.
Pembulatan Angka Desimal Terlalu Dini (jika terpaksa menggunakan desimal)	Ingin menyederhanakan tampilan angka saat proses berjalan.	Sebisa mungkin, bekerjalah dengan pecahan eksak. Jika kamu terpaksa menggunakan desimal (misal karena soalnya memang desimal), gunakan beberapa angka di belakang koma selama perhitungan dan lakukan pembulatan hanya pada hasil akhir jika diminta.

Mengapa tabel ini berharga?

1. **Belajar dari Kesalahan (Orang Lain):** Kamu bisa mengantisipasi kesulitan yang mungkin muncul.
2. **Mengurangi Frustrasi:** Mengetahui "jebakan" umum bisa mengurangi rasa frustrasi saat kamu berlatih dan mungkin membuat kesalahan.
3. **Membangun Kepercayaan Diri:** Dengan tips konkret, kamu akan merasa lebih siap dan lebih mampu menghindari kesalahan-kesalahan ini.
4. **Memperkuat Konsep:** Memahami *mengapa* sesuatu itu salah seringkali justru memperkuat pemahamanmu tentang konsep yang benar.

5.4.3 "Apa yang dicek sebelum lanjut ke langkah berikutnya?"

Setelah melakukan satu langkah OBE, biasakan untuk berhenti sejenak dan bertanya pada diri sendiri:

- "Apakah 1 utama yang baru saja saya buat sudah benar-benar angka 1?"
- "Apakah semua elemen yang saya targetkan menjadi nol (misalnya, di bawah 1 utama) sudah benar-benar nol?"
- "Apakah saya sudah menyalin semua angka lain di matriks (yang tidak dioperasi) dengan benar ke langkah ini?"
- "Apakah operasi OBE yang baru saja saya lakukan itu sah (sesuai dengan 3 jenis OBE yang diizinkan)?"

- "Apakah saya masih ingat tujuan besar saya saat ini (apakah saya sedang menuju REF atau RREF)?"

Mendorong kebiasaan untuk berpikir tentang proses berpikirmu sendiri (ini disebut metakognisi) adalah strategi belajar yang sangat efektif. Daftar pertanyaan ini membantu mempromosikan refleksi diri, yang bisa menangkap kesalahan lebih awal dan memperkuat pemahaman apakah setiap langkah sudah mencapai sub-tujuan yang diinginkan.

5.5 Latihan Intensif Bab 5

Sekarang saatnya mengasah kemampuanmu dengan banyak latihan! Kunci untuk menguasai Operasi Baris Elementer dan Eliminasi Gauss/Gauss-Jordan adalah dengan berlatih, berlatih, dan berlatih.

5.5.1 Total 15 Soal Latihan Campuran

Soal Dasar (5 soal)

1. **Tipe Visual:** Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Operasi Baris Elementer apakah yang mengubah A menjadi B?
2. **Tipe Visual:** Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$. Operasi Baris Elementer apakah yang mengubah C menjadi D?
3. **Melakukan OBE Dasar:** Diberikan matriks $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Lakukan operasi $R_2 - 4R_1 \to R_2$. Tuliskan matriks hasilnya.
4. **Melakukan OBE Dasar:** Diberikan matriks $F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$. Lakukan operasi $\frac{1}{3}R_1 \to R_1$. Tuliskan matriks hasilnya.
5. **Melakukan OBE Dasar:** Diberikan matriks $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Lakukan operasi $R_1 \leftrightarrow R_2$. Tuliskan matriks hasilnya.

Variasi Soal (7 soal)

6. Ubahlah matriks $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ ke dalam Bentuk Eselon Baris (REF).
7. Ubahlah matriks $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ ke dalam Bentuk Eselon Baris (REF).
8. Selesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) berikut menggunakan metode Eliminasi Gauss (ubah ke REF lalu substitusi balik):
$$x + 2y = 8$$
$$3x - y = 3$$
9. Selesaikan SPLDV berikut menggunakan metode Eliminasi Gauss:
$$2a + 4b = 2$$
$$3a + 7b = 1$$

10. Selesaikan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) berikut menggunakan metode Eliminasi Gauss (ubah ke REF lalu substitusi balik):

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + 2z &= 5 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

11. Selesaikan SPLTV berikut menggunakan metode Eliminasi Gauss:

$$\begin{aligned} p + 2q - r &= 9 \\ 2q + r &= 7 \\ 3p - q - 2r &= 0 \end{aligned}$$

12. Ubahlah matriks augmented $K = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right]$ ke dalam Bentuk Eselon Baris Tereduksi (RREF).

Soal Tantangan (3 soal)

13. Selesaikan SPLTV berikut menggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan (ubah langsung ke RREF dan baca solusinya):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -8 \end{aligned}$$

14. **Soal Cerita:** Harga 2 kg Apel, 1 kg Jeruk, dan 3 kg Mangga adalah Rp63.000. Harga 1 kg Apel, 2 kg Jeruk, dan 2 kg Mangga adalah Rp56.000. Harga 3 kg Apel, 2 kg Jeruk, dan 1 kg Mangga adalah Rp61.000.
    (a) Susunlah sistem persamaan linear dari soal cerita di atas.
    (b) Tuliskan matriks augmented-nya.
    (c) Selesaikan SPL tersebut menggunakan metode Eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan untuk menemukan harga per kg masing-masing buah.

15. Perhatikan matriks augmented berikut setelah dilakukan serangkaian OBE:
    (a) $L = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right]$
    (b) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right]$

    Jelaskan secara intuitif apa yang bisa kamu simpulkan tentang solusi dari sistem persamaan linear yang diwakili oleh matriks L dan matriks M. (Petunjuk: Coba tuliskan kembali persamaan dari setiap baris. Apakah ada yang aneh? Apakah ada variabel yang nilainya bebas?)

Terima Kasih!

Anda Telah Menyelesaikan Fondasi Aljabar Linear

Selamat! Anda telah berhasil menguasai konsep-konsep fundamental Aljabar Linear melalui 5 bab pertama yang mencakup sistem persamaan linear, vektor, ruang vektor, matriks, dan eliminasi Gauss.

Ini adalah **versi gratis** dari "A Friendly Introduction to Linear Algebra".

Lanjutkan Petualangan Anda!

Bab 6-10 menanti dengan topik-topik menakjubkan:

- **Bab 6:** Transformasi Linear - Memutar & mengubah dunia
- **Bab 7:** Determinan & Invers - Membatalkan transformasi
- **Bab 8:** Eigenvalue & Eigenvector - Arah istimewa
- **Bab 9:** Aplikasi Dunia Nyata - From Netflix to JPG!
- **Bab 10:** Tantangan & Proyek Lanjutan

Untuk mendapatkan versi lengkap:

Hubungi: `@virellith`
Instagram

Versi lengkap mencakup semua 10 bab dengan lebih dari 100 latihan soal, proyek kreatif, dan panduan implementasi.

Fondasi yang telah Anda bangun sangatlah berharga.
Mari lanjutkan petualangan matematika ini bersama!

A Friendly Introduction to Linear Algebra
Alwin Sebastian & Sahira Almahira Kannajmi • 2025