12 Julie 2006

Probleem 1. Laat I die middelpunt van die ingeskrewe sirkel van $\triangle ABC$ wees, en P 'n punt binne die driehoek sodat

$$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B.$$

Bewys dat:

- $AP \geqslant AI$;
- gelykheid geld as en slegs as $P = I$.

Probleem 2. Gegee 'n reëlmatige 2006-hoek P. 'n Diagonaal van P word *goed* genoem as sy eindpunte die rand van P in twee dele verdeel wat elk uit 'n onewe aantal sye van P bestaan. Die sye van P word ook *goed* genoem.

Nou word P opgedeel in driehoeke deur 2003 diagonale, waarvan geen twee 'n gemeenskaplike punt binne P het nie. Vind die grootste aantal gelykbenige driehoeke met twee goeie sye wat op hierdie wyse kan ontstaan.

Probleem 3. Bepaal die kleinste reële getal M waarvoor die ongelykheid

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vir alle reële getalle a, b en c geld.

Toegelate tyd: 4 uur 30 minute
Elke probleem tel 7 punte

13 Julie 2006

Probleem 4. Bepaal alle pare heeltalle (x, y) sodat

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Probleem 5. Gegee 'n polinoom P van graad n met heeltallige koëffisiënte, waar $n > 1$, en 'n positiewe heeltal k. Beskou die polinoom $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, waar P k keer voorkom. Bewys dat daar hoogstens n heeltalle t bestaan sodat $Q(t) = t$.

Probleem 6. Gegee 'n konvekse veelhoek P. Aan elke sy b van P word die grootste area van 'n driehoek toegeken wat in P lê en waarvan b 'n sy is. Bewys dat die som van die areas aan die sye toegeken, minstens twee keer so groot as die area van P is.

Toegelate tyd: 4 uur 30 minute
Elke probleem tel 7 punte