Dinsdag 8 Julie 2014

Probleem 1. Laat $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 'n oneindige ry positiewe heelgetalle wees. Bewys dat daar 'n unieke heelgetal $n \geq 1$ bestaan, só dat

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Probleem 2. Laat $n \geq 2$ 'n heelgetal wees. Beskou 'n $n \times n$ skaakbord wat uit n^2 eenheidsblokkies bestaan. 'n Rangskikking van n torings op hierdie bord is *vreedsaam* as elke ry en elke kolom presies één toring bevat. Vind die grootste positiewe heelgetal k só dat daar vir elke vreedsame rangskikking van n torings 'n $k \times k$ vierkant bestaan wat nie 'n toring op enige van sy k^2 eenheidsblokkies bevat nie.

Probleem 3. In konvekse vierhoek $ABCD$ is $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Punt H is die voet van die loodlyn van A na BD. Punte S en T lê onderskeidelik op sye AB en AD só dat H binne driehoek SCT lê en

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90° .$$

Bewys dat die lyn BD 'n raaklyn aan die omgeskrewe sirkel van driehoek TSH is.

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd

Woensdag, 9 Julie, 2014

Probleem 4. Punte P en Q lê op sy BC van skerphoekige driehoek ABC só dat $\angle PAB = \angle BCA$ en $\angle CAQ = \angle ABC$. Punte M en N lê onderskeidelik op lyne AP en AQ só dat P die middelpunt van AM is en Q die middelpunt van AN is. Bewys dat die lyne BM en CN mekaar op die omgeskrewe sirkel van driehoek ABC sny.

Probleem 5. Vir elke positiewe heelgetal n, reik die Bank van Kaapstad munte met waarde $\frac{1}{n}$ uit. Vir 'n gegewe versameling sulke munte (nie noodwendig met verskillende waardes nie) met 'n totale waarde van hoogstens $99 + \frac{1}{2}$, bewys dat hierdie versameling in 100 of minder groepe verdeel kan word, só dat elke groep 'n totale waarde van hoogstens 1 het.

Probleem 6. 'n Versameling lyne in die vlak is in *algemene posisie* as geen twee lyne ewewydig is nie en geen drie deur dieselfde punt gaan nie. 'n Versameling lyne in algemene posisie verdeel die vlak in gebiede, waarvan sommiges 'n eindige oppervlakte het; ons noem hierdie gebiede *eindige gebiede*. Bewys vir alle groot genoeg n, dat dit vir enige versameling van n lyne in algemene posisie moontlik is om ten minste $\sqrt{n}$ van die lyne blou in te kleur, só dat geen van die eindige gebiede se omtrek heeltemal blou is nie.

Nota: Vir resultate waar $\sqrt{n}$ met $c\sqrt{n}$ vervang word, sal daar punte, afhangend van die konstante c, toegeken word.