

12 Julie 2006

**Probleem 1.** Laat  $I$  die middelpunt van die ingeskrewe sirkel van  $\triangle ABC$  wees, en  $P$  'n punt binne die driehoek sodat

$$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B.$$

Bewys dat:

- $AP \geq AI$ ;
- gelykheid geld as en slegs as  $P = I$ .

**Probleem 2.** Gegee 'n reëlmatige 2006-hoek  $P$ . 'n Diagonaal van  $P$  word *goed* genoem as sy eindpunte die rand van  $P$  in twee dele verdeel wat elk uit 'n onewe aantal sye van  $P$  bestaan. Die sye van  $P$  word ook *goed* genoem.

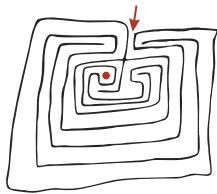
Nou word  $P$  opgedeel in driehoeke deur 2003 diagonale, waarvan geen twee 'n gemeenskaplike punt binne  $P$  het nie. Vind die grootste aantal gelykbenige driehoeke met twee goeie sye wat op hierdie wyse kan ontstaan.

**Probleem 3.** Bepaal die kleinste reële getal  $M$  waarvoor die ongelykheid

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vir alle reële getalle  $a$ ,  $b$  en  $c$  geld.

*Toegelate tyd: 4 uur 30 minute  
Elke probleem tel 7 punte*



13 Julie 2006

**Probleem 4.** Bepaal alle pare heeltalle  $(x, y)$  sodat

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Probleem 5.** Gegee 'n polinoom  $P$  van graad  $n$  met heeltallige koëffisiënte, waar  $n > 1$ , en 'n positiewe heeltal  $k$ . Beskou die polinoom  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ , waar  $P$   $k$  keer voorkom. Bewys dat daar hoogstens  $n$  heeltalle  $t$  bestaan sodat  $Q(t) = t$ .

**Probleem 6.** Gegee 'n konvekse veelhoek  $P$ . Aan elke sy  $b$  van  $P$  word die grootste area van 'n driehoek toegeken wat in  $P$  lê en waarvan  $b$  'n sy is. Bewys dat die som van die areas aan die sye toegeken, minstens twee keer so groot as die area van  $P$  is.

*Toegelate tyd: 4 uur 30 minute  
Elke probleem tel 7 punte*