Maandag 11 Julie 2016

Probleem 1. Driehoek BCF het 'n regtehoek by B. Laat A die punt op lyn CF wees só dat $FA = FB$ en F tussen A en C lê. Punt D word gekies só dat $DA = DC$ en AC die halveerlyn van $\angle DAB$ is. Punt E word gekies só dat $EA = ED$ en AD die halveerlyn van $\angle EAC$ is. Laat M die middelpunt van CF wees. Laat X die punt wees só dat $AMXE$ 'n parallelogram (met $AM \parallel EX$ en $AE \parallel MX$) is. Bewys dat die lyne BD, FX en ME deur 'n gemene punt gaan.

Probleem 2. Vind alle positiewe heelgetalle n waarvoor elke blokkie van 'n $n \times n$ tabel gevul kan word met een van die letters I, M en O op so 'n manier dat:

- in elke ry en in elke kolom is een derde van die inskrywings I, een derde M en een derde O; en
- in enige diagonaal, as die aantal inskrywings op die diagonaal 'n veelvoud van drie is, dan is een derde van die inskrywings I, een derde M en een derde O.

NB: Die rye en kolomme van 'n $n \times n$ tabel word op die natuurlike manier van 1 tot n genommer. Elke blokkie stem dus ooreen met 'n paar positiewe heelgetalle (i, j) met $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Vir $n > 1$ het die tabel $4n - 2$ diagonale van twee soorte. 'n Diagonaal van die eerste soort bestaan uit al die blokkies (i, j) waarvoor $i + j$ 'n konstante is, en 'n diagonaal van die tweede soort bestaan uit alle blokkies (i, j) waarvoor $i - j$ 'n konstante is.

Probleem 3. Laat $A_1A_2 \ldots A_k$ 'n konvekse veelhoek in die vlak wees. Die hoekpunte $A_1, A_2, \ldots, A_k$ het heeltallige koördinate en lê op 'n sirkel. Laat S die oppervlakte van P wees. 'n Onewe positiewe heelgetal n word gegee só dat die kwadraat van elkeen van die sylengtes van P 'n heelgetal deelbaar deur n is. Bewys dat $2S$ 'n heelgetal deelbaar deur n is.

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd

Dinsdag 12 Julie 2016

Probleem 4. 'n Versameling positiewe heelgetalle word *welriekend* genoem as dit ten minste twee elemente bevat en elkeen van sy elemente 'n priemfaktor in gemeen het met ten minste een van die ander elemente. Laat $P(n) = n^2 + n + 1$. Wat is die kleinste moontlike waarde van die positiewe heelgetal b só dat daar 'n nie-negatiewe heelgetal a bestaan waarvoor die versameling

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

welriekend is?

Probleem 5. Die vergelyking

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

word op die bord geskryf, met 2016 lineêre faktore aan elke kant. Wat is die kleinste waarde van k waarvoor dit moontlik is om presies k van die 4032 lineêre faktore uit te vee só dat ten minste een faktor aan elke kant oorbly en die nuwe vergelyking geen reële oplossings het nie.

Probleem 6. Daar is $n \geqslant 2$ lynstukke in die vlak só dat elke twee lynstukke sny, en geen drie lynstukke deur dieselfde punt gaan nie. Geoff moet 'n eindpunt vir elkeen van die lynstukke kies en 'n padda op dit plaas wat in die rigting van die ander eindpunt kyk. Dan sal hy sy hande $n-1$ keer klap. Elke keer wat hy sy hande klap, spring elke padda onmiddelik vorentoe na die volgende snypunt op sy lynstuk. Paddas verander nooit die rigting waarin hulle spring nie. Geoff se wens is om die paddas so te plaas dat daar nooit twee paddas op dieselfde tyd op dieselfde snypunt is nie.

(a) Bewys dat Geoff altyd sy wens kan vervul as n onewe is.

(b) Bewys dat Geoff nooit sy wens kan vervul as n ewe is nie.

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd