《烧掉数学书》-为过去所做的入门文档

文档来源：《烧掉数学书》

引言

> 这篇文档写给想要了解数学的人，特别是站在数学之门外面，而不知道如何敲响的人。只要会加法和乘法，就能够看懂文档。文档是从基础数学概念开始的入门文档。覆盖了交换律、结合律、分配律、面积、微分、幂函数、多项式、圆和π的推导、坐标、弧度制、三角函数、泰勒展开、函数方程、积分、曲线长度、多变量微积分等。
>
> 人觉得π的推导整合了文档内涉及的几乎全部有趣的知识，在文档中详细描述了如何从从比例的概念到达圆的面积和周长，再得到某个固定的比例，并将这个比例叫做π，然后通过积分和泰勒展开计算π的值，涉及了导数、积分、三角函数、泰勒级数等。
>
> 无须担忧知识的密度，只需要笔和纸进行运算辅之以AI工具就能够看懂文档。所有概念都是创造出来的，没有任何概念是无中生有的。本文档大量内容依靠直觉直接演绎，所以关于证明的部分是不严谨的。

第一幕

交换律和结合律

抽象就是放下对具体的东西的执着。

比如这一组：

$1+2=2+1$

$2+3=3+2$

假设人看到这一组的第一反应是计算：

$1+2=3$

$2+3=5$

那么：

$9^{67}+24^{990}=24^{990}+9^{67}?$

$x^{1336}z+y^{16669}=y^{16669}+x^{1336}z?$ 如何计算？

这是一组对于人来说难以计算和无法计算的式子，但是人仍然能够知道某些东西，比如这两组式子都是“合理的”——

一个数加上另一个数等于它们互相交换位置再相加。

所以，上述两组均符合：$p+q=q+p$。

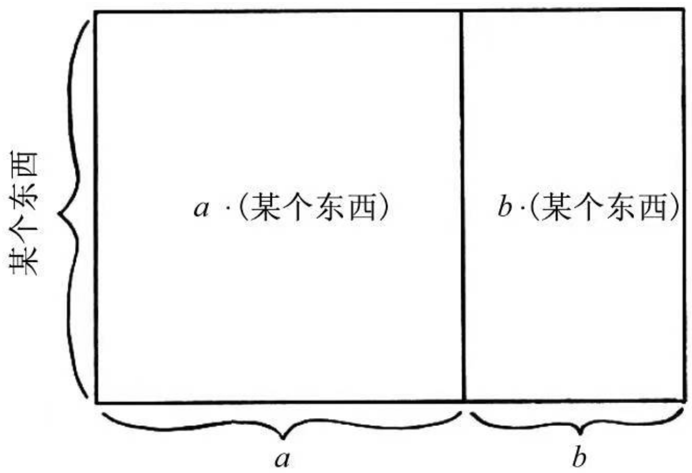
同样，对于加法成立的，貌似对于乘法也成立，所以：$pq=qp$。

这里，并没有对具体数值的运算，而是意识到有一些不涉及具体数值的性质——加法和乘法的交换律。这就是抽象，当不去做某些事的时候仍然存在着的一些事实。有时候数学是一种半途而废的哲学。做到某一个地方就不做了。然后在这个停下来的地方发现某些东西。在交换律这样的例子里，是有选择的停下，而在其他某些时候数学使自身不得不停下，才能在停下的地方继续，以免走上一条过于具体的道路。

分配律

从独立的加法乘法到加法乘法的混合运算，比如：

$\text{某个东西} * (a+b) = ?$



假设我们有一张纸，想象随意将它撕成两片。无论人是否知道两片的面积具体有多大，很显然最初的那张纸的面积就是撕开后的两片的面积之和。

所以：$\text{（}a+b\text{）} * \text{（某个东西）} = a * \text{（某个东西）} + b * \text{（某个东西）}$

既然这个（某个东西）是任意的，那么也可以将（某个东西）写成类似（c+d）的形式：

$\text{（}a+b\text{）} * \text{（}c+d\text{）} = a * \text{（}c+d\text{）} + b * \text{（}c+d\text{）}$

然后再次应用撕的思想，就可以得到：

$\text{（}a+b\text{）} * \text{（}c+d\text{）} = a * \text{（}c+d\text{）} + b * \text{（}c+d\text{）} = ac+ad+bc+bd$

这里发现了数学的任意性。通过任意性可以在不改变形式的基础上“扩展”一些已有的性质，比如把任意的（某个东西）写成（c+d），或者（c+d+e+f+g）。无论是（c+d）或者（c+d+e+f+g）都不会改变它是（某个东西）的性质。通过这样的扩展能够衍生出又旧又新的东西。

函数

函数的性质是缩略。把函数理解成一个容器。这个容器装进了需要研究的所有元素，并且用缩写的形式将需要研究的要素不丢失信息的压缩起来。

日常语言的描述：面积与长和宽有关系。如果谈论面积而不谈论长和宽，那就不是在谈论面积。

函数的描述：假设面积为A，长为l，宽为w，那么A(l,w) 是?

这样可以把函数理解为一种：

1.吞进去l和w；

2.扭曲和改造l和w（其中对l和w做了什么尚不明确），并吐出面积；

3.这个容器的名字叫做A。

这样有吞进去和吐出来的东西，由名字和“扭曲变换”的玩意，就叫函数。

面积

现在发明面积。

根据人对面积的日常观念，人要求相应的数学概念具有以下两个性质，以矩形为例：
1.对任意数?， $A(l,?w)=?A(l,w)$
2.对任意数?， $A(?l,w)=?A(l,w)$
$A(l,w)=lwA(1,1)$
然后人发现这使得矩形的面积为
$$lw=\frac{A(l,w)}{A(1,1)}$$
所以，如果没有 $A(1,1)$，就无法谈论面积。

直线陡峭度

根据人对陡峭度的日常观念，人要求相应的数学概念具有以下五个性质，以直线为例：

1.陡峭度只取决于垂直位置的变化和水平位置的变化，而不是位置本身。
2.对任意数?
$$S(h,v)=S(?h,?v)$$
3.人要求水平直线的陡峭度为0，即：
$$S(h,0)=0$$
4.如果将垂直距离加倍，不改变水平距离，则陡峭度也应当加倍。同样，不仅仅是加倍，对于任意的放大倍数，这个属性都应当成立，因此对任意数?

$S(h,?v)=?S(h,v)$

5.当h=v，纯粹出于美学原因，人令：

$S(h,v)=1$

然后人发现这5条要求一起迫使直线的陡峭度为:

$S(h,v)=\frac{v}{h}$

曲线（包括直线）陡峭度，微分

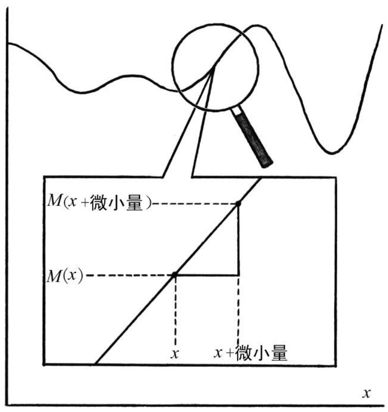
问题：

如果人有一个弯曲的东西（例如，图形不是直线的函数M），有没有办法说这个弯曲的东西在某个点x的“陡峭度”是多少？

如果放大弯曲的东西，它会显得越来越直。

在发明直线的陡峭度的概念时，人需要选取两个点，这样才能比较它们的水平和垂直位置。具体是哪两个点并不重要，只是得选两个。但对于弯曲的东西，随机选两个点似乎行不通，因为如果陡峭度在不断变化（弯曲的东西就是这样），得出的答案就会取决于选的是哪两个点。那样给出的定义会很难看。不仅如此，人的大脑似乎对一个点上的陡峭度有直观的认识。如果人忘掉数学，盯着一个弯曲的东西看，并且放大这样弯曲的东西，就能将弯曲的东西放大到像是直的，从而将难题变成简单问题。

有人弄来一台函数M和一个数x，人需要搞清楚这个点的“陡峭度”的概念。嗯，想法是这样。观察M在x附近的图形。也就是说，如果将x视为横轴上的某个数，将M（x）视为纵轴上的某个数，则横坐标为x纵坐标为M（x）的点就是机器M的图形。我们可以将这个点表示为（x，M（x））。现在来仔细看看这个点。如果有一个无穷放大镜，就可以将M的这部分图形无限放大。这样人就会看到直线。而人已经发明了直线的陡峭度的概念，因此只需将原来的概念应用到彼此无限靠近的两个点就可以了。



人用h代表一个非常非常小的数。它不是0，但是小于任何正数。或者说“极限”——它的基本思想是这样。将h视为一个要多小有多小的数。也就是说，不把它写成一个具体的数，比如h=0.000 01，而是让它的值在同样的计算过程中保持未知。可以想象成在h上装了一个旋钮，可以调整到想要的大小，只要不完全等于0。

下面是一些缩写。放大的点的横坐标为x，纵坐标为M（x），无限接近的点横坐标为x+h，纵坐标为M（x+h）。

用另一种方式描述：

$$M\text{在}x\text{处的陡峭度}=\frac{M(x+h)-M(x)}{(x+h)-x}$$

它相当于：

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{M(x+h)-M(x)}{h}\right]$$

也相当于：

$$\frac{dM}{dx}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{M(x+h)-M(x)}{h}\right]$$

这个曲线的陡峭度又被称作导数。

从面积公式扩展到幂函数

如果 $S(l,w)=lw*S(1,1)$，那么 $S(x,x)=x^2*S(1,1)$，把单位面积的概念省略可以得到：

$$S=lw$$

把长和宽设定为一致：

$$S=x^2$$

初步扩展一下指数的代数域（仅扩展到正整数）

$$S=x^3$$

$$S=x^4$$

$$S=x^n$$

上述均有一种规律——底数的自乘次数由指数决定——底数自己乘自己，共乘指数次

由此把“底数自身乘自身，共乘以指数次自身。”的玩意叫做——幂函数。

好！从正方形面积公式（形如 $S=x^2$ ）扩展到了幂函数的一般形式——底数自身乘自身，共乘以指数次自身。（形如 $S=x^n$ ）

这时分为这么几种扩展的路径——

根据幂函数的定义出发（即形如 $M(x)=x^n$ ）的函数扩展，在不改变幂函数基本形态的前提下：

把单项的幂运算变成多项的幂运算？比如另有 $N(x)=x^1+2x^2+9x^{15}$ 这样。

扩展幂函数指数的代数域？比如当n为正整数/0/负整数/分数的时候。

对幂函数导数的研究?

人要一个一个的扩展。

从单项式到多项式

$M(x)=x^n$ 是所有“底数和指数构成关系”的单项式的一般表达。

继续——

$x^4=x^3x^1$ 这看起来挺正常的。

$x^4=x^4x^0$? 这样。。好像也对？？所以发现了什么?

$x^0=1$

继续——

假设 $M(x)=1$

所以 $M(x)=x^0$ 。有时候1能做很多事。

所以 $M(x)=1*x^0$ 。有时候1能做很多事!

无论怎样写，$M(x)$始终$=1$

发现了什么？在 x^n 之前能够放置一些常数，虽然不知道放在它前面有什么用，但是它扩展了 x^n 。在 x^n 前添加了一个“系数”。现在它是1。但它也可以是2，3，4...n。

这里开始有些跳跃： 如果 x^0 为1，那么能否把第0项定义为常数项？比如第0项为 c_0 ，那么 c_0*1 仍然为 c_0 ， c_0x^0 仍然为 c_0 。这样常数项就巧妙地融合在了有x变量的式子里。即使带x也可以表达常数项。

比如： $M(x)=9,$则$c_0=9$，$x^0=1$

好！刚刚发现 x^n 前面可以放一些系数，比如 c_kx^k ，若k=0，则 c_kx^k 为常数项。那么这些项能不能做一下加法运算？比如：

$M(x)=c_0+8x^2$，$M'(x)=?$

可以发现每个式子都有相似的规律—— c_kx^k （之所以这么写是能够保证第0项正好是常数项* x^0 ，然后第1项系数配上 x^1 ，第2项系数配上 x^2 ）

所以可以一次性加总所有的单项式为：

$$M(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$$

迄今为止做了什么?

从正方形面积公式 x^2 发现了形如 x^n 的式子，并叫它为幂函数；

发现 $x^0 = 1$；

发现 x^n 前面可以添加一个系数，虽说不知道有什么用；

发现可以把添加了系数的 cx^n 全部相加，得到: $M(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ，虽说不知道有什么用！

在这样没有破坏幂函数的定义的前提下对幂函数进行奇奇怪怪的操作。

从单项式的导数到多项式的导数

刚刚从 $M(x) = x^n$ 出发进行了一系列变换，但都在幂函数的范围之内，现在人想了解一下幂函数的导数，也就是——想要知道:

$M(x) = x^2, M'(x) = ?$

$M(x) = x^2 + x, M'(x) = ?$

当n为正整数时:

$M(x) = x^n, M'(x) = ?$

$M(x) = x^{-n}, M'(x) = ?$

$M(x) = x^{\frac{1}{n}}, M'(x) = ?$

$M(x) = x^{\frac{m}{n}}, M'(x) = ?$

以及对于改造过却不失幂函数本性的:

$M(x) = c_n x^n, M'(x) = ?$

$M(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, M'(x) = ?$

现在开始求解:

$M(x) = x^2, M'(x) = ?$

从简单开始，从幂函数的定义出发构造一个简单的单项式: x^2 ，借助导数的定义求一下它的导数:

从一个简单的单项式开始—— $M(x) = x^2, M'(x) = ?$

$$M'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right)$$

$$M'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$M'(x) = 2x$

$M(x) = x^2 + x, M'(x) =?$

注意看！这事实上是两个函数相加。它不是 $f(x) = f(x)$ 的形式，而是 $M(x) = f(x) + g(x)$ 的形式。

所以：

$M(x) = f(x) + g(x), M'(x) =?$

借助导数的定义可以得出：

$$M'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$M'(x) = f'(x) + g'(x)$

所以：

$M(x) = x^2 + x$

$M'(x) = 2x + 1$

和差法则。

$M(x) = x^n, M'(x) =?$

$$M'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right)$$

问题出现了，如何展开呢？我的思路是研究 $M(x) = x^4, M'(x)$ 的展开式，并通过这种方法类比到n次。。

所以：$M'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \right), M'(x) =?$

核心在于：

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \right)$ 大概长什么样子？

看看需要关心哪些展开的项呢？

因为h是一个无穷小量，所以只要在 $\lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \right)$ 后仍然保留h的项都可以舍弃；

发现 $(x+h)^4$ 的展开式，每一项的次数总和都是4；

发现 $(x+h)^4$ 的展开式有4项展开后仅仅保留了一个h正好与分号下面的约分，那4项相加为：$4\,x^3 h$，并且其他项在约分后至少还有一个h，可以舍弃；

所以可得：

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^4-x^4}{h}\right)$$

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x^4+4x^3h+*h^2+*h^3+h^4-x^4}{h}\right)$$

$$M'(x)=4x^3$$

从4次类比n次，回到刚刚的问题：

$$M(x)=x^n, M'(x)=?$$

可以推断出：

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right)$$

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right)$$

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x^n+nx^{n-1}h+*h^2+*h^3+...+h^n-x^n}{h}\right)$$

$$M'(x)=nx^{n-1}$$

有没有发现这个推理过程略显草率？嗯。

$$M(x)=x^{-n}, M'(x)=?$$

不知道怎么求解时可以尝试把它和已知的靠边。比如：

如果 $M(x)=x^{-n}x^n$，那么 $M(x)=1, M'(x)=0$

观察到 $M(x)$ 由两项相乘构造，所以假设：

$$M(x)=F(x)g(x)$$

借助导数的定义可以得到：

$$M(x)=f(x)g(x)$$

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$M'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}$，有时候0很重要！

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]+g(x+h)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$M'(x)=\lim_{h\to 0}[f(x)g'(x)+f'(x)g(x+h)]$$

$M'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

所以：

$M(x)=x^{-n}x^{n}$

$M'(x)=(x^{-n})'x^{n}+x^{-n}(x^{n})'$，这个 $M'(x)=0$

化简可得：

$(x^{-n})'=-nx^{-n-1}$

乘积法则。

$M(x)=x^{\frac{1}{n}},M'(x)=?$

如果 $M(x)=(x^{\frac{1}{n}})^{n},M'(x)=1$

观察到 $M(x)$ 由n项相乘构造，所以假设：

$M(x)=fgh$，先试试3个。

所以：

$M'(x)=f'(gh)+f(gh)'$

$M'(x)=f'gh+fg'h+fgh'$

所以可以推断出乘积法则的推导就是把所有乘数相乘，并逐一对每个乘数都求个导数，然后加起来。。

回到 $M(x)=(x^{\frac{1}{n}})^{n}$，它就是n个 $x^{\frac{1}{n}}$ 相乘，所以就是：

$M'(x)=n(x^{\frac{1}{n}})'(x^{\frac{1}{n}})^{n-1},M(x)=1$

可以得到：

$(x^{\frac{1}{n}})'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

$M(x)=x^{\frac{m}{n}},M'(x)=?$

假设 $g(x)=x^{\frac{1}{n}}$

把它拆成两个函数的话：

$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$，有时候1很重要！

$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

所以：

$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

链式法则。

还剩这两个，直接给出结论：

$$M(x)=c_nx^n,M'(x)=nc_nx^{n-1}$$

$$M(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k,M'(x)=\sum_{k=0}^{n}kc_kx^{k-1}$$

认识了函数，认识了导数。

从面积出发得到了幂函数的一般形式—— $M(x)=x^n$；通过不改变幂函数一般形式之下逗弄幂函数，以得到更多对幂函数的知识。通过加法，乘法，以及指数的研究逗弄幂函数，进行了扩展，比如：

$$M(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$$；

得到了复合函数的求导法则。和差法则，乘积法则，链式法则。

通过求导法则，对于扩展后的幂函数进行幂函数导数的研究，比如 $M(x)=x^n,M'(x)=nx^{n-1}$；

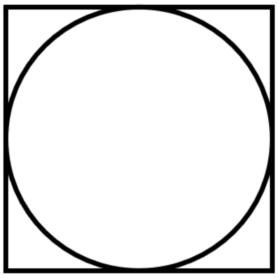
并且可以求解复合函数的导数！比如：$M(x)=x^{\frac{m}{n}},M'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ 。

第二幕

圆

在解释交换律的时候人说数学有时候是一种半途而废的哲学，这意味着有时候到达某一时刻后停下就是答案。在圆的解释中，这样半途而废的思想起到了大的作用。

假设一个正方形内接了一个圆，那么，圆占据了多少正方形？



人可以这样描述，

圆占据了“圆”个正方形，随着正方形的变化，圆也随之变化，以至于给出无穷个正方形，就会有无穷个圆。

用函数描述为：

圆占据正方形(A(圆)，A(正方形))，这个函数的意思是：有一个圆的面积，一个正方形的面积，那么圆占据了多少正方形？

稍作停留，换一个思路，人知道可以描述：1小时=60分钟，1千米=1000米这样的等式。其中小时，分钟，千米，米这样的东西称为数字的性质，不是具体数字的大小，而是这个数字属于哪个家族。这样数字的性质又称为量纲。

那么，正方形面积和圆面积的量纲都是A，面积。

人可以重新把函数记作：

圆占据正方形(A(圆)[A]，A(正方形)[A])。

如何同时谈论无穷个正方形和相应的圆？由于每个正方形和相应圆的面积都在变化，所以，能否有一种方法能够了解圆和正方形的关系，又不依赖于面积的变化？

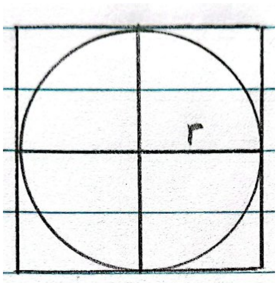
那么：

$$\text{圆占据正方形} = \frac{A(\text{圆})[A]}{A(\text{正方形})[A]}$$

通过面积/面积，就能够使得面积的变化不再干扰圆的面积和正方形面积的关系，因为在无穷的正方形和相应圆中，它们的“比值”应该是一样的。

假设圆占据正方形的数值为p，小正方形的边长是r。那么，这个问题也可以转化为：

$$p = \frac{A(\text{圆})}{A(\text{小正方形})}$$



那么：

$$\frac{A(\text{圆})}{A(\text{大方})} = \frac{pA(\text{小方})}{4A(\text{小方})} = \frac{p}{4}$$

由于 $A(\text{大方}) = 4A(\text{小方}) = 4r^2$ ，那么也可以写作：

$$A(\text{圆}) = pr^2$$

结束了？人不知道圆占据了多少正方形的面积，于是用一个符号代表“圆占据了多少正方形的面积”。这个就是半途而废的一个典型例子。

谈谈圆的周长？

再假设有一个数值q，它与圆的周长和大正方形的边长相关。

那么：$q = \dfrac{C(\text{圆})}{2r}$

用极限的思想再画一个圆，这个圆只比原始圆多了微小量的距离（记作h），把大圆减去小圆的面积记作A(圆环)，人先假设h是一个固定的数值，那么：

$$A(圆环) = A(大圆) - A(小圆) = p(r+h)^2 - pr^2$$

$$A(圆环) = 2prh + ph^2$$

当极限出现的时候，**一些看起来对立的东西会变得看上去一样**，这就是极限思想的威力，比如之前在弯曲图像的陡峭度中说的——把弯曲的东西看成直的。

所以，怎么用另一种方式表示A(圆环)？当极限出现时？

假设仅仅把小圆展开，那么这个圆会变成一条数值为C(圆)的线，A(圆环)相当于把一条数值为C(圆)的线稍稍拓宽了一点，构成一个C(圆)为长，h为宽的矩形面积。那么，矩形面积可以表示为：

$$A(圆环) = C(圆)h$$

$$A(圆环) = q2rh$$

所以：

$$\lim_{h\to 0}, 2prh + ph^2 = q2rh$$

那么：

$$\lim_{h\to 0}, 2pr + ph = q2r$$

$$2pr = q2r$$

$$p = q$$

定义：$p = q \equiv \pi$

所以：$A(圆) = \pi r^2, C(圆) = \pi 2r$

未来介绍了其他数学工具后会介绍 π 的求法。

求π

这一章可以等待全部看完后再看。因为这一章是最后写成的。

先表达出 π： $tan\frac{\pi}{4} = 1$，所以 $arctan1 = \frac{\pi}{4}$， $\pi = 4arctan1$

求π转化为求 $4arctan1$。

由于：$arctan(tanx) = x$，对两边求导可以得到：

$$\frac{darctan(tanx)}{dx} = 1$$

$$\frac{darctan(tanx)}{dx} = \frac{darctan(tanx)}{dtanx}\frac{dtanx}{dx} = \frac{darctan(tanx)}{dtanx}(1+(tanx)^2) = 1$$

这时可以把 $tanx$ 当作整体所以可以得到：$\frac{darctanx}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

对 $\frac{darctanx}{dx}$ 积分可以得到：$\int_a^b \frac{darctanx}{dx}dx = arctanb - arctana$

当b=1，a=0时，$\int_0^1 \frac{darctanx}{dx}dx = arctan1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$，这时将求π转化成为了求 $4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 的问题。这个函数的积分难求，所以继续转换。

把 $\frac{1}{1+x^2}$ 独立出来研究，假设有函数 $m(x) = \frac{1}{1+x^2}$，$u = x^2$，所以

$$m(u) = \frac{1}{1+u} = (1+u)^{-1}$$

$$m^0(u) = (1+u)^{-1}$$

$$m^1(u) = (-1)(1+u)^{-2}$$

$$m^2(u) = (-1)(-2)(1+u)^{-3}$$

$$m^3(u) = (-1)(-2)(-3)(1+u)^{-4}$$

$$m^n(u) = (-1)^n n!(1+u)^{-n-1}$$

$$m^n(0) = (-1)^n n!$$

根据泰勒展开可以得到：

$$m(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n(0)}{n!}u^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n$$

$$m(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

所以，$\pi = 4\int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]dx$

$$\pi = 4\int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...) = 4[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + ...]_0^1 = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...)$$

用一个简单的表达式可以表示为 $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

其实人更喜欢这样的表达——

$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...)$ 人觉得这样看起来更实在。当计算到2062062052个分数时, 最终π值: 3.1415926…精确到了第7位。

坐标

空间并不知道坐标。意思是空间的性质属于空间本身。有时候人想要进一步的研究空间，比如把线段和线段加起来，相减。于是人做出了并非内在于几何性质的任意选择。例如选择某一个特殊的点，选

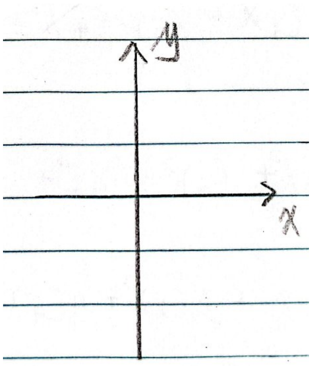
择某个特殊的方向。这样非几何的任意设定能够用另一种方式谈论几何，同时又不干扰到几何的性质。

想象一个没有特殊点和没有特殊方向的平面。它被称为“仿射平面”；

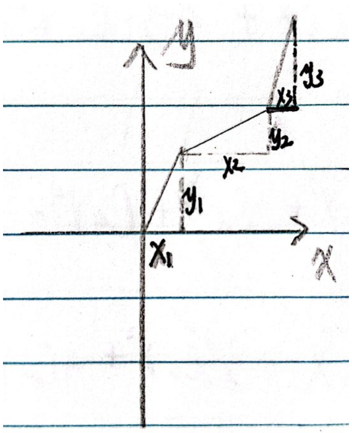
为了谈论“距离”的概念，设置某一个点为这个平面的特殊点，那么就可以通过这个特殊点和其他点的直线来谈论距离。人把这个特殊点称为原点。

为了谈论“方向”的概念，人首先设置了两个方向，其中x代表水平的方向，y代表垂直的方向。

所以：



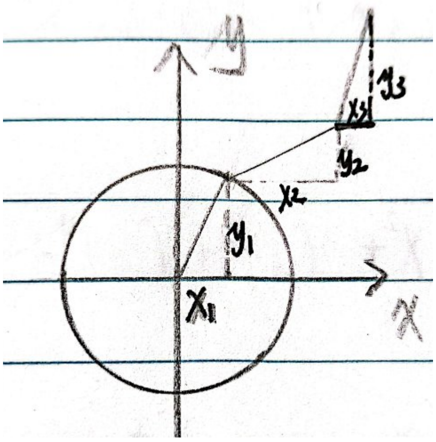
那么：如何谈论更多的方向？现在看来，只有2个方向。但是如果？



就可以把任意的方向转化成为x和y的移动距离，以及一个角度代表方向。

弧度制

如何谈论一个角度？在不重复的情况下，一个角度最大是多少？于是，引入老朋友——圆。



在一个平面直角坐标系内，如何用圆去谈论角度？人可以知道，一个扫过一周的线段就是角度能够到达的可能性的边界。那么，可以定义：

$$角度_{max} = 圆周角$$

$$角度_{min} = 0$$

人能够知道：假设人为定义a=123456,b=654321,c=456789,d=987654。由于它们是一一对应的，所以就可以用654321去表示b，这并不意味着654321和b是相等的。而是说谈论654321和谈论b是一回事。

所以，用这种一一对应的思路，可以设定：当谈论一个角度时，就相当于谈论这个角度所对应的圆的边长，人把这个角所对应的圆的边长叫做S，那么：

$$角度_{max} \equiv S_{圆周}$$

$$角度_{min} \equiv 0$$

如果r改变，角度也会跟着改变，但是角度不应该随着半径的长度而变化。人用量纲分析一下，看看是否存在量纲，才导致了尺度的变化。

$$角度_{max} \equiv 圆周长 = \pi 2r[L]$$

$$角度_{min} \equiv 0$$

由于长度单位才导致了跟随尺度的变化，所以人再次定义：

$$角度_{max} \equiv \frac{S_{圆周}}{r}$$

$$角度_{min} \equiv 0$$

$$角度_{anyangle} \equiv \frac{S_{角度对应的圆边长}}{r}$$

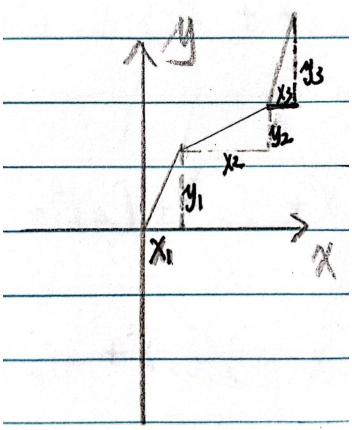
所以：

$$角度_{max} \equiv 2\pi，角度_{平角} \equiv \pi，角度_{直角} \equiv \frac{\pi}{2}$$

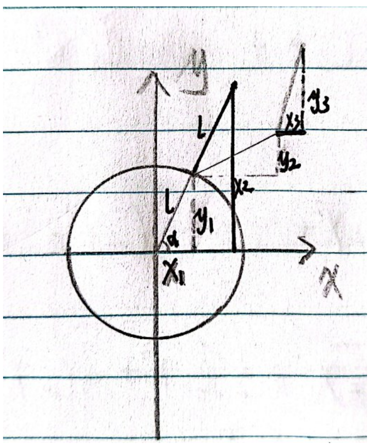
而且，当r=1时，$角度 \equiv 弧长$。人写作：

若r=1，$\alpha = S$

三角函数



已知一条边的距离和方向，如何取得它在x和y上的距离？这就是三角函数所想要讨论的问题，它的发明完全是基于——方向太多了，于是想要把各种方向上的距离用x和y上的距离表示。



好，那么x和y与距离l和角度α相关，那么：

$x(L,\alpha)$，$y(L,a)$?

通过发明面积同样的操作，可以得到：

$2x(L,\alpha)=x(2L,\alpha)$

$x(L,\alpha)=Lx(1,\alpha)$

这样可以发现，谈论距离为1，以及角度为α时就足够表达x，因为L只是对于$x(1,\alpha)$放缩。所以设定：

$x(1,\alpha) \equiv x(\alpha)$

同理：$y(1,\alpha) \equiv y(\alpha)$

那么，距离为L，角度为α的距离和方向又可以表示为：

x轴经过$x(\alpha)$距离，y轴经过$y(\alpha)$距离。

人定义：

$\sin\alpha \equiv x(\alpha)$

$\cos\alpha \equiv y(\alpha)$

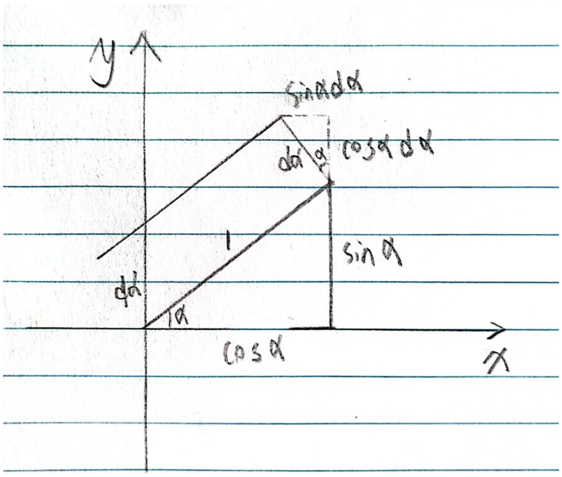
又是一个半途而废的例子。只是用sin和cos表示与距离“1”和方向α构成关系的两段距离。但是人仍不了解，也无法计算sin和cos的具体数值。这真是一个即使知道了表达式也无可奈何的好例子。

好，即使不知道表达式，人仍然想要计算一下它们的导数。

有 $\sin\alpha$， $\cos\alpha$，那么 $\sin'\alpha$， $\cos'\alpha$？

$$\sin'\alpha=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}\alpha},\cos'\alpha=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}\alpha}$$

人用极限思想画图。可知假设α只增加了微小量，那么斜边应该是近乎于平行的，而根据“若r=1， $\alpha=S$”的原则，可以发现：



小三角形的斜边为 $\mathrm{d}\alpha$

$$\mathrm{d}\sin\alpha=\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{d}\cos\alpha=-\sin\alpha\mathrm{d}\alpha$$

所以可得到：

$$\sin'\alpha=\cos\alpha$$

$$\cos'\alpha=-\sin\alpha$$

对sin和cos一无所知的情况下，人还是成功求出了它们的导数。但具体sin和cos具体是什么？人仍然不知道。

泰勒展开

看看这个式子：

$$M(x)=c_nx^n,M'(x)=nc_nx^{n-1}$$

$$M(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k,M'(x)=\sum_{k=0}^{n}kc_kx^{k-1}$$

怀念只有幂函数的时候，人能够写出幂函数的表达式，计算出每一项，扩展成单项式，多项式，可以画出图像，甚至求出多项式的导数。

可计算性可以看做一种光明的属性。一个函数如果它是可计算的，那么它就是光明的。它是显然和明澈的。

但是对于 $\sin\alpha$， $\cos\alpha$？人能做的仅仅是放弃。以然后用另一种方式谈论这些放弃的东西。比如用sin和cos表示与距离“1”和方向α构成关系的两段距离这样的表达。计算？人一无所知。

假设人有一种方法能够把任何的函数都变成幂函数就好了。这样就能够计算，能够画出图像，能够知道关于这个函数的“计算”性质。

因此，人要求：这个函数必须符合无穷的多项式的形式，即 $F(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

这个函数打开就是：

$$F(x) = C_0x^0 + C_1x^1 + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 ... + C_nx^n$$

人思考，如果知道了 C_0，C_1，$C_2 ...$ 也就是，知道了 C_n ，那么就相当于知道了这个函数。那么：

$$F(0) = C_0$$

$$F^{(1)}(x) = 0 + 1 * C_1 + 2 * C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 ... + nC_nx^{n-1}$$

$$F^{(1)}(0) = 1 * C_1$$

$$F^{(2)}(x) = 0 + 0 + 2 * C_2 + 3 * 2 * C_3x + 4 * 3 * C_4x^2 ... + n(n-1)C_nx^{n-2}$$

$$F^{(2)}(0) = 2 * C_2$$

$$F^{(3)}(x) = 0 + 0 + 0 + 3 * 2 * C_3 + 4 * 3 * 2 * C_4x ... + n(n-1)(n-2)C_nx^{n-3}$$

$$F^{(3)}(0) = 3 * 2 * C_3$$

通过不断地求导，可以得到 C_0，C_1，$C_2 ...$，就相当于知道了这个函数！那么类比 C_0，C_1，C_2 ，可以得到：

$$F^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)...1 * C_n \equiv n!C_n$$

所以 $C_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$

现在看一看特殊点0，当n=0时 $F(0) = C_0$ ，所以

$$C_0 = \frac{F^0(0)}{0!} \equiv F(0)$$

所以： $F^0(0) \equiv F(0)$， $0! \equiv 1$

这个函数F于是相当于： $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$F(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$ 。

泰勒展开是使得函数变得光明的方法。

三角函数的泰勒展开

泰勒展开使三角函数变得光明。

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sin^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$sin^{(0)}(0) = sin0 = 0$$

$$sin^{(1)}(0) = cos0 = 1$$

$$sin^{(2)}(0) = -sin0 = 0$$

$$sin^{(3)}(0) = -cos0 = -1$$

...循环

所以 $sin(x) = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 ...$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

同理可以得到：

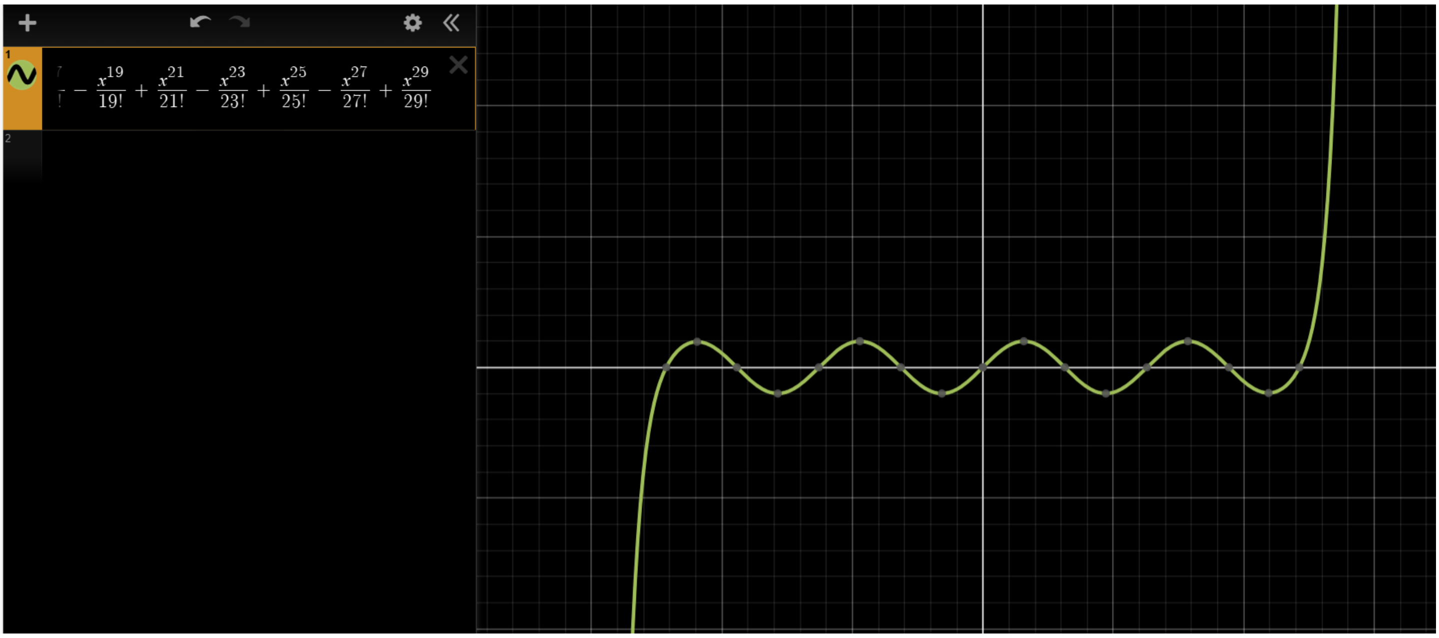
$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

现在三角函数终于可以计算啦。

这是

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{21}}{21!} - \frac{x^{23}}{23!} + \frac{x^{25}}{25!} - \frac{x^{27}}{27!} + \frac{x^{29}}{29!}$$

的图像：



函数方程

> 人能够拆解一台钟表而见到它内在的齿轮和发条，一览无余。但在夜行时只能通过反光避开水域，通过几乎近在咫尺的碰撞推算出能够行走的区域。
>
> 这里无处计算。不同于想要“计算”某些具体的值。从这里开始进入黑暗，无法再从一开始进行计算。
>
> 黑暗的迷雾意味着没有办法符合人追求确定性的需要。不过一旦确定性取消，取而代之的正是丰富。正如仿射平面没有特殊点和特殊方向，一切平等。
>
> 想象用“锋利的弧形金属和柄组成的切割工具”去定义斧子和“能够劈开木头的东西”去描述斧子。从定义出发很轻易能够认识斧子本身，从性质出发却没办法直接的看见斧子，却能够猜测到斧子也许有着无限的有待探索的丰富性质。这样反而能够到达斧子所触及的丰富可能性，发现斧子所能到达的边界。
>
> 这一章教会人尊重的意义，不着急通过定义了解事物，而是通过性质去丰富事物（就像“对数”）。如果不去丰富一个事物，即使知道了它那么也是止步不前。了解对数人能够知道尊重的道理。

有四个函数分别满足：

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(x+y)=f(x)f(y)$$
$$f(xy)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y)$$

然后呢？

没有表达式，没有可计算的部分，现在人想到 $123456*9786$ 都会感到一种亲切的怀念，因为人至少能够计算出这个式子的值——即使它是一个很大的数。

但是：有函数 f 满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$？

f 表现出无限的丰富性： 它内部是什么？怎么计算？还有其他隐藏的性质吗？ f 的解存在吗？唯一吗？解法是什么？ f 稳定性如何？

由于 x,y 是任意的，通过“固定 x,y ”得到部分性质，再解放 x,y 。性质是通过取特殊值而得到的，但又是一般的。人思考这是一种神秘的技巧，当一切都在变化的时候，通过固定不变的量——才能够迫使函数的某些性质显现。

现在需要运用这个思想开始解没有表达式的函数方程。

第一个函数 f 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

假设y=0：

$f(x)=f(x)+f(0)$

所以 $f(0)=0$

假设y=微小量h：

$f(x+h)=f(x)+f(h)$

$f(x+h)-f(x)=f(h)$

通过导数的形式构造：

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(h)}{h}$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$f'(x)=f'(0)$

函数 f 的导数恒等于 $f'(0)$，并且 $f(0)=0$。所以函数 f 是一条过原点的直线。

所以，f 也可以表示为：

$f(x)=ax(a\text{为常数})$

第二个函数 f 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$

$f(n)=f(1)^n$

$f(n)=f(\frac{n}{m}m)=f(\frac{n}{m})^m$

所以 $f(1)^n=f(\frac{n}{m})^m$

$f(1)^{\frac{n}{m}}=f(\frac{n}{m})^1$

形如这样的式子又可以写作 $f(x)=f(1)^x$

所以，f 也可以表示为：

$f(x)=c^x$

导数？为了美观，人想求 f 关于某一个变量的导数。

令y=0， $f(x)=f(x)f(0)$ ，如果 $f(x)$ 为0，则函数“无聊”。所以假设需要一个不无聊的函数，那么就是 $f(0)=1$ 。

对 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 求关于 y 的导数？初期困扰住人的问题在于当没有表达式的时候如何运用链式法则求导？人总在思考，链式法则应该运用在具体的表达式里，那么没有表达式如何运用？

这样的困扰是由于不理解链式法则的形式造成的。只要符合链式法则的形式，那么它就是运用了“链式法则”的。人在研究这里的时候花费了2天。

其次是对于 y 的导数，而函数方程却有2个变量。方法是固定住一个值，求出导数再解放那个固定的值——固定某个值也是一个任意的设定，却使得多变量的函数方程变成一个单变量的函数方程，解出来后又可以把固定住的变回变量——

固定x为常数 x_0 ，对 y 求导：

$$\frac{df(x_0+y)}{dx_0+y}\frac{dx_0+y}{dy}=f(x_0)f'(y)$$

$$f'(x_0+y)*1=f(x_0)f'(y)$$

求出单变量函数方程对y的导数后，就可以还原回多变量函数方程。所以：

$$f'(x+y)=f(x)f'(y)$$

再固定y恒=0，那么多变量的函数方程就变成了包含常数的单变量函数方程。所以：

$$f'(x)=f(x)f'(0)$$

为了美观，人要求 $f'(0)=1$，函数 f 的导数和原函数相等。

所以，完全是为了美观——

如果函数 f 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$ ，那么符合这个函数方程的一个极其（extremely）特殊的函数（$e=f(1)$且$f'(0)=1$）可以称为：

$f(x)=e^x$ ，它的导数仍然是它本身。

e 是多少？用泰勒展开让 e 变得光明。那么——

$$f(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

根据这个美观的函数，可以知道：

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(0)}{n!}x^n$ 又因为 $f(0)=1$ ：

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

当 $x = 1$ 时正好就是 e ，所以 e ：

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 计算n从1到10可以得到 e 的近似值是：

$e = 2.7180555555555$

第三个函数方程开始会发现这一组函数息息相关。假设函数 g 满足 $g(xy) = g(x) + g(y)$ ，并且已有第二个函数 f 满足 $f(x+y) = f(x)f(y)$ ，那么构造函数——

$h(x+y) = g(f(x+y))$ ，根据函数方程可以得到：

$h(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = h(x) + h(y)$

所以函数 h 满足第一个函数方程的形式，所以： $h(x) \equiv ax$

所以： $h(x) = g(f(x)) \equiv ax$

令x=1， $g(f(1)) = a$ ， $h(x) = g(f(1))x$

根据函数方程和函数方程的解可以得到：

$g(f(x)) = g(f(1))x$

$g(c^x) = g(c)x$ ，为了美观，对于任意的函数 f和g ，都设置 $g(c) = 1$ ，那么：

$g(f(x)) = x$ 可以发现函数 g 是函数 f 的逆向。函数 g 是函数 f 的反函数。

由于它们的互逆性质，可以把函数 g 和函数 f 写成一组函数——

$$y = c^x$$

$$x = \log_c y$$

那个极其特殊的 e 函数可以写作——

$$y = e^x$$

$$x = lny$$

现在研究这一组互为反函数的函数性质。

$y = c^x$

$x = \log_c y$

所以：

$y = c^{\log_c y}$

$x = \log_c c^x$

已知指数的性质有 $c^m c^n = c^{m+n}$和$(c^m)^k = c^{mk}$

所以：

假设 $a=c^m$，$b=c^n$，那么 $m=\log_c a$，$n=\log_c b$

对 $c^m c^n=c^{m+n}$ 同时取以c为底的对数可以得到：

$\log_c c^m c^n=\log_c c^{m+n}$

$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$

假设 $a=c^m$，$m=log_c a$，所以$a^k=c^{mk}$

对 $a^k=c^{mk}$ 同时取以c为底的对数可以得到：

$\log_c a^k=\log_c c^{mk}$

$\log_c a^k=klog_c a$

$\frac{a}{b}=ab^{-1}$

$log_c ab^{-1}=log_c a+log_c b^{-1}=log_c a+(-1)log_c b=log_c a-log_c b$

所以：

$log_c\frac{a}{b}=log_c a-log_c b$

假设 $a=c^m$，$m=log_c a$

对 $a=c^m$ 同时取以y为底的对数可以得到：

$log_y a=log_y c^m$

$log_y a=mlog_y c$，解出 $m=\frac{log_y a}{log_y c}$

所以：

$log_c a=\frac{log_y a}{log_y c}$

由于 lnx 的特殊性，任意对数都能够通过换底公式换成以 e 为底的对数。

导数？特别是对于这个特殊的 lnx 的导数？

根据对数的性质可以得到：

$lne^x=x$

对函数两边求关于x的导数：

$\frac{\mathrm{d}lne^x}{\mathrm{d}e^x}\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}=1$

$(lne^x)'e^x=1$

将 e^x 替换为 x，可以得到：

$ln'x=\frac{1}{x}$

人仍然对 $f(x)=lnx$ 的图像不清楚。它看起来比sin和cos好一些，不过仍然难以计算。

所以人决定用泰勒展开试一试——

$f(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ，但是在0处是无限的。所以人决定重新选择，特别是在附近的固定的，可计算的值。

人意识到： $ln1=0$

所以人设定： $g(x)=ln(x+1)$ 。这样看来，人能够对 $g(x)$ 进行泰勒展开了。因为 $g(0)$ 可计算。

$f(x)=lnx$

$f^{(1)}(x)=x^{-1}$

$f^{(2)}(x)=(-1)x^{-2}$

$f^{(3)}(x)=(-1)(-2)x^{-3}$

$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)x^{-4}$

$f^{(5)}(x)=(-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}$

所以：

$g^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$

当 $n=0$ 时， $g(0)=ln1=0$

当 $n>0$ 时：

$g^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

$$g(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$g(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n(n-1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

$$ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

第四个函数满足 $f(xy)=f(x)f(y)$

函数方程两边对 y 求导：

$$\frac{df(xy)}{dxy}\frac{dxy}{dy}=f(x)f'(y)$$

$f'(xy)x=f(x)f'(y)$

如果 $x=1$ ， $f'(y)=f(1)f'(y)$ ， $f(1)=1$

如果 $y=1$，$f'(x)x=f(x)f'(1)$，$f'(x)=\frac{f(x)f'(1)}{x}$

有以下已知的函数方程——

函数 $lnf(x)$ 对 $f(x)$ 求导：$\frac{dlnf(x)}{dx}=\frac{1}{f(x)}$

函数 $lnf(x)$ 对 x 求导：$\frac{dlnf(x)}{df(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{f(x)}f'(x)$

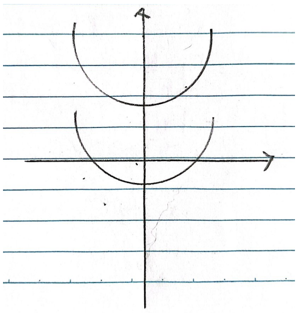
将 $f'(x)=\frac{f(x)f'(1)}{x}$ 带入已知的 $lnf(x)$ 函数方程可以得到：

$$\frac{dlnf(x)}{df(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{f(x)}\frac{f(x)f'(1)}{x}=\frac{1}{x}f'(1)$$

$$\frac{1}{x}f'(1)=\frac{dlnx}{dx}f'(1)=\frac{dlnx^{f'(1)}}{dx}$$

所以可以得到函数方程——

$\frac{dlnf(x)}{dx}=\frac{dlnx^{f'(1)}}{dx}$，如果两个函数的导数处处相等，那么意味着这两个函数图像要么重合，要么这两个函数图像是上下平移的关系。就像：



所以：$lnf(x)=lnx^{f'(1)}+A$，由于 A 是一个任意常数，为了可以根据对数的性质计算，可以设定 A 为对数的形式，令 $A\equiv lnA$，所以：

$$lnf(x)=lnx^{f'(1)}+lnA$$

$$lnf(x)=lnAx^{f'(1)}$$

对等式两边同时取指数：$e^{lnf(x)}=e^{lnAx^{f'(1)}}$

$$f(x)=Ax^{f'(1)}$$

又因为 $f(1)=A=1$，所以 $A=1$。

所以 $f(x)=x^{f'(1)}$，设 $f'(1)=c$：

$$f(x)=x^c$$

怀旧...？幂函数回归。

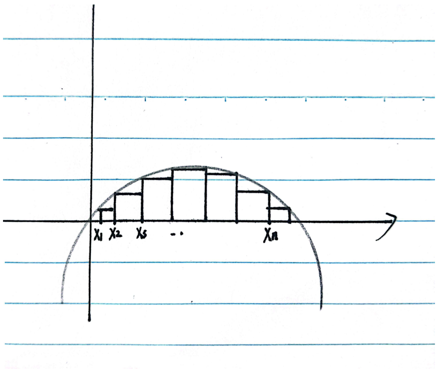
至此，四个函数方程粗略的研究完毕——具有稳定性的解，解的性质，导数，以及可计算性。

第三幕

曲线（包括直线）下面积

现在介绍曲线下面积和曲线长度的计算方法，以及积分符号的演变。

假设有一曲线，求它从a到b的曲线与x轴形成的面积。



在离散的近似中，可以认为这个不规则平面的面积是由很多个小矩形以及很多个小矩形上面的三角形构成的。矩形面积可以表示为：

$$A_{曲线下面积}=f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+...+f(x_n)\Delta x_n+\frac{1}{2}\left[f(x_2)-f(x_1)\right]\Delta x_1+\frac{1}{2}\left[f(x_3)-f(x_2)\right]\Delta x_2+...+\frac{1}{2}\left[f(x_{n+1})-f(x_n)\right]\Delta x_n$$

当运算目标是计算一个总量（如面积、长度、体积）时，如果有多个无穷小量，那么高阶无穷小相对于低阶无穷小来说对最终结果的贡献趋近于零。所以，如果从将曲线下面积切割成无穷多和矩形，三角形的面积由两个无穷小量相乘，而矩形面积由一个无穷小量和常数相乘，所以三角形面积对于总体面积的贡献趋近于0。人再次回到有限的思路中，所以矩形面积可以写成——

$$A_{曲线下面积}=f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+...+f(x_n)\Delta x_n$$

用求和公式写做：

$$A_{曲线下面积}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

现在从有限的分割，离散的矩形变成无限的分割以及连续的矩形呢？由于分割是无限的，对矩形的计数(i)就也变成了无穷个，所以这时计数就变得没有意义，而计数的“区间”才更加关键的，所以这个面积可以写成：

$A_{曲线下面积}=\int_a^b f(x)dx$，意思曲线下 $f(x)$ 面积是从a到b，将所有的矩形相加，矩形的高是 $f(x)$，宽是 dx。

现在，$\int_a^b f(x)dx=?$ 人假设 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，那么可得到：

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx}dx = \int_a^b dF(x)$，它的意思是 x 从 a 到 b ，将 $F(x)$ 的微小变化相加，也就是说：

假设 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，那么：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

那么：

$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$，这个也可以理解成先对一个函数求导数，然后再对导数求积分，你会得到原函数曲线下面积。

比如 $\int_0^\pi sin(x)dx = -cos(\pi) + cos(0) = 1$

如果先对一个函数求积分，然后再对结果求关于x的导数会发生什么？

也就是，求 $\frac{d\int_a^b m(x)dx}{dx}$ 的值？

这里分子的 x 并非传统意义的变量（传统意义的变量意味着随着它的变化函数会发生变化），这里的 x 而它唯一的作用就是让积分在区间a,b上遍历所有的值。而由于a,b固定，所以，这个积分结果是依赖a,b的一个定值而不依赖 x 。

所以，$\frac{d\int_a^b m(x)dx}{dx} = 0$，为避免混淆可以写作：$\frac{d\int_a^b m(u)du}{dx} = 0$，其中 u 是哑变量。

为了使得固定区间的积分变成一个动态的函数，所以假设 $b = x$， $m(x)$ 的反导数是 $M(x)$，可以得到：

$\frac{d\int_a^x m(u)du}{dx} = \frac{d(M(x) - M(a))}{dx} = \frac{dM(x)}{dx} - \frac{dM(a)}{dx} = m(x)$

$\frac{d\int_a^x m(u)du}{dx}$ 它的几何意义是当u从a扫到x时，曲线下矩形面积的微小变化/矩形宽，也就是矩形的长，长的值是 $m(x)$。

所以微积分的两个基本定理是：

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d\int_a^x m(u)du}{dx} = m(x)$$

下面介绍积分对于加法法则，乘积法则和链式法则的推导。

显然可以知道：

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

已知 $[f(x)g(x)]' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$，对两边同时取积分可得到：

$$\int_a^b [f(x)g(x)]'\,dx = \int_a^b [f(x)'g(x) + f(x)g(x)']\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)g(x)]'\,dx = \int_a^b f(x)'g(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)'dx$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)'g(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)'dx$$

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)'g(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)'dx$$

求相乘函数的积分时，如何构造合适的积分形式很重要，比如将 xe^x 构造成为 $f(x)g'(x)$ 时，相比于将 xe^x 构造成为 $f'(x)g(x)$ 要简单的多。这种思想也可以解释为，在逻辑上等价不等于在心理上等价，用更加简单的例子解释就是：计算 $(10+9)*14$ 相对于计算 $19*14$ 的关系。

现在人想求：$\int_0^1 xe^x dx$，如果按照以上方式构造就可以得到：

$$[xe^x]_0^1 = \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 xe^x dx$$

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$$

求难以发觉其反导数的函数的积分：

现在人想求：$\int_0^1 xe^{x^2} dx$，但是，人难以发现函数 xe^{x^2} 的反导数，所以，求难以发现其反导数的函数积分的方式就是构造出一个"同构"的函数，并求出另一个函数的积分，最后再将变量替换。这个也叫做换元积分法。

令 $u = x^2$，则 $x = u^{\frac{1}{2}}$，$\frac{du}{dx} = 2x$，所以：

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \int_0^1 xe^u du\frac{dx}{du} = \int_0^1 xe^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} e^u du$$

利用基本的积分公式可以得到：$\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} e^u du = \frac{1}{2}(e-1)$

曲线（包括直线）的长度

曲线的长度可以理解为无穷多个 l 的和，也就是：$\text{曲线长度} = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (df(x))^2}$

现在开始求解：

$$\int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (df(x))^2} = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (df(x))^2} \frac{1}{dx} dx$$

又知道：$\frac{1}{dx} = \left[\frac{1}{(dx)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$，所以：

$$\sqrt{(dx)^2 + (df(x))^2} = [(dx)^2 + (df(x))^2]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(dx)^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\left\{[(dx)^2 + (df(x))^2]\frac{1}{(dx)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} dx = (1 + f'(x)^2)^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{(1 + f'(x)^2)} dx$$

所以如果有函数 $f(x)$，那么 $\int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{(1 + f'(x)^2)} dx$，它的几何意义是：如果有函数 $f(x)$，那么计算它的从 a 到 b 的长度相当于计算函数 $\sqrt{(1 + f'(x)^2)}$ 从 a 到 b 的曲线面积。

多变量微积分（无穷初步）

人已经了解有这样的函数：

$x \to m(x)$，它的意思也可以是一进一出，现在扩展这个概念，多进一出和一进多出是什么样的？以3进1出和1进3出举例，并由此扩展到无穷的概念——

$x, y, z \to m(x, y, z)$

$x \to m(f1(x), f2(x), f3(x))$

对以上进行求导或者积分会发生什么？

从单一的变量扩展到多变量，就从一个数的概念扩展到了很多数的概念，所以，每一个数有什么区别？可以考虑它的几何意义。比如通过坐标将数字表达起来，让数字变成有方向的量——向量。

如果可以使得多个数字变成向量，参考坐标的性质，向量可以有这样的性质：

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$c(a, b) = (ca, cb)$

对 $x \to m(f1(x), f2(x), f3(x))$ 进行求导可以得到：

$$\frac{dm(f1(x), f2(x), f3(x))}{dx} =$$

$$\frac{(f1(x + dx), f2(x + dx), f3(x + dx)) - (f1(x), f2(x), f3(x))}{dx} =$$

$$\frac{f1(x + dx) - f1(x), f2(x + dx) - f2(x), f3(x + dx) - f3(x)}{dx} = f1'(x), f2'(x), f3'(x)$$

可以得到对于一进多出的函数求导，就是对各个的分量求导。

积分同理，在这里不展示。

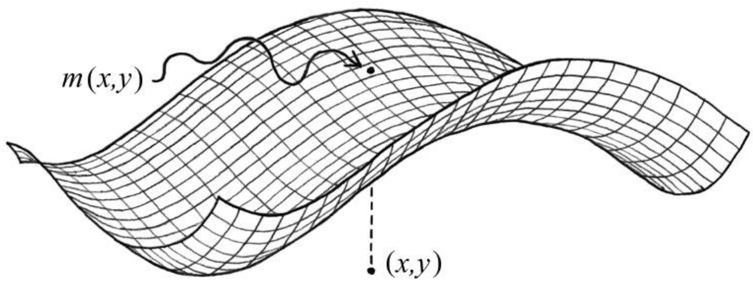
对 $x, y, z \to m(x, y, z)$ 进行求导或者积分呢？人可以这样定义，对它进行求导，比如对x求导，就是使x为变量，并固定y和z为一个常量。

m对于x的导数就是：$\dfrac{d_x m}{dx} = \dfrac{m(x+dx, y, z) - m(x, y, z)}{dx}$

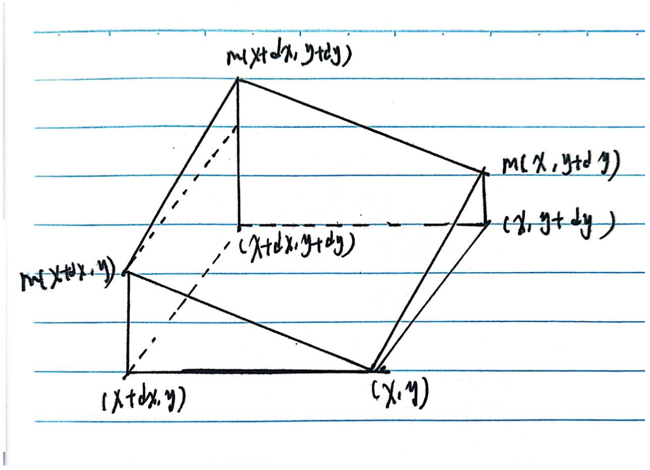
m对于y的导数就是：

$$\frac{d_y m}{dy} = \frac{m(x, y+dy, z) - m(x, y, z)}{dy}$$

这样也叫做m对于某一变量的偏导数。



假设 (x, y) 是一个平面，那么 $m(x, y)$ 是一个曲面，无穷放大其中的一个点，这个点是一个平面。



人想知道当所有变量都发生微小变动的时候，函数 $m(x)$ 的“全微分”会发生什么变化？通过极其不严谨的论证可以意识到：

$$dm = d_x m + d_y m$$

所以，$dm = d_x m + d_y m = d_x m \dfrac{dx}{dx} + d_y m \dfrac{dy}{dy} = \dfrac{\partial m}{\partial x} dx + \dfrac{\partial m}{\partial y} dy$

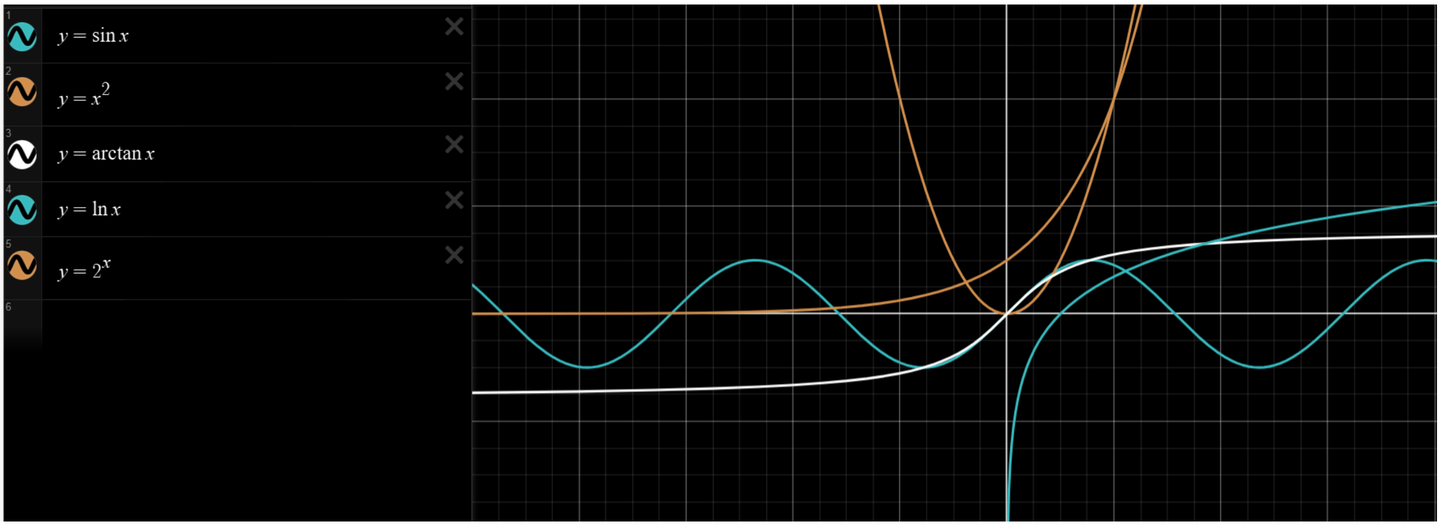
这里用符号 ∂ 取代 $d_{x/y} m$ 表达对某一个变量的求偏导数。

文档结尾

看见一座山，就想知道山的后面是什么。然后发现这座山后面是另一座山。站在山上，感到数学不再是极其神秘的学科，而是可以理解的学科。熟悉的函数是 $f(x)$，虽然 x 的值是无穷的，但如果进入一个 x，只会抛出一个 $f(x)$，但是如果是—— $f(g(x))$ 呢？拿函数作为初始变量，根本就无法“只进入一个 x”！一进入就是无穷多个变量。

积分就是一个“泛函”：放入一个函数，抛出这个函数在a到b区间的面积。

$g(f'(x)) = \int_a^b f'(x)dx$，而 $f'(x)$ 可以是任意的，$f'(x) = sinx$，$f'(x) = lnx$ ...



人在结尾窥见了一眼无穷。至此数学入门结束，人将通往一个无穷的世界。