Language: **Afrikaans**

Day: **1**

Woensdag, Julie 15, 2009

Probleem 1. Gestel n 'n positiewe heelgetal is en laat $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) verskillende heelgetalle van die versameling $\{1, \ldots, n\}$ wees, sodat n 'n deler van $a_i(a_{i+1} - 1)$ vir $i = 1, \ldots, k-1$ is. Bewys dat n nie 'n deler van $a_k(a_1 - 1)$ is nie.

Probleem 2. Laat ABC 'n driehoek wees met O die middelpunt van die omgeskrewe sirkel. Die punte P en Q is inwendige punte van die sye CA en AB onderskeidelik. Gestel K, L en M die middelpunte is van die lynstukke BP, CQ en PQ, onderskeidelik, en laat die sirkel deur K, L en M, Γ wees. Veronderstel dat die lyn PQ die sirkel Γ raak. Bewys dat $OP = OQ$.

Probleem 3. Veronderstel dat $s_1, s_2, s_3, \ldots$ 'n streng stygende ry van postiewe heelgetalle is sodat die deelrye

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{en} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

is altwee rekenkundige rye. Bewys dat die ry $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ook 'n rekenkundige ry is.

Toegelate tyd: 4 uur 30 minute
Elke probleem tel 7 punte

Donderdag, Julie 16, 2009

Probleem 4. Laat ABC 'n driehoek wees met $AB = AC$. Die halveerlyne van $\angle CAB$ en $\angle ABC$ sny die sye BC en CA op D en E, onderskeidelik. Laat K die middelpunt van die ingeskrewe sirkel van driehoek ADC wees. Veronderstel dat $\angle BEK = 45°$. Vind alle moontlike waardes van $\angle CAB$.

Probleem 5. Bepaal alle funksies f van die versameling van positiewe heelgetalle na die versameling van positiewe heelgetalle sodat, vir alle positiewe heelgetalle a en b, daar 'n *egte* driehoek bestaan met sylengtes

$$a, \ f(b) \ \text{ en } \ f(b + f(a) - 1).$$

('n *Egte* driehoek se hoekpunte is nie samelynig nie.)

Probleem 6. Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verskillende positiewe heelgetalle wees en laat M 'n versameling van $n-1$ positiewe heelgetalle wees wat nie die getal $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ bevat nie. 'n Springbok spring langs die getallelyn. Hy begin by die punt 0 en spring n keer regs met springe van lengtes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in een of ander orde. Bewys dat die orde gekies kan word sodat die springbok nooit op enige punt van M beland nie.