Dinsdag, Julie 18, 2017

Probleem 1. Vir elke heelgetal $a_0 > 1$, definieer die ry $a_0, a_1, a_2, \ldots$ deur

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{as } \sqrt{a_n} \text{ 'n heelgetal is,} \\ a_n + 3 & \text{andersins,} \end{cases} \qquad \text{vir elke } n \geq 0.$$

Bepaal alle waardes van a_0 waarvoor daar 'n A is sodat $a_n = A$ vir oneindig baie waardes van n.

Probleem 2. Laat $\mathbb{R}$ die versameling van reële getalle wees. Bepaal alle funksies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodat, vir alle reële getalle x en y,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Probleem 3. 'n Jagter en 'n onsienlike haas speel die volgende spel in die Euklidiese vlak. Die haas se beginpunt, A_0, en die jagter se beginpunt, B_0, is dieselfde. Na $n-1$ rondtes van die spel, is die haas op punt A_{n-1} en die jagter op punt B_{n-1}. In die $n$de rondte van die spel vind drie dinge in orde plaas:

1. Die haas beweeg ongesiens na 'n punt A_n sodat die afstand tussen A_{n-1} en A_n presies 1 is.

2. 'n Opsporingstoestel rapporteer 'n punt P_n aan die jagter. Die enigste waarborg wat deur die opsporingstoestel aan die jagter verskaf word is dat die afstand tussen P_n en A_n hoogstens 1 is.

3. Die jagter beweeg sigbaar na 'n punt B_n sodat die afstand tussen B_{n-1} en B_n presies 1 is.

Is dit altyd moontlik, maak nie saak hoe die haas beweeg nie en watter punte by die opsporingstoestel gerapporteer word nie, dat die jagter haar bewegings op so 'n manier kies dat sy na 10^9 rondtes kan verseker dat die afstand tussen haar en die haas hoogstens 100 is?

Tyd: 4 uur en 30 minute
Elke probleem is 7 punte werd

Woensdag, Julie 19, 2017

Probleem 4. Laat R en S verskillende punte op 'n sirkel Ω wees sodat RS nie 'n deursnit is nie. Laat ℓ die raaklyn aan Ω by R wees. Punt T is sodanig dat S die middelpunt van die lynstuk RT is. Punt J word gekies op die korter boog RS van Ω sodat ℓ en die omgeskrewe sirkel Γ van driehoek JST op twee afsonderlike punte kruis. Laat A die kruising van Γ en ℓ wees wat nader aan R is, en laat die lyn AJ en die sirkel Ω weer op punt K ontmoet. Bewys dat die lyn KT aan Γ raak.

Probleem 5. 'n Heelgetal $N \geq 2$ word gegee. $N(N+1)$ sokkerspelers staan in 'n ry. Meneer Alex wil $N(N-1)$ spelers van hierdie ry verwyder en 'n nuwe ry van $2N$ spelers agterlaat wat aan die volgende N voorwaardes voldoen:

(1) niemand staan tussen die twee langste spelers nie,

(2) niemand staan tussen die derde and vierde langste spelers nie,

$\vdots$

(N) niemand staan tussen die twee kortste spelers nie.

Bewys dat dit altyd moontlik is.

Probleem 6. 'n Geordende paar (x, y) van heelgetalle word 'n *primitewe punt* genoem as die grootste gemene deler van x en y gelyk aan 1 is. Gegee 'n eindige stel S van primitiewe punte, bewys dat daar 'n positiewe heelgetaal n en heelgetalle $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bestaan sodat elke (x, y) in S die volgende vergelyking voldoen:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$