e hënë, 21. shtator 2020

Problem 1. Jepet katërkëndëshi i mysët $ABCD$. Pika P ndodhet në brendësi të katërkëndëshit $ABCD$. Janë të vërteta ekuacionet e mëposhtme përpjestimore:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Vërtetoni që tre drejtëzat e mëposhtme priten në të njëjtën pikë: përgjysmoret e brendshme të këndeve $\angle ADP$ dhe $\angle PCB$ dhe përmesorja e segmentit AB.

Problem 2. Numrat realë a, b, c, d janë të tillë që $a \geq b \geq c \geq d > 0$ dhe $a + b + c + d = 1$. Vërtetoni që

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Problem 3. Jepen $4n$ gurë zalli me pesha $1, 2, 3, \dots, 4n$. Secili gur ngjyroset me një nga n ngjyrat dhe gjenden katër gurë të ngjyrosur për secilën ngjyrë. Tregoni që gurët mund të vendosen në dy grumbuj në mënyrë të tillë që dy kushtet e mëposhtme janë njëkohësisht të vërteta:

- Pesha e përgjithshme e të dy grumbujve është e njëjtë.
- Secili grumbull përmban dy gurë për secilën ngjyrë.

Language: Albanian

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.

e martë, 22. shtator 2020

Problem 4. Jepet numri i plotë $n > 1$. Në shpatin e një mali ka n^2 stacione, ku të gjithë kanë lartësi të ndryshme nga niveli i detit. Secila prej dy kompanive të teleferikëve, A dhe B, menaxhon k teleferikë; secili teleferik siguron një zhvendosje nga një prej stacioneve tek një tjetër që ndodhet në lartësi më të madhe (pa ndalesa të ndërmjetme). k teleferikët e A kanë k pika të ndryshme nisjeje dhe k pika të ndryshme mbërritjeje, dhe një teleferik që fillon nisjen më lartë mbërrin gjithashtu më lartë. Të njëjtat kushte vlejnë edhe për kompaninë B. Thuhet se dy stacione janë të *lidhura* nga një kompani kur mund të niset nga një stacion me lartësi më të vogël dhe të mbërrijë në një stacion me lartësi më të madhe duke përdorur një ose më shumë kabina të vetë kompanisë (nuk janë të lejuara lëvizje të tjera ndërmjet stacioneve).

Gjeni numrin më të vogël të plotë pozitiv k për të cilin garantohet që gjenden dy stacione të cilat janë të lidhura nga të dy kompanitë.

Problem 5. Jepet një tufë prej $n > 1$ letrash loje. Në secilën letër është shkruar një numër i plotë pozitiv. Tufa e dhënë ka vetinë që mesatarja aritmetike e numrave në secilin çift letrash është gjithashtu mesatare gjeometrike e numrave të një grupi prej një ose disa letrash.

Për cilat n rrjedh që numrat e shkruar në letra janë të gjithë të barabartë ndërmjet tyre?

Problem 6. Vërtetoni që gjendet një numër kostant pozitiv c i tillë që pohimi i mëposhtëm është i vërtetë:

Merret një numër i plotë $n > 1$, dhe një bashkësi $\mathcal{S}$ prej n pikash në plan të tilla që largësia ndërmjet çdo dy pikave të bashkësisë $\mathcal{S}$ është të paktën 1. Në vijim gjendet një drejtëz ℓ e cila e ndan bashkësinë $\mathcal{S}$ në mënyrë të tillë që largësia nga një pikë e çfarëdoshme e bashkësisë $\mathcal{S}$ nga drejtëza ℓ është të paktën $cn^{-1/3}$.

(Një drejtëz ℓ *ndan* një bashkësi pikash $\mathcal{S}$ në qoftë se një segment që bashkon dy pika të bashkësisë $\mathcal{S}$ pret drejtëzën ℓ.)

Shënim. Rezultate më të dobëta ku $cn^{-1/3}$ zëvendësohet nga $cn^{-\alpha}$ mund të vlerësohen me pikë në varësi të vlerës së kostantes $\alpha > 1/3$.

Language: Albanian

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.