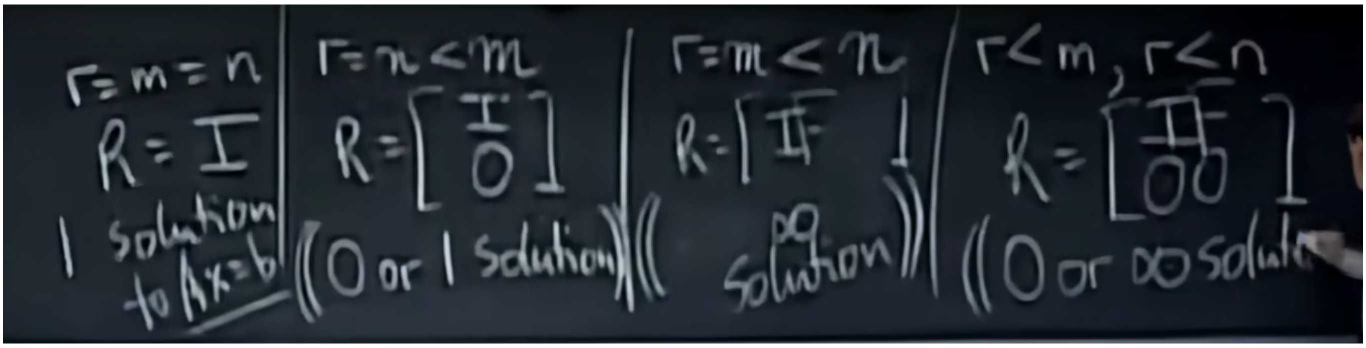
有关 $Ax=b$ 的解的情况

总结如图：



相关视频：https://www.bilibili.com/video/BV16Z4y1U7oU?p=8&vd_source=3a7313311adb0ce174176d9069af5bd0

基础定义

- 解空间：即所有解向量构成的向量空间
- 零空间：齐次线性方程组的解空间
- $Ax=b$表示A中列向量的线性组合为b，换言之，如果有解，则b可以有A的列向量线性表示

从系数矩阵的秩入手

- A的*行数*（即列向量的分量个数）反映了向量空间的*最大维数*，A的*列数*表示参与线性组合的*列向量个数*
- $r(A)$表示列向量的线性无关个数
- Ax可以表示为一个线性空间，这个线性空间一定是最大空间的子空间,该空间就是由A撑开的，它的基就是A中的线性无关向量
- 自由列向量：对线性组合没有共线的向量，换言之，可以由其他向量表示出来的向量

> 下面开始解释图片内容：
> **行满秩**：如图3，m(行数)个线性无关的列向量撑开了整个最大的向量空间，这是有解的关键，因为所有的B都在该最大的向量空间中，*同时F（自由列向量）中的向量是多余的，对该向量的任意搭配是得到无穷解的原因*
> **列满秩**：如图2，n个列向量均线性无关，表示A中的向量撑开了一个n维的子空间，所以说当B的非零分量<=n个时，即B在该n维子空间中，方程有解并且唯一，*因为没有自由列向量F*
> **满秩方阵**：如图1，同时满足上面两点，*即撑开了最大的向量空间（有解），无自由列向量（唯一）*，故此时有解且唯一
> **无满秩**：如图4，即A中的向量撑开了一个子空间，同时A中包含自由列向量，此时只有B属于子空间时，有无穷解，否则，无解
> **总结**：**秩反映能够撑开的向量空间有多大，有解则B在A撑开的子空间中，存在自由列向量的时解无穷**

无穷解时的通解形式

> 先考虑齐次线性方程组的情况，即零空间。无穷解只可能出现在有自由列向量的情况下，显然自由列向量的个数对通解的形式有所影响，那么影响为何？换言之，解空间的秩由什么决定？
> **解空间的秩**：如果自由变量的个数是1，说明解向量的某一个分量是可以取遍所有值的，此时的解空间就是一条直线；当自由变量的个数为2，此时解向量有两个分量是可以任意取值的，此时解空间扩张为

> 一个平面；同理，自由变量的个数的增加，相当于解放解向量的某些分量的取值，致使解空间的维数不断升高，所以自由变量的个数就反映了解空间的秩。
> 由$Ax=A(x_p+x_n)=b$不难验证，求解出齐次线性方程组的通解就可以求出非齐次的通解，而知道解空间的秩，很自然的就可以利用解空间的一组基求出齐次的通解。