

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Балтийский государственный технический университет "Военмех"  
Кафедра «Системы обработки информации и управления»

*A.A. АЛЕКСАНДРОВ, В.Ю. ЕМЕЛЬЯНОВ,  
A.Г. ЮРЕСКУЛ*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Лабораторный практикум

Санкт-Петербург  
2013

УДК 681.51.017(076)

A46

**Александров, А.А.**

**A46** Моделирование систем: лаб. практикум / А.А. Александров, В.Ю. Емельянов, А.Г. Юрескул; под ред. В.Ю. Емельянова; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2013. – 79 с.  
ISBN 978-5-85546-739-0

Лабораторный практикум включает восемь работ, посвященных построению и исследованию математических моделей технических систем, наиболее распространенных в инженерной практике, а также в курсовом и дипломном проектировании.

Рассматриваются модели нелинейных динамических систем, автоматные модели логики функционирования системы, построение и проверка качества генераторов случайных чисел и случайных процессов с заданными законами распределения и корреляционными свойствами, статистические имитационные модели систем массового обслуживания.

Каждая работа содержит основные сведения из теории, наборы вариантов индивидуальных заданий, рекомендации по выполнению работ на персональном компьютере.

Предназначен для студентов укрупненных групп направлений и специальностей 160000, 200000, 220000, 230000.

**УДК 681.51.017(076)**

Рецензент зав. каф. "Процессы управления", д-р техн. наук, проф. *O.A. Толпегин*

*Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета*

**ISBN 978-5-85546-739-0**

© Авторы, 2013

© БГТУ, 2013

## ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум соответствует рабочим программам учебных дисциплин «Моделирование систем», «Стохастические системы управления», «Основы моделирования и испытания приборов и систем» и др. реализуемых кафедрой «Системы обработки информации и управления» в рамках образовательных программ подготовки специалистов, бакалавров и магистров для студентов факультета «Информационные и управляющие системы» и других факультетов.

Основная цель практикума – изучить основы и освоить практические приемы компьютерного моделирования систем, имеющих различное математическое описание.

Содержание лабораторного практикума составляют задачи построения и исследования математических моделей как технических систем, так и систем и процессов, относящихся к сфере экономики, социальной и др. Поэтому представленные материалы и рекомендации будут полезны студентам и магистрантам различных направлений и специальностей подготовки при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ.

Области применения методов и моделей, составляющих содержание входящих в программу практикума лабораторных работ, и взаимосвязь между отдельными работами показаны на рис. 1.

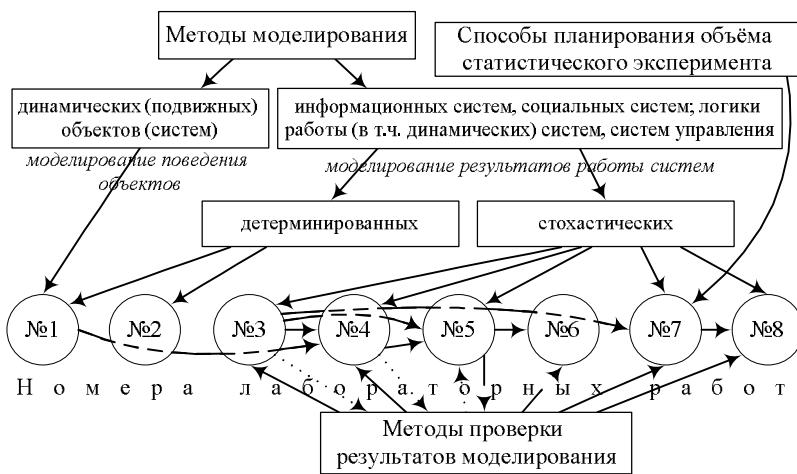


Рис. 1

Горизонтально направленные кривые линии, связывающие номера лабораторных работ, показывают возможное заимствование фрагментов алгоритмов и, соответственно, программного кода при выполнении лабораторных работ в порядке, принятом в пособии. Так, например, работы №№ 3 и 7 содержат общий фрагмент алгоритма, отвечающий за построение случайного распределения с заданным законом, и требуют только однократной программной его реализации, а проверка свойств случайного процесса в работе № 5 строится на основе методов проверки результатов моделирования в работах №№ 3 и 4.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### Основные сведения из теории

Модель нелинейной динамической системы рассматривается в форме системы нелинейных нестационарных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(X(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор переменных состояния, аргумент  $t$  – время.

При заданных начальных значениях переменных состояния  $x_i^{(0)}=x_i(0)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , путем интегрирования системы (1) могут быть определены законы их изменения во времени на любом требуемом интервале  $[0; T]$ .

Системы нелинейных нестационарных уравнений, как правило, не поддаются аналитическому решению. Для их решения применяются приближенные (численные) методы. Спектр таких методов и реализующих их программных средств достаточно широк, но для изучения принципов и особенностей их применения в рамках данной лабораторной работы достаточно ограничиться методом Рунге–Кутта 1-го порядка (также именуемого методом Эйлера или методом прямоугольников). При этом программная реализация метода должна быть выполнена самостоятельно.

Метод предусматривает решение уравнений в дискретном времени на основе преобразования модели (1) в рекуррентные соотношения:

$$x_i^{(j+1)} = x_i^{(j)} + f_i^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, t_j)h, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$t_{j+1} = t_j + h, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (3)$$

где  $x_i^{(j)}$  – значение  $i$ -й переменной состояния на  $j$ -м шаге решения (для  $t=t_j$ );  $f_i^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, t_j)$  – значение правой части  $i$ -го уравнения системы (1) на  $j$ -м шаге решения;  $h$  – шаг интегрирования;  $J$  – число шагов интегрирования, требуемое для достижения правой границы рассматриваемого интервала времени  $t=T$ . В зависимости от используемого способа обеспечения точности решения шаг интегрирования  $h$  может быть постоянным или переменным.

Точность решения, получаемого приближенными численными методами, повышается с уменьшением шага интегрирования, но при этом очевидно возрастает вычислительная трудоемкость решения задачи – количество шагов вычислений  $J$  и требуемое машинное время, а возможно, и объем используемой памяти компьютера при необходимости сохранения всего получаемого решения. Для моделей высокого порядка необоснованное уменьшение шага  $h$  может приводить к чрезмерному или недопустимому завышению требуемых ресурсов ЭВМ. Поэтому при реализации таких моделей вопрос выбора шага интегрирования для каждой модели требует отдельного решения с учетом необходимой точности получения результата и располагаемых вычислительных ресурсов. Выбор и обоснование величины шага интегрирования обычно возлагают на лицо, проводящее моделирование. Известны два основных подхода к контролю точности решения систем дифференциальных уравнений путем пошагового численного интегрирования. Первый предусматривает контроль точности в процессе интегрирования с уточнением величины каждого шага (контроль погрешности на шаге), второй – использование постоянной величины шага для всего интервала интегрирования и оценку погрешности по значениям переменных состояния только на правой границе интервала интегрирования  $t=T$ . В случае недопустимой величины погрешности процесс интегрирования повторяется с уменьшением величины шага.

В рамках данной лабораторной работы предусматривается использование второго подхода с контролем точности по конечному значению одной из переменных состояния модели  $y=x_k(T)$ , указанной в индивидуальном варианте задания.

Для оценки погрешности вычисления  $y$  с некоторым шагом  $h$  интегрирование повторяется с шагом  $h/2$ . Полученное с уменьшенным шагом значение  $y^*$  принимается за эталонное. Тогда абсолютная погрешность вычисления  $y$  определяется как  $\delta = |y^* - y|$ , относительная погрешность

$$\delta = \left| \frac{y^* - y}{y^*} \right| \cdot 100\%. \quad (4)$$

Для автоматизации выбора шага интегрирования в рамках данной лабораторной работы предусматривается использование следующего алгоритма:

1. Задается исходное значение шага интегрирования  $h$ .
2. Проводится решение системы дифференциальных уравнений на интервале  $[0; T]$  с шагом  $h$ .
3. Решение повторяется с шагом  $h/2$ .
4. Проводится оценка погрешности по соотношению (4).
5. Если погрешность  $\delta$  не превышает допустимого значения, шаг  $h$ , считается достаточным для обеспечения требуемой точности.

В противном случае в качестве нового проверяемого значения шага  $h$  принимается  $h/2$  и производится переход к п. 3.

Таким образом обеспечивается последовательное уменьшение шага интегрирования в  $2^m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) раз до достижения требуемой точности решения.

### Содержание задания

В соответствии с индивидуальным вариантом задания (табл. 1–5) разработать и отладить программное приложение, обеспечивающее:

1. Решение системы дифференциальных уравнений на интервале  $[0; T]$  для  $T = 10$  с с любым шагом, задаваемым пользователем в пределах  $(0; T)$ . Для демонстрации результатов обеспечить вывод графиков  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; значения указанной в задании переменной состояния в конце интервала интегрирования  $x_k(T)$  и значения относительной погрешности его определения  $\delta$ .

2. Анализ зависимости точности и трудоемкости решения задачи от шага интегрирования. Вывод графиков зависимостей относительной погрешности  $\delta$  и оценки трудоемкости от величины шага  $h$ .

3. Автоматический выбор величины шага интегрирования для достижения относительной погрешности не более 1% с выводом итоговых результатов, перечисленных в п. 1, для найденного шага.

### Варианты заданий

#### Модель 1 – система уравнений 5-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -g \sin x_2 + \frac{p - ac_x x_1^2}{m - ut}; \\ \dot{x}_2 &= \frac{-g + \frac{p \cdot \sin(x_5 - x_2) + ac_y x_1^2}{m - ut}}{x_1}; \\ \dot{x}_3 &= \frac{m_1 a (x_2 - x_5) x_1^2 - m_2 a x_1^2 x_3}{m - ut}; \\ \dot{x}_4 &= x_1 \sin x_2; \\ \dot{x}_5 &= x_3.\end{aligned}$$

Таблица 1

Варианты исходных данных для модели 1

№	Значения постоянных параметров модели								Начальные значения переменных состояния					
	$p$	$a$	$m$	$u$	$c_x$	$c_y$	$m_1$	$m_2$	$T$	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$
1	$10^5$	0,6	2000	10	0,05	0,01	0,1	0,01	10	1800	0,8	0	0	0,8
2	$10^5$	0,8	2000	10	0,02	0,003	0,05	0,01	11	1800	0,8	0	0	0,8
3	$10^5$	0,5	2000	20	0,03	0,002	0,05	0,01	12	1800	0,8	0	0	0,8
4	$6 \cdot 10^4$	1,1	1000	10	0,02	0,001	0,05	0,01	13	1500	1	0	0	1
5	$5 \cdot 10^4$	1,1	2000	50	0,02	0,005	0,05	0,005	14	1500	1	0	0	1
6	$2,5 \cdot 10^4$	1,1	1000	20	0,02	0,002	0,03	0,005	15	1000	1	0	0	1
7	$2 \cdot 10^4$	1,1	1000	10	0,02	0,005	0,03	0,003	14	1000	1	0	0	1
8	$2 \cdot 10^5$	1,1	1000	10	0,2	0,05	0,03	0,003	13	1000	0,5	0	0	0,5
9	$10^5$	0,6	2000	10	0,03	0,005	0,07	0,01	12	1700	0,8	0	100	0,8
10	$2 \cdot 10^4$	1,1	1100	10	0,02	0,005	0,03	0,003	11	1100	1	0	200	1

Примечания. Для всех вариантов принять  $g = 9,81$ . Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_4$ .

#### Модель 2 – система уравнений 5-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= kx_2 - kx_1; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= lx_1 - lx_2 - mx_3 + nx_4; \\ \dot{x}_4 &= -k_x x_4 - i_1 x_2 - i_2 x_3 + s(\theta - x_2); \\ \dot{x}_5 &= \frac{10000 - x_5}{b - Vt};\end{aligned}$$

$$x_4 = \begin{cases} \delta & \text{при } |\delta| \leq \delta_{\max}, \\ \delta_{\max} \operatorname{sign} \delta & \text{при } |\delta| > \delta_{\max}; \end{cases}$$

$$\dot{x}_5 = V \sin x_1.$$

Таблица 2  
Варианты исходных данных для модели 2

№	Значения постоянных параметров модели										Начальные значения переменных состояния					
	$k$	$l$	$m$	$n$	$k_t$	$b$	$i_1$	$i_2$	$s$	$V$	$T$	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$
1	1	10	2	8	100	22000	10	1	100	800	11	1	1	0	0	0
2	1	8	1	8	100	22000	20	2	100	500	12	1	1	0	0	0
3	1	5	1	5	100	30000	10	1	200	800	13	1	1	0	0	0
4	1	10	1	10	100	22000	10	1	200	800	14	0,2	0,2	0	0	0
5	1	8	2	7	90	25000	10	2	200	800	12	0,3	0,3	0	0	500
6	2	7	1	9	110	27000	18	2	150	700	10	0,3	0,3	0	0	500
7	1	5	2	8	100	25000	15	2	200	600	12	0,4	0,4	0	0	300
8	1	10	1	5	110	29000	10	2	100	500	14	0,7	0,7	0	0	700
9	2	7	1	7	100	30000	20	2	200	600	12	0,9	0,9	0	0	100
10	1	6	1	10	80	22000	10	1	200	800	10	0,1	0,1	0	0	900

Примечания. Для всех вариантов принять  $\delta_{\max} = 0,5$ ,  $\delta(0) = x_4(0)$ . Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_5$ .

### Модель 3 – система уравнений 5-го порядка

$$\dot{x}_1 = k\alpha^*;$$

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha & \text{при } |\alpha| \leq \alpha_{\max}, \\ \alpha_{\max} \operatorname{sign} \alpha & \text{при } |\alpha| > \alpha_{\max}; \end{cases}$$

$$\alpha = x_2 - x_1;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

$$\dot{x}_3 = lx_1 - lx_2 - mx_3 + nx_4;$$

$$\dot{x}_4 = -k_t x_4 - i_1 x_2 - i_2 x_3 + s(\theta - x_1);$$

$$\theta = \frac{10000 - x_5}{b - Vt};$$

$$\dot{x}_5 = V \sin x_1.$$

Таблица 3  
Варианты исходных данных для модели 3

№	Значения постоянных параметров модели										Начальные значения переменных состояния					
	$k$	$l$	$m$	$n$	$k_t$	$b$	$i_1$	$i_2$	$s$	$V$	$T$	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$
1	1	12	1	8	100	30000	10	1	100	800	11	1	1	0	0	0
2	1	5	1	8	100	20000	10	1	200	500	12	0,2	0,2	0	0	0
3	1	5	1	10	100	22000	10	1	100	800	13	1,2	1,2	0	0	0
4	1	5	1	10	100	22000	10	1	200	500	14	1	1	0	0	0
5	1	6	1	10	100	25000	11	2	150	400	13	1	1	0	0	0
6	1	8	1	9	120	20000	11	2	150	600	12	0,5	0,5	0	0	0
7	1	7	1	7	110	27000	9	1	120	700	11	1,5	1,5	0	0	100
8	2	2	2	2	90	30000	5	2	190	600	10	1	1	-1	-2	500
9	1	12	2	8	80	22000	10	1	200	700	11	0,7	0,6	0	0	200
10	2	8	2	10	100	26000	9	2	200	800	10	0,3	0,3	0	0	500

Примечания. Для всех вариантов принять  $\alpha_{\max} = 0,5$ . Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_5$ .

### Модель 4 – система уравнений 3-го порядка

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = \frac{cu}{x_3} - g - \frac{rx_2^2}{x_3};$$

$$\dot{x}_3 = -u.$$

Таблица 4

## Варианты исходных данных для модели 4

№	Значения постоянных параметров модели				Начальные значения переменных состояния		
	c	u	T	h <sub>tb</sub>	x <sub>1</sub> (0)	x <sub>2</sub> (0)	x <sub>3</sub> (0)
1	9000	10	11	8480	0	0	600
2	4000	20	12	8590	0	0	800
3	7000	20	13	10000	0	0	1200

Окончание табл. 4

№	Значения постоянных параметров модели				Начальные значения переменных состояния		
	c	u	T	h <sub>tb</sub>	x <sub>1</sub> (0)	x <sub>2</sub> (0)	x <sub>3</sub> (0)
4	5000	25	12	9280	0	0	1000
5	4000	40	11	9500	0	0	1200
6	8000	20	13	8790	0	0	1000
7	8000	20	11	9900	0	0	1100
8	4000	40	10	9700	0	0	1200
9	6000	50	10	8590	100	0	1200
10	6500	35	12	9990	1000	0	1090

Примечания. Для всех вариантов принять  $g = 9,81$ . В нечетных вариантах значения параметра "r" определять по формуле  $r = 0,1 \cdot e^{-x_1/h_{tb}}$ , в четных вариантах – линейной интерполяцией по табл. 5. Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_1$ .

Таблица 5

Зависимость параметра r от значений x<sub>1</sub>

x <sub>1</sub>	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
r	0,015	0,0135	0,012	0,0107	0,0096	0,0088	0,0077
x <sub>1</sub>	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500
r	0,0069	0,0061	0,0055	0,0049	0,0044	0,0039	0,0035
x <sub>1</sub>	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000
r	0,0031	0,0028	0,0025	0,0022	0,002	0,0018	0,0016

Примечание. При выходе "x<sub>1</sub>" за границы табличных значений параметр "r" задавать его граничным значением.

## Практические рекомендации

1. Выбор программной среды производится по согласованию с преподавателем. Для студентов, обучающихся по образовательным программам с углубленным изучением программирования, использование готовых модулей, автоматизирующих численное решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, не допускается.

Для студентов других направлений и специальностей практические рекомендации для выполнения лабораторной работы в специализированных вычислительных средах представлены в приложении 1 на примере Mathworks Matlab. При использовании специализированной вычислительной среды с возможностью выбора функций решения систем дифференциальных уравнений в дополнение к сформулированному выше заданию требуется выполнить сравнительный анализ точности решения различными методами в соответствии с рекомендациями приложения 1.

2. При использовании графических средств, требующих накопления в оперативной памяти массивов значений функций для построения графиков, уменьшение величины шага интегрирования может привести к необоснованному увеличению времени работы программы или потере ее работоспособности. Так при шаге интегрирования  $h=10^{-6}$ , довольно распространенном для рассматриваемого класса задач, на интервале интегрирования 10 с для каждой переменной состояния в процессе численного решения системы (1) будет получено  $10^7$  значений. Сохранить в оперативной памяти такие массивы данных невозможно. Отметим также, что для предельно детального отображения графика на экране монитора при современных характеристиках разрешения последнего вполне достаточно не более  $10^3$  точек. Поэтому, в случае необходимости накопления массивов значений переменных состояния, в процессе интегрирования системы целесообразно сохранять в них значения, разделенные интервалом времени, например, 0,01 с.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

# ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

### Основные сведения из теории

Модель нелинейной динамической системы рассматривается в форме системы нелинейных нестационарных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(X(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор переменных состояния, аргумент  $t$  – время.

При заданных начальных значениях переменных состояния  $x_i^{(0)} = x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , путем интегрирования системы (1) могут быть определены законы их изменения во времени на любом требуемом интервале  $[0; T]$ .

Системы нелинейных нестационарных уравнений, как правило, не поддаются аналитическому решению. Для их решения применяются приближенные (численные) методы. Спектр таких методов и реализующих их программных средств достаточно широк, но для изучения принципов и особенностей их применения в рамках данной лабораторной работы достаточно ограничиться методом Рунге–Кутта 1-го порядка (также именуемого методом Эйлера или методом прямоугольников). При этом программная реализация метода должна быть выполнена самостоятельно.

Метод предусматривает решение уравнений в дискретном времени на основе преобразования модели (1) в рекуррентные соотношения:

$$x_i^{(j+1)} = x_i^{(j)} + f_i^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, t_j)h, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$t_{j+1} = t_j + h, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (3)$$

где  $x_i^{(j)}$  – значение  $i$ -й переменной состояния на  $j$ -м шаге решения (для  $t=t_j$ );  $f_i^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, t_j)$  – значение правой части  $i$ -го уравнения системы (1) на  $j$ -м шаге решения;  $h$  – шаг интегрирования;  $J$  – число шагов интегрирования, требуемое для достижения правой границы рассматриваемого интервала времени  $t=T$ . В зависимости от используемого способа обеспечения точности решения шаг интегрирования  $h$  может быть постоянным или переменным.

Точность решения, получаемого приближенными численными методами, повышается с уменьшением шага интегрирования, но при этом очевидно возрастает вычислительная трудоемкость решения задачи – количество шагов вычислений  $J$  и требуемое машинное время, а возможно, и объем используемой памяти компьютера при необходимости сохранения всего получаемого решения. Для моделей высокого порядка необоснованное уменьшение шага  $h$  может приводить к чрезмерному или недопустимому завышению требуемых ресурсов ЭВМ. Поэтому при реализации таких моделей вопрос выбора шага интегрирования для каждой модели требует отдельного решения с учетом необходимой точности получения результата и располагаемых вычислительных ресурсов. Выбор и обоснование величины шага интегрирования обычно возлагают на лицо, проводящее моделирование. Известны два основных подхода к контролю точности решения систем дифференциальных уравнений путем пошагового численного интегрирования. Первый предусматривает контроль точности в процессе интегрирования с уточнением величины каждого шага (контроль погрешности на шаге), второй – использование постоянной величины шага для всего интервала интегрирования и оценку погрешности по значениям переменных состояния только на правой границе интервала интегрирования  $t=T$ . В случае недопустимой величины погрешности процесс интегрирования повторяется с уменьшением величины шага.

В рамках данной лабораторной работы предусматривается использование второго подхода с контролем точности по конечному значению одной из переменных состояния модели  $y=x_k(T)$ , указанной в индивидуальном варианте задания.

Для оценки погрешности вычисления  $y$  с некоторым шагом  $h$  интегрирование повторяется с шагом  $h/2$ . Полученное с уменьшенным шагом значение  $y^*$  принимается за эталонное. Тогда абсолютная погрешность вычисления  $y$  определяется как  $\delta = |y^* - y|$ , относительная погрешность

$$\delta = \left| \frac{y^* - y}{y^*} \right| \cdot 100\%. \quad (4)$$

Для автоматизации выбора шага интегрирования в рамках данной лабораторной работы предусматривается использование следующего алгоритма:

1. Задается исходное значение шага интегрирования  $h$ .
2. Проводится решение системы дифференциальных уравнений на интервале  $[0; T]$  с шагом  $h$ .
3. Решение повторяется с шагом  $h/2$ .
4. Проводится оценка погрешности по соотношению (4).
5. Если погрешность  $\delta$  не превышает допустимого значения, шаг  $h$ , считается достаточным для обеспечения требуемой точности.

В противном случае в качестве нового проверяемого значения шага  $h$  принимается  $h/2$  и производится переход к п. 3.

Таким образом обеспечивается последовательное уменьшение шага интегрирования в  $2^m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) раз до достижения требуемой точности решения.

### Содержание задания

В соответствии с индивидуальным вариантом задания (табл. 1–5) разработать и отладить программное приложение, обеспечивающее:

1. Решение системы дифференциальных уравнений на интервале  $[0; T]$  для  $T = 10$  с с любым шагом, задаваемым пользователем в пределах  $(0; T)$ . Для демонстрации результатов обеспечить вывод графиков  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; значения указанной в задании переменной состояния в конце интервала интегрирования  $x_k(T)$  и значения относительной погрешности его определения  $\delta$ .
2. Анализ зависимости точности и трудоемкости решения задачи от шага интегрирования. Вывод графиков зависимостей относительной погрешности  $\delta$  и оценки трудоемкости от величины шага  $h$ .
3. Автоматический выбор величины шага интегрирования для достижения относительной погрешности не более 1% с выводом итоговых результатов, перечисленных в п. 1, для найденного шага.

### Варианты заданий

#### Модель 1 – система уравнений 5-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -g \sin x_2 + \frac{p - ac_x x_1^2}{m - ut}; \\ \dot{x}_2 &= -g + \frac{p \cdot \sin(x_5 - x_2) + ac_y x_1^2}{m - ut}; \\ \dot{x}_3 &= \frac{m_1 a (x_2 - x_5) x_1^2 - m_2 a x_1^2 x_3}{m - ut}; \\ \dot{x}_4 &= x_1 \sin x_2; \\ \dot{x}_5 &= x_3.\end{aligned}$$

Варианты исходных данных для модели 1

Таблица 1

№	Значения постоянных параметров модели									Начальные значения переменных состояния				
	$p$	$a$	$m$	$u$	$c_x$	$c_y$	$m_1$	$m_2$	$T$	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$
1	$10^5$	0,6	2000	10	0,05	0,01	0,1	0,01	10	1800	0,8	0	0	0,8
2	$10^5$	0,8	2000	10	0,02	0,003	0,05	0,01	11	1800	0,8	0	0	0,8
3	$10^5$	0,5	2000	20	0,03	0,002	0,05	0,01	12	1800	0,8	0	0	0,8
4	$6 \cdot 10^4$	1,1	1000	10	0,02	0,001	0,05	0,01	13	1500	1	0	0	1
5	$5 \cdot 10^4$	1,1	2000	50	0,02	0,005	0,05	0,005	14	1500	1	0	0	1

№	Значения постоянных параметров модели									Начальные значения переменных состояния				
	p	a	m	u	c <sub>x</sub>	c <sub>y</sub>	m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	T	x <sub>1</sub> (0)	x <sub>2</sub> (0)	x <sub>3</sub> (0)	x <sub>4</sub> (0)	x <sub>5</sub> (0)
6	2,5·10 <sup>4</sup>	1,1	1000	20	0,02	0,002	0,03	0,005	15	1000	1	0	0	1
7	2·10 <sup>4</sup>	1,1	1000	10	0,02	0,005	0,03	0,003	14	1000	1	0	0	1
8	2·10 <sup>5</sup>	1,1	1000	10	0,2	0,05	0,03	0,003	13	1000	0,5	0	0	0,5
9	10 <sup>5</sup>	0,6	2000	10	0,03	0,005	0,07	0,01	12	1700	0,8	0	100	0,8
10	2·10 <sup>4</sup>	1,1	1100	10	0,02	0,005	0,03	0,003	11	1100	1	0	200	1

Примечания. Для всех вариантов принять  $g = 9,81$ . Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_4$ .

### Модель 2 – система уравнений 5-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= kx_2 - kx_1; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= lx_1 - lx_2 - mx_3 + nx_4; \\ \dot{x}_4 &= -k_tx_4 - i_1x_2 - i_2x_3 + s(\theta - x_2); \\ \theta &= \frac{10000 - x_5}{b - Vt}; \\ x_4 &= \begin{cases} \delta & \text{при } |\delta| \leq \delta_{\max}, \\ \delta_{\max} \operatorname{sign} \delta & \text{при } |\delta| > \delta_{\max}; \end{cases} \\ \dot{x}_5 &= V \sin x_1.\end{aligned}$$

Таблица 2

### Варианты исходных данных для модели 2

№	Значения постоянных параметров модели										Начальные значения переменных состояния					
	k	l	m	n	k <sub>t</sub>	b	i <sub>1</sub>	i <sub>2</sub>	s	V	T	x <sub>1</sub> (0)	x <sub>2</sub> (0)	x <sub>3</sub> (0)	x <sub>4</sub> (0)	x <sub>5</sub> (0)
1	1	10	2	8	100	22000	10	1	100	800	11	1	1	0	0	0
2	1	8	1	8	100	22000	20	2	100	500	12	1	1	0	0	0
3	1	5	1	5	100	30000	10	1	200	800	13	1	1	0	0	0
4	1	10	1	10	100	22000	10	1	200	800	14	0,2	0,2	0	0	0
5	1	8	2	7	90	25000	10	2	200	800	12	0,3	0,3	0	0	500
6	2	7	1	9	110	27000	18	2	150	700	10	0,3	0,3	0	0	500
7	1	5	2	8	100	25000	15	2	200	600	12	0,4	0,4	0	0	300
8	1	10	1	5	110	29000	10	2	100	500	14	0,7	0,7	0	0	700
9	2	7	1	7	100	30000	20	2	200	600	12	0,9	0,9	0	0	100
10	1	6	1	10	80	22000	10	1	200	800	10	0,1	0,1	0	0	900

Примечания. Для всех вариантов принять  $\delta_{\max} = 0,5$ ,  $\delta(0) = x_4(0)$ . Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_5$ .

### Модель 3 – система уравнений 5-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= k\alpha^*; \\ \alpha^* &= \begin{cases} \alpha & \text{при } |\alpha| \leq \alpha_{\max}, \\ \alpha_{\max} \operatorname{sign} \alpha & \text{при } |\alpha| > \alpha_{\max}; \end{cases} \\ \alpha &= x_2 - x_1; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= lx_1 - lx_2 - mx_3 + nx_4; \\ \dot{x}_4 &= -k_tx_4 - i_1x_2 - i_2x_3 + s(\theta - x_1); \\ \theta &= \frac{10000 - x_5}{b - Vt}; \\ \dot{x}_5 &= V \sin x_1.\end{aligned}$$

Таблица 3

### Варианты исходных данных для модели 3

№	Значения постоянных параметров модели										Начальные значения переменных состояния					
	k	l	m	n	$k_t$	b	$i_1$	$i_2$	s	V	T	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$
1	1	12	1	8	100	30000	10	1	100	800	11	1	1	0	0	0
2	1	5	1	8	100	20000	10	1	200	500	12	0,2	0,2	0	0	0
3	1	5	1	10	100	22000	10	1	100	800	13	1,2	1,2	0	0	0
4	1	5	1	10	100	22000	10	1	200	500	14	1	1	0	0	0
5	1	6	1	10	100	25000	11	2	150	400	13	1	1	0	0	0
6	1	8	1	9	120	20000	11	2	150	600	12	0,5	0,5	0	0	0
7	1	7	1	7	110	27000	9	1	120	700	11	1,5	1,5	0	0	100
8	2	2	2	2	90	30000	5	2	190	600	10	1	1	-1	-2	500
9	1	12	2	8	80	22000	10	1	200	700	11	0,7	0,6	0	0	200
10	2	8	2	10	100	26000	9	2	200	800	10	0,3	0,3	0	0	500

Примечания. Для всех вариантов принять  $\alpha_{\max}=0,5$ . Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_5$ .

#### Модель 4 – система уравнений 3-го порядка

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = \frac{cu}{x_3} - g - \frac{rx_2^2}{x_3};$$

$$\dot{x}_3 = -u.$$

Таблица 4

#### Варианты исходных данных для модели 4

№	Значения постоянных параметров модели				Начальные значения переменных состояния		
	c	u	T	$h_{\text{TB}}$	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$
1	9000	10	11	8480	0	0	600
2	4000	20	12	8590	0	0	800
3	7000	20	13	10000	0	0	1200

Окончание табл. 4

№	Значения постоянных параметров модели				Начальные значения переменных состояния		
	c	u	T	$h_{\text{TB}}$	$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$
4	5000	25	12	9280	0	0	1000
5	4000	40	11	9500	0	0	1200
6	8000	20	13	8790	0	0	1000
7	8000	20	11	9900	0	0	1100
8	4000	40	10	9700	0	0	1200
9	6000	50	10	8590	100	0	1200
10	6500	35	12	9990	1000	0	1090

Примечания. Для всех вариантов принять  $g = 9,81$ . В нечетных вариантах значения параметра "r" определять по формуле  $r=0,1 \cdot e^{-x_1/h_{\text{TB}}}$ , в четных вариантах – линейной интерполяцией по табл. 5. Погрешность оценивать по переменной состояния  $x_1$ .

Таблица 5

#### Зависимость параметра r от значений $x_1$

$x_1$	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
r	0,015	0,0135	0,012	0,0107	0,0096	0,0088	0,0077
$x_1$	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500
r	0,0069	0,0061	0,0055	0,0049	0,0044	0,0039	0,0035
$x_1$	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000
r	0,0031	0,0028	0,0025	0,0022	0,002	0,0018	0,0016

Примечание. При выходе " $x_1$ " за границы табличных значений параметр "r" задавать его граничным значением.

#### Практические рекомендации

1. Выбор программной среды производится по согласованию с преподавателем. Для студентов, обучающихся по образовательным программам с углубленным изучением программирования, использование готовых модулей, автоматизирующих численное решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, не допускается.

Для студентов других направлений и специальностей практические рекомендации для выполнения лабораторной работы в специализированных вычислительных средах представлены в приложении 1 на примере Mathworks Matlab. При использовании специализированной

вычислительной среды с возможностью выбора функций решения систем дифференциальных уравнений в дополнение к сформулированному выше заданию требуется выполнить сравнительный анализ точности решения различными методами в соответствии с рекомендациями приложения 1.

2. При использовании графических средств, требующих накопления в оперативной памяти массивов значений функций для построения графиков, уменьшение величины шага интегрирования может привести к необоснованному увеличению времени работы программы или потере ее работоспособности. Так при шаге интегрирования  $h=10^{-6}$ , довольно распространном для рассматриваемого класса задач, на интервале интегрирования 10 с для каждой переменной состояния в процессе численного решения системы (1) будет получено  $10^7$  значений. Сохранить в оперативной памяти такие массивы данных невозможно. Отметим также, что для предельно детального отображения графика на экране монитора при современных характеристиках разрешения последнего вполне достаточно не более  $10^3$  точек. Поэтому, в случае необходимости накопления массивов значений переменных состояния, в процессе интегрирования системы целесообразно сохранять в них значения, разделенные интервалом времени, например, 0,01 с.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

# ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

### Основные сведения из теории

Математическая  $F$ -схема, или детерминированный автомат, является удобной формой описания логических закономерностей развития процессов в системе, но не учитывает фактор случайности. Поэтому она обычно используется для моделирования подсистем контроля и управления и позволяет решать задачи разработки, проверки и оценки качества реализуемых ими алгоритмов принятия решения, выбора закона управления или изменения структуры системы.

$F$ -схема задается в форме следующей совокупности:

$$F=\langle X, Z, Y, \varphi, \psi \rangle,$$

где  $Z=(z_1, z_2, \dots, z_k)$  – множество состояний, или внутренний алфавит;  $X=(x_1, x_2, \dots, x_j)$  – конечное множество входных сигналов, или входной алфавит;  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_l)$  – конечное множество выходных сигналов, или выходной алфавит;  $\varphi = \varphi(z, x)$  – функция переходов, описывающая закономерности смены состояний;  $\psi = \psi(z, x)$  – функция выходов, описывающая закономерности формирования выходных сигналов. Если множество состояний является конечным, автомат называется конечным. Конечный автомат представляет собой абстрактную математическую схему, поэтому природа состояний и сигналов безразлична.

Иногда  $F$ -схему дополняют значением состояния автомата в начальный момент времени работы ( $z_0$ ):

$$F=\langle X, Z, Y, \varphi, \psi, z_0 \rangle, \quad (5)$$

где  $z_0$  совпадает с одним из элементов множества  $Z$ .

Теория автоматов получила свое первоначальное развитие в тесной связи с разработкой логических схем цифровой вычислительной техники. Для ее применения при построении моделей систем управления целесообразно уточнить смысл некоторых терминов.

С позиций теории управления конечный автомат может рассматриваться как "черный ящик" с одним входом и одним выходом. На вход подается сигнал  $x$ , а с выхода снимается сигнал  $y$  (рис. 2,а). Сигналы  $x$  и  $y$  могут принимать только фиксированные значения. Возможные значения входного сигнала образуют дискретное конечное множество  $X$ , значения выходного – дискретное конечное множество  $Y$ . Множества  $X$  и  $Y$  отображены совокупностями отметок на вертикальных

сях на рис. 2, б и в соответственно. На рис. 2, б и в представлены примеры последовательности входных и выходных сигналов автомата.

Другая, расширенная, трактовка понятия автомата допускает наличие нескольких входов или выходов. Так, например, допустим наличие у автомата  $M$  входных каналов с собственными алфавитами  $X^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{J_m}^{(m)})$ . Тогда алфавит  $X$  вводится как произведение алфавитов:  $X = X^{(1)} \times X^{(2)} \times \dots \times X^{(M)}$ , т. е. символами алфавита  $X$  объявляются все возможные сочетания элементов алфавитов  $X^{(m)}$  по одному из каждого. Количество элементов в  $X$  в результате составит:

$$J = \prod_{m=1}^M J_m.$$

Аналогичный прием может быть использован в предположении, что имеется несколько выходных каналов. В любом случае сохраняется общий вид представления автомата в представленной выше форме  $F$ -схемы.

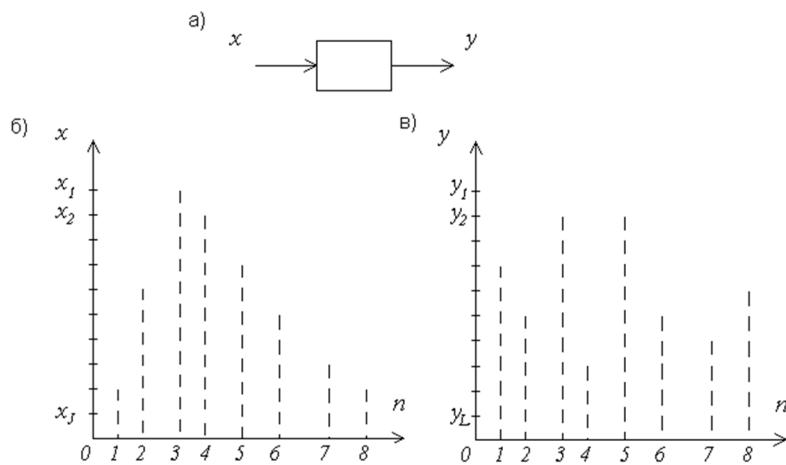


Рис. 2

Далее будет использоваться терминология, принятая в теории автоматов, которую следует воспринимать с учетом этих замечаний.

Процесс в конечном автомате рассматривается в дискретном времени, единицей измерения которого является такт. В течение такта значения всех сигналов сохраняются постоянными. При наступлении следующего такта может измениться входной сигнал  $x$ . В зависимости от его значения в соответствии с жесткими правилами, заданными функцией переходов, может измениться или сохраниться состояние автомата  $z$ . Одновременно в соответствии с жесткими правилами, заданными функцией выходов, формируется новый выходной сигнал  $y$ . Величина такта не обязательно является постоянной (см. рис. 2, б). При практической реализации абстрактных моделей автомата момент наступления очередного такта определяется различными способами, которые формально можно свести к подаче на автомат некоторого синхронизирующего сигнала.

Рассмотрим простейшие и наиболее широко используемые виды конечных автоматов.

1. Автомат Мили имеет функции переходов и выходов следующего вида:

$$\begin{aligned} z[n+1] &= \varphi(z[n], x[n]), \\ y[n] &= \psi(z[n], x[n]), \end{aligned}$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер такта работы конечного автомата. Таким образом, в автомате Мили новое состояние и выходной сигнал выбираются в зависимости от сочетаний текущего состояния и входного сигнала.

Рассмотрим пример автомата Мили, используя для задания функций переходов и выходов табличный, графический и матричный способы.

При табличном способе для функции переходов задается таблица переходов (табл. 6), а для функции выходов – таблица выходов (табл. 7). Строки таблиц соответствуют элементам входного алфавита, а столбцы – элементам внутреннего алфавита. Позиция таблицы переходов, соответствующая  $k$ -му столбцу и  $j$ -й строке, – это новое состояние, в которое переходит автомат, если в момент прихода входного сигнала  $x_j$  он находился в состоянии  $z_k$ , а аналогичная позиция таблицы выходов – формируемый при этом выходной сигнал.

Таблица 6  
Таблица переходов автомата Мили

Входные сигналы	Состояния		
	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$x_1$	$z_2$	$z_3$	$z_1$
$x_2$	$z_1$	$z_1$	$z_3$

При матричном способе обе функции задаются одной матрицей соединений  $C$  размерностью  $K \times K$ , строки которой соответствуют исходным состояниям  $z[n]$ , столбцы – состояниям на следующем такте  $z[n+1]$ . Элементы матрицы задаются в виде дроби, в числите которой указывают входной сигнал, вызывающий соответствующий переход, а в знаменателе – формируемый при таком переходе выходной сигнал. Вместо элементов, соответствующих невозможному для данного автомата переходу, ставится прочерк:

$$C = \begin{vmatrix} x_2/y_2 & x_1/y_1 & - \\ x_2/y_2 & - & x_1/y_1 \\ x_1/y_3 & - & x_2/y_1 \end{vmatrix}.$$

При графическом способе автомат Мили задается графом (рис. 3,а), вершины которого соответствуют возможным состояниям автомата. Каждая вершина имеет  $J$  исходящих дуг, соответствующих вариантам смены или сохранения состояний при различных входных сигналах  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ). Около каждой дуги указывают соответствующие ей входной и выходной сигналы.

Отметим, что количества позиций таблицы переходов, позиций таблицы выходов, задаваемых элементов матрицы соединений и дуг графа для автомата Мили одинаковы.

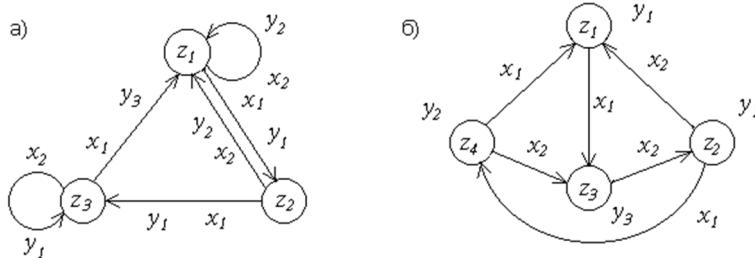


Рис. 3. Графы состояний: а – автомата Мили; б – автомата Мура

2. У автомата Мура функции переходов и выходов имеют вид

$$\begin{aligned} z[n+1] &= \phi(z[n], x[n]), \\ y[n] &= \psi(z[n]). \end{aligned}$$

Таким образом, здесь новое состояние определяется аналогично автомату Мили, а выходной сигнал зависит только от текущего состояния автомата. Способы задания автомата Мура также рассмотрим на примере.

Автомат Мура может задаваться таблицей переходов (табл. 8), которая, за исключением верхней строки, составляется аналогично табл. 6. В верхней строке табл. 8 указываются выходные сигналы, связанные с элементами второй строки в соответствии с функцией выходов.

Таблица переходов автомата Мура

Таблица 8

Входные сигналы	Выходные сигналы			
	$y_1$	$y_1$	$y_3$	$y_2$
		Состояния		
$x_1$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_2$	$z_3$	$z_4$	$z_3$	$z_1$
	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_4$

Другие варианты задания автомата Мура – граф (рис. 3,б) или матрица соединений  $C$  и вектор выходов  $Y$ :

$$C = \begin{vmatrix} - & x_2 & x_1 & - \\ - & - & x_2 & x_1 \\ - & - & x_1 & x_2 \\ x_1 & - & - & x_2 \end{vmatrix}, Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_2 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

3. В автономном автомате отсутствуют входные сигналы. Поэтому его  $F$ -схема задается в виде следующей совокупности:

$$F = \langle Z, Y, \varphi, \psi \rangle.$$

Функции переходов и выходов имеют вид

$$\begin{aligned} z[n+1] &= \varphi(z[n]), \\ y[n] &= \psi(z[n]). \end{aligned}$$

Автономный автомат можно задать графом, у которого каждой вершине (состоянию автомата) соответствует одна и только одна выходная дуга и определенный выходной сигнал, таблицей вида 9 или двумя векторами – соединений и выходов.

Таблица 9

Таблица переходов автономного автомата

Состояние	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$
Состояние на следующем такте	$z_6$	$z_4$	$z_7$	$z_3$	$z_1$	$z_2$	$z_5$
Выходной сигнал	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_2$	$y_1$	$y_1$	$y_3$

Следует отметить, что в любом конечном автономном автомате состояния и выходные сигналы неизбежно начнут периодически повторяться, начиная с некоторого такта. Длина такого периода не превышает количества состояний автомата, а начальное состояние влияет только на номер такта, начиная с которого наступает периодический процесс.

С точки зрения удобства реализации модели автономный автомат может рассматриваться как предельный случай автомата Мура при размерности множества входных сигналов  $J=1$ .

4. Автомат без памяти обеспечивает однозначное отображение входного алфавита  $X$  в выходной  $Y$ . Для него не вводится внутренний алфавит и  $F$ -схема задается в виде совокупности:

$$F = \langle X, Y, \psi \rangle,$$

а функция выходов имеет вид

$$y[n] = \psi(x[n]).$$

Автомат без памяти может быть задан вектором  $Y$  вида (6), размерность которого соответствует размерности множества  $X$ , или таблицей вида табл. 11.

Таблица 10

Таблица выходов автомата без памяти

Входной сигнал	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
Выходной сигнал	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_2$	$y_5$	$y_4$	$y_3$

5. В автомате без выхода отсутствуют выходные сигналы. Для него  $F$ -схема имеет вид

$$F = \langle X, Z, \varphi \rangle,$$

и задается только функция переходов

$$z[n+1] = \varphi(z[n], x[n])$$

в форме таблицы вида табл. 6, соответствующего графа или матрицы  $C$  вида (6).

Для детерминированного автомата функции переходов  $\varphi$  и выходов  $\psi$  задаются однозначно и в процессе его функционирования не изменяются.

### Содержание задания

В соответствии с индивидуальным вариантом задания (табл. 11):

1. Составить в табличной форме модель детерминированного конечного автомата заданного типа с заданными размерностями внутреннего, входного и выходного алфавитов.

2. Разработать и отладить программное приложение, обеспечивающее имитационное моделирование процесса функционирования автомата в соответствии с составленной моделью.

Таблица 11

Номер варианта	Тип автомата	Количество входов	Количество состояний	Количество выходов
1	Мура	4	4	2
2	Без выхода	3	6	—
3	Мили	2	4	2
4	Мура	5	4	2
5	Автономный	—	8	5
6	Мура	4	5	3
7	Мили	3	4	4
8	Автономный	—	7	4
9	Без выхода	3	4	—
10	Мура	4	4	3
11	Мили	4	3	4
12	Автономный	—	6	3
13	Мура	4	3	2
14	Мили	2	4	4
15	Без выхода	5	5	—
16	Мура	5	5	4
17	Без памяти	10	—	6
18	Мили	3	4	2
19	Мура	4	5	4
20	Без выхода	4	6	—
21	Мили	3	4	3
22	Без памяти	13	—	8
23	Мура	2	5	4
24	Мили	4	4	4
25	Автономный	—	8	3
26	Мура	6	6	4
27	Автономный	—	9	7
28	Без памяти	12	—	5
29	Мура	3	5	3
30	Без памяти	12	—	9
31	Без выхода	6	7	—
32	Мура	5	3	2
33	Автономный	—	8	6
34	Без выхода	4	8	—
35	Мили	3	5	4
36	Мура	5	6	4
37	Мура	6	4	3
38	Без выхода	8	4	—
39	Без выхода	7	6	—
40	Без выхода	5	5	—

### Практические рекомендации

1. Разработанное программное приложение должно обеспечивать наблюдение процессов смены состояний и формирования выходных сигналов автомата на произвольном количестве тактов.
2. При программной реализации модели автомата целесообразно использовать *F*-схему в форме (5).
3. Момент наступления каждого такта моделируемого автомата должен задаваться пользователем приложения в форме подачи нового значения входного сигнала или для автономного автомата – в форме подачи специально сгенерированного сигнала на начало следующего такта (например, при нажатии клавиши на консольном устройстве). До момента наступления следующего такта текущие состояние и выходной сигнал должны сохраняться неизменными.
4. Наиболее удобной с точки зрения программной реализации является табличная форма представления функций переходов и выходов автомата. На ее основе эффективная программная реализация автомата Мили сводится к следующему:
  - вводятся целочисленные переменные, например:  $z$  – номер состояния,  $x$  – номер входного сигнала,  $y$  – номер выходного сигнала;
  - задаются целочисленные массивы констант, например: *TRANS*, соответствующий таблице переходов, и *OUT*, соответствующий таблице выходов;

- моделирование смены состояния на очередном такте сводится к выполнению оператора присваивания  $z=TRANS(x,z)$ , моделирование формирования выходного сигнала – к выполнению оператора присваивания  $y=OUT(x,z)$ , где  $TRANS(x,z)$  и  $OUT(x,z)$  – операции индексного доступа к элементам массивов.

5. Для самоконтроля рекомендуется проверять результаты работы моделируемого конечного автомата по образцу табл. 12, предварительно откорректировав её в зависимости от заданного типа автомата.

Таблица 12

**Логика работы конечного автомата на примере автомата Мура  
с таблицей переходов – табл. 8 (начальное состояние  $z_3$ )**

Номер такта работы автомата	–	1	2	3	...
Тестовая последовательность входных сигналов, задаваемых пользователем	–	$x_2$	$x_1$	$x_2$	...
Последовательность состояний автомата	$z_3$	$z_3$	$z_4$	$z_1$	$z_2$
Последовательность формируемых выходных сигналов	$y_3$	$y_3$	$y_2$	$y_1$	$y_1$

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### ПОСТРОЕНИЕ ГЕНЕРАТОРА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

#### С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

##### Основные сведения из теории

Генераторы случайных чисел и случайных процессов широко применяются в различных областях, прежде всего при построении моделей стохастических систем. В зависимости от физического облика модели могут использоваться аппаратные или программные генераторы.

При любом принципе построения генератор случайных чисел должен обеспечивать получение последовательностей чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , обладающих следующими свойствами:

- 1) значение очередного числа для пользователя генератора заранее непредсказуемо;
- 2) отдельные числа, входящие в последовательность, взаимно независимы;
- 3) статистическая обработка последовательности должна приводить к получению характеристик, соответствующих определенному закону распределения.

Общий принцип построения программных генераторов состоит в том, что на первом этапе имитируется равномерный закон распределения в интервале  $[0; 1]$ , а затем полученная последовательность преобразуется для обеспечения требуемого закона.

Получение равномерного закона в интервале  $[0; 1]$  обеспечивается на основе использования целочисленных рекуррентных соотношений различного вида, реализуемых в условиях ограниченной разрядности представления чисел.

Авторство данного метода принадлежит Дж. фон Нейману, предложившему в 1946 г. аппаратный генератор равномерного закона распределения на регистрах (рис. 4).

Пусть в  $N$ -разрядном регистре содержится некоторое число

$$\xi_i = \delta_1 2^{-1} + \delta_2 2^{-2} + \dots + \delta_N 2^{-N},$$

где  $N$  – четное,  $\delta_j, j=1, 2, \dots, N$  – одноразрядные двоичные числа. После возведения числа  $\xi_i$  в квадрат для размещения результата в общем случае потребовалось бы  $2N$  разрядов. Новое число формируется из  $N$  средних разрядов результата с  $N/2+1$  по  $3N/2$  путём отбрасывания значений "крайних" разрядов. Последовательность случайных чисел  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  формируется путём циклического повторения такой процедуры.

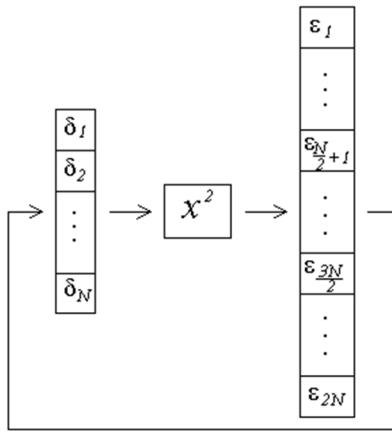


Рис. 4

Элемент получаемой последовательности  $\xi_i$  имеет  $2^N$  возможных значений, каждое из которых при достаточно большой длине последовательности наблюдается с частотой  $1/2^N$ . Таким образом, можно считать, что элементы последовательности имеют равномерный дискретный закон распределения в интервале  $[0; 1 - 1/2^N]$ . Если принять  $N$  достаточно большим, можно считать получаемый закон распределения непрерывным с плотностью распределения вероятностей (ПРВ)

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \xi < 1, \\ 0 & \text{при } \xi < 0 \text{ и } \xi \geq 1. \end{cases}$$

Необходимо иметь в виду, что, в строгом смысле, получаемая последовательность случайной не является. Действительно, генератор рассмотренного типа реализует жесткий алгоритм преобразования чисел и представляет собой детерминированный конечный автономный автомат  $F = \langle Z, Y, \phi, \psi \rangle$ , объем внутреннего алфавита которого составляет  $2^N$ . Последовательность выходных сигналов такого автомата заведомо не случайна. Числовые последовательности, формируемые на основе описанного подхода, называются псевдослучайными и имеют следующие особенности:

- 1) цикличность – длительность цикла детерминированного автономного автомата не превышает количества элементов внутреннего алфавита;
- 2) регулярность – генерируемая последовательность жестко зависит от начальной установки;
- 3) возможность получения "вырожденной" последовательности. Например, если на очередном шаге получено значение  $\xi=0$ , все последующие значения также будут нулями.

Указанные особенности являются одновременно и основными недостатками генераторов псевдослучайных чисел. Однако при достаточно больших  $N$  и удачных схемных или программных решениях удается получить псевдослучайные последовательности длиной до  $10^{17}$  чисел, в которых указанные недостатки проявляются незначительно, а возможность получения "вырожденной" последовательности исключена.

Генерация самих псевдослучайных последовательностей представляет отдельный практический интерес. Например, псевдослучайные последовательности широко используются в криптографии в роли ключа (пароля) при кодировании данных. С одной стороны, они удовлетворяют ряду основных тестов на случайность, что существенно затрудняет раскрытие такого ключа, а с другой, являются детерминированными, что позволяет обеспечить однозначность дешифрования сообщения.

Генераторы, или датчики, случайных чисел с равномерным законом распределения имеются в виде встроенных процедур во всех языках программирования, позволяющих решать вычислительные задачи (см. приложение 2). Типовое рекуррентное соотношение, реализуемое программным генератором равномерного закона, имеет вид

$$\xi_{i+1} = [a\xi_i^n + b]_{\text{mod } m}, \quad i=1, 2, \dots,$$

где  $a, b$  – положительные числа,  $m = 2^l$ ,  $l$  – разрядность представления целого числа в ЦВМ. Символическое обозначение  $[...]_{\text{mod } m}$  указывает на выполнение вычислений «по модулю  $m$ », т. е. от результата вычислений сохраняется только двоичный код, занимающий младшие  $l$  разрядов.

Известен довольно широкий спектр методов построения генераторов для различных законов распределения – как непрерывных, так и дискретных или смешанных. В данной работе

рекомендуется использовать метод обратных функций. Этот метод основан на использовании известного результата теории вероятностей: независимо от вида непрерывного закона распределения при известных его ПРВ  $f(x)$  и функции распределения вероятностей (ФРВ)  $F(x)$  случайная величина

$$R = \int_{-\infty}^x f_x(u) du = F_x(x) \quad (7)$$

распределена по равномерному закону в интервале  $[0; 1]$ .

Действительно, в соответствии с (7) значения  $x$  и  $R$  связаны взаимно однозначной зависимостью. Поэтому для любых  $A$  и  $B$  ( $0 \leq A < B \leq 1$ )

$$P(A \leq R \leq B) = P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_x(u) du = \int_{-\infty}^b f_x(u) du - \int_{-\infty}^a f_x(u) du = B - A,$$

что является свойством равномерного закона распределения.

Если удается получить аналитическое выражение для функции  $F^{-1}(R)$ , обратной к ФРВ  $F(x)$ , процедура генерирования случайных чисел  $x_i$  будет выглядеть следующим образом:

а) с помощью стандартного генератора получают равномерно распределенные в интервале  $[0; 1]$  числа  $\xi_i$ ;

б) числа  $x_i$  получают по формуле  $x_i = F^{-1}(\xi_i)$ .

Например, для экспоненциального закона распределения ( $x > 0$ )

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x_i = F^{-1}(\xi_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_i).$$

Метод обратных функций позволяет получать любой непрерывный закон распределения, если только существует аналитическое выражение для  $F(x)$  и может быть получена в аналитическом виде обратная функция.

Рассмотрим еще несколько примеров применения метода обратных функций в более сложных случаях.

Пусть требуется построить генератор случайных чисел, имеющих закон распределения с ПРВ  $f(x) = 2 \cos 2x$  и интервал возможных значений (интервал распределения)  $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$  (рис. 5, а).

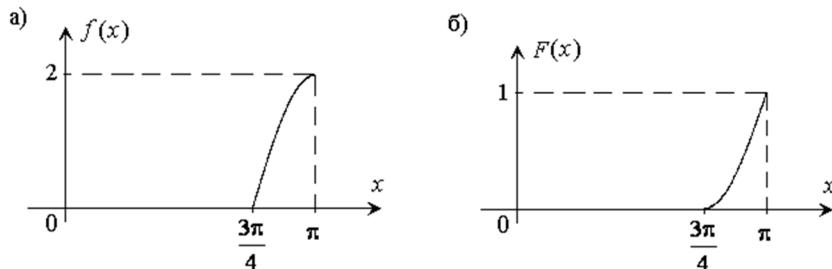


Рис. 5

Функцию распределения находим интегрированием ПРВ:

$$F(x) = \int_{3\pi/4}^x 2 \cos 2u du = \sin 2u \Big|_{3\pi/4}^x = \sin 2x - \sin \frac{3\pi}{2} = \sin 2x + 1.$$

График ФРВ показан на рис. 5, б.

Находим обратную функцию к ФРВ, решая уравнение  $\sin 2x + 1 = R$  относительно  $x$ :  $x = \frac{1}{2} \arcsin(R - 1)$ .

Поскольку  $R$  может принимать значения в диапазоне  $[0; 1]$ , то его граничным значениям будут

соответствовать: при  $R=0$   $x = \frac{1}{2} \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ; при  $R=1$   $x = \frac{1}{2} \arcsin(0) = 0$ .

Следовательно, для обеспечения требуемого закона в требуемом диапазоне распределения моделирующее соотношение должно иметь вид

$$x_i = \frac{1}{2} \arcsin(\xi_i - 1) + \pi.$$

Теперь получим моделирующий алгоритм генератора случайных чисел с ПРВ, показанной на рис. 6, а. Аналитическое выражение для данной ПРВ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{8} & \text{при } -3 \leq x \leq -1, \\ 0,25 & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ \frac{3-x}{8} & \text{при } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

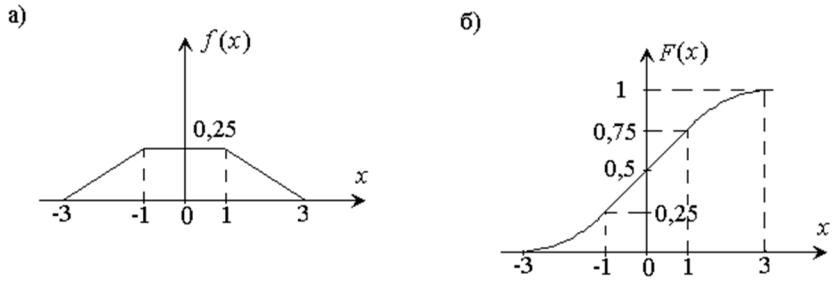


Рис. 6

Аналитическое выражение для ФРВ найдем интегрированием на интервалах непрерывности функции ПРВ. При этом будем учитывать, что ФРВ является монотонно возрастающей от нуля до единицы функцией, и для непрерывного закона распределения не может меняться скачкообразно:

$$\begin{aligned} -3 \leq x \leq -1: \quad F(x) &= \int_{-3}^x \frac{u+3}{8} du = \left( \frac{u^2}{16} + \frac{3u}{8} \right) \Big|_{-3}^x = \frac{x^2}{16} + \frac{3x}{8} + \frac{9}{16} = \frac{(x+3)^2}{16}, \\ &F(-3)=0, \quad F(-1)=0,25; \\ -1 \leq x \leq 1: \quad F(x) &= \frac{1}{4} + \int_{-1}^x \frac{du}{4} = \frac{1}{4} + \left( \frac{u}{4} \right) \Big|_{-1}^x = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, \\ &F(-1)=0,25, \quad F(1)=0,75; \\ 1 \leq x \leq 3: \quad F(x) &= \frac{3}{4} + \int_1^x \frac{3-u}{8} du = \frac{3}{4} + \left( \frac{3u}{8} - \frac{u^2}{16} \right) \Big|_1^x = \frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} + \frac{7}{16} = 1 - \frac{(3-x)^2}{16}, \\ &F(1)=0,75, \quad F(3)=1. \end{aligned} \tag{8}$$

График ФРВ показан на рис. 6, б.

Найдем обратную функцию к ФРВ, рассматривая те же интервалы (соответствие границ интервалов для  $x$  и  $F(x)=R$  можно проследить по соотношениям (8)):

$$\begin{aligned} 0 \leq R \leq 0,25: \quad &\frac{(x+3)^2}{16} = R, \quad x = 4\sqrt{R} - 3; \\ 0,25 < R \leq 0,75: \quad &\frac{x+2}{4} = R, \quad x = 4R - 2; \\ 0,75 < R \leq 1: \quad &\frac{(3-x)^2}{16} = R, \quad x = 3 - 4\sqrt{R}. \end{aligned}$$

В итоге моделирующий алгоритм можно записать следующим образом:

$$x_i = \begin{cases} 4\sqrt{\xi_i} - 3, & \text{если } 0 \leq \xi_i \leq 0,25, \\ 4\xi_i - 2, & \text{если } 0,25 < \xi_i \leq 0,75, \\ 3 - 4\sqrt{\xi_i}, & \text{если } 0,75 < \xi_i \leq 1. \end{cases}$$

Проверка качества генератора случайных чисел предусматривает получение с его использованием случайных выборок, восстановление по ним выборочных законов распределения и проверку соответствия закона распределения генерируемых случайных чисел заданному закону распределения.

Закон распределения реализаций случайной величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , составляющих выборку некоторой длины  $n$ , называется выборочным, или статистическим. Получение выборочной ФРВ

$F^*(x)$  или ПРВ  $f^*(x) = \frac{dF^*(x)}{dx}$  является одной из основных задач обработки результатов статистического моделирования. Возможны два варианта постановки такой задачи:

1. Вид закона распределения (чаще всего – аналитическое выражение для ПРВ) известен и требуется определить только его параметры. При такой постановке задачи применяются параметрические методы восстановления закона распределения.

2. Вид закона распределения неизвестен. В таком случае для его получения применяются непараметрические методы.

В рамках данной лабораторной работы проверке подлежат как параметры, так и вид обеспечиваемого построенным генератором закона распределения. Следовательно, необходимо применять непараметрические методы.

Классические непараметрические методы восстановления закона распределения по случайной выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  позволяют получить аппроксимации ПРВ или ФРВ кусочно-постоянными функциями.

Для аппроксимации ПРВ обычно используются статистические ряды или гистограммы.

При построении статистического ряда выборка разбивается на разряды:

$$[x_j, x_{j+1}], x_1 = x_{\min}, x_{j+1} = x_j + \Delta x, j = 1, 2, \dots, m; x_{m+1} = x_{\max}.$$

Количество разрядов  $m$  обычно выбирается в соответствии с условиями

$$m = \frac{n}{15 \div 20} \text{ при } n \leq 500, m \leq 30 \text{ при } n > 500.$$

Длина разряда постоянна:  $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$ . Разность  $x_{\max} - x_{\min}$  называется размахом выборки.

Все попавшие в  $j$ -й разряд значения  $x$  далее считаются одинаковыми и равными среднему значению для данного разряда  $v_j$ .

Статистический ряд составляется в форме табл. 13.

Таблица 13  
Статистический ряд

Номер разряда	Границы разряда	Среднее значение	Число наблюдений в разряде	Частота разряда
1	$x_1 \div x_2$	$v_1$	$n_1$	$p_1^*$
2	$x_2 \div x_3$	$v_2$	$n_1$	$p_2^*$
...	...	...	...	...
$j$	$x_j \div x_{j+1}$	$v_j$	$n_j$	$p_j^*$
...	...	...	...	...
$m$	$x_m \div x_{m+1}$	$v_m$	$n_m$	$p_m^*$

Средние значения для разрядов определяются как средние арифметические границ:  $v_j = \frac{(x_j + x_{j+1})}{2}$ , частоты разрядов – как отношения количества элементов выборки, попавших в данный разряд к общему объему выборки:  $p_j^* = \frac{n_j}{n}$ .

По статистическому ряду могут быть найдены оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины  $x$ :

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j v_j = \sum_{j=1}^m p_j^* v_j,$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j (v_j - m_x^*)^2 = \sum_{j=1}^m p_j^* (v_j - m_x^*)^2.$$

Гистограмма представляет собой графическую интерпретацию статистического ряда (рис. 7).

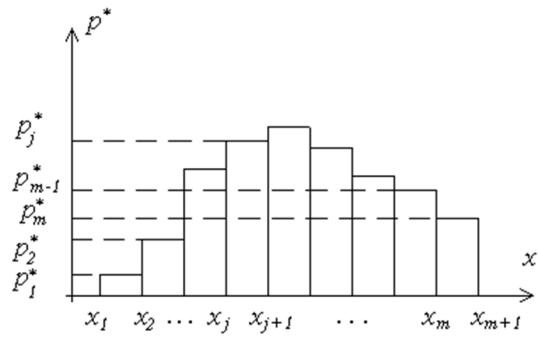


Рис. 7

Весьма точной аппроксимацией выборочной ФРВ является статистическая функция распределения  $F_x^*(x)$ , определяемая как частота наблюдения реализаций  $x_i$ , не превышающих  $x$ :  $F_x^*(x)=n_x/n$ , где  $n_x$  – количество значений  $x_i \leq x$ .

Для ее построения вся выборка сортируется в порядке возрастания  $x$ :  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_j \leq \dots \leq x_n$ . Теперь отношения порядковых номеров  $j$  к объему выборки  $n$  дают значение  $F_x^*(x)$  для интервалов  $[x_j, x_{j+1}]$  (рис. 8):

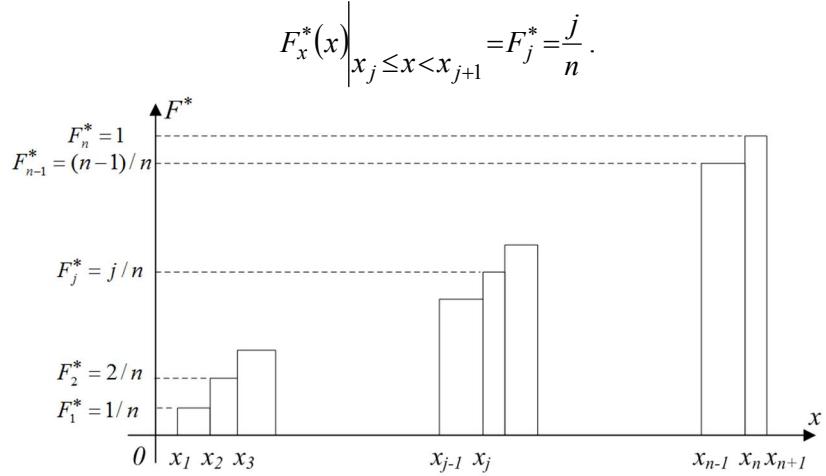


Рис. 8

Менее наглядна, но более удобна для алгоритмической реализации иная форма вычисления статистической функции распределения, не требующая предварительной сортировки выборки:

$$F_x^*(x)=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta(u_i), \quad u_i=x-x_i, \quad \theta(u_i)=\begin{cases} 0 & \text{при } u_i < 0, \\ 1 & \text{при } u_i \geq 0. \end{cases}$$

Восстановленный одним из рассмотренных способов выборочный закон распределения нестабилен. После проведения дополнительной серии опытов или повторения всего эксперимента в аналогичных условиях будет получена другая случайная выборка, и все оценки могут измениться. Кроме того, табличная или графическая форма закона распределения неудобны для дальнейшего использования.

Поэтому обычно подбирают некоторый теоретический закон распределения вероятностей (аналитическое выражение для ПРВ или ФРВ), достаточно близкий к выборочному, чтобы можно было рассматривать его как аппроксимацию истинного закона распределения исследуемой случайной величины. Затем проверяют соответствие теоретического закона истинному на основе критерия согласия теоретического и выборочного законов распределения (проверка статистической гипотезы).

В соответствии с основными теоретическими положениями метода статистического моделирования по выборке конечного объема невозможно оценить статистические характеристики случайной величины или процесса с полной достоверностью. Поэтому вывод о согласии или несогласии теоретического и выборочного законов можно сделать только с

некоторой вероятностью. При этом следует учитывать две возможные причины обнаруженного несогласия: неверный подбор теоретического закона и недостаточный объем выборки.

Процедура проверки статистической гипотезы с помощью критерия согласия состоит в следующем:

- вычисляется значение некоторой меры расхождения подобранного теоретического и выборочного законов распределения;

- оценивается вероятность того, что при данном числе опытов  $n$  и при правильном подборе теоретического закона эта мера могла бы принять значение, большее или равное полученному.

Величина этой вероятности и является критерием согласия. Таким образом, критерий согласия – это вероятность того, что на основе выборки рассматриваемого объема могло бы быть получено худшее соответствие теоретического и выборочного законов.

Малая величина полученного критерия согласия свидетельствует о том, что, скорее всего, теоретический закон распределения подобран неверно (статистическая гипотеза отвергается). При достаточно большой величине критерия согласия нет оснований отвергать подобранный теоретический закон (статистическая гипотеза принимается).

Критерий согласия Пирсона, или критерий  $\chi^2$ , применяется в тех случаях, когда выборочный закон распределения получен в форме статистического ряда или гистограммы.

В качестве меры расхождения теоретического и выборочного законов распределения используется величина

$$\chi_q^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} = n \sum_{j=1}^m \frac{(p_j^* - p_j)^2}{p_j},$$

где  $n$  – объем выборки;  $m$  – количество разрядов;  $n_j$  – число наблюдений в разряде;  $p_j^*$  – частота разряда;  $p_j$  – вероятность попадания в  $j$ -й разряд ( $x_j \leq x < x_{j+1}$ ) случайной величины  $x$ , распределенной по подобранныму теоретическому закону.

Вероятность  $P=P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$  является функцией  $\chi_q^2$  и числа степеней свободы распределения  $\chi^2$ :  $r=m-s-1$ , где  $s$  – количество параметров теоретического закона, оценивавшихся по выборке. Например, для нормального закона в общем случае  $s=2$ , а если  $m_x$  или  $\sigma_x$  было заранее известно, то  $s=1$ . Аналитические зависимости для закона распределения  $\chi^2$  известны, но на практике удобнее пользоваться таблицами (при  $n \geq 50$  табл. 14).

Таблица 14  
Распределение  $\chi^2$

$r$	$P=0,2$	$P=0,1$	$P=0,05$	$P=0,01$	$r$	$P=0,2$	$P=0,1$	$P=0,05$	$P=0,01$
1	1,6	2,7	3,8	6,6	16	20,5	23,5	26,3	32,0
2	3,2	4,6	6,0	9,2	17	21,6	24,8	27,6	33,4
3	4,6	6,3	7,8	11,3	18	22,8	26,0	28,9	34,8
4	6,0	7,8	9,5	13,3	19	23,9	27,2	30,1	36,2
Окончание табл. 14									
$r$	$P=0,2$	$P=0,1$	$P=0,05$	$P=0,01$	$r$	$P=0,2$	$P=0,1$	$P=0,05$	$P=0,01$
5	7,3	9,2	11,1	15,1	20	25,0	28,4	31,4	37,6
6	8,6	10,6	12,6	16,8	21	26,2	29,6	32,7	38,9
7	9,8	12,0	14,1	18,5	22	27,3	30,8	33,9	40,3
8	11,0	13,4	15,5	20,1	23	28,4	32,0	35,2	41,6
9	12,2	14,7	16,9	21,7	24	29,6	33,2	36,4	43,0
10	13,4	16,0	18,3	23,2	25	30,7	34,4	37,4	44,3
11	14,6	17,3	19,7	24,7	26	31,8	35,6	38,9	45,6
12	15,8	18,5	21,0	26,2	27	32,9	36,7	40,1	47,0
13	17,0	19,8	22,4	27,7	28	34,0	37,9	41,3	48,3
14	18,2	21,1	23,7	29,1	29	35,1	39,1	42,6	49,6
15	19,3	22,3	25,0	30,6	30	36,3	40,3	43,8	50,9

Вследствие случайности выборки при любом  $\chi_q^2$  существует риск необоснованно отвергнуть или принять то или иное теоретическое распределение. Жесткие условия, безошибочно разграничивающие области согласия и несогласия теоретического распределения с выборочным,

сформулировать невозможно. Поэтому правило принятия решения на основе критерия Пирсона имеет определенную степень гибкости, учитывающую риск получения ошибки:

1. Определяется значение  $\chi^2_q$  и в строке таблицы распределения  $\chi^2$ , соответствующей рассматриваемому  $r$ , находятся ближайшие к полученному  $\chi^2_q$  значения.

2. В верхней строке таблицы находится соответствующее значение  $P$  или определяется диапазон, которому это значение принадлежит.

В зависимости от значения  $P$  принимается одно из возможных решений:

- при  $P \leq 0,01$  считается, что согласия между теоретическим и выборочным распределениями нет; теоретический закон отвергается и должен быть заменен другим, подлежащим аналогичной проверке;

- при  $P \geq 0,1$  считается, что теоретическое распределение согласуется с выборочным, т. е. подобрано верно;

- при  $0,01 < P < 0,1$  считается, что согласие между теоретическим и выборочным распределениями не обеспечивается скорее всего из-за недостаточного объема выборки; рекомендуется увеличить объем и повторить проверку в надежде на смещение значения  $P$  в другой интервал.

3. Если при  $0,01 < P < 0,1$  увеличение объема выборки невозможно или не дает ожидаемого эффекта, с несколько большим риском принимается, что границей областей согласия и несогласия теоретического и выборочного законов является  $P=0,05$ .

Критерий согласия Колмогорова применяется в том случае, когда по случайной выборке восстановлена статистическая функция распределения  $F^*(x)$ . В качестве меры расхождения здесь рассматривается максимум абсолютной величины разности теоретической и выборочной (статистической) ФРВ:

$$\Delta_p = \max_x |F(x) - F^*(x)|,$$

где  $F(x)$  – теоретическая ФРВ.

Критерием согласия является вероятность того, что случайная величина  $\lambda = \Delta_p \sqrt{n}$  при данном объеме выборки  $n$  и правильном выборе теоретического закона могла бы принять значение, не меньшее  $\Delta_p \sqrt{n}$ :

$$P(\lambda \geq \Delta_p \sqrt{n}) = P\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \geq \Delta_p\right). \quad (9)$$

При  $n \geq 50$  вероятности (9) рассчитываются в соответствии с законом распределения Колмогорова. Наиболее важные для практики их значения представлены в табл. 15.

Таблица 15  
Распределение Колмогорова

$\lambda$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$P$	0,270	0,178	0,112	0,068	0,040	0,022	0,012	0,006	0,003	0,002

Если теоретический закон распределения подобран, порядок применения критерия Колмогорова аналогичен рассмотренному выше для критерия Пирсона. В качестве граничного для области согласия теоретического и выборочного законов принято рассматривать значение  $P=0,1$ . Ему соответствует  $\lambda=1,22$ . Таким образом, при  $\lambda_p = \Delta_p \sqrt{n} \leq 1,22$  считается, что теоретическое распределение согласуется с выборочным.

#### Содержание задания

В соответствии с индивидуальным вариантом задания (табл. 16):

1. Построить программный генератор случайных чисел с заданным законом распределения. Рекомендуется использовать метод обратных функций.

2. Оценить величину математического ожидания и дисперсии по выборкам объемом 50, 100, 1000,  $10^5$  и сравнить с точными величинами, полученными аналитически.

3. Оценить соответствие полученного закона заданному, используя указанный критерий согласия: Пирсона (1) или Колмогорова (2).

При выполнении п. 3 предусмотреть:

- построение гистограммы (в случае применения критерия Пирсона) или статистической функции распределения (в случае применения критерия Колмогорова);
- использование выборок указанных в п. 2 объемов.

Таблица 16

№ вар.	Плотность распределения вероятностей и интервал распределения	Критерий согласия	№ вар.	Плотность распределения вероятностей и интервал распределения	Критерий согласия
1	$f(z)=\frac{1}{1+\sin z} \quad (0 \leq z \leq \pi/2)$	1	21	$f(z)=\begin{cases} 1 & (0 \leq z \leq 0,5) \\ 1,5-z & (0,5 \leq z \leq 1,5) \end{cases}$	1
2	$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{z}{8} \quad (0 \leq z \leq 4)$	2	22	$f(z)=\frac{z}{1+z^2} \quad (0 \leq z \leq \sqrt{e^2-1})$	2
3	$f(z)=\frac{1}{1-\sin^2 z} \quad (0 \leq z \leq \pi/4)$	2	23	$f(z)=\sin(\pi/2-2z) \quad (-\pi/4 \leq z \leq \pi/4)$	1
4	$f(z)=\frac{2\ln z}{z} \quad (1 \leq z \leq e)$	1	24	$f(z)=\frac{1}{1+\cos z} \quad (0 \leq z \leq \pi/2)$	2
5	$f(z)=\frac{1}{\sin^2 z} \quad (\pi/4 \leq z \leq \pi/2)$	2	25	$f(z)=\frac{1}{2\cos^2 z} \quad (-\pi/4 \leq z \leq \pi/4)$	1
6	$f(z)=\sin(\pi/2-z) \quad (0 \leq z \leq \pi/2)$	2	26	$f(z)=4e^{4-4z} \quad (1 \leq z \leq 3)$	1
7	$f(z)=\frac{4}{(1+z)^2} \quad (1 \leq z \leq 3)$	1	27	$f(z)=\frac{1}{1+z^2} \quad (0 \leq z \leq \operatorname{tg} 1)$	2

Окончание табл. 16

№ вар.	Плотность распределения вероятностей и интервал распределения	Критерий согласия	№ вар.	Плотность распределения вероятностей и интервал распределения	Критерий согласия
8	$f(z)=\frac{1}{1+z} \quad (0 \leq z \leq e-1)$	1	28	$f(z)=\begin{cases} 1+z & (-1 \leq z \leq 0) \\ 1-z & (0 \leq z \leq 1) \end{cases}$	1
9	$f(z)=\begin{cases} z & (0 \leq z \leq 1) \\ 2-z & (1 \leq z \leq 2) \end{cases}$	1	29	$f(z)=2\cos z \quad (0 \leq z \leq \pi/6)$	2
10	$f(z)=\frac{1}{1+\sin 2z} \quad (0 \leq z \leq \pi/2)$	1	30	$f(z)=\frac{1}{e-z} \quad (0 \leq z \leq e-1)$	2
11	$f(z)=\begin{cases} 1 & (-0,5 \leq z \leq 0) \\ 1-z & (0 \leq z \leq 1) \end{cases}$	2	31	$f(z)=\frac{1}{1-\sin 2z} \quad (\pi/2 \leq z \leq \pi)$	1
12	$f(z)=2z-6 \quad (3 \leq z \leq 4)$	1	32	$f(z)=\frac{1}{1+2z} \quad \left(0 \leq z \leq \frac{e^2-1}{2}\right)$	1
13	$f(z)=\frac{1}{1-\cos^2 z} \quad (\pi/4 \leq z \leq \pi/2)$	2	33	$f(z)=\cos z \quad (-\pi/6 \leq z \leq \pi/6)$	2
14	$f(z)=2z-2 \quad (1 \leq z \leq 2)$	1	34	$f(z)=\frac{2}{(1+z)^2} \quad (0 \leq z \leq 1)$	1
15	$f(z)=\frac{1}{1+z^2} \quad (-\operatorname{tg} 0,5 \leq z \leq \operatorname{tg} 0,5)$	1	35	$f(z)=2e^{2-2z} \quad (1 \leq z \leq 5)$	1
16	$f(z)=\frac{\cos z}{\sqrt{2}} \quad (-\pi/4 \leq z \leq \pi/4)$	2	36	$f(z)=\frac{1}{\sin^2 z} \quad (\pi/2 \leq z \leq 3\pi/4)$	1
17	$f(z)=\frac{1}{\cos^2(\pi/4-z)} \quad (0 \leq z \leq \pi/4)$	2	37	$f(z)=\sqrt{2}\cos z \quad (0 \leq z \leq \pi/4)$	2
18	$f(z)=\frac{\cos z/4}{8} \quad (-2\pi \leq z \leq 2\pi)$	1	38	$f(z)=\frac{1}{1+\sin z} \quad (\pi/2 \leq z \leq \pi)$	1
19	$f(z)=\frac{1}{1+\cos z} \quad (-2\pi \leq z \leq 3\pi/2)$	2	39	$f(z)=\frac{2z}{1+z^2} \quad (0 \leq z \leq \sqrt{e-1})$	2
20	$f(z)=\sin z \quad (4\pi \leq z \leq 9\pi/2)$	2	40	$f(z)=\frac{2}{1+\sin 2z} \quad (0 \leq z \leq \pi/4)$	1

## Практические рекомендации

1. Лабораторные работы №№ 3 – 8 следует рассматривать как состоящие из двух основных этапов. На первом этапе строится предусмотренный заданием генератор или имитационная модель, на втором выполняется статистическая обработка и анализ результатов использования построенного генератора или модели. При этом необходимо соблюдать принцип «черного ящика», т. е. использование при статистической обработке каких-либо сведений о количественных параметрах источника данных или описывающих его работу аналитических соотношений недопустимо.

2. В современных языках программирования, как правило, предусмотрена дополнительная программная процедура инициализации генератора случайных чисел (см. приложение 2). Благодаря этому обеспечиваются два способа их использования:

- при выполнении процедуры инициализации до обращения к генератору обеспечивается его начальная установка например, путем обращения к таймеру, и генерируемая последовательность начинается с произвольного числа, что позволяет избежать повторяемости наблюдаемых последовательностей при повторных запусках программы;
- если процедура инициализации игнорируется, то при повторных запусках программы генерируемые последовательности, благодаря свойству регулярности, повторяются.

Второй режим использования генератора иногда бывает полезен в процессе отладки программных моделей. В окончательном варианте программы, предъявляемой для проверки и защиты, использование процедуры инициализации генератора является обязательным.

3. При проверке качества построенного генератора с помощью критерия Пирсона обеспечить вывод на экран вместе с гистограммой, полученной для выборочного закона  $p_j^*$ , ( $j=1, 2, \dots, m$ ), гистограммы для теоретического (заданного) закона распределения  $p_j$ , ( $j=1, 2, \dots, m$ ), а также оценок математического ожидания и дисперсии, их точных значений и величины меры расхождения  $\chi_q^2$ .

4. При проверке качества построенного генератора с помощью критерия Колмогорова обеспечить совместный вывод на экран графиков статистической  $F_x^*(x)$  и теоретической  $F_x(x)$  функций распределения (рис. 9), а также оценок математического ожидания и дисперсии, их точных значений, меры расхождения  $\Delta_p$  и полученного значения  $\lambda_p$ .

5. При определении величины меры расхождения статистической  $F_x^*(x)$  и теоретической  $F_x(x)$  функций распределения  $\Delta_p$  следует учитывать два возможных варианта взаимного расположения их графиков.

В случае, показанном на рис. 9, на участке, где максимально расходятся графики статистической и теоретической функций распределения (область А), график статистической функции  $F_x^*(x)$  расположен выше графика  $F_x(x)$ . При этом  $\Delta_p$  соответствует разности значений этих функций при некотором выборочном значении генерируемой случайной величины  $x_j$ :  $\Delta_p = F_j^* - F(x_j)$ .

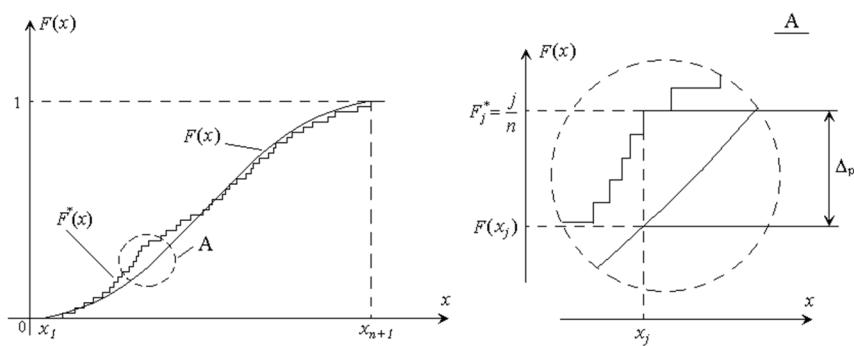


Рис. 9

В случае, показанном на рис. 10, на участке, где максимально расходятся графики статистической и теоретической функций распределения (область Б), графики расположены противоположно. При этом  $\Delta_p$  соответствует некоторому значению аргумента функций распределения, стремящемуся слева к  $x_j$ , и должно определяться как  $\Delta_p = F(x_j) - F_{j-1}^*$ .

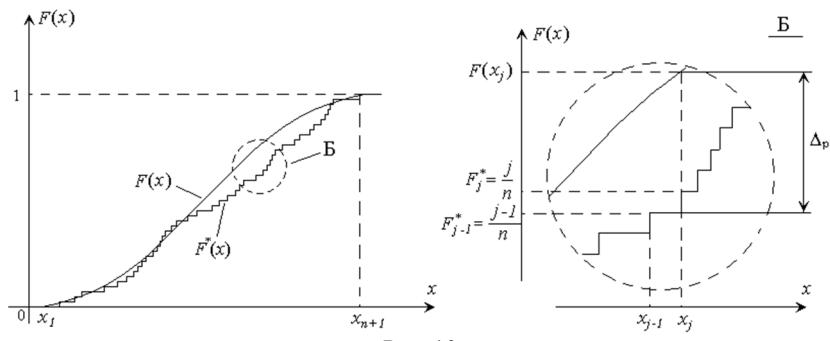


Рис. 10

Других вариантов определения  $\Delta_p$  с учетом вида рассматриваемых функций предположить невозможно. Следовательно, алгоритм поиска  $\Delta_p$  должен предусматривать перебор всех выборочных значений генерируемой величины и вычисление для каждого из них двух абсолютных величин разности:  $\Delta_p = |F_j^* - F(x_j)|$  и  $\Delta_p = |F_{j-1}^* - F(x_j)|$  с последующим выбором максимальной из них.

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### ПОСТРОЕНИЕ ГЕНЕРАТОРА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА МЕТОДОМ ФОРМИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА

#### Основные сведения из теории

При статистическом имитационном моделировании на основе математических, полунаатуральных и других моделей возникает задача имитации внешних воздействий на систему, имеющих форму случайных процессов с определенными характеристиками. Эта задача решается путем построения генераторов случайных процессов.

Случайным процессом  $X(t)$  называют функцию времени  $t$ , которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Если эта функция скалярная, случайный процесс называют скалярным или одномерным.

Реализацией  $x(t)$  случайного процесса  $X(t)$  называют конкретный вид процесса, который непосредственно наблюдался на некотором отрезке времени от нуля до  $T$  (рис. 11,а). Реализация случайного процесса, очевидно, является детемпированной функцией. При многократном наблюдении случайного процесса может быть получено множество реализаций (рис. 11,б). Увеличение объема этого множества (теоретически до бесконечности) дает все более полное представление о свойствах случайного процесса.

В большинстве практических приложений для описания одномерного случайного процесса используются одномерная ПРВ и корреляционная функция.

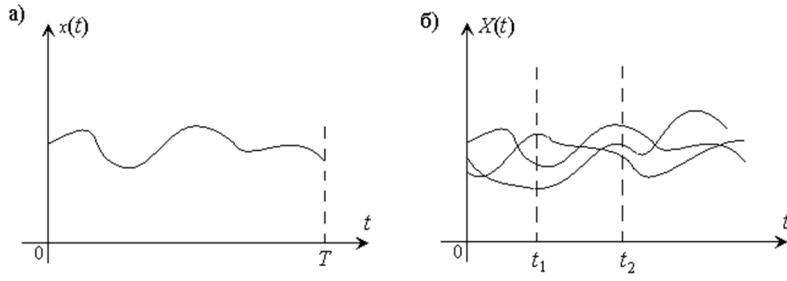


Рис. 11

Одномерная, или первая, ПРВ случайного процесса  $f(x,t)$  описывает распределение его значений для фиксированного момента времени  $t$ , или сечения процесса в момент времени  $t$  (например,  $t_1$  или  $t_2$  на рис. 11,б). На основе одномерной ПРВ для рассматриваемого момента времени могут быть определены любые средние характеристики, или моменты распределения, в частности математическое ожидание

$$m_x(t)=M[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx \quad (10)$$

и дисперсия

$$D_x(t)=D[X(t)]=M\left[\overset{\circ}{X}(t)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x(t))^2 f(x,t)dx, \quad (11)$$

где  $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)$  – центрированный случайный процесс (процесс с тождественно равным нулю математическим ожиданием),  $M[\dots]$  – математическое ожидание функции, заключенной в квадратные скобки.

Корреляционная функция одномерного случайного процесса  $K_x(t_1,t_2)$  характеризует взаимную зависимость его значений, соответствующих различным моментам времени (рис. 11,б), и вводится через двумерную ПРВ:

$$\begin{aligned} K_x(t_1,t_2)&=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]= \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_2))f(x_1,t_1,x_2,t_2)dx_1dx_2, \end{aligned} \quad (12)$$

причем при  $t_1=t_2=t$  имеем  $K_x(t,t)=D_x(t)$ .

В частном случае стационарного случайного процесса

$$m_x(t)=m_x=\text{const}, D_x(t)=D_x=\text{const}, f(x,t)=f(x),$$

а корреляционная функция становится функцией одного аргумента:

$$K_x(t_1,t_2)=K_x(t_2-t_1)=K_x(\tau), \quad \tau=t_2-t_1, \quad K_x(0)=D_x.$$

Смысл соотношений (10) – (12) состоит в определении характеристик случайного процесса усреднением по бесконечному множеству реализаций.

Если стационарный случайный процесс обладает свойством эргодичности (среднее по множеству реализаций совпадает со средним по времени), перечисленные его характеристики могут быть найдены всего по одной реализации и без использования плотности распределения:

$$m_x=\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)dt, \quad (13)$$

$$K_x(\tau)=\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t)-m_x)(x(t+\tau)-m_x)dt, \quad (14)$$

$$D_x=K_x(0)=\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t)-m_x)^2 dt, \quad (15)$$

где  $x(t)$  – детерминированная реализация случайного процесса  $X(t)$ . Соотношения (13) – (15), очевидно, более удобны для практики.

Следствием их являются, в частности, оценки моментов распределения случайного процесса: математического ожидания

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad (16)$$

дисперсии

$$D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 ; \quad (17)$$

корреляционной функции

$$K_x^*(\tau) = \frac{1}{n+1-j} \sum_{i=0}^{n-j} (x_i - m_x^*)(x_{i+j} - m_x^*). \quad (18)$$

В соотношениях (16) – (18) выполняется усреднение значений случайного процесса, полученных последовательными измерениями одной реализации процесса с шагом  $\Delta t$ :  $x_1=x(\Delta t)$ ,  $x_2=x(2\Delta t), \dots, x_i=x(i\Delta t), \dots$ . В соотношении (18) индекс  $j$  соответствует значению аргумента корреляционной функции:  $\tau=j\Delta t$ .

Для стационарного случайного процесса вводится также весьма удобная для построения расчетного аппарата функция спектральной плотности:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (19)$$

характеризующая распределение мощности, или интенсивности, случайных колебаний  $X(t)$  по различным частотам. Соответственно имеют место соотношения

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad D_x = K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

Таким образом, для одномерного случайного процесса  $X(t)$  вместо многомерной ПРВ используются две группы характеристик, описывающих его с двух взаимно дополняющих точек зрения:

- с точки зрения распределения значений  $X(t)$  в конкретный момент времени ( $f(x, t)$ ,  $m_x(t)$ ,  $D_x(t)$ ...);
- с точки зрения зависимости значений  $X(t)$  в разные моменты времени ( $K_x(t_1, t_2)$  или  $K_x(\tau)$ ,  $S_x(\omega)$  для стационарного процесса).

Связь между этими двумя группами характеристик сводится только к формальному совпадению значений дисперсии, определяемых по (11) и через  $K_x(\tau)$  или  $S_x(\omega)$ .

Белым шумом называют случайный процесс, у которого зависимость между значениями, соответствующими различным моментам времени, отсутствует. Корреляционная функция белого шума

$$K_x(t_1, t_2) = G(t_1)\delta(t_1 - t_2),$$

где  $G(t_1)$  – интенсивность белого шума.

Для стационарного белого шума  $G(t)=G=\text{const}$  и может быть определена спектральная плотность:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G\delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = G = \text{const}.$$

Данная лабораторная работа посвящена построению генератора случайного процесса с заданной корреляционной функцией. Наиболее распространенный способ построения такого генератора – метод формирующего фильтра.

Метод формирующего фильтра основан на использовании закономерностей преобразования линейным динамическим звеном спектральной плотности стационарного случайного сигнала, описываемых соотношением

$$S_x(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_g(\omega), \quad (20)$$

где  $S_g(\omega)$  и  $S_x(\omega)$  – спектральные плотности входного и выходного сигналов динамического звена,  $W(j\omega)$  – частотная передаточная функция звена.

Если на вход динамического звена поступает стационарный белый шум  $\xi(t)$  со спектральной плотностью  $S_\xi(\omega)=S_0$ , то (20) примет вид

$$S_x(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_0.$$

Формирующим фильтром называется динамическое звено, обеспечивающее требуемые корреляционные свойства выходного сигнала путем преобразования входного сигнала – белого шума. Необходимая передаточная функция формирующего фильтра определяется из соотношения

$$|W(j\omega)|^2 = S_x(\omega)/S_0,$$

где спектральная плотность входного сигнала может быть найдена по заданной его корреляционной функции  $K_x(\tau)$  в соответствии с (19).

Пусть, например, задана корреляционная функция генерируемого процесса

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

Определим его спектральную плотность:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 D_x e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} D_x e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^0 D_x e^{(\alpha-j\omega)\tau} d[(\alpha-j\omega)\tau]}{\alpha-j\omega} + \frac{\int_0^{\infty} D_x e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d[-(\alpha+j\omega)\tau]}{-\alpha-j\omega} = \\ &= \frac{D_x e^{(\alpha-j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0}{\alpha-j\omega} + \frac{D_x e^{-(\alpha+j\omega)\tau} \Big|_0^{\infty}}{-\alpha-j\omega} = \frac{D_x}{\alpha-j\omega} + \frac{D_x}{\alpha+j\omega} = \frac{2\alpha D_x}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Теперь найдем передаточную функцию формирующего фильтра:

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{S_x(\omega)}{S_0} = \frac{2\alpha D_x / (\alpha^2 + \omega^2)}{2D_x / (\alpha S_0)} = \frac{\alpha S_0}{1 + (\omega/\alpha)^2},$$

откуда  $W(j\omega) = \frac{k_\Phi}{j\omega T_\Phi + 1}$  или  $W(s) = \frac{k_\Phi}{T_\Phi s + 1}$ , где  $k_\Phi = \sqrt{\frac{2D_x}{\alpha S_0}}$ ,  $T_\Phi = \frac{1}{\alpha}$ .

Таким образом, необходимый формирующий фильтр представляет собой апериодическое звено 1-го порядка с дифференциальным уравнением

$$T_\Phi \frac{dX(t)}{dt} + X(t) = k_\Phi \xi(t)$$

или, в нормальной форме,

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{1}{T_\Phi} X(t) + \frac{k_\Phi}{T_\Phi} \xi(t). \quad (21)$$

При программной реализации генераторов случайных процессов используются стандартные генераторы псевдослучайных чисел с равномерным или нормальным законом распределения. Такие генераторы обычно обеспечивают получение последовательностей чисел с достаточно низкой взаимной зависимостью. Если рассматривать такую последовательность  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n$  как последовательность значений процесса  $\xi(t)$ , зарегистрированных в моменты времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n$  с постоянным шагом  $\Delta t$ :  $\xi(t_1) = \xi_1, \xi(t_2) = \xi_2, \dots, \xi(t_i) = \xi_i, \dots, \xi(t_n) = \xi_n$ ,  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ , то будет получена модель дискретного белого шума. При  $\Delta t \rightarrow 0$  перейдем к модели непрерывного белого шума. При программной реализации шаг  $\Delta t$  всегда конечен. Его величину приходится учитывать при расчете параметров формирующего фильтра.

При использовании в качестве источника белого шума генератора равномерного закона распределения в диапазоне  $[0; 1]$  следует учесть, что генерируемая последовательность случайных чисел характеризуется математическим ожиданием  $m_\xi = 0,5$  и дисперсией  $D_\xi = 1/12 \approx 0,0833$ . Эти значения параметров соответствуют математическому ожиданию и интенсивности моделируемого непрерывного белого шума.

Программная реализация формирующего фильтра обычно выполняется с некоторым шагом  $h$ , величина которого определяется целью генерирования случайного процесса. Например, это может быть шаг интегрирования модели вида (1) динамической системы, для которой данный случайный процесс является входным сигналом. Соответственно и уравнения формирующего фильтра реализуются в форме (2). Таким образом, фактически применяется аппроксимация непрерывного случайного процесса дискретным. Такой дискретный процесс имеет период дискретизации, равный шагу интегрирования  $h$ , и сохраняет свое значение в течение периода. Определим корреляционную функцию и спектральную плотность дискретного случайного процесса, аппроксимирующего непрерывный белый шум с интенсивностью  $G_0$ :

$$K_\xi^*(\tau) = G_0 1(\tau) - G_0 1(\tau-h),$$

$$\begin{aligned}
S_{\xi}^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0 [1(\tau) - 1(\tau-h)] e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^h G_0 e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{G_0}{-j\omega} e^{-j\omega\tau} \Big|_0^h = \\
&= \frac{G_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega h}) \approx \frac{G_0}{j\omega} (1 - 1 + j\omega h - \dots) = G_0 h.
\end{aligned}$$

Поэтому если в качестве источника белого шума используется генератор случайных чисел с некоторым законом распределения, характеризуемым дисперсией  $D_{\xi}$ , то при расчете параметров формирующего фильтра следует брать значение  $S_0 = D_{\xi}h$ . При использовании стандартного генератора псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения в интервале  $[0; 1]$  следует брать  $S_0 = h/12$ .

### Содержание задания

В соответствии с индивидуальным вариантом задания (табл. 17) построить программный генератор непрерывного случайного процесса с заданной корреляционной функцией  $K(\tau) = De^{-\alpha\tau}$ . Использовать метод формирующего фильтра.

Рассчитать и построить графики заданной и полученной корреляционных функций для интервала  $[0; 3/\alpha]$ .

Таблица 17

№ варианта	$D$	$\alpha$	$h$	№ варианта	$D$	$\alpha$	$h$
1	2	5	0,001	21	5	0,6	0,02
2	1	0,1	0,05	22	0,5	1,5	0,01
3	0,5	2	0,002	23	2	3	0,01
4	0,1	10	0,001	24	1	0,5	0,01
5	1	1	0,01	25	0,1	7,5	0,005
6	2	0,3	0,02	26	2	1,5	0,005
7	4	0,2	0,05	27	3	10	0,002
8	2	4	0,005	28	1	20	0,001
9	5	1	0,002	29	5	0,5	0,02
10	1	0,5	0,05	30	2	10	0,005
11	10	2	0,005	31	2	3	0,001
12	2	0,6	0,05	32	1	0,3	0,005
13	1	4	0,001	33	2	1,5	0,002
14	1	0,6	0,01	34	1	6	0,001
15	0,2	2	0,005	35	1	20	0,002
16	2	2	0,01	36	1	4	0,01
17	1	7,5	0,002	37	2,5	15	0,002
18	2	5	0,005	38	2	4	0,002
19	1	5	0,002	39	1	6	0,005
20	2,5	1	0,05	40	0,4	1,5	0,01

### Практические рекомендации

1. Формирующий фильтр представляет собой динамическое звено. Известно, что для линейных динамических звеньев в стационарном режиме работы (установившийся процесс) имеет место следующая зависимость между математическими ожиданиями входного  $g$  и выходного  $x$  сигналов:  $m_x = k_{\phi} m_g$ . Следовательно, при отличном от нуля  $m_g$  математическое ожидание выходного сигнала и погрешность его оценки по соотношению (16) могут достигать существенных значений, что повлияет на результаты оценки корреляционной функции по (18). Поэтому при отсутствии требований к величине математического ожидания генерируемого сигнала рекомендуется использовать на входе фильтра центрированный белый шум. При использовании в качестве источника белого шума  $\xi(t)$  генератора равномерного закона распределения в диапазоне  $[0; 1]$ ,

математическое ожидание для которого составляет 0,5, следует воспользоваться основным соотношением для получения центрированного случайного процесса:  $g(t) = \xi(t) - \bar{\xi}(t) = 0,5$ .

2. См. рекомендацию 1 к лабораторной работе №3.

3. Анализ соотношения (18) для оценки корреляционной функции по выборке значений наблюдаемой реализации случайного процесса показывает, что с увеличением значения параметра  $j$  количество выборочных значений, учитываемых при расчете, снижается. Их минимальное число составит  $n-j_{\max}+1$ , где  $j_{\max}=3/\alpha$  в соответствии с заданием. По известным оценкам приемлемая точность восстановления значений корреляционной функции может быть обеспечена по выборке объемом не менее  $10^4$ . Длина генерируемых и обрабатываемых реализаций случайного процесса должна соответствовать такому требованию.

4. Одним из основных свойств динамических звеньев, за исключением идеальных, является инерционность. Именно это свойство, по существу, и обеспечивает корреляционные свойства выходного сигнала фильтра. Инерционность неизбежно определяет наличие переходного процесса в формирующем фильтре. При переходном процессе характеристики выходного сигнала изменяются, следовательно, для генерируемого с помощью фильтра случайного процесса свойства стационарности и эргодичности в течение переходного процесса отсутствуют.

Таким образом, в течение переходного процесса представленный выше порядок расчета фильтра и соотношения (16) – (18) для оценки характеристик генерируемого процесса некорректны.

Возможность корректной оценки характеристик генерируемого процесса можно обеспечить, исключив из обработки последовательность значений генерируемого процесса, соответствующую переходному процессу в формирующем фильтре.

Для фильтра в форме апериодического звена 1-го порядка можно учесть известные оценки продолжительности переходного процесса по математическому ожиданию  $3T_{\phi}$  и дисперсии  $1,5T_{\phi}$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

# ПОСТРОЕНИЕ ГЕНЕРАТОРА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ЗАДАННЫМИ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

### Основные сведения из теории

В наиболее общей постановке задача имитации одномерного стационарного случайного процесса  $X(t)$  сводится к тому, что получаемые реализации процесса должны подчиняться закону распределения с заданной ПРВ  $f(x)$  и иметь заданную корреляционную функцию  $K_x(\tau)$ .

Решение задач формирования заданного закона распределения и обеспечения заданных корреляционных свойств по отдельности подробно рассмотрено выше в рамках лабораторных работ № 3 и № 4. Теперь, когда требуется совместное их решение, проанализируем взаимное влияние необходимых преобразований.

Получение требуемого закона распределения случайной последовательности (реализации случайного процесса) можно рассматривать как преобразование исходной последовательности нелинейным безынерционным звеном. Для метода обратных функций статическая характеристика такого звена будет иметь вид  $\varphi(u) = F^{-1}(u)$ , где  $F^{-1}$  – обратная функция к ФРВ обеспечиваемого закона. Для других методов статическая характеристика эквивалентного нелинейного звена также может быть сформирована в соответствии с алгоритмом метода. В зависимости от вида  $\varphi(u)$  безынерционная нелинейность может изменить корреляционную функцию преобразуемого сигнала, в большинстве случаев несущественно.

В свою очередь, формирующий фильтр, представляющий собой линейное динамическое звено, видоизменяет не только спектральную плотность и корреляционную функцию, но и закон распределения преобразуемого сигнала.

Из теории автоматического управления известно важное свойство линейных динамических звеньев, проявляющееся при достаточно высоком порядке знаменателя передаточной функции, – свойство «фильтра». Одно из его проявлений состоит в нормализации закона распределения преобразуемого сигнала – повышении концентрации значений сигнала в окрестности его математического ожидания. При ограниченном порядке знаменателя передаточной функции формирующего фильтра закон распределения его выходного сигнала не поддается точному аналитическому описанию за исключением случая преобразования сигнала с нормальным законом распределения. В последнем случае закон распределения выходного сигнала также оказывается нормальным.

Поэтому для наилучшего обеспечения требуемых закона распределения и корреляционных свойств случайного процесса генератор должен обеспечивать следующий порядок преобразования исходного белого шума:

1-й этап – преобразование равномерного закона распределения белого шума в стандартизованный нормальный закон распределения;

2-й этап – обеспечение требуемых корреляционных свойств с помощью формирующего фильтра;

3-й этап – преобразование нормального закона распределения генерируемого процесса в равномерный;

4-й этап – обеспечение требуемого закона распределения.

Рассмотрим подробнее эти этапы.

Первый этап требует построения генератора стандартизованного нормального закона распределения с ПРВ

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

т. е. нормального закона распределения с параметрами  $m_u=0$ ,  $D_u=1$ .

Связь любой случайной величины  $X$ , распределенной по нормальному закону, и стандартизованной нормальной случайной величины  $U$  выражается соотношениями

$$U = \frac{X - m_x}{\sigma_x} \text{ или } X = m_x + U\sigma_x. \quad (22)$$

Аналитического выражения для ФРВ нормального закона распределения не существует. Эта особенность не позволяет использовать метод обратных функций для построения генератора значений нормальной случайной величины.

Простейший способ получения случайных чисел с нормальным законом распределения основан на центральной предельной теореме. В соответствии с ней среднее арифметическое  $n$  равномерно распределенных в интервале  $[0; 1]$  случайных чисел имеет асимптотически нормальный закон распределения с математическим ожиданием 0,5 и дисперсией

$$D_{\bar{\xi}_n} = \frac{D_{\xi}}{n} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} (u - 0,5)^2 f(u) du = \frac{1}{n} \int_0^1 (u - 0,5)^2 du = \frac{1}{12n}.$$

На практике это в достаточной степени подтверждается при  $n=12$ .

Поэтому процедура получения стандартизованного нормального закона выглядит следующим образом:

а) с помощью стандартного генератора получают 12 равномерно распределенных в интервале  $[0; 1]$  чисел  $\xi_i$ ;

б) числа  $\zeta_j$  со стандартизованным нормальным законом распределения получают по формуле, являющейся следствием (22):

$$\zeta_j = \frac{1}{\sigma_{\bar{\xi}_n}} \left( \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 0,5 \right) = \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6, \quad \sigma_{\bar{\xi}_n} = \sqrt{D_{\bar{\xi}_n}} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Способ, очевидно, является приближенным. Кроме того, он не обеспечивает свойственный нормальному закону неограниченный диапазон распределения генерируемых чисел.

От указанного недостатка свободна, например, следующая процедура:

- а) с помощью стандартного генератора получают два равномерно распределенных в интервале  $[0; 1]$  числа:  $\xi_i$  и  $\xi_{i+1}$ ;
- б) вычисляют  $V_1=2\xi_i-1$ ,  $V_2=2\xi_{i+1}-1$ ,  $s=V_1^2+V_2^2$ ;
- в) если  $s \geq 1$ , повторяют пункты а) и б);
- г) вычисляют  $r=\sqrt{-\frac{2\ln s}{s}}$  и получают два распределенных по стандартизованному нормальному закону числа  $\zeta_j=V_1 r$ ,  $\zeta_{j+1}=V_2 r$ .

На втором этапе должно быть обеспечено преобразование некоррелированной псевдослучайной последовательности  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_n$  формирующим фильтром. Расчет формирующего фильтра выполняется в соответствии с рекомендациями к лабораторной работе №4, причем  $S_0=h$ , а  $D_x$  следует брать равной единице для сохранения на выходе фильтра стандартизованного нормального закона распределения как наиболее удобного для дальнейшего преобразования сигнала.

На третьем этапе для значений сигнала с выхода формирующего фильтра выполняется нелинейное преобразование:

$$u=\phi(x)=\Phi_u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv=0,5+\Phi(x), \quad (23)$$

где  $\Phi_u(x)$  – ФРВ стандартизованного нормального закона,  $\Phi(x)$  – интеграл вероятностей. В соответствии с (7) получаемая в результате такого преобразования псевдослучайная последовательность будет иметь равномерный в интервале  $[0; 1]$  закон распределения. Преобразование (23) является безынерционным и не оказывает существенного влияния на уже обеспеченные корреляционные свойства генерируемого процесса.

Сложность практической реализации преобразования (23) обусловлена отсутствием аналитического выражения для рассматриваемого интеграла. Наиболее рациональный приближенный способ его вычисления основан на разложении в ряд. Например, известен следующий вариант разложения в ряд интеграла вероятностей:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv=\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1! \cdot 3} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} + \dots \right), \quad (24)$$

рекомендуемый при отсутствии больших значений аргумента ( $x^2 < \infty$ ). Необходимое количество суммируемых членов ряда предлагается определять самостоятельно.

На четвертом этапе обеспечивается заданный закон распределения методом обратных функций или другим доступным методом в зависимости от вида закона.

### Содержание задания

Построить программный генератор непрерывного случайного процесса с заданным законом распределения (в соответствии с вариантом задания к лабораторной работе № 3) и заданной корреляционной функцией (в соответствии с вариантом задания к лабораторной работе № 4, кроме значения дисперсии).

Проверку характеристик процесса (закона распределения и корреляционной функции) выполнять в соответствии с требованиями к лабораторным работам № 3 и № 4 после каждого этапа преобразования процесса.

### Практические рекомендации

1. При выполнении данной лабораторной работы следует учесть практические рекомендации к лабораторным работам № 3 и № 4.

2. Все используемые методы восстановления законов распределения и критерии согласия предусматривают отсутствие взаимной зависимости реализаций случайной величины, составляющих обрабатываемую выборку.

Случайные реализации коррелированного случайного процесса, обработка которых выполняется в данной работе, не соответствуют такому требованию. Поэтому в случае, когда для восстановления и проверки закона распределения случайная выборка формируется по одной

реализации случайного процесса, для обеспечения возможности применения к ней используемых методов необходимо включать в выборку значения реализации, взаимная зависимость между которыми достаточно мала.

Корреляционная функция вида  $K(\tau)=De^{-\alpha\tau}$  является монотонно убывающей, и на интервале  $[0; \frac{3}{\alpha}]$  ее значения снижаются в  $e^{\frac{3}{\alpha}}=e^3 \approx 20$  раз. Следовательно, взаимной зависимостью значений случайного процесса с такой корреляционной функцией, наблюдаемых в моменты времени, разделенные указанным интервалом, можно пренебречь. Поэтому случайную выборку для восстановления закона распределения и проверки его на соответствие заданному в данной работе рекомендуется формировать из значений реализации процесса, разделенных количеством шагов, примерно соответствующим указанному интервалу.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

### ПРОВЕРКА СТАЦИОНАРНОСТИ И ЭРГОДИЧНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

#### Основные сведения из теории

В данной лабораторной работе требуется проверить стационарность и эргодичность случайного процесса, формируемого с помощью генератора, построенного при выполнении предшествующих лабораторных работ.

Проверка стационарности сводится к проверке независимости функции распределения от времени. Для проверки стационарности предлагается по множеству реализаций генерируемого случайного процесса сформировать две выборки, соответствующие различным моментам времени  $t_1$  и  $t_2$  за пределами переходного процесса в формирующем фильтре (рис. 11, б).

Однородность этих выборок подтвердит наличие свойства стационарности случайного процесса. Для проверки однородности случайных выборок рекомендуется использовать критерий Колмогорова–Смирнова.

Критерий однородности Колмогорова–Смирнова по своей форме аналогичен критерию согласия Колмогорова. При проверке гипотезы об однородности двух случайных выборок  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_m$  в качестве меры расхождения рассматривается величина  $\Delta_{m,n}=\max_x |F_{x,n}^*(x)-F_{y,m}^*(x)|$ , где  $F_{x,n}^*$  и  $F_{y,m}^*$  – статистические функции распределения, восстановленные рассмотренным в работе №3 прямым методом соответственно по первой и второй выборкам (рис. 12). Далее используется закон распределения Колмогорова (см. табл. 15) для случайной величины  $\lambda=\Delta\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$ .

Проверка эргодичности также сводится к проверке однородности двух выборок, где первая формируется по множеству реализаций для фиксированного момента времени (например,  $t_1$ , рассмотренного при проверке стационарности), вторая – по одной реализации случайного процесса.

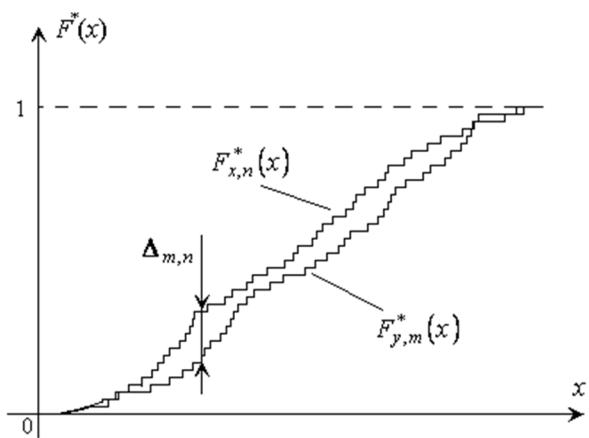


Рис. 12

### Содержание задания

Для полученного при выполнении лабораторной работы №5 случайного процесса проверить наличие свойств стационарности и эргодичности по критерию Колмогорова–Смирнова с построением графиков восстановленных с целью проверки функций распределения.

### Практические рекомендации

1. См. рекомендацию 1 к лабораторной работе №3.
2. При проверках стационарности и эргодичности процесса с помощью критерия Колмогорова–Смирнова обеспечивать совместный вывод на экран графиков статистических функций распределения  $F_{x,n}^*$  и  $F_{y,m}^*$  получаемых по двум рассматриваемым выборкам (см. рис. 12), меры расхождения  $\Delta_{m,n}$  и расчетного значения  $\lambda_p = \Delta_{m,n} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$ .
3. Рекомендацию 5 к лабораторной работе № 3 здесь следует применить к выборочным значениям, использованным для восстановления обеих функций распределения.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

### Основные сведения из теории

Понятие «система массового обслуживания» применяется для систем, выполняющих обработку, или обслуживание, поступающих на вход заявок (требований).

Совокупность поступающих на вход заявок называют входным потоком. Если моменты поступления отдельных заявок случайны, на входе системы имеет место случайный поток заявок.

Система массового обслуживания (СМО) представляет собой совокупность каналов, или приборов, обеспечивающих обслуживание заявок, и, возможно, очереди. Каждый канал может обслуживать в любой момент времени не более одной заявки. Время, требуемое на обслуживание заявки, как правило, случайное. Если в момент времени поступления на вход системы очередной

заявки все каналы заняты обслуживанием, заявка занимает свободное место в очереди. При отсутствии свободных каналов и мест в очереди имеет место отказ в обслуживании заявки.

В качестве исходных данных при составлении моделей СМО рассматриваются характеристики входных потоков, количество и характеристики производительности каналов, количество мест в очереди.

К числу основных характеристик СМО, для определения которых строятся математические модели, относятся:

- вероятность обслуживания заявки, или относительная пропускная способность;
- вероятность отказа в обслуживании заявки;
- абсолютная пропускная способность – среднее число заявок, обслуживаемое в единицу времени;
- среднее число занятых каналов.

Математические модели СМО строятся в классе моделей систем с дискретными состояниями и непрерывным временем.

При построении математических моделей таких систем вводится конечное множество дискретных состояний  $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- в любой рассматриваемый момент времени система обязательно находится в одном из состояний, составляющих множество  $X$ ;
- система не может одновременно находиться в двух или более состояниях из множества  $X$ .

Для одноканальной СМО с отказами очередь отсутствует и множество  $X$  включает в себя два состояния:  $x_0$  – канал свободен;  $x_1$  – канал занят обслуживанием заявки.

Логика процесса смены состояний описывается ориентированным графом, вершины которого соответствуют состояниям системы, а дуги – возможным переходам в другие состояния.

Для рассматриваемой СМО график смены состояний показан на рис. 13. Исходящая из вершины  $x_0$  дуга соответствует переходу на обслуживание очередной заявки, входящая – завершению обслуживания заявки и освобождению канала.

Входной поток заявок рассматривается как простейший, характеризующийся следующими свойствами:

Рис. 13

1) однородностью. События (поступления отдельных заявок), моменты наступления которых образуют случайный поток, являются неотличимыми друг от друга по каким-либо признакам;

2) ординарностью – невозможностью одновременного наступления двух или более событий;

3) отсутствием последействия. Количество событий, появляющихся на непересекающихся конечных интервалах времени, являются независимыми случайными величинами;

4) стационарностью – независимостью характеристик потока от времени.

Если однородный поток обладает свойствами ординарности и отсутствия последействия, он называется пуассоновским. Основная количественная характеристика пуассоновского потока – интенсивность, или среднее число событий в единицу времени:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{k}(t, \Delta t)}{\Delta t},$$

где  $\bar{k}(t, \Delta t)$  – среднее число событий на интервале времени  $\Delta t$ .

Отсутствие последействия для пуассоновского потока проявляется также как взаимная независимость интервалов времени между моментами наступления отдельных событий. Отсюда следует, в частности, что для конкретного момента времени закономерности, определяющие момент наступления следующего события, не зависят от момента наступления предыдущего.

Пуассоновский поток, обладающий свойством стационарности, называется простейшим. Его интенсивность постоянна во времени:  $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ .

Интервал времени между событиями пуассоновского потока подчиняется экспоненциальному закону распределения с ПРВ  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).

Основной характеристикой отдельного канала СМО является производительность (интенсивность потока обслуживания)  $\mu$  – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени. Для процесса обслуживания заявок в канале принимаются те же закономерности, что и для входного потока заявок. В частности,  $\mu(t) = \mu = \text{const}$ . Соответственно интервал времени, требуемый на обслуживание заявки, рассматривается как случайная величина с экспоненциальным законом распределения  $f(x) = \mu e^{-\mu x}$  ( $x > 0$ ).

Интенсивность  $\lambda$  и производительность канала  $\mu$  задаются как исходные количественные характеристики модели СМО.

Процесс смены состояний, характеризующийся перечисленными свойствами, относится к классу марковских, или процессов без последействия, и аналитически описывается уравнениями Колмогорова. Для модели на рис. 13 система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dp_0}{dt} &= \mu p_1 - \lambda p_0, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \lambda p_0 - \mu p_1, \\ p_0 + p_1 &= 1,\end{aligned}$$

где  $p_0$  и  $p_1$  – вероятности пребывания системы в состояниях соответственно  $x_0$  и  $x_1$  в рассматриваемый момент времени.

Поступающая в систему заявка получает отказ в обслуживании, если единственный канал занят (состояние  $x_1$ ). Следовательно, для одноканальной СМО с отказами вероятности обслуживания  $p$  и отказа в обслуживании заявки  $q$  совпадают с вероятностями состояний:  $p=p_0$ ,  $q=p_1$ .

Для стационарной модели ( $\lambda = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ) могут быть найдены финальные вероятности, соответствующие установившемуся процессу смены состояний. В установившемся процессе вероятности состояний постоянны и система уравнений Колмогорова сводится к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\mu p_1 - \lambda p_0 &= 0, \\ \lambda p_0 - \mu p_1 &= 0, \\ p_0 + p_1 &= 1.\end{aligned}$$

$$\text{Ее решение: } p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

В данной лабораторной работе характеристики СМО, получаемые аналитически, служат лишь для итоговой проверки результатов статистического имитационного моделирования.

Имитационное моделирование предусматривает непосредственное воспроизведение процесса функционирования СМО во времени – последовательности моментов времени поступления заявок и моментов времени завершения обслуживания заявок в канале с возможностью регистрации фактов поступления заявок на обслуживание или отказов в обслуживании. Наблюдение имитируемого процесса на достаточно большом интервале времени позволяет оценить значения требуемых характеристик СМО.

Рассмотрим принципы построения имитационной модели одноканальной СМО с отказами.

В силу отсутствия последействия у моделируемого процесса следует принять, что для любого момента времени интервалы времени до поступления в систему очередной заявки и до окончания обслуживания заявки, находящейся в канале, подчинены экспоненциальному закону. Построение генератора случайных чисел с экспоненциальным законом распределения рассмотрено в описании лабораторной работы № 3. Моделирующие соотношения:

для интервала времени до поступления  $i$ -й заявки

$$\Delta t_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_i); \quad (25)$$

для интервала времени до окончания обслуживания  $j$ -й заявки

$$\Delta \tau_j = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - \xi_j), \quad (26)$$

где  $\xi_i$ ,  $\xi_j$  – случайные числа с равномерным законом распределения в интервале  $[0; 1]$ .

Укрупненный алгоритм моделирования процесса в рассматриваемой СМО выглядит следующим образом:

1. Вводятся и обнуляются счетчики времени  $t$ , количества поступивших в систему заявок  $N$ , количества обслуженных (поставленных на обслуживание) заявок  $M$ .

2. С помощью (25) генерируется интервал времени  $\Delta t_1$  от начала работы системы до поступления первой заявки. Поскольку исходное состояние системы  $x_0$  (канал свободен), первая заявка поступает на обслуживание, соответственно  $N$  и  $M$  увеличиваются на единицу. Для текущего времени устанавливается значение  $t=\Delta t_1$ .

3. Генерируются значения интервалов времени  $\Delta t_i$ ,  $i=2, 3, \dots$  до поступления очередной заявки с помощью (25) и до окончания обслуживания заявки, находящейся в канале,  $\Delta\tau_i$  – с помощью (26). Значение  $N$  увеличивается на единицу. Значение текущего времени увеличивается на  $\Delta t_i$ . Здесь  $i$  – номер шага алгоритма моделирования.

4. Если  $\Delta t_i < \Delta\tau_i$ , то к моменту поступления следующей заявки обслуживание предыдущей не завершено. Поступающая заявка получает отказ в обслуживании. Соответственно значение  $M$  не изменяется.

5. Если  $\Delta t_i \geq \Delta\tau_i$ , то к моменту поступления следующей заявки канал освобождается. Заявка поступает на обслуживание. Значение  $M$  увеличивается на единицу.

6. Пункты 3 – 5 повторяются необходимое количество раз.

Пример результата работы данного алгоритма показан на рис. 14.

В представленном примере первая, вторая и пятая заявки поступают на обслуживание, третья и четвертая получают отказ в обслуживании.

В результате обеспечивается моделирование процесса в СМО на некотором интервале времени  $[0, T]$ , где  $T = \sum_{i=1}^N \Delta t_i$ , за который в систему поступает  $N$  заявок. При достаточно больших значениях  $T N \approx \lambda T$ .

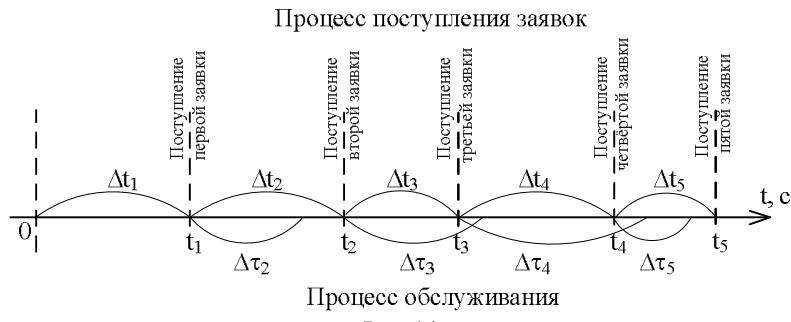


Рис. 14

Поступление каждой заявки может рассматриваться как отдельный опыт, в результате которого может иметь место один из двух возможных результатов – прием заявки на обслуживание или отказ в обслуживании.

Оценка вероятности обслуживания определяется как

$$p^* = M/N, \quad (27)$$

оценка вероятности отказа в обслуживании

$$q^* = (N - M)/N. \quad (28)$$

Соотношения (27) – (28) соответствуют классической задаче оценки вероятности  $P(A) = p_A$  случайного события А на основе схемы Бернулли. В соответствии с законом больших чисел и предельными теоремами можно принять (с достоверностью, близкой к единице), что при достаточно больших  $N$  оценка этой вероятности  $p_A^*$  является непрерывной случайной величиной, распределенной по нормальному закону со следующими математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением:

$$\begin{aligned} m_{p_A^*} &= M[p_A^*] = p_A, \\ \sigma_{p_A^*} &= \sqrt{D[p_A^*]} = \sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{N}}. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (29) найдем вероятность того, что при определенном  $n$  оценка будет отличаться от истинной вероятности не более, чем на  $\Delta$ :

$$P(|p_A^* - p_A| < \Delta) = P(p_A - \Delta < p_A^* < p_A + \Delta) = F(p_A + \Delta) - F(p_A - \Delta), \quad (30)$$

где  $F(x)$  – функция распределения вероятностей (ФРВ) случайной величины  $p_A^*$ . Графически вероятность (30) соответствует заштрихованной площади под кривой ПРВ случайной величины  $p_A^*$  (рис. 15).

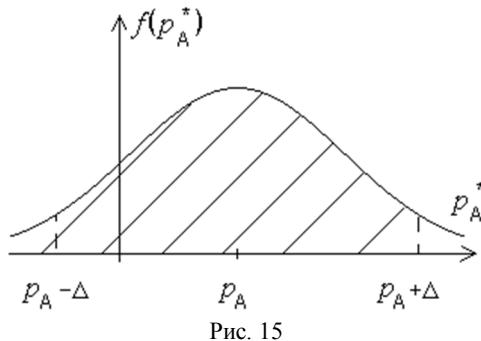


Рис. 15

Соотношение (30) обычно представляют в следующей форме:

$$P\left(\frac{|p_A^* - p_A|}{\sigma_{p_A^*}} < \frac{\Delta}{\sigma_{p_A^*}}\right) = P(|u| < \alpha_d) = P_d, \quad (31)$$

где  $u = \frac{p_A^* - p_A}{\sigma_{p_A^*}}$  – стандартизованная нормальная случайная величина;  $\sigma_{p_A^*}$  определяется по (29);

$P_d$  – доверительная вероятность;  $\alpha_d = \frac{\Delta}{\sigma_{p_A^*}}$  – коэффициент доверительного интервала.

Доверительная вероятность может быть определена через интеграл вероятностей:

$$P_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha_d}^{\alpha_d} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi_u(\alpha_d) - \Phi_u(-\alpha_d) = 2\Phi(\alpha_d).$$

На основе (31) с учетом (29) при достаточно большом  $N$  можно с доверительной вероятностью  $P_d$  оценить погрешность определения  $p_A^*$ :

$$|\varepsilon| = \alpha_d \sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{N}} \quad (32)$$

или определить количество опытов, необходимое для обеспечения погрешности, не превышающей допустимую  $\varepsilon_{\text{доп}}$ :

$$N_{\text{треб}} = \frac{\alpha_d^2 p_A (1-p_A)}{\varepsilon_{\text{доп}}^2}. \quad (33)$$

В большинстве случаев  $P_d$  выбирают в соответствии с правилом "трех сигм":  $\alpha_d=3$  при  $P_d=0,997\approx 1$ . С целью сокращения объема моделирования иногда выбирают меньшее значение доверительной вероятности, что приводит к существенному снижению значения  $\alpha_d$  [1].

Отметим следующие особенности полученных результатов

1. Из соотношений (32) – (33) хорошо видна "цена" точности статистического моделирования. Повышение точности в  $m$  раз требует увеличения количества опытов в  $m^2$  раз.

2. Определяемое по (33) количество опытов не гарантирует требуемую точность  $|\varepsilon| < \varepsilon_{\text{доп}}$ . В строгом смысле никакое конечное количество опытов не может обеспечить такой гарантии, так как, с одной стороны, соотношения (32) – (33) соответствуют определенной доверительной вероятности  $P_d < 1$ , и с другой стороны, все полученные результаты основаны на теоретических соотношениях, справедливых для конечных  $n$  только с некоторой вероятностью.

3. В формулах (32) – (33) употребляется значение истинной вероятности  $p_A$ , которое в рассматриваемой задаче заведомо неизвестно. Поэтому прямое использование этих соотношений невозможно.

На практике эта проблема может решаться двумя способами.

Первый основан на том, что при фиксированной  $\varepsilon_{\text{доп}}$  зависимость  $N_{\text{треб}}(p_A)$  в соответствии с (33) имеет максимум при  $p_A=0,5$  (рис. 16). Следовательно, оценка требуемого количества опытов

по априорному значению  $p_A=0,5$ , а именно,  $N_{\text{треб}} = \frac{0,25\alpha_d^2}{\varepsilon_{\text{доп}}^2}$  опытов, обеспечит для любого

окончательного результата точность не хуже заданной. Недостаток этого способа состоит в том,

что трудоемкость эксперимента оказывается завышенной. Так, например, если истинное значение  $p_A = 0,9$ , то  $N_{\text{треб}}$  окажется завышенным в  $0,25/0,09 \approx 2,8$  раза.

Если трудоемкость эксперимента имеет существенное значение, применяются итерационные алгоритмы получения оценок. Идея итерационных алгоритмов состоит в том, что точность и требуемое количество опытов определяются в ходе эксперимента на основе получаемых оценок искомых параметров.

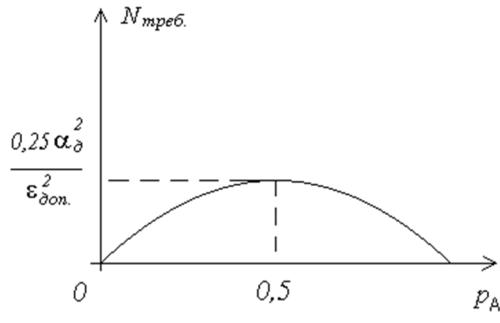


Рис. 16

Рекомендуемый принцип построения итерационного алгоритма статистического моделирования для оценки вероятности некоторого события А сводится к нижеприведенной последовательности действий:

- Проведение начальной серии опытов объемом  $N$  и регистрация количества ( $N_A$ ) случаев появления события А.

- Вычисление оценки вероятности:

$$p_A^* = \frac{N_A}{N}.$$

- Получение оценки погрешности результата:

$$\epsilon^* = \alpha_d \sqrt{\frac{p_A^*(1-p_A^*)}{N}}.$$

- При выполнении условия  $\epsilon^* \leq \epsilon_{\text{доп}}$  завершение моделирования и оформление окончательных результатов.

- При  $\epsilon^* > \epsilon_{\text{доп}}$  получение оценки требуемого количества опытов:

$$N_{\text{треб}}^* = \frac{\alpha_d^2 p_A^* (1-p_A^*)}{\epsilon_{\text{доп}}^2}.$$

- Определение объема дополнительной серии опытов  $N'$ .

- Проведение дополнительной серии опытов и регистрация количества ( $N'_A$ ) случаев появления события А.

- Уточнение оценки вероятности:

$$p_A^* = \frac{N_A + N'_A}{N + N'}$$

и переход к п. 3.

С точки зрения рациональной организации статистического эксперимента особое внимание следует обратить на п. 6 – определение объема дополнительной серии опытов. Здесь следует иметь в виду, что все оценки, получаемые по малым начальным сериям опытов, очевидно, имеют значительную погрешность. Это относится и к оценке  $N_{\text{треб}}^*$ .

Если оценка  $N_{\text{треб}}^*$  получается заниженной и меньшей объема уже проведенной серии, то итоговые результаты моделирования будут неточны. При завершении работы итерационного алгоритма после начальной серии эксперимент с моделью рекомендуется повторять.

Если заниженная оценка  $N_{\text{треб}}^*$  превышает объем проведенной серии опытов, алгоритм впоследствии позволит ее скорректировать.

Если оценка  $N_{\text{треб}}^*$  получается завышенной, то прямое определение объема дополнительной серии опытов по очевидному соотношению  $N' = N_{\text{треб}}^* - N$  может привести к итоговому завышению трудоемкости эксперимента, что противоречит основной цели применения итерационного подхода. Наиболее рациональным способом решения этой проблемы является реализация

интерактивного подхода: предоставление пользователю программной статистической модели всей информации о текущих оценках и возможности управления объемами дополнительных серий опытов.

### Содержание задания

В соответствии с индивидуальным вариантом задания (табл. 18) построить имитационную статистическую модель одноканальной системы массового обслуживания с отказами. Процесс смены состояний системы считать марковским, поток заявок – простейшим. Интенсивность потока заявок  $\lambda$  и производительность канала  $\mu$  заданы в таблице вариантов.

На основе построенной модели получить оценку для установившегося процесса указанной в таблице вариантов характеристики системы  $x$ , наблюдая процесс в течение 100 с. Оценить точность результата.

Определить требуемое время наблюдения процесса для оценки искомой характеристики с абсолютной погрешностью не более 0,01. Продолжить моделирование на основе итерационного алгоритма до получения оценки с требуемой точностью.

Для проверки результатов получить значение искомой характеристики аналитическим методом.

Таблица 18

№ варианта	$\lambda, \text{c}^{-1}$	$\mu, \text{c}^{-1}$	$x$	№ варианта	$\lambda, \text{c}^{-1}$	$\mu, \text{c}^{-1}$	$x$
1	0,1	0,01	$p$	16	2	0,5	$q$
2	2	0,25	$q$	17	1,5	0,5	$p$
3	15	20	$p$	18	5	1	$q$
4	2	3	$q$	19	20	0,25	$q$
5	15	3	$q$	20	6	1,5	$p$
6	3	1	$p$	21	2,5	0,5	$q$
7	20	10	$q$	22	4	2	$q$
8	0,4	0,04	$p$	23	0,4	0,6	$q$
9	12	3	$q$	24	25	15	$p$
10	1	0,5	$q$	25	45	15	$q$
11	0,4	0,05	$p$	26	5	0,5	$q$
12	1,5	2	$p$	27	4	1	$p$
13	30	6	$q$	28	16	2	$p$
14	1	0,6	$p$	29	3	4	$q$
15	2	0,2	$p$	30	10	15	$p$

Условные обозначения:  $p$  – вероятность обслуживания заявки,  $q$  – вероятность отказа в обслуживании.

### Практические рекомендации

1. См. рекомендацию 1 к работе №3. При обработке результатов имитационного моделирования следует исходить из того, что наблюдателю доступны для регистрации только моменты времени поступления в систему заявок и факты поступления заявки на обслуживание или отказа в обслуживании.

2. При построении и реализации итерационного алгоритма статистического моделирования предусмотреть после каждой серии опытов вывод для пользователя полной информации о текущих результатах моделирования и значениях всех полученных оценок.

3. Для связи величин объемов дополнительных серий опытов с интервалами времени моделирования вместо истинного значения интенсивности входного потока заявок допустимо использование ее оценки  $\lambda^* = N/T$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

### Основные сведения из теории

Для  $n$ -канальной СМО с очередью на  $m$  мест ( $m < \infty$ ) множество состояний  $X$  включает в себя  $n+m+1$  состояния:

- $x_0$  – все каналы и места в очереди свободны;
- $x_1$  – обслуживанием занят один канал, все места в очереди свободны;
- $x_k$  ( $k \leq n$ ) – обслуживанием заняты  $k$  каналов, все места в очереди свободны;
- $x_k$  ( $n < k \leq n+m$ ) – обслуживанием заняты все  $n$  каналов, заняты  $r = k - n$  мест в очереди.

Граф смены состояний такой СМО приведен на рис. 17.

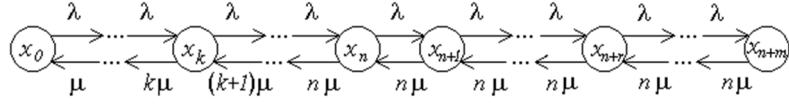


Рис. 17

Основные принципы и допущения, положенные в основу моделей СМО, рассмотрены в описании работы № 7.

В силу ординарности потоков заявок и обслуживания переходы возможны только в «соседние» по графу состояния, отличающиеся от текущего не более чем одним занятым каналом или местом в очереди.

Если обслуживанием заявок параллельно заняты  $k$  каналов ( $k \leq n$ ), интенсивность обслуживания составляет  $k\mu$ , где  $\mu$  – производительность одного канала.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний СМО, описываемой графиком на рис. 17:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= \mu p_1 - \lambda p_0, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + 2\mu p_2 \\ &\dots \\ \frac{dp_k}{dt} &= \lambda p_{k-1} - \lambda p_k - k\mu p_k + (k+1)\mu p_{k+1}, \quad 1 < k < n, \\ &\dots \\ \frac{dp_n}{dt} &= \lambda p_{n-1} - \lambda p_n - n\mu p_n + n\mu p_{n+1}, \\ &\dots \\ \frac{dp_{n+r}}{dt} &= \lambda p_{n+r-1} - \lambda p_{n+r} - n\mu p_{n+r} + n\mu p_{n+r+1}, \quad 1 < r < m, \\ &\dots \\ \frac{dp_{n+m}}{dt} &= \lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m}, \\ \sum_{l=0}^{n+m} p_l &= 1. \end{aligned}$$

Перейдем к системе алгебраических уравнений для установившегося процесса смены состояний:

$$\begin{aligned}
& \mu p_1 - \lambda p_0 = 0, \\
& \lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + 2\mu p_2 = 0, \\
& \dots \\
& \lambda p_{k-1} - \lambda p_k - k\mu p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad 1 < k < n, \\
& \dots \\
& \lambda p_{n-1} - \lambda p_n - n\mu p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\
& \dots \\
& \lambda p_{n+r-1} - \lambda p_{n+r} - n\mu p_{n+r} + n\mu p_{n+r+1} = 0, \quad 1 < r < m, \\
& \dots \\
& \lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} = 0, \\
& \sum_{l=0}^{n+m} p_l = 1.
\end{aligned}$$

Выразим все финальные вероятности через  $p_0$ :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\lambda}{\mu} p_0, \\
\lambda p_0 - \lambda \frac{\lambda}{\mu} p_0 - \mu \frac{\lambda}{\mu} p_0 + 2\mu p_2 &= 0,
\end{aligned}$$

откуда получаем  $p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2 \cdot 2} p_0$ , и далее, путем последовательных подстановок,

$$p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} p_0, \quad 1 < k \leq n; \quad (34)$$

$$\lambda \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}}{(n-1)!} p_0 - \lambda \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0 - n\mu \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0 + n\mu p_{n+1} = 0, \quad -\lambda \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0 + n\mu p_{n+1} = 0,$$

откуда  $p_{n+1} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1}}{n! \cdot n} p_0$ , и далее, путем последовательных подстановок,

$$p_{n+r} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+r}}{n! \cdot n^r} p_0, \quad 1 < r \leq m. \quad (35)$$

С учетом (34) и (35) сумма вероятностей состояний приводится к виду

$$p_0 \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \sum_{r=1}^m \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+r}}{n! \cdot n^r} \right] = 1. \quad (36)$$

При известных параметрах СМО  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $n$  и  $m$  уравнение (36) позволяет найти вероятность  $p_0$ . Далее по (34) и (35) могут быть найдены вероятности остальных состояний.

Вероятность отказа в обслуживании заявки совпадает с  $p_{n+m}$  (заняты все каналы и все места в очереди):

$$q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+m}}{\sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \sum_{r=1}^m \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+r}}{n! \cdot n^r}}.$$

Вероятность обслуживания заявки:  $p = 1 - q$ .

Укрупненный алгоритм имитационного моделирования процесса в рассматриваемой СМО с учетом рекомендаций к работе № 7 можно построить следующим образом:

1. Вводятся и обнуляются счетчики времени  $t$ , количества поступивших в систему заявок  $N$ , количества обслуженных (поставленных на обслуживание) заявок  $M$ , количества занятых каналов  $k$ , количества занятых мест в очереди  $r$ .

2. На основе моделирующего соотношения  $\Delta t_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\xi_i)$  генерируется интервал времени до поступления в систему заявки.

3. Если  $k=0$ , значения  $N$ ,  $M$  и  $k$  увеличиваются на единицу, значение текущего времени увеличивается на  $\Delta t_i$ .

Если  $k>0$ , генерируется интервал времени до окончания обслуживания заявки на основе моделирующего соотношения  $\Delta \tau_i = -\frac{1}{k\mu} \ln(1-\xi_i)$  и моделируются следующие варианты развития процесса в СМО:

- при  $\Delta t_i < \Delta \tau_i$  значение  $N$  увеличивается на единицу, значение текущего времени увеличивается на  $\Delta t_i$ , а также:

- при  $k < n$  заявка поступает на обслуживание в свободный канал, значения  $M$  и  $k$  увеличиваются на единицу;

- при  $k=n$  и  $r < m$  заявка занимает свободное место в очереди, значения  $M$  и  $r$  увеличиваются на единицу;

- при  $k=n$  и  $r=m$  поступающая заявка получает отказ в обслуживании, значения счетчиков  $M$ ,  $k$  и  $r$  не изменяются;

- при  $\Delta t_i > \Delta \tau_i$  значение текущего времени увеличивается на  $\Delta \tau_i$ , а также:

- при  $r=0$  один из занятых каналов освобождается до момента поступления следующей заявки, значение  $k$  уменьшается на единицу;

- при  $r>0$  одна из заявок переходит из очереди на обслуживание, освобождая место в очереди до момента поступления следующей заявки, значение  $r$  уменьшается на единицу.

4. Пункты 2 – 3 повторяются необходимое число раз.

Порядок организации статистического эксперимента и получения оценок вероятностей обслуживания или отказа с требуемой точностью соответствуют рассмотренным в описании работы № 7.

### Содержание задания

В соответствии с индивидуальным вариантом задания (табл. 20) построить имитационную статистическую модель  $n$ -канальной системы массового обслуживания с очередью на  $m$  заявок. Процесс смены состояний системы считать марковским, поток заявок – простейшим. Интенсивность потока заявок  $\lambda$  и производительность канала  $\mu$  соответствуют варианту задания к работе № 7. Значения  $n$  и  $m$  указаны в табл. 19.

На основе построенной модели получить оценку для установившегося процесса указанной в табл. 19 характеристики системы  $x$ , наблюдая процесс в течение 100 с. Оценить точность результата.

Определить требуемое время наблюдения процесса для оценки искомой характеристики с абсолютной погрешностью не более 0,01. Продолжить моделирование на основе итерационного алгоритма до получения оценки с требуемой точностью.

Для проверки результатов получить значение искомой характеристики аналитическим методом.

Таблица 19

№ варианта	$n$	$m$	$x$	№ варианта	$n$	$m$	$x$
1	4	2	$p$	16	2	4	$q$
2	3	3	$q$	17	3	3	$p$
3	1	3	$p$	18	3	2	$q$
4	1	3	$q$	19	4	2	$q$
5	3	3	$p$	20	3	3	$p$
6	2	3	$q$	21	3	4	$p$
<i>Окончание табл. 19</i>							
№ варианта	$n$	$m$	$x$	№ варианта	$n$	$m$	$x$
7	3	1	$q$	22	2	2	$q$

8	3	4	$p$	23	1	3	$q$
9	4	2	$q$	24	2	2	$p$
10	1	3	$q$	25	4	2	$q$
11	2	4	$p$	26	2	5	$p$
12	1	4	$q$	27	4	3	$q$
13	2	4	$p$	28	4	3	$p$
14	1	3	$p$	29	1	4	$q$
15	3	3	$q$	30	1	3	$p$

Условные обозначения:  $p$  – вероятность обслуживания заявки,  $q$  – вероятность отказа в обслуживании.

### Практические рекомендации

- См. рекомендации к лабораторной работе №7.

#### Библиографический список

- Емельянов В.Ю. Методы моделирования стохастических систем управления. СПб: БГТУ, 2004.
- Королёв С.Н. Марковские модели массового обслуживания. СПб.: БГТУ, 2002.
- Шапорев С.Д. Прикладная статистика: учебное пособие. СПб: СМИО Пресс, БГТУ, 2003.
- Шапорев С.Д., Родин Б.П. Случайные процессы: учебник для вузов. СПб: БГТУ, 2010.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Решение систем дифференциальных уравнений в среде Mathworks Matlab

Механизм численного решения различных систем дифференциальных уравнений весьма разнообразен, начиная от решения уравнений в явном виде и заканчивая построением имитационных математических моделей и решением уравнений в частных производных.

Наиболее часто при исследовании динамических систем возникает задача решить системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые, как правило, представляют в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка в форме Коши (1).

Для решения систем ОДУ в Matlab реализованы различные методы. Их реализации названы *решателями* ОДУ [2].

Решатели реализуют следующие методы решения систем дифференциальных уравнений:

*ode45* – одношаговые явные методы Рунге–Кутта 4-го и 5-го порядка (классический метод, рекомендуемый для начальной пробы решения; во многих случаях он дает хорошие результаты);

*ode23* – одношаговые явные методы Рунге–Кутта 2-го и 4-го порядка (при умеренной жесткости системы ОДУ и низких требованиях к точности этот метод может дать выигрыш в скорости решения);

*ode133* – многошаговый метод Адамса–Башвортса–Мултона переменного порядка (адаптивный метод, который может обеспечить высокую точность решения);

*ode15s* – многошаговый метод переменного порядка (от 1-го до 5-го, по умолчанию 5), использующий формулы численного дифференцирования (адаптивный метод, который стоит применять, если решатель *ode45* не обеспечивает точного решения);

*ode23s* – одношаговый метод, использующий модифицированную формулу Розенброка 2-го порядка (может обеспечить высокую скорость вычислений при низкой точности);

*ode23t* – метод трапеций с интерполяцией (дает хорошие результаты при решении задач, описывающих осцилляторы с почти гармоническим выходным сигналом);

*ode23tb* – неявный метод Рунге–Кутта в начале решения и метод, использующий формулы обратного дифференцирования 2-го порядка в последующем (при низкой точности этот метод может оказаться более эффективным, чем *ode15s*).

Для решения жестких систем уравнений, требующих для получения высокой точности результатов использования очень малых шагов по времени, рекомендуется использовать только специальные решатели: *ode15s*, *ode23s*, *ode23t*, *ode23tb*.

В общем виде программу решения системы ОДУ можно представить в виде нескольких взаимосвязанных блоков (рис. П.1):

1. Подготовка функции описывающей системы ОДУ.
2. Формирование констант и начальных условий.
3. Вызов одного из решателей Matlab.
4. Обработка и вывод результатов вычислений.

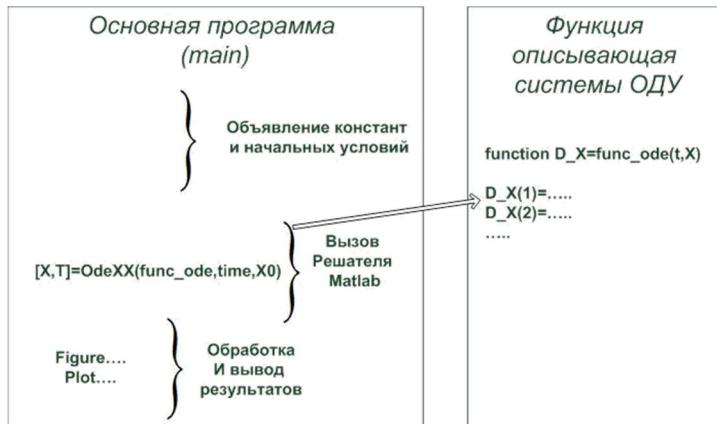


Рис. П.1. Схема формирования программы для решения ОДУ в Matlab

В результате запуска основной программы будет получено решение системы ОДУ, описанной в виде функции (*func\_ode*), которое может быть представлено в виде графиков (рис. П.2).

Используя для решения системы ОДУ различные решатели, можно оценить и сравнить точность ее решения различными численными методами (рис. П.3). Следует отметить, что по умолчанию шаг решателя для рассмотренных методов является переменным.

Для примера рассмотрим решение следующей системы ОДУ:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{cu}{x_3} - g - \frac{rx_2^2}{x_3}, \\ \dot{x}_3 &= -u, \\ r &= 0,1e^{-\frac{x_1}{8480}}.\end{aligned}\quad (\text{П.1})$$

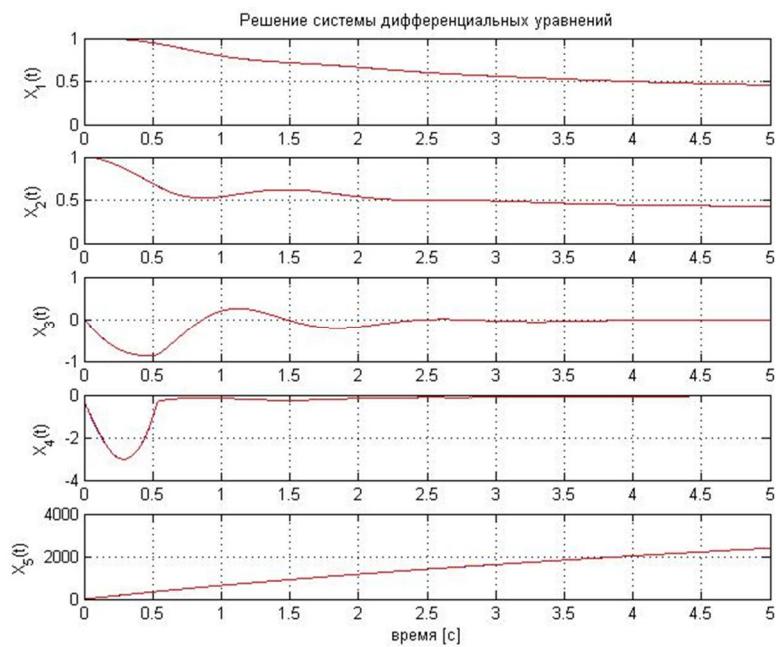


Рис. П.2. Решение системы пяти дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутта 4-5 порядка (функция *ode45*)

Система (П.1) является нестационарной, поскольку имеет параметр  $r$ , изменяющийся во времени и зависящий от переменной состояния  $x_1$ . Физической интерпретацией данной системы может являться полет ракеты-носителя в атмосфере. В таком случае переменная  $x_3$  характеризует массу ракеты с полезным грузом, изменяющуюся вследствие выгорания топлива,  $x_2$  – вертикальную составляющую скорости,  $x_1$  – высоту полета, а переменный параметр  $r$  – плотность атмосферы, зависящую от высоты.

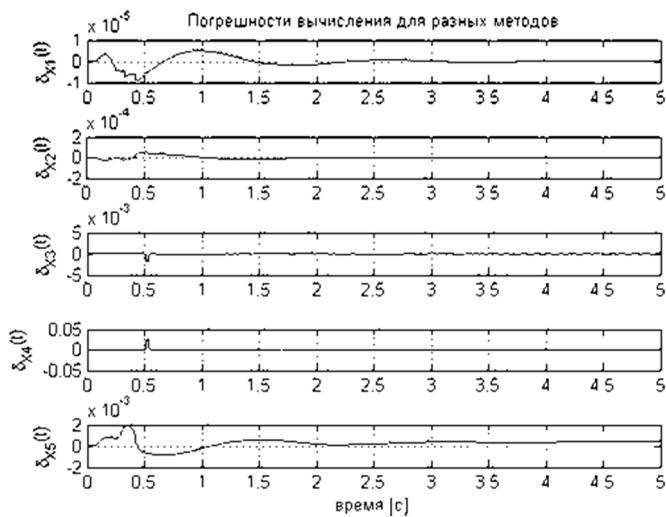


Рис. П.3. Характеристики точности решений системы ОДУ 5-го порядка двумя разными решателями Matlab

**Основная программа:**

```
clear all, close all
% определение констант
global c u g
c=5000;
u=25;
g=9.81
% определение начальных условий
x10=0;
x20=0;
x30=1000;
X0=[x10,x20,x30];
ht=0.001;
% шаг обращения к решателю и вывода результатов
% вычислений в массивы t и X
Tk=5; % конечное время моделирования
time_1=0:ht:Tk;
[t,X]=ode45('system_diff_1',time_1,X0);
subplot(3,1,1), plot(t,X(:,1)), grid on, hold on;
ylabel('X_1(t)')
title('Решение системы дифференциальных уравнений')
subplot(3,1,2), plot(t,X(:,2)), grid on, hold on;
ylabel('X_2(t)')
subplot(3,1,3), plot(t,X(:,3)), grid on, hold on;
ylabel('X_3(t)')
 xlabel('время [с]')

```

**Функция, вызываемая решателем, содержит описание системы ОДУ:**

```
function dx=system_diff_1(t,x)
global c u g
r=0.1*exp(-x(1)/8480);
% система дифференциальных уравнений
dx(1)=x(2);
dx(2)=c*u/x(3)-g-r*x(2)^2/x(3);
dx(3)=-u;
dx=dx';
```

В результате выполнения основной программы будет получено решение (рис. П.4).

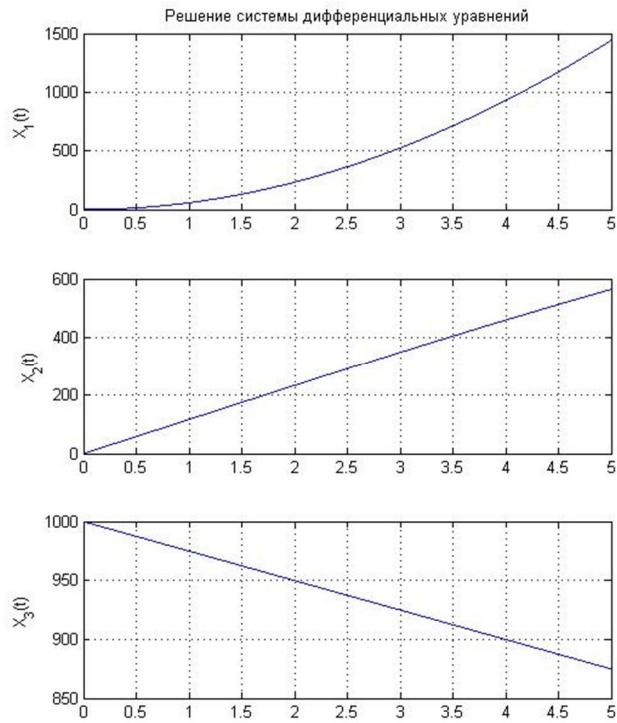


Рис. П.4. Решение системы (П.1)

Решение системы (П.1) может быть так же получено в среде имитационного моделирования Simulink, которая служит для построения моделей в виде совокупности блоков с заданными свойствами (параметрами). Отдельные блоки выбираются из библиотек Simulink, настраиваются в соответствии с параметрами модели и из них собирается структурная схема модели. В состав модели могут включаться источники сигналов различного вида, виртуальные регистрирующие приборы, графические средства анимации [2].

Для реализации системы (П.1) в среде Simulink представим ее в виде структурной схемы (рис. П.5).

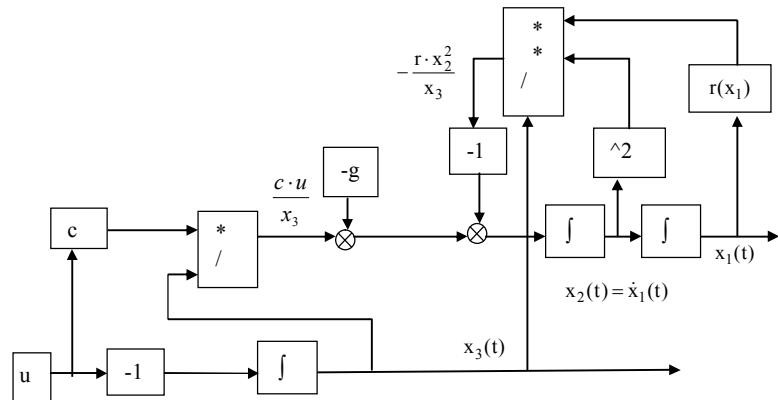


Рис. П.5. Структурная схема нелинейной нестационарной системы

Реализация модели в среде Simulink показана на рис. П.6.

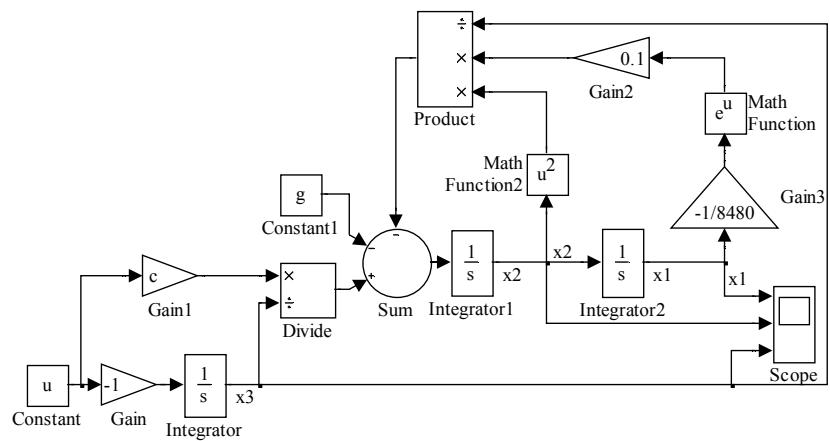


Рис. П.6. Реализация модели (П.1) в среде Simulink

С помощью виртуального осциллографа, реализованного в виде блока Scope, может быть получено графическое отображение решения (рис. П.7).

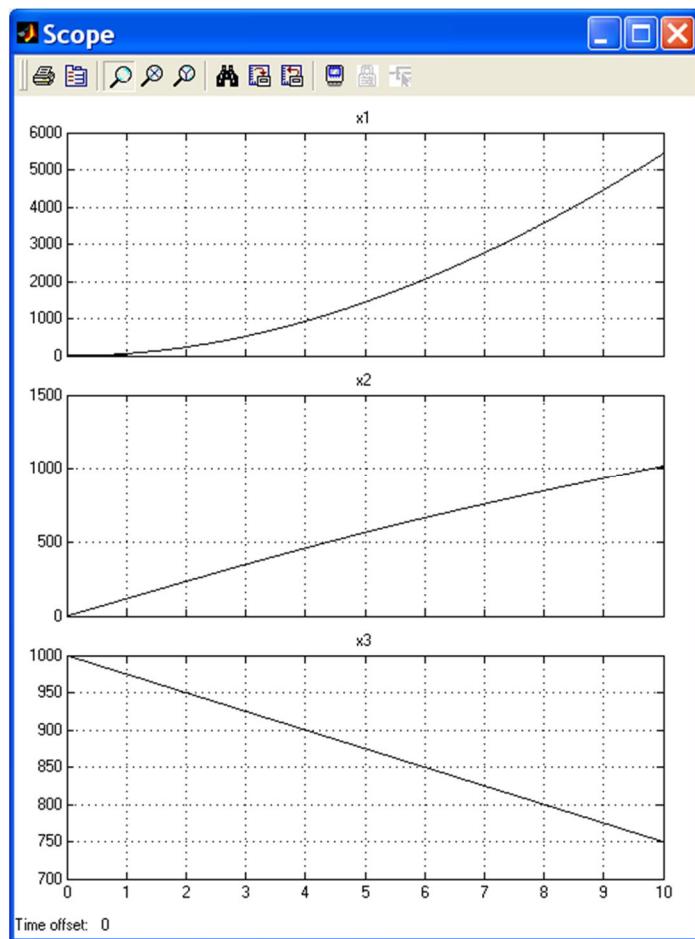


Рис. П.7. Отображение решения системы ОДУ на виртуальном осциллографе Scope

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Таблицы функций вызова генератора случайных чисел

### и процедуры его инициализации в некоторых языках программирования и средах разработки приложений

Таблица П. 1

Таблица функций вызова генератора случайных чисел в некоторых  
языках программирования и средах разработки приложений

Синтаксис функции, генерирующей случайные значения, распределённые по равномерному закону распределения	Наименование среды разработки программного кода
<code>rand()</code> , <code>random(...)</code>	Компиляторы языка C++ (в т.ч. используемые в средах разработки C++ Builder, Visual Studio)
<code>random()</code>	Компиляторы языка Pascal (в т.ч. используемые в среде разработки Delphi)
<code>rand()</code> , <code>random('Uniform', ...)</code>	M-file editor
 <i>Uniform Random Number block</i>	Simulink

Таблица П. 2

Таблица функций вызова процедуры инициализации генератора  
случайных чисел в некоторых языках программирования и средах  
разработки приложений

Синтаксис функции выбора начального "смещения" для функции, генерирующей случайные значения, распределённые по равномерному закону распределения	Наименование среды разработки программного кода
<code>randomize()</code> , <code>srand(...)</code>	Компиляторы языка C++ (в т.ч. используемые в средах разработки C++ Builder, Visual Studio)
<code>randomize</code>	Компиляторы языка Pascal (в т.ч. используемые в среде разработки Delphi)
<code>rand('state', ...)</code>	M-file editor
<i>Свойство "Initial seed" во вкладке "Block Parameters" блока "Uniform Random Number"</i>	Simulink

Также могут быть полезны некоторые константы приложений разработки, использующих язык C++:  
`RAND_MAX`, определённая в библиотеке `stdlib.h` – правая граница значений программного генератора;  
`INT_MAX`, определённая в библиотеках (`limits.h` и пр.) некоторых сред разработки – максимальное значение  
целочисленного типа данных "int".

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>1</b>
<i>Лабораторная работа № 1. Программная реализация имитационной модели нелинейной динамической системы .....</i>	<i>3</i>
<i>Лабораторная работа № 2. Имитационное моделирование детерминированного конечного автомата .....</i>	<i>8</i>
<i>Лабораторная работа № 3. Построение генератора случайных чисел с заданным законом распределения .....</i>	<i>17</i>
<i>Лабораторная работа № 4. Построение генератора случайного процесса методом формирующего фильтра .....</i>	<i>27</i>
<i>Лабораторная работа № 5. Построение генератора случайного процесса с заданными законом распределения и корреляционной функцией.....</i>	<i>32</i>
<i>Лабораторная работа № 6. Проверка стационарности и эргодичности случайного процесса .....</i>	<i>35</i>
<i>Лабораторная работа № 7. Статистическое имитационное моделирование одноканальной системы массового обслуживания с отказами .....</i>	<i>36</i>
<i>Лабораторная работа № 8. Статистическое имитационное моделирование многоканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью .....</i>	<i>43</i>
<i>Библиографический список.....</i>	<i>46</i>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Решение систем дифференциальных уравнений в среде <i>Mathworks Matlab</i>.....</b>	<b>47</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Таблицы функций вызова генератора случайных чисел и процедуры его инициализации в некоторых языках программирования и средах разработки приложений .....</b>	<b>52</b>

*Александров Антон Аскольдович, Емельянов Валентин Юрьевич, Юрескул Андрей Григорьевич*

**Моделирование систем**

Редактор *Г.М. Звягина*  
Корректор *Л.А. Петрова*

Подписано в печать 14.03.2013. Формат 60×84/16. Бумага документная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,6. Тираж 200 экз. Заказ № 29

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1