Vrydag 10 Julie 2015

Probleem 1. Ons noem 'n eindige versameling punte in die vlak $\mathcal{S}$ *gebalanseerd* as daar vir elke twee verskillende punte A en B in $\mathcal{S}$, 'n punt C in $\mathcal{S}$ is só dat $AC = BC$. Ons sê dat $\mathcal{S}$ *middelpuntvry* is as, vir elke drietal verskillende punte A, B en C in $\mathcal{S}$, daar geen punt P is só dat $PA = PB = PC$.

(a) Bewys dat daar vir alle heelgetalle $n \geqslant 3$ 'n gebalanseerde versameling bestaan wat presies n punte bevat.

(b) Bepaal alle heelgetalle $n \geqslant 3$ waarvoor daar 'n middelpuntvrye, gebalanseerde versameling bestaan wat presies n punte bevat.

Probleem 2. Bepaal alle drietalle positiewe heelgetalle (a, b, c) só dat elkeen van die getalle

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

'n mag van twee is.

(*'n Mag van twee is 'n getal van die vorm* 2^n, *waar* n *'n heelgetal is en* $n \geqslant 0$.)

Probleem 3. Laat ABC 'n skerphoekige driehoek met $AB > AC$ wees. Laat Γ sy omgeskrewe sirkel, H sy hoogtepunt en F die voet van die hoogtelyn vanuit A wees. Laat M die middelpunt van BC wees. Laat Q die punt op Γ wees só dat $\angle HQA = 90°$ en K die punt op Γ wees só dat $\angle HKQ = 90°$. Veronderstel dat die punte A, B, C, K en Q almal verskillend is en in hierdie volgorde op Γ lê.

Bewys dat die omgeskrewe sirkels van driehoeke KQH en FKM aan mekaar raak.

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd

Saterdag 11 Julie 2015

Probleem 4. Driehoek ABC het omgeskrewe sirkel Ω en ommiddelpunt O. 'n Sirkel Γ met middelpunt A sny die segment BC in punte D en E só dat B, D, E en C almal verskillend is, en in hierdie volgorde op die lyn BC lê. Laat F en G die snypunte van Γ en Ω wees, só dat A, F, B, C en G in hierdie volgorde op Ω lê. Laat K die tweede snypunt van die omgeskrewe sirkel van driehoek BDF en die segment AB wees. Laat L die tweede snypunt van die omgeskrewe sirkel van driehoek CGE en die segment CA wees.

Veronderstel dat die lyne FK en GL verskillend is en mekaar in die punt X sny. Bewys dat X op die lyn AO lê.

Probleem 5. Laat $\mathbb{R}$ die versameling reële getalle wees. Bepaal alle funksies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wat die vergelyking

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

vir alle reële getalle x en y bevredig.

Probleem 6. Die ry heelgetalle $a_1, a_2, \ldots$ bevredig die volgende voorwaardes:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ vir alle $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ vir alle $1 \leqslant k < \ell$.

Bewys dat daar twee positiewe heelgetalle b en N bestaan só dat

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

vir alle heelgetalle m en n waarvoor $n > m \geqslant N$.

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd