

Содержание

1	Постановка задачи	1
1.1	Уравнения движения частиц	2
1.2	Параметры моделирования	3
1.2.1	Физические величины	3
1.2.2	Решеточные величины	3
2	Реализация	4
3	Результаты	5
4	Открытые вопросы	7
4.1	Границы для частиц	7
4.2	Генерирование частиц	7
4.3	Параллельная реализация	7
4.4	Физические параметры	7
4.5	Параметры k, δ	8
4.6	Новая версия программы	8
4.6.1	Одна частица	8
4.6.2	Много частиц	10

1 Постановка задачи

Рассматривается двумерный цилиндр Рис.1. Входящий поток определяется профилем Пуазейля, граничные условия справа - Неймана, сверху и снизу стенки. Начальное состояние: профиль также Пуазейля для средней скорости $minUave$.

С течение времени средняя скорость профиля Inflow меняется по следующему закону, где T — период колебаний:

$$(maxUave - minUave) \exp[-(t - \mu)^2/2/\sigma^2] + minUave,$$

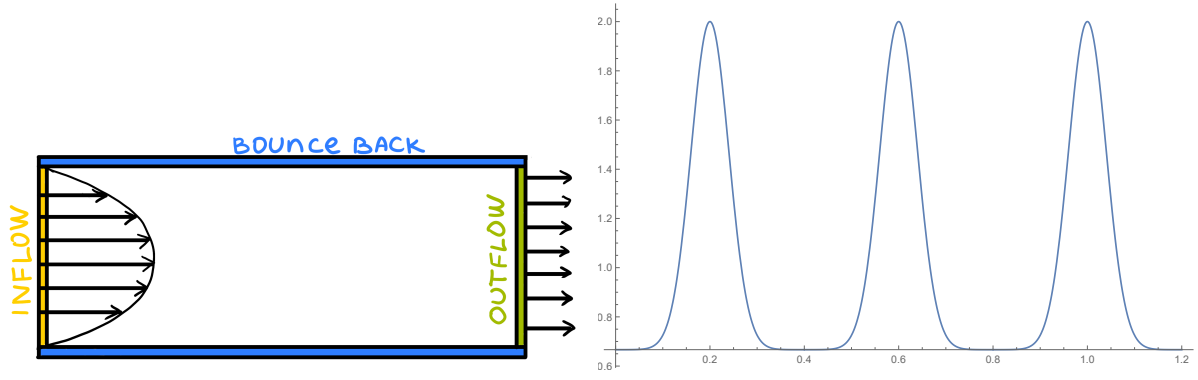


Рис. 1: Слева: схема расчетной области, справа: Изменение средней скорости входящего потока

где $\mu = \lfloor t/T \rfloor \cdot T + T/2$, $\sigma = T/10$

В цилиндре находятся круглые частицы, у которых плотность больше, чем у жидкости. Частицы занимают 40% объема. Все частицы имеют радиус R , кроме одной, у которой - $3R$.

1.1 Уравнения движения частиц

Частицы считаются твердыми телами - дисками. Перемещение складывается из параллельного переноса и вращения вокруг центра инерции.

$$M \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Omega}(t)}{dt} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times [\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Omega}(t)] = \mathbf{T}(t)$$

$M = \pi \cdot R^2 \cdot \rho$ — масса частицы. $\mathbf{U}(t)$ — скорость поступательного движения. $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{g}(t) - \mathbf{f}_{12}(t)$ сила, действующая на частицу. \mathbf{g} — сила, действующая со стороны жидкости на частицу, рассчитывается методом [2]. $\mathbf{f}_{12}(t)$ отталкивающая сила для того, чтобы частицы не сталкивались [3]. Взаимодействие рассчитывается для всех пар частиц. Пусть у частицы 1 и частицы 2 центры находятся в \bar{x}_1 и в \bar{x}_2 , тогда расстояние между частицами $h = ||\bar{x}_1 - \bar{x}_2|| - R_1 - R_2$. Тогда сила

оказываемая частицей 1 на частицу 2

$$\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21} = \begin{cases} -k \cdot (\delta - h) \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\|}, & h < \delta \\ 0, & h \geq \delta \end{cases}$$

\mathbf{I} — тензор инерции. Тензор инерции для твердого диска $I_z = \frac{1}{2}MR^2$, $I_x = I_y = \frac{1}{4}MR^2$. $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость. $\mathbf{T} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{g}$ момент сил.

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_b - \mathbf{X})$$

\mathbf{u}_b — скорость на границе частицы, \mathbf{r}_b — координаты граничной точки, \mathbf{X} центр масс частицы.

В случае двумерного движения уравнения упрощаются. Момент сил имеет ненулевой только третью координату.

$$\frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = T_z$$

1.2 Параметры моделирования

1.2.1 Физические величины

Диаметр цилиндра: $D_T = 122 \mu m$ (120 сам цилиндр + 2 на стенки).

Длина цилиндра: $L_T = 20D_T$.

Диаметр малой частицы: $D_S = 8 \mu m$

Диаметр большой частицы: $D_B = 3 \cdot D_S = 24 \mu m$

Максимальная скорость входящего потока: $V_{max} = 2 \text{ cm/s}$

Минимальная скорость входящего потока: $V_{min} = 2/3 \text{ cm/s}$

Период колебаний $T = 0.4 \text{ s}$

Кинематическая вязкость: $\nu = 3e - 6 \text{ m}^2/\text{s}$

$Re = 0.8$

1.2.2 Решеточные величины

Диаметр цилиндра: $D_T = 1$

Длина цилиндра: $L_T = 20$.

Разрешение решетки (количество отрезков в единице длины): $N = 122$

$$\delta x = 0.00819672, \delta t = 0.000491803$$

$$\text{Диаметр малой частицы: } D_S = 8\delta x$$

$$\text{Диаметр большой частицы: } D_B = 3 \cdot D_S$$

$$\text{Максимальная скорость входящего потока: } V_{max} = 0.12$$

$$\text{Минимальная скорость входящего потока: } V_{min} = 0.04$$

$$\text{Период колебаний } T = 50000$$

$$\text{Кинематическая вязкость: } \nu = 0.732$$

$$Re = 10$$

2 Реализация

Для интегрирования уравнений движения использовался метод Эйлера, который особенно прост, т.к. шаг по времени равен 1.

$$M \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)$$

$$\frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = T_z$$

Пусть частицы задается N точками координаты которых $\mathbf{X}_k, k \in \{1, N\}$ и скорости в этих точках $\mathbf{U}_k, k \in \{1, N\}$, также центр частицы \mathbf{X}_{center} и его скорость \mathbf{U}_{center} .

0. В начальный момент времени все частицы имеют поступательную скорость равную скорости центра и частица имеет нулевую угловую скорость $\omega = 0$.
1. Шаг по времени метода решеточного уравнения Больцмана
2. Для каждой частицы с номером $j \in \{1, N_{particles}\}$ рассчитываются новые координаты и скорости по следующим формулам:

$$\mathbf{X}_k(t+1) = \mathbf{X}_k(t) + \mathbf{U}_k(t), k \in \{1, N\}$$

$$\mathbf{U}_{center}(t+1) = \mathbf{U}_{center}(t) + \mathbf{g}(t)/M - + \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_i(t)/M$$

$$\omega(t+1) = \omega(t) + 2 \cdot T_z/M/R^2$$

$$\mathbf{U}_k(t) = \mathbf{U}_{center}(t) + \{-\mathbf{r}_y \cdot \omega, \mathbf{r}_x \cdot \omega\}$$

Где $\mathbf{r} = \mathbf{X}_k(t) - \mathbf{X}_{center}(t)$ радиус-вектор.

3. Вычислить $\mathbf{g}(t+1)$, $T_z(t+1)$ и взаимодействия с другими частицами $f_{ij}(t+1)$

Если частица выходит за правую границу канала, то она удаляется. Если расстояние между какими-нибудь двумя частицами становится отрицательным, то вычисления останавливаются.

TODO: описание алгоритма не сходится с [2], необходимо проверить как в palabos рассчитывается влияние частиц на жидкость.

TODO: используемые функции Palabos.

3 Результаты

На Рис.2 изображено начальное состояние для первой трети цилиндра длиной $20 \cdot D_T$. Частицы радиусов $6\Delta x$ и $18\Delta x$ расположены в первой половине цилиндра и занимают менее 10% площади. Весь цилиндр разделен на три части для наглядности. Полную картинку можно посмотреть в папке 2d_particles. Синими точками на частицах отмечена нулевая точка, чтобы можно было наблюдать за вращением частиц.

На Рис.3 показано состояние через 2000 шагов по времени. Для частиц близких к стенкам видно, что нулевая точка повернулась. Для частиц близких к нижней стенки вращение происходит по часовой скорости, для близких к верхней - против, что согласуется с

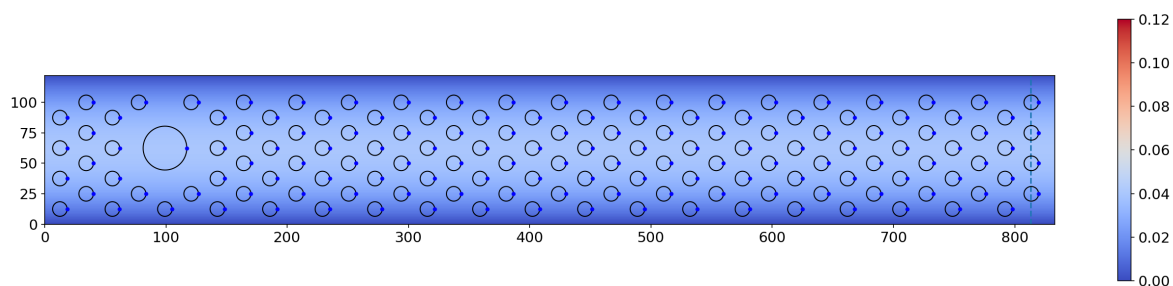


Рис. 2: $time = 0\Delta\tau$, первая треть цилиндра, 218 частиц

предположениями, т.к. скорость в середине цилиндра больше, чем у краев и из-за этого частицы вращаются. До этого был проведен тест для одной частицы, чтобы проверить, будет ли она вращаться.

Большая частица движется медленнее потока и перед ней (справа) собираются маленькие частицы.

К сожалению, затем большая частица уплывает из канала, т.к. пока никак не реализованы граничные условия для частиц.

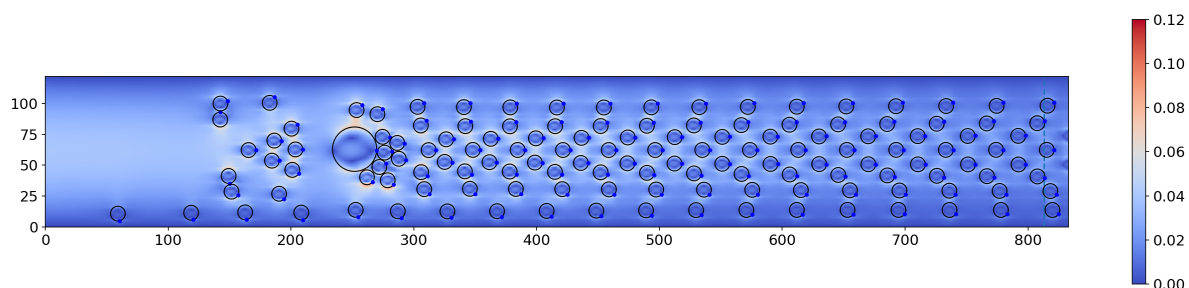


Рис. 3: $time = 2000\Delta\tau$, первая треть цилиндра, 218 частиц

Анимация, в которой отрисована каждая 100-ая итерация, `u_re_10_all_few_rotation.gif`. Вычисления остановились на итерации 26800, т.к. пересеклись какие-то две частицы.

4 Открытые вопросы

4.1 Границы для частиц

Частицы выплывают за пределы канала, проходят через верхнюю или нижнюю стенки. Отталкивающая сила для верхней стенки $\{0, -k \cdot (\delta - h)\}$, где $h = NY - 2 - cy + R$ расстояние до верхней стенки и для нижней $\{0, k \cdot (\delta - h)\}$, где $h = cy - R - 1$ расстояние до нижней стенки. Такая реализация не работает для $k = 1, 2$, для $\delta = 1, 2, R$. Частицы продолжают приближаться к стенкам, и вроде даже был случай, когда большая частица уже вышла частично из канала, но сила к ней не применялась. Скорее всего какая-то ошибка в реализации. Также необходимо смотреть в литературе, как реализовать стенки для IBM. В статье [3] периодические граничные условия для частиц.

4.2 Генерирование частиц

Необходимо генерировать частицы и добавлять их к началу цилиндра по мере уплывания остальных так, чтобы отношение объема частиц к объему цилиндра сохранялся. Пока неочевидно, какие должны быть координаты у частиц и с какой скоростью их добавлять. Если начальное состояние просто плотная упаковка, то потом частицы из середины канала уплывают быстрее и получается что-то похожее на параболы.

4.3 Параллельная реализация

Операции над частицами можно параллелизовать.

4.4 Физические параметры

Вязкость не соответствует переведенной из физических параметров. Также неясно, как измерить вязкость жидкости с частицами

внутри. И как задать вязкость внутри частиц, возможно, это только многокомпонентными жидкостями делается. Тогда IBM не подходит и нужно учиться предотвращать слияние капель в модели Шана-Чена.

4.5 Параметры k, δ

Вроде $k = 1, \delta = 1$ для отталкивающих сил работали хорошо, но все же какие-то две частицы пересеклись. А какие параметры использовать для стенок? Или граничные условия надо не через нее делать.

4.6 Новая версия программы

Исправления: 1) сила g должна применяться все же с плюсом, а в статье минус, т.к. и в уравнениях движения она тоже с минусом, 2) переписала изменение угловой скорости, как векторное произведение радиус-вектора на вектор угловой скорости.

4.6.1 Одна частица

Если запускать моделирование для одной частицы, то не удастся промоделировать движение частицы до ее выхода из канала. Без осцилляций входящего потока частица уплывает дальше, но ненамного. Момент силы T , рассчитывается как векторное произведение силы (график, которой приведен на 6) на радиус-вектора точек. На Рис.4 показано его изменение во времени, видно, что T постоянно меняет знак. Из-за этого меняется угловая скорость, как показано на Рис.5. Я ожидала, что из-за того, что частица находится в нижней половине канала, то она после какого-то времени установления станет вращаться с постоянной отрицательной скоростью. Но из графика видно, что угловая скорость также меняет свой знак. Затем угловая скорость начинает слишком быстро расти и вычисления останавливаются. Я пробовала менять число Рейнольдса и одновременно скорость входящего потока так, чтобы вязкость оставалась прежней.

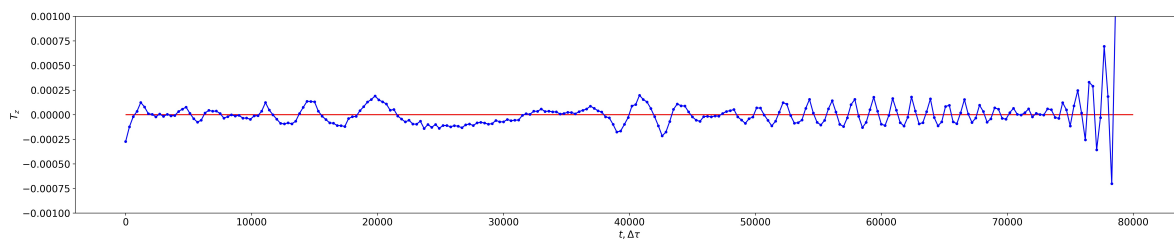


Рис. 4: Момент силы, действующий на частицу

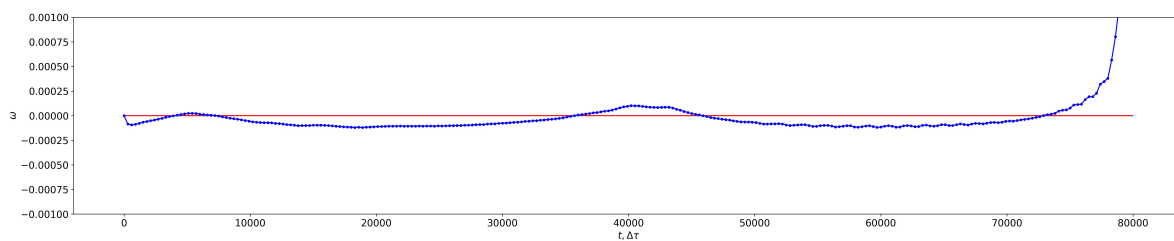


Рис. 5: Угловая скорость частицы

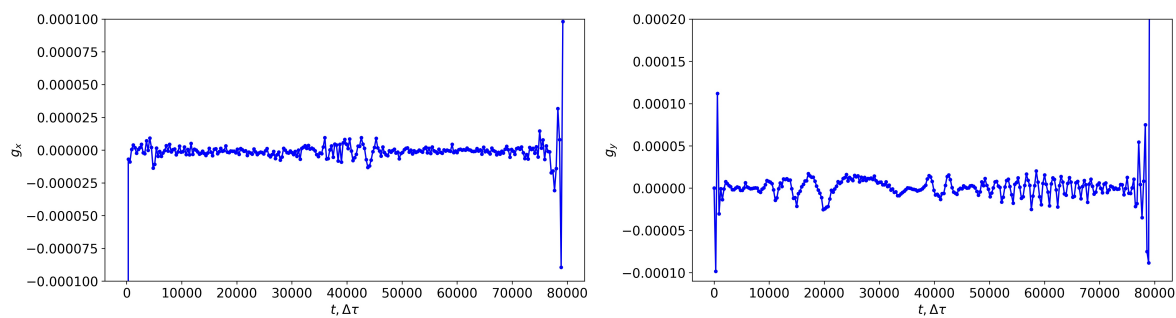


Рис. 6: Сила, действующая на частицу со стороны жидкости

4.6.2 Много частиц

Re	10	5	2.5	0.5
Velocity in lattice units	0.06	0.03	0.015	0.003
Viscosity in lattice units ν	0.738	0.738	0.738	0.738
Δx	0.00813008	0.00813008	0.00813008	0.00813008
Δt	0.000487805	0.000243902	0.000121951	2.43902e-05
T	$5 \cdot 10^4$	10^5		
Ошибка	Частица пересекла верхнюю стенку	Частицы пересеклись		Частица пересекла нижнюю стенку
Количество отработавших итераций	4435	31436		408604
Максимальное значение x частицы				

Литература

- [1] Aidun C. K., Clausen J. R. Lattice-Boltzmann method for complex flows //Annual review of fluid mechanics. – 2010. – Т. 42. – С. 439-472.
- [2] Inamuro T. Lattice Boltzmann methods for moving boundary flows //Fluid Dynamics Research. – 2012. – Т. 44. – №. 2. – С. 024001.
- [3] Thorimbert Y. et al. Lattice Boltzmann simulation of dense rigid spherical particle suspensions using immersed boundary method //Computers & Fluids. – 2018. – Т. 166. – С. 286-294.
- [4] Suzuki K., Inamuro T. Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method //Computers & Fluids. – 2011. – Т. 49. – №. 1. – С. 173-187.
- [5] Lai M. C., Peskin C. S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity //Journal of computational Physics. – 2000. – Т. 160. – №. 2. – С. 705-719.

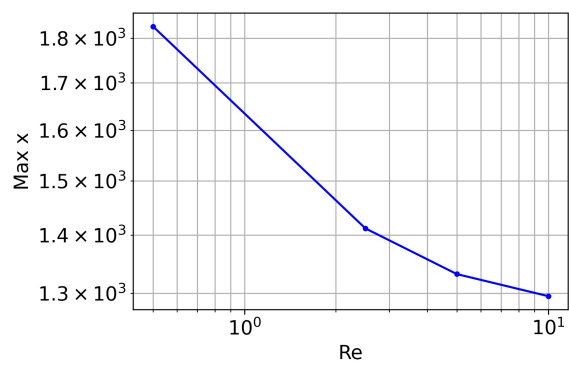
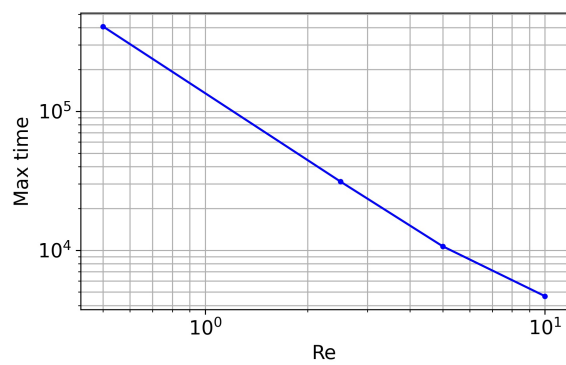


Рис. 7: