



*e hënë, 19. korrik 2021*

**Problem 1.** Le të jetë  $n \geq 100$  një numër i plotë. Ivani shkruan secilin nga numrat  $n, n+1, \dots, 2n$  në karta të ndryshme. Në vijim ai i përzier këto  $n+1$  karta, dhe i ndan ato në dy grumbuj. Vërtetoni që të paktën njëri prej grumbujve përmban dy karta të tilla që shuma e numrave të tyre është katror i një numri të plotë.

**Problem 2.** Vërtetoni që mosbarazimi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

është i vërtetë për të gjithë numrat realë  $x_1, \dots, x_n$ .

**Problem 3.** Le të jetë  $D$  një pikë në brendësi të trekëndëshit këndngushtë  $ABC$ , ku  $AB > AC$ , e tillë që  $\angle DAB = \angle CAD$ . Pika  $E$  që ndodhet në segmentin  $AC$  kënaq kushtin  $\angle ADE = \angle BCD$ , pika  $F$  që ndodhet në segmentin  $AB$  kënaq kushtin  $\angle FDA = \angle DBC$  dhe pika  $X$  që ndodhet në drejtëzën  $AC$  kënaq kushtin  $CX = BX$ . Le të jenë  $O_1$  dhe  $O_2$  qendrat e rrethëve të jashtëshkruar trekëndësheve  $ADC$  dhe  $EXD$ , respektivisht. Vërtetoni që drejtëzat  $BC$ ,  $EF$  dhe  $O_1O_2$  priten në të njëjtën pikë.



*e martë, 20. korrik 2021*

**Problem 4.** Le të jetë  $\Gamma$  një rreth me qendër në pikën  $I$ , dhe  $ABCD$  një katërkëndësh i mysët i tillë që secili prej segmenteve  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  dhe  $DA$  është tangjent me rrethin  $\Gamma$ . Le të jetë  $\Omega$  rrethi i jashtëshkruar trekëndëshit  $AIC$ . Zgjatimi i  $BA$  përtej pikës  $A$  pret rrethin  $\Omega$  në pikën  $X$  dhe zgjatimi i  $BC$  përtej pikës  $C$  pret rrethin  $\Omega$  në pikën  $Z$ . Zgjatimet e  $AD$  dhe  $CD$  përtej pikës  $D$  presin rrethin  $\Omega$  në pikat  $Y$  dhe  $T$ , respektivisht. Vërtetoni që

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

**Problem 5.** Dy ketra, Bushy dhe Jumpy, kanë grumbulluar 2021 arra për periudhën e dimrit. Jumpy numërton arrat nga 1 tek 2021 dhe hap në tokë 2021 vrima të vogla të cilat janë pozicionuar në trajtë rrethore rreth pemës së tyre të preferuar. Mëngjesin tjetër Jumpy vëren se Bushy kishte vendosur nga një arrë në secilën vrimë, por që nuk i kishte dhënë rëndësi numërtimit. I brengosur, Jumpy vendos të rirëndisë arrat duke ndërtuar një varg prej 2021 lëvizjesh. Në lëvizjen e  $k$ -të, Jumpy shkëmben pozicionet e dy arrave të cilat janë fqinje me arrën me numër  $k$ . Vërtetoni që gjendet një vlerë e  $k$  e tillë që, në lëvizjen e  $k$ -të, Jumpy shkëmben arrat me numrat  $a$  dhe  $b$  të tilla që  $a < k < b$ .

**Problem 6.** Le të jetë  $m \geq 2$  një numër i plotë,  $A$  një bashkësi e fundme numrash të plotë (jo nevojshmërisht pozitivë) dhe  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  nënbashkësi të bashkësisë  $A$ . Supozohet se për secilën  $k = 1, 2, \dots, m$  shuma e elementëve të  $B_k$  është  $m^k$ . Vërtetoni që  $A$  përmban të paktën  $m/2$  elementë.