Erdős–Rényi 随机图连通的充要条件

Erdős–Rényi (ER) 随机图是什么？简单地说：图有 N 个点，每对点相连的概率均为 p。

ER 随机图连通的充要条件是$p > \frac{\ln N}{N}$，不过 Erdős–Rényi 的数十页证明太复杂，这里用图的切割给出一个简单的证明:

引理 1: 假设图 G 的任意边为正，任意割为正 ⇔ G 连通（证明略）。

将原图每条边的赋权为 1，原图的$(2^{N-1}-1)$种割分别为: C_1，C_2, ⋯，$C_{2^{N-1}-1}$，定义函数:

$$I(C) = \begin{cases} 1, \text{if } C\text{为正割} \\ 0, \text{if } C\text{为零割} \end{cases}$$

根据引理 1，随机图 G 连通的充要条件是:

$$\lim_{N\to+\infty} E\left[\sum_{k=1}^{2^{N-1}-1} I(C_k)\right] = 2^{N-1}-1$$

即:

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor} \binom{N}{k}(1-p)^{k(N-k)} = 0$$

于是，此问题被化简为级数敛散性问题。令$p = \frac{(1+\varepsilon)\ln N}{N}$，$a_k = \binom{N}{k}(1-p)^{k(N-k)}$，则$a_1 = N(1-p)^{N-1}$。为保证级数收敛:

$$\lim_{N\to+\infty} a_1 = \lim_{N\to+\infty} N\left(1-\frac{(1+\varepsilon)\ln N}{N}\right)^{\frac{N}{(1+\varepsilon)\ln N}\times(1+\varepsilon)\ln N\times\frac{N-1}{N}} = \lim_{N\to+\infty} O(N^{-\varepsilon}) = 0$$

因此，$\varepsilon > 0$是级数收敛于 0 的必要条件。接下来，我们证明充分性。

引理 2：当$0<\varepsilon<1$时: $$a_k = O(N^{-k\varepsilon})$$ 证明：$k=o(N)$时显然成立，这里我们讨论$k=cN$ $\left(0<c\le\frac{1}{2}\right)$的情况: $$a_k \le \left(\frac{eN}{k}\right)^k\left(1-\frac{(1+\varepsilon)\ln N}{N}\right)^{\frac{N}{(1+\varepsilon)\ln N}\times(1+\varepsilon)\ln N\times k\left(1-\frac{k}{N}\right)} \le \frac{e^k}{k^k}N^{(1+\varepsilon)\times\frac{k^2}{N}-\varepsilon k}$$ $$= \left(\frac{e}{c}N^{(1+\varepsilon)c-1}\right)^k N^{-k\varepsilon}$$ 因为$\varepsilon<1$且$c\le\frac{1}{2}$，所以$(1+\varepsilon)c-1<0$，故$a_k = O(N^{-k\varepsilon})$.

根据引理 2，当$0<\varepsilon<1$时:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor} a_k = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor} O(N^{-k\varepsilon}) = O\left(N^{-\varepsilon}\times\frac{1-N^{-\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\varepsilon}}{1-N^{-\varepsilon}}\right) = O(N^{-\varepsilon}) = 0$$

换言之，当$\frac{\ln N}{N} < p < \frac{2\ln N}{N}$，图一定连通。因此，当$p > \frac{\ln N}{N}$时，图一定是连通的。