Dinsdag, 10 Julie, 2012

Probleem 1. Vir 'n gegewe driehoek ABC is J die middelpunt van die eks-sirkel teenoor die hoekpunt A. Hierdie eks-sirkel is raaklynig aan die sy BC by M, en aan die lyne AB en AC by K en L, respektiewelik. Die lyne LM en BJ ontmoet by F, en die lyne KM en CJ ontmoet by G. Laat S die snypunt van lyne AF en BC wees, en laat T die snypunt van lyne AG en BC wees.

Bewys dat M die middelpunt van ST is.

(Die *eks-sirkel* van ABC teenoor die hoekpunt A is die sirkel wat raak aan die lynsegment BC, aan die die lyn AB, verleng verby B, en die lyn AC, verleng verby C.)

Probleem 2. Laat $n \geq 3$ 'n heelgetal wees, en laat $a_2, a_3, \ldots, a_n$ positiewe reële getalle wees, sodanig dat $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Bewys dat

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \ > \ n^n.$$

Probleem 3. Die *leuenaar se raaispeletjie* is 'n spel wat tussen twee spelers A en B gespeel word. Die reëls van die spel hang af van twee positiewe heelgetalle k en n wat bekend is aan beide deelnemers.

Aan die begin van die spel kies A heelgetalle x en N met $1 \leq x \leq N$. Speler A hou die waarde van x geheim, maar vertel aan B die waarde van N, sonder om te lieg. Speler B probeer nou om inligting aangaande x te verkry deur aan A vrae te vra, soos volg: elke vraag bestaan daaruit dat B 'n willekeurige versameling S van positiewe heelgetalle spesifiseer (dieselfde S mag in verskillende vrae gebruik word), en dan vir A te vra of x 'n element daarvan is. Speler B kan enige aantal sodanige vrae aan A stel. Elke vraag van B moet onmiddellik deur A beantwoord word met *ja* of *nee*, maar A mag lieg soveel kere as wat sy wou; die enigste beperking is dat sy vir elke $k+1$ opeenvolgende antwoorde minstens een keer die waarheid moet praat.

Nadat B soveel vrae gevra het as wat hy wou, moet hy 'n versameling X spesifiseer wat bestaan uit hoogstens n positiewe heelgetalle. Indien x in X is, dan wen B; anders verloor hy. Bewys dat:

1. Indien $n \geq 2^k$, dan kan B verseker wen.

2. Vir elke k wat groot genoeg is, bestaan daar 'n heelgetal $n \geq 1.99^k$ sodanig dat B nie verseker kan wees van 'n wen nie.

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem tel 7 punte

Woensdag, 11 Julie, 2012

Probleem 4. Vind alle funksies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodanig dat, vir alle heelgetalle a, b, c met $a+b+c=0$, geld dat:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Hier is $\mathbb{Z}$ die versameling heelgetalle.)

Probleem 5. Laat ABC 'n driehoek wees met $\angle BCA = 90°$, en laat D die voet van die hoogtelyn vanaf C wees. Laat X 'n punt van lynsegment CD wees, maar nie een van die eindpunte van CD nie. Laat K die punt op die lynsegment AX wees, sodanig dat $BK = BC$. Soortgelyk, laat L die punt op die lynsegment BX wees, sodanig dat $AL = AC$. Laat M die snypunt van AL en BK wees.

Wys dat $MK = ML$.

Probleem 6. Vind alle positiewe heelgetalle n waarvoor daar nie-negatiewe heelgetalle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan sodanig dat

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd