Dinsdag, 23 Julie, 2013

Probleem 1. Bewys dat, vir elke paar positiewe heelgetalle k en n, daar k positiewe heelgetalle $m_1, m_2, \ldots, m_k$ bestaan (nie noodwendig verskillend nie), sodat

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Probleem 2. 'n Konfigurasie van 4027 punte in die vlak word *Colombiaans* genoem indien dit uit 2013 rooi punte en 2014 blou punte bestaan sodat geen drie van die punte in die konfigurasie saamlynig is nie. Deur reguit lyne te teken, word die vlak in 'n aantal gebiede opgedeel. 'n Rangskikking van lyne is *goed* vir 'n Colombiaanse konfigurasie indien die volgende twee voorwaardes geld:

- geen lyn bevat 'n punt van die konfigurasie nie;
- geen gebied bevat punte van beide kleure nie.

Bepaal die kleinste waarde van k sodat daar, vir enige Colombiaanse konfigurasie van 4027 punte, 'n goeie rangskikking van k lyne bestaan.

Probleem 3. Laat die aangeskrewe sirkel van driehoek ABC teenoor die punt A die sy BC in die punt A_1 raak. Definieer die punte B_1 op CA en C_1 op AB op 'n soortgelyke manier deur die aangeskrewe sirkels teenoor die punte B en C onderskeidelik te gebruik. Neem aan dat die middelpunt van die omgeskrewe sirkel van driehoek $A_1B_1C_1$ op die omgeskrewe sirkel van driehoek ABC lê. Bewys dat driehoek ABC reghoekig is.

Die aangeskrewe sirkel *van driehoek ABC teenoor die punt A is die sirkel wat raaklynig is aan die segment BC, aan die straal AB anderkant B, en aan die straal AC anderkant C. Die aangeskrewe sirkels teenoor punte B en C word soortgelyk gedefinieer.*

Tyd: 4 ure en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd.

Woensdag, 24 Julie, 2013

Probleem 4. Laat ABC 'n skerphoekige driehoek wees met hoogtepunt H, en laat W 'n punt op die sy BC wees wat streng tussen B en C lê. Die punte M en N is die basisse van die hoogtelyne vanuit B en C, onderskeidelik. Laat ω_1 die omgeskrewe sirkel van driehoek BWN wees, en X die punt op ω_1 sodat WX 'n middellyn van ω_1 is. Soortgelyk, laat ω_2 die omgeskrewe sirkel van driehoek CWM wees, en Y die punt op ω_2 sodat WY 'n middellyn van ω_2 is. Bewys dat X, Y en H saamlynig is.

Probleem 5. Laat $\mathbb{Q}_{>0}$ die versameling van positiewe rasionale getalle wees. Laat $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ 'n funksie wees wat die volgende drie voorwaardes bevredig:

(i) vir alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ geld dat $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) vir alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ geld dat $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) daar bestaan 'n rasionale getal $a > 1$ sodat $f(a) = a$.

Bewys dat $f(x) = x$ vir alle $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Probleem 6. Laat $n \geq 3$ 'n heelgetal wees, en beskou 'n sirkel met $n + 1$ punte reëlmatig daarom gerangskik. Beskou alle etiketterings van hierdie punte met die getalle $0, 1, \ldots, n$, waar elke getal presies een keer gebruik word; twee sulke etiketterings word as dieselfde beskou indien een vanuit die ander verkry kan word deur die sirkel te roteer. 'n Etikettering word *pragtig* genoem indien, vir enige vier etikette $a < b < c < d$ sodat $a + d = b + c$, die koord wat die punte met etikette a en d verbind en die koord wat die punte met etikette b en c verbind mekaar nie sny nie.

Laat M die aantal pragtige etiketterings wees, en laat N die aantal geordende pare (x, y) van positiewe heelgetalle wees sodat $x + y \leq n$ en $\operatorname{ggd}(x, y) = 1$. Bewys dat

$$M = N + 1.$$