Language: **Albanian**

Day: **1**

E mërkurë, 7 korrik 2010

Problem 1. Gjeni të gjitha funksionet $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ të tilla që barazimi

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

të jetë i vërtetë për të gjitha $x, y \in \mathbb{R}$. (Me $\lfloor z\rfloor$ shënohet numri më i madh i plotë që është më i vogël ose i barabartë me z.)

Problem 2. Le të jetë I qendra e rrethit brendashkruar trekëndëshit ABC dhe Γ rrethi jashtëshkruar atij trekëndëshi. Drejtëza AI pret përsëri rrethin Γ në pikën D. Le të jenë E një pikë në harkun $\widehat{BDC}$ dhe F një pikë në brinjën BC të tilla që

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Së fundi, le të jetë G mesi i segmentit IF. Provoni që drejtëzat DG dhe EI priten në një pikë të rrethit Γ.

Problem 3. Le të jetë $\mathbb{N}$ bashkësia e numrave të plotë pozitivë. Gjeni të gjitha funksionet $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ të tilla që numri

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

të jetë katror i plotë për të gjitha $m, n \in \mathbb{N}$.

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë

E enjte, 8 korrik 2010

Problem 4. Le të jetë P një pikë brenda trekëndëshit ABC. Drejtëzat AP, BP dhe CP presin rrethin Γ jashtëshkruar trekëndëshit ABC përkatësisht në pikat K, L dhe M. Tangjentja ndaj rrethit Γ e hequr në pikën C pret drejtëzën AB në pikën S. Supozojmë që $SC = SP$. Provoni që $MK = ML$.

Problem 5. Në secilën prej gjashtë kutive $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ fillimisht ka vetëm nga një monedhë. Lejohen vetëm dy tipe veprimesh:

Tipi 1: Merret një kuti joboshe B_j me $1 \leq j \leq 5$. Largohet një monedhë nga B_j dhe shtohen dy monedha tek B_{j+1}.

Tipi 2: Merret një kuti joboshe B_k me $1 \leq k \leq 4$. Largohet një monedhë nga B_k dhe këmbehen përmbajtjet e kutive (ndoshta boshe) B_{k+1} and B_{k+2}.

Tregoni nëse ekziston një varg i fundmë veprimesh të tilla, i cili si rezultat jep kutitë B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 boshe, ndërsa kutia B_6 përmban pikërisht $2010^{2010^{2010}}$ monedha. (Shënojmë që $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problem 6. Le të jetë $a_1, a_2, a_3, \ldots$ një varg numrash realë pozitivë. Supozojmë që për ndonjë numër të plotë pozitiv s, kemi

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

për të gjitha $n > s$. Provoni që ekzistojnë numrat e plotë pozitivë ℓ dhe N, me $\ell \leq s$ të tillë që $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ për të gjitha $n \geq N$.

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë