**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2**

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

**Цель работы**

Целью работы является ознакомление с методами исследования устойчивости линейных стационарных непрерывных систем. В результате выполнения работы следует научиться использовать критерии Гурвица и Найквиста для оценки устойчивости и определения критических характеристик звеньев, соответствующего выходу замкнутой системы на границу колебательной устойчивости.

**Теоретическая часть**

**Устойчивость** – это свойство системы возвращаться в установившийся режим после исчезновения внешнего воздействия, которое послужило причиной отклонения от этого состояния. Если же внешнее воздействие сохраняет постоянное значение, то система переходит в новое установившееся значение и продолжает оставаться в нем неограниченно долго. В любом случае для устойчивых систем характерно то, что в них, с течением времени, переходное (свободное) движение затухает. Исследование устойчивости является одной из важнейших задач теории автоматики, поскольку работоспособными, очевидно, являются только устойчивые системы.

Системы неустойчивые или нейтральные в разомкнутом состоянии могут приобрести устойчивость при замыкании и, наоборот, системы устойчивые в разомкнутом состоянии могут потерять свою устойчивость при замыкании. Физически это можно пояснить тем, что в замкнутой системе отклонения регулируемого параметра, возникшие в некоторой ее точке, возвращаются в нее же. Тогда, если прохождение через систему не уменьшает величину сигнала (коэффициент усиления контура на частоте сигнала больше единицы), то сигнал будет уже не затухать, а непрерывно увеличиваться – наблюдается эффект самовозбуждения.

В ряде случаев оказывается, что система неустойчива при любых значениях параметров, и сделать ее устойчивой можно только путем изменения структуры. Такого рода системы называются **структурно неустойчивыми**. Наряду с ними существуют системы, которые устойчивы независимо от значений параметров входящих в них звеньев. Для таких систем порядок характеристического уравнения не выше второго, а коэффициенты уравнения – положительны. Если же порядок системы выше второго, и она составлена из устойчивых (или нейтральных) звеньев (все коэффициенты характеристического уравнения положительны), то при замыкании такая система может потерять устойчивость, а может и сохранить ее. Такие системы называются **структурно-устойчивыми** и именно они чаще встречаются на практике.

Для них необходимо уметь определять диапазон варьируемых параметров регулятора, которые обеспечивают состояние устойчивости. Так, важной задачей является определение критической величины коэффициента усиления, т.е. такого его наибольшего значения, которое обеспечивает минимальную величину статической ошибки при сохранении состояния устойчивости. Также важным представляется оценка максимальной инерционности регулятора. Именно эти, практически наиболее важные, случаи и исследуется в первой части лабораторной работы.

Для анализа устойчивости линейных систем достаточно исследовать знаменатель передаточной замкнутой системы – ее характеристическое уравнение:

, (1)

где *ai –* постоянные коэффициенты.

**Необходимым условием устойчивости** является требование, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения (1) имели одинаковый знак, а **достаточным условием** – чтобы действительные части всех *n* корней его были отрицательными, т.е. лежали в левой части комплексной плоскости. Если один вещественный корень характеристического уравнения или пара комплексно-сопряженных корней попадает на мнимую ось, то система будет находиться на границе устойчивости.

Поскольку для уравнений порядка выше второго представляет затруднение непосредственное вычисление корней и исследование зависимости их значений от варьируемых параметров системы, то разработаны специальные правила – алгебраические и частотные критерии, позволяющие оценить устойчивость без вычисления корней характеристического уравнения.

Алгебраические критерии предполагают проверку выполнения системы неравенств, составленных из коэффициентов характеристического уравнения, а частотные критерии являются графоаналитическими, т.е. предусматривают анализ поведения графиков различных частотных характеристик системы. Остановимся на анализе устойчивости с помощью алгебраического критерия Рауса - Гурвица в формулировке Гурвица и в модификации Льенара - Шипара.

**Критерий Гурвица** предполагает составление из коэффициентов характеристического уравнения матрицы ранга *n*x*n* (где *n* – порядок уравнения) по следующему алгоритму:

* по главной диагонали выписываются все коэффициенты с первого по *n*-ный;
* каждая последующая верхняя ячейка заполняется элементом, номер которого на единицу больше, а каждая последующая нижняя – элементом, номер которого на единицу меньше;
* если номер коэффициента в ячейке превышает *n* или меньше, чем 0, то вместо этих элементов в соответствующие ячейки вписываются нули.

Так для систем третьего, четвертого и пятого порядков матрицы Гурвица представляются в виде:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | (2) |

Далее по данной матрице составляются диагональные миноры и вычисляются соответствующие значения определителей. Для устойчивости системы все они должны быть положительны. Льенар и Шипар установили, что для проверки устойчивости достаточно установить положительность не всех, а только четных или только нечетных определителей диагональных миноров. Таким образом, для системы 3 порядка достаточно проверить положительность второго минора, для системы 4 порядка – первого и третьего, а для системы 5 порядка второго и четвертого.

Заметим, что последний минор всегда положителен, если положителен предпоследний минор и последний коэффициент при свободном члене, а первый минор также будет положительным, если положителен коэффициент *a*1. Поэтому проверка устойчивости (для систем 3 – 5 порядков) сводится к проверке выполнения неравенств[[1]](#footnote-1) представленных в табл. 1.

Табл. 1. Проверка устойчивости согласно критерию Гурвица.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок**  **системы** | **Условие** |
| Третий | (условие Вышнеградского) |
| Четвертый |  |
| Пятый |  |

Если система находится на границе устойчивости, то неравенство превращается в равенство, что может быть рассмотрено как уравнение для нахождения критического значения варьируемого параметра.

Во второй части работы исследуются **системы с транспортным запаздыванием**. Эти системы в одном или нескольких своих звеньях имеют запаздывание во времени изменения выходной величины по отношению к изменению входной на постоянную величину, называемую **временем запаздывания**.

Звено с запаздыванием обычно можно представить себе в виде последовательно включенных обычного звена без запаздывания и звена «чистого» или идеального транспортного запаздывания (ИТЗ).

Звено с «чистым» запаздыванием описывается уравнением вида:

 (3)

Преобразование Лапласа формулы (3) позволяет получить выражение для передаточной функции звена ИТЗ:

*W*(*s*)=exp(–τ*s*). (4)

Поскольку для этого звена переменная *s* входит в показатель степени, то характеристическое уравнение замкнутой системы будет трансцендентным (как по каналу возмущения, так и по каналу задающего воздействия). Поэтому для анализа устойчивости таких систем единственно применимым являются частотные графоаналитические критерии, в частности критерий Найквиста.

Этот критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по частотным характеристикам **разомкнутой системы**, т.е. системы, получаемой путем размыкания главной отрицательной обратной связи. Исследуется поведение одновременно двух раздельных частотных характеристик − амплитудной *A*(ω) и фазовой φ(ω) или же одной объединенной амплитудно-фазовой характеристики (иначе годографа КЧХ). Эти характеристики можно рассчитать теоретически, как это описано ранее.

В соответствии с критерием Найквистадля устойчивости замкнутой системы, составленной из устойчивых (или нейтральных) динамических звеньев годограф КЧХ разомкнутой системы (годограф Найквиста) не должен охватывать критическую точку (-1,*j*0) на вещественной оси. Если же годограф проходит через эту точку, то после замыкания система окажется на границе колебательной устойчивости. На рис. 1 представлены годографы Найквиста для систем с различным состоянием устойчивости.

|  |
| --- |
| lab3_fig_1  Рис. 1. Годографы Найквиста для систем с устойчивых в разомкнутом состоянии и различным состоянием устойчивости в замкнутом состоянии. При замыкании система 1 – неустойчива, система 2 – на границе устойчивости, система 3 – устойчива. |

Такое поведение годографа соответствует тому, что логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) разомкнутой системы должна раньше пересекать ось абсцисс, чем фазово-частотная характеристика достигает значения –π. Рис. 2 иллюстрирует этот факт, представляя набор раздельных частотных характеристик для вышерассмотренных систем. Такие две характеристики называются в совокупности диаграммой Боде.

Критерий Найквиста позволяет ввести важное понятие **запаса устойчивости Δφ по фазе**. Эта величина определяется тем, насколько фазовый сдвиг в разомкнутой системе отличается от величины –π на **частоте среза** ω*s* (частота среза соответствует такому значению частоты, для которого ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс, т.е. *A(*ω*s*)=1 или *L(*ω*s*)=0). Чем больше величина запаса устойчивости по фазе, тем меньше система чувствительна к возможным вариациям параметров ее звеньев, которые могут привести ее к неустойчивой работе.

|  |
| --- |
| lab3_fig_2  Рис. 2. Раздельные частотные характеристики для разомкнутых систем с различным состоянием устойчивости. При замыкании система 1 – неустойчива, система 2 – на границе устойчивости, система 3 – устойчива. |

Для анализа устойчивости систем с запаздыванием проанализируем частотные характеристики звена ИТЗ на основе формулы для ее передаточной функции (4). Очевидно, что у звена ИТЗ на всех частотах амплитуда передачи сигнала равна единице, а вносимая величина отрицательного фазового сдвига растет с частотой:

. (5)

Отрицательный фазовый сдвиг в звене ИТЗ негативно сказывается на качестве работы САУ – увеличиваются колебательность и время регулирования (длительность переходного процесса) и уменьшается запас устойчивости системы. При превышении времени запаздывания некоторого критического значения τкр система теряет устойчивость.

Предположим, что до введения звена ИТЗ система обладала запасом устойчивости по фазе Δϕ, тогда устойчивость замкнутой системы нарушится, если отрицательный фазовый сдвиг (5) будет превышать по модулю величину Δϕ. Условие нахождения системы на границе колебательной устойчивости соответствует выполнению соотношения:

.

Откуда выражение для критического времени транспортного запаздывания:

. (5)

В ряде простейших случаев величины запаса устойчивости и частоты среза могут быть выражены аналитически через параметры передаточных функций составляющих систему звеньев, однако, в общем случае, значительно удобнее представляется провести определение величин запасов графически по диаграмме Боде.

**Выполнение работы**

Из табл. 2 выбрать вариант задания, в котором указан вид структурной схемы задачи и заданы значения передаточных функций звеньев.

Таблица 2. – Структурная схема САУ и передаточные функции звеньев

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **Структурная схема** | **Передаточные функции** | **n** | **Структурная**  **схема** | **Передаточные функции** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | **lab1_fig_1** |  | **13** | **lab3_fig_7** |  |
| **2** | **lab3_fig_7** |  | **14** | **lab1_fig_1** |  |
| **3** | **lab3_fig_6** |  | **15** | **lab1_fig_1** |  |
| **4** | **lab1_fig_1** |  | **16** | **lab3_fig_6** |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Продолжение таблицы 6.2 | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **5** | **lab3_fig_7** |  | **17** | **lab3_fig_6** |  |
| **6** | **lab3_fig_6** |  | **18** | **lab3_fig_7** |  |
| **7** | **lab1_fig_1** |  | **19** | **lab1_fig_1** |  |
| **8** | **lab3_fig_7** |  | **20** | **lab3_fig_7** |  |
| **9** | **lab3_fig_6** |  | **21** | **lab3_fig_6** |  |
| **10** | **lab1_fig_1** |  | **22** | **lab1_fig_1** |  |
| **11** | **lab3_fig_7** |  | **23** | **lab3_fig_7** |  |
| **12** | **lab3_fig_6** |  | **24** | **lab3_fig_6** |  |

**1 часть работы. Определение границы устойчивости линейной системы**

**без транспортного запаздывания**

При выполнении этой части работы следует придерживаться следующего порядка действий:

1. Составить выражение для передаточной функции замкнутой системы и выделить знаменатель полученного выражения.
2. В соответствии с критерием Гурвица составить соответствующий определитель и получить неравенство, включающее в себя в качестве неизвестного значение варьируемого параметра.
3. Решить уравнение и определить критическое значение варьируемого коэффициента, отвечающего выходу исследуемой системы на границу колебательной устойчивости.
4. Разработать модель, соответствующую заданной структурной схеме. Проверить, что система будет находиться на границе устойчивости – с этой целью провести расчет переходного процесса и убедиться, что он представляет собой незатухающие гармонические колебания.

Пункты 1-3 могут быть выполнены как вручную, так и с помощью одного из пакетов компьютерной математики, которые обладают возможностями аналитических преобразований.

**Методический пример выполнения**

Пусть изучается устойчивость системы, структурная схема которой представлена на рис. 3, а значения передаточных функций указаны внутри блоков.

|  |
| --- |
| lab3_fig_3  Рис. 3. Пример структурной схемы системы исследуемой на устойчивость. |

Составим выражение для передаточной функции **замкнутой** системы:

;

Свернем и упростим это выражение, используя следующий набор команд:

Для системы 3 порядка критерий Гурвица сводится к проверке выполнения условия Вышнеградского. В случае систем более высоких порядков рационально составить матрицу Гурвица, исключением строк и столбцов сформировать соответствующий диагональный минор и вычислить его детерминант. Затем, приравняв его к нулю (условие нахождения системы на границе колебательной устойчивости), решить полученное уравнение относительно входящего в него неизвестного варьируемого параметра. Данная процедура также может быть реализована как вручную, так и в рамках пакета компьютерной математики.

В данном примере к помощи компьютера прибегать нецелесообразно, поскольку система 3 порядка и условие устойчивости – это уравнение Вышнеградского, которое записывается в виде:



То есть критическое значение коэффициента усиления  третьего звена, соответствующее границе устойчивости, равно 10.

Разработаем модель, соответствующую структурной схеме системы, представленной на рис. 3, и промоделируем переходной процесс, приняв . Результат моделирования представлены на рис. 4.

|  |  |
| --- | --- |
| **lab3_fig_4b** |  |
| Рис. 4. Результат моделирования переходного процесса . | |

Как видно из рис.4 критическое значение коэффициента усиления найдено верно, поскольку переходной процесс в системе соответствует незатухающему колебанию.

**2 часть работы. Исследование устойчивости систем,**

**содержащих звенья транспортного запаздывания**

При выполнении этой части работы следует придерживаться следующего порядка действий:

1. Изменить найденное значение варьируемого параметра вдвое по сравнению с критическим значением, **так чтобы система приобрела устойчивость** (в нашем примере уменьшить  до значения 5).
2. Определить выражение передаточной функции разомкнутой системы.
3. Построить графики раздельных ЛАЧХ и ФЧХ (диаграмму Боде) разомкнутой системы и определить по графикам основные характеристики − частоту среза, запас по фазе.
4. Рассчитать критическое время транспортного запаздывания в соответствии с формулой (5).
5. Проверить правильность расчета путем моделирования. Выбрать время расчета и, проведя моделирование процесса, убедиться, что в этом случае замкнутая система будет находиться на границе колебательной устойчивости.

**В отчет по первой части работы** должны входить:

* структурная схема исходной системы;
* расчет передаточной функции замкнутой системы (вручную или в рамках символьных преобразований пакетов компьютерной математики);
* запись выражения для матрицы Гурвица;
* вычисление определителей диагональных миноров;
* расчет критического значения варьируемого коэффициента;
* проверка найденного значения моделированием

**В отчет по второй части работы** должны входить:

* задание передаточных функций звеньев и определение передаточной функции разомкнутой системы;
* диаграмма Боде с указанием запасов устойчивостей;
* расчет критического времени транспортного запаздывания;
* проверка найденного значения с помощью диаграммы Боде для модифицированной системы с запаздыванием и путем моделирования пакете Simulink переходных процессов в такой системе.

1. Это, конечно, значительно более простая процедура сравнительно с поиском корней. [↑](#footnote-ref-1)