Maandag, 11 Julie 2022

Probleem 1. Die Bank van Oslo reik twee sorte munte uit: aluminium (wat met 'n A aangedui word) en brons (wat met 'n B aangedui word). Mariaan het n aluminium munte en n brons munte, wat aanvanklik in een of ander volgorde in 'n ry gereël is. 'n *Ketting* is enige groep van opeenvolgende munte van dieselfde tipe. Vir 'n vaste heelgetal $k \leqslant 2n$, Mariaan voer die volgende operasie herhaaldelik uit: sy identifiseer die $k$de munt van die linkerkant en die langste ketting wat daardie munt insluit, en skuif al die munte in daardie ketting na die linkerkant van die ry. Byvoorbeeld, as $n = 4$ en $k = 4$, die proses wat met die volgorde $AABBBABA$ begin sal soos volg voortgaan:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \ldots.$$

Vind alle pare (n, k) met $1 \leqslant k \leqslant 2n$ sodat vir elke aanvanklike volgorde, op een of ander tyd in die proses sal die n munte aan die linkerkant van dieselfde tipe wees.

Probleem 2. Laat $\mathbb{R}^+$ die versameling van alle positiewe reële getalle aandui. Vind alle funksies $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodat daar vir elke $x \in \mathbb{R}^+$ 'n unieke $y \in \mathbb{R}^+$ bestaan wat die volgende ongelykheid bevredig:

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Probleem 3. Laat k 'n positiewe heelgetal wees en laat S 'n eindige stel onewe priemgetalle wees. Bewys dat daar hoogstens een manier is om die elemente van S rondom 'n sirkel to plaas sodat die produk van elke twee bure gelyk is aan $x^2 + x + k$ vir een of ander positiewe heelgetal x. (Twee konfigurasies word as dieselfde beskou as een van hulle in die ander verander kan word deur gebruik van rotasies en refleksies.)

Language: Afrikaans

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.

Dinsdag, 12. Julie 2022

Probleem 4. Laat $ABCDE$ 'n konvekse vyfhoek wees wat $BC = DE$ bevredig. Neem aan dat daar 'n punt T binne $ABCDE$ bestaan wat $TB = TD$, $TC = TE$, en $\angle ABT = \angle TEA$ bevredig. Laat lyn AB lyne CD en CT by punte P en Q sny, onderskeidelik, en neem aan dat die punte P, B, A, en Q in daardie volgorde op hul lyn verskyn. Laat lyn AE lyne CD en DT by punte R en S sny, onderskeidelik, en neem aan dat die punte R, E, A, en S in daardie volgorde op hul lyn verskyn. Bewys dat die punte P, S, Q, en R op 'n sirkel lê.

Probleem 5. Vind alle drietalle (a, b, p) van positiewe heelgetalle sodat p 'n priemgetal is en

$$a^p = b! + p.$$

Probleem 6. Laat n 'n positiewe heelgetal wees. 'n *Nordiese vierkant* is 'n $n \times n$ bord wat al die heelgetalle van 1 tot n^2 insluit sodat elke sel presies een heelgetal insluit. Ons beskou twee selle as aangrensend as hulle 'n gemeenskaplike kant deel. Elke sel wat net aan selle wat hoër getalle insluit aangrensend is word 'n *vallei* genoem. 'n *Opdraande pad* is 'n volgorde van een of meer selle sodat:

- die eerste sel in die volgorde 'n vallei is,
- elke daaropvolgende sel in die volgorde aangrensend is aan die vorige sel, en
- die getalle wat deur die selle ingesluit is in toenemende orde verskyn.

Vind, as 'n funksie van n, die kleinste moontlike aantal opdraande paaie in 'n Nordiese vierkant.

Language: Afrikaans

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.