Лабораторная работа №3

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Цель работы: исследование простейших хаотических режимов нелинейной системы с дискретным временем.

1. Теоретические сведения

Рассмотрим простейшую модель популяции, численность которой описывается нелинейным разностным уравнением первого порядка

xn+1=rxn (1–xn). (1)

Оно означает, что численность популяции в n+1 году пропорциональна численности популяции в n году и свободной части жизненного пространства (1–xn), значение xn изменяется от 0 до 1. Положительный коэффициент r зависит от плодовитости популяции, условий питания и реальной площади.

Один из важных вопросов, с которого обычно начинают исследование динамических моделей – это анализ стационарных точек. Они характеризуют положения равновесия системы, когда ее следующее состояние совпадает с предыдущим.

Различают два типа стационарных точек: притягивающие (устойчивые) и отталкивающие (неустойчивые). Приведем общее правило (критерий), позволяющее определять устойчивость стационарных точек разностного уравнения xn+1=f (xn). Оно опирается на вычисление значения производной функции f(x) в стационарной точке и состоит в следующем.

Критерий устойчивости стационарной точки: Пусть хi – стационарная точка уравнения xn+1=f(xn). Если , то эта точка – устойчивая (притягивающая), если же , то стационарная точка xi – неустойчивая (отталкивающая). Случай, когда модуль производной функции f(x) в стационарной точке равен единице, требует дополнительного исследования (анализа производных высших порядков).

Наряду с исследованием стационарных точек нелинейных систем важное значение имеет анализ точек бифуркации. Так называют значения параметров системы, при которых происходит качественное изменение ее поведения, например, потеря устойчивости, возникновение колебательного режима, появление предельного цикла и т. д.

Найдем стационарные точки модели (1), рассмотрев алгебраическое уравнение x=rx(1–x). У него есть очевидный корень x1=0. Если численность популяции в начальный момент равна 0, то и она будет равняться 0 и далее. Второй корень равен . Таким образом, x1 и x2 – стационарные точки данной задачи. Проанализируем их устойчивость и найдем точки бифуркации (критические значения параметра r). Это позволит ответить на вопрос, как будет себя вести популяция при разных значениях r.

Рассмотрим отдельно случаи 0<r<1, 1<r<3, 3<r<4, полагая что 

*Случай 1* (0<r<1). В этом случае имеется одна стационарная точка x1=0 (корень x2 отрицателен). Чтобы проанализировать ее устойчивость, нарисуем кривую y=f(x), где f(x)=rx (1–x) и прямую y=x (рис.1). Возьмём точку 0,5 на оси абсцисс, проведем вертикаль до пересечения с кривой y=f(x) (точка А), затем из неё горизонталь до пересечения с прямой y=x (точка В). Проводя из точки В вертикаль до пересечения с кривой, получим точку С. Продолжая процесс, получаем ломаную линию, называемую лестницей Ламерея.

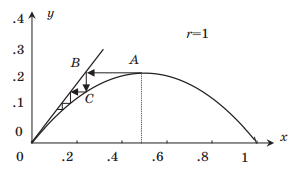


Рисунок 1

Спуск по лестнице Ламерея приводит в начало координат. Таким образом, стационарная точка x1=0 – устойчивая. К этому же выводу можно прийти, вычисляя производную функции f(x)=rx (1–x):



Для x1=0 , условие устойчивости выполняется.

*Случай 2* (1<r<3). Если r>1, то стационарная точка x1=0 теряет устойчивость. Вторая стационарная точка  неотрицательна. Вычисляя для неё производную, получаем . График зависимости производной от r приведен на рисунке 2. Область устойчивости выделена штриховкой.

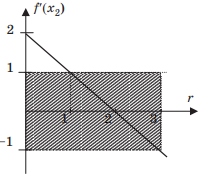


Рисунок 2

Поскольку при 1<r<3 модуль производной меньше 1, то на указанном интервале стационарная точка x2 – устойчивая. Критическое значение r=1, при котором появляется вторая стационарная точка x2 и меняется тип устойчивости стационарной точки x1, представляет собой первую точку бифуркации.

*Случай 3* (3<r<4). Если r>3, то стационарная точка x2 теряет устойчивость.

Критическое значение r=3 – это вторая точка бифуркации. В поведении системы происходят качественные изменения – в ней возникают устойчивые колебания. Их период сначала равен 2, и по мере увеличения r удваивается. При достижении некоторого критического значения r (примерно 3,5699) регулярность в поведении системы пропадает и возникает хаотическая последовательность {xn} (для r<4 – перемежающийся хаос, а затем сплошной хаос)

1. Задание.

Для модели xn+1=rxn (b–xn)

1. Найти стационарные точки, выполнить анализ их устойчивости и определить бифуркационные значения параметра r.
2. Разработать программу моделирования динамики популяции.
3. Получить графики изменения численности во времени для различных r
4. Разработать программу построения бифуркационной диаграммы (ось абсцисс – значения параметра r, ось ординат – характерные уровни численности популяции). Примерный вид показан на рисунке

