Maandag, 9 Julie 2018

Probleem 1. Laat Γ die omskrewe sirkel van 'n akute driehoek ABC wees. Punte D en E lê op segmente AB en AC, onderskeidelik, op so 'n manier dat $AD = AE$. Die middelloodlyne van BD en CE sny die klein boë AB en AC van Γ, onderskeidelik, by punte F en G. Bewys dat die lyne DE en FG parallel is, of dat hulle dieselfde lyn is.

Probleem 2. Vind alle heelgetalle $n \geq 3$ waarvoor daar reële getalle $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ bestaan sodat $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, en

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

vir $i = 1, 2, \ldots, n$.

Probleem 3. 'n *Anti-Pascal driehoek* is 'n gelyksydige driehoekige skikking van getalle, sodat, behalwe die getalle in the onderste ry, elke getal gelyk is aan die absolute waarde van die verskil tussen die twee getalle daaronder. Byvoorbeeld, die volgende skikking is 'n anti-Pascal driehoek met vier rye wat elke heelgetal van 1 tot 10 insluit.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Bestaan daar 'n anti-Pascal driehoek met 2018 rye wat elke heelgetal van 1 tot $1 + 2 + \cdots + 2018$ insluit?

Language: Afrikaans

Tyd: 4 ure en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd

Dinsdag, 10 Julie 2018

Probleem 4. 'n Roosterpunt is enige punt (x, y) in die koördinaatvlak sodat x en y beide positiewe heelgetalle is wat nie groter is as 20 nie. Aanvanklik is elkeen van die 400 roosterpunte onbeset. Amy en Ben maak beurte om klippe op roosterpunte te plaas, en Amy gaan eerste. Op haar beurt plaas Amy 'n nuwe rooi klip op 'n onbesette roosterpunt sodat die afstand tussen enige twee roosterpunte wat deur rooi klippe beset is nie gelyk is aan $\sqrt{5}$ nie. Op sy beurt plaas Ben 'n nuwe blou klip op enige onbesette roosterpunt. ('n Roosterpunt wat deur 'n blou klip beset is, mag op enige afstand van enige ander besette roosterpunt wees.) Hulle stop so gou as 'n speler nie 'n klip kan plaas nie.

Vind die grootste K sodat Amy kan verseker dat sy ten minste K rooi klippe plaas, maak nie saak hoe Ben sy blou klippe plaas nie.

Probleem 5. Laat $a_1, a_2, \ldots$, 'n oneindige reeks positiewe heelgetalle wees. Sê nou dat 'n heelgetal $N > 1$ bestaan sodat, vir elke $n \geq N$, die nommer

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

'n heelgetal is. Bewys dat 'n positiewe heelgetal M bestaan sodat $a_m = a_{m+1}$ vir elke $m \geq M$.

Probleem 6. 'n Konvekse vierhoek $ABCD$ bevredig $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Punt X lê binne $ABCD$ sodat

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{en} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Bewys dat $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.