Dinsdag, 16 Julie 2019

Probleem 1. Laat $\mathbb{Z}$ die versameling heelgetalle wees. Vind alle funksies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodat

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

vir alle heelgetalle a en b.

Probleem 2. In driehoek ABC lê punt A_1 op die lynstuk BC en punt B_1 op die lynstuk AC. Laat P 'n punt op lynstuk AA_1 wees en Q 'n punt op lynstuk BB_1 wees sodat PQ parallel is met AB. Laat P_1 'n punt op lyn PB_1 wees sodat B_1 streng tussen P en P_1 lê en $\angle PP_1C = \angle BAC$. Op dieselfde manier, laat Q_1 'n punt op lyn QA_1 wees sodat A_1 streng tussen Q en Q_1 lê en $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Bewys dat die punte P, Q, P_1, en Q_1 op 'n sirkel lê.

Probleem 3. 'n Sosiale netwerk het 2019 gebruikers waarvan sommige pare vriende is. Wanneer gebruiker A vriende is met gebruiker B, is gebruiker B ook vriende met gebruiker A. Gebeurtenisse van die volgende tipe kan herhaaldelik gebeur, een op 'n slag:

> Drie gebruikers A, B en C sodat A vriende met beide B en C is, maar B en C nie vriende is nie, verander hulle vriendskappe sodat B en C nou vriende met mekaar is, maar albei van hulle nie meer vriende is met A nie. Alle ander vriendskappe bly die selfde.

Aanvanklik het 1010 van die gebruikers 1009 vriende elk en 1009 van die gebruikers 1010 vriende elk. Bewys dat daar 'n reeks van sulke tipe gebeurtenisse bestaan waarna elke gebruiker vriende is met hoogstens een ander gebruiker.

Language: Afrikaans

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd

Woensdag, 17 Julie 2019

Probleem 4. Bepaal alle pare positiewe heelgetalle (k, n) sodat

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Probleem 5. Die Bank van Bath gee munte uit met 'n H op een kant en 'n T op die ander kant. Frikkie reël $n > 0$ van hierdie munte in 'n lyn van links tot regs. Hy voer die volgende operasie herhaaldelik uit: as daar $k > 0$ munte is wat H bo-op wys, dan draai hy die k^{de} linkse munt om, en as alle munte T bo-op wys, dan stop hy. Byvoorbeeld, as n gelyk is aan 3 en hy met die reëling THT begin, word die reëling agtereenvolgens $THT \to HHT \to HTT \to TTT$; hy stop na drie operasies.

(a) Bewys dat, vir elke aanvanklike reëling, stop Frikkie na 'n eindige aantal operasies.

(b) Vir elke aanvanklike reëling C, laat $L(C)$ die aantal operasies wees voordat Frikkie stop. Byvoorbeeld, $L(THT) = 3$ en $L(TTT) = 0$. Bepaal die gemiddelde waarde van $L(C)$ oor alle 2^n moontlike aanvanklike reëlings C.

Probleem 6. Laat ABC 'n akute driehoek wees wat $AB \neq AC$ voldoen, en laat I die middelpunt van die ingeskrewe sirkel ω van ABC wees. Die sirkel ω raak die lyne AB, BC, en CA op punte D, E, en F respektiewelik. Die loodlyn op lyn EF deur punt D sny ω weer op punt R, en die lyn AR sny ω weer op punt P. Die omgeskrewe sirkels van PCE en PBF sny mekaar weer op punt Q.

Bewys dat die lyne DI en PQ mekaar sny op die loodlyn op lyn AI deur punt A.

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd