来源：计量经济学杂志，Vol. 25, No. 1 (Jan., 1957), pp. 53-76

出版：计量经济学会

链接：http://www.jstor.org/stable/1907742

Source: *Econometrica*, Vol. 25, No. 1 (Jan., 1957), pp. 53-76

Published by: The Econometric Society

Stable URL: http://www.jstor.org/stable/1907742

Accessed: 22-01-2018 06:21 UTC

指派问题和经济活动选址分析

特亚林·科普曼斯　　马丁·贝克曼

本文讨论了不可分割资源分配中的两个问题。这两个问题均可解释为工厂选址问题。第一个问题忽略了工厂间的运输费用，将其视为线性规划问题，且该问题与维持最优分配的租金系统相关联。第二个问题中对工厂间运输费用的认知带来了复杂性，这要求进行更艰苦和大量未开发的计算，而且似乎也使价格体系无法作为维持最优分配的手段。

ASSIGNMENT PROBLEMS AND THE LOCATION OF ECONOMIC ACTIVITIES'

BY TJALLING C. KOOPMANS AND MARTIN BECKMANN

Two problems in the allocation of indivisible resources are discussed. Both can be interpreted as problems of assigning plants to locations. The first problem, in which cost of transportation between plants is ignored, is found to be a linear programming problem, with which is associated a system of rents that sustains an optimal assignment. The recognition of cost of interplant transportation in the second problem introduces complications which call for more laborious and largely unexplored computations and which also appear to defeat the price system as a means of sustaining an optimal assignment.

1. 不可分割资源的分配

经济分析的几个重要领域的发展取决于解决或分析不可分割资源有效分配问题的方法的发展。首先，存在不可分割资源分配对应的实际决策问题，例如决定工厂里各种机床的合适数量，或者选择河谷开发中水坝的数量和位置。此外，

更高度专业化的人或生产材料因素的不可分割性在很多情况下是生产规模回报增加的根源，无论是在工厂或公司内部，还是通过所谓的“外部经济”与企业集群相关。因此，不可分割性影响的牢固利益源于这样一个事实：如果在一个行业中，规模报酬增加与相关市场总需求保持在同一个生产水平，这就排除了完全竞争，从而可能降低了价格体系在分配资源时的有效性。最后，经济活动的选址理论没有机会解释此类有趣的事实，大小城市没有意识到生产过程中和人类生存过程中的不可分割性。

鉴于不可分割性在实践和理论上的重要性，我们对涉及不可分割资源的生产问题几乎没有成功且有条理的分析，这似乎令人吃惊。然而迄今为止，试图构建不可分割资源分配的一般理论所产生的数学困难似乎很强大。也许最好的进步机会为：将详细研究划分成一些相当有限但定义明确的问题，从原始的简单性和人为性逐渐进行到更加现实的复杂性。本文从此动机出发。

2. 线性指配问题（The Linear Assignment Problem）

分配不可分割资源的一个相对简单的问题是：已知两个均具有n个对象的集合，将来自不同集合的两个对象进行匹配。属于同一个集合的对象在种类上相似，但并不完全相同。给出每一个可能的匹配对（n^2个）的分数或值，问题即找到一种对象匹配（或彼此指派）方案，使所有匹配对得分之和尽可能的高。大量的实际决策问题均为理想化，尤其是，桑代克（Thorndike）[1950]最初运用这些术语讨论了根据每个人的心理测试的表现得分对其分配工作或工作种类的问题。

由于选址理论潜在的兴趣，我们将在此以分配工业工厂位置（assigning industrial plants to location）为例讨论该问题。对于每一个仍在规划中的工厂而言，放在每一个位置上应该有给定的期望利润，不同的位置对要进行的生产过程有不同的适用性。进出有关位置的主要投入或最终产出的运输成本也可以参与盈利比较。然而，目前我们没有考虑要分配的工厂间的中间商品的运输，或者任何其他可以使任何工厂在任何位置的盈利取决于剩余工厂和位置匹配方式的情况。那么问题即找到一种分配，使得所有选择的工厂-位置组合获得的盈利之和尽可能大。

很明显，这个问题完全可以用数学公式定义，且该问题与我们特别感兴趣的位置解释无关。此外，与实际中发现的复杂性和灵活性相比，后面的解释给出了选址问题的人为的和僵化的图片。实际上，土地划分不是天然提前给定的，而是

连续变化的。虽然没有规定欲建造的工厂的类型和大小，以及每一类工厂的数量，但是会根据需求构造、生产科技、资源的可利用性的响应决定。我们忽略所有的灵活性的方面的原因是：在此研究中，我们希望只容许离散选择，在面对离散和连续决策变量都存在的复杂情况之前，测试孤立的不可分割性的影响。这些完全离散的模型的重要特征将会在更现实的混合离散连续模型中重现。

n^2个工厂–位置对的盈利可用方形矩阵表示，典型的元素a_{ki}表示工厂k在位置i的期望盈利。$n=4$的一个可能的利益矩阵（*profitability matrix*）为：

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{array}{cc} & \text{Locations} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \text{Plants} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 25 & \mathbf{20} & 5 & 19 \\ 18 & 3 & \mathbf{0} & 12 \\ \mathbf{22} & 4 & 2 & 12 \\ 16 & 7 & -2 & \mathbf{10} \end{bmatrix} \end{array} = [a_{ki}] = A.$$

矩阵中的所有粗字代表一种最优分配，总盈利为 52 个单位。由此可知，收益最高的工厂 1–位置 1 匹配对并没有出现在最优分配里。如果将工厂 1 放在位置 1 处，将会减少最大的盈利值，此时对应的最优盈利值将降为 46。

问题所涉及到的未知分配本身可以用所谓的置换矩阵（*permutation matrix*）来表示，置换矩阵$P=[p_{ki}]$的每一行和每一列都只有一个 1，其他元素全为 0。与（2.1）对应的分配方案可由下述置换矩阵表示：

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{array}{cc} & \text{Locations} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \text{Plants} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = [\hat{p}_{ki}] = \hat{P}.$$

每一行通过单位元素所在的位置显示该位置对应的工厂。分配方案对应的盈利可以用下述的双重求和计算：

$$\text{(2.3)} \qquad \pi = \sum_{k,i=1}^{4} a_{ki}\,\hat{p}_{ki} = 22+20+0+10=52$$

矩阵$\hat{P}$中的单位元素的位置表示最优分配中包括了矩阵A中的哪些元素。互换工厂 2 和工厂 4 的位置对应的矩阵$\hat{P}$，也是该问题的一种最优分配方案。双重求和公式$\sum_{k,i} a_{ki}p_{ki}$可以表明任何其他置换P对应的总盈利。（在这里术语“置换”

和“置换矩阵”可互相替换。）

该类问题的数学公式即寻找一个与给定的矩阵A有着相同排列的置换矩阵$\hat{P} = [\hat{p}_{ki}]$，例如（省略求和限制$k, i = 1, \ldots, n$），则对于所有置换矩阵$P = [p_{ki}]$，满足：

(2.4) $$\sum_{k,i} a_{ki} p_{ki} \leq \sum_{k,i} a_{ki} \hat{p}_{ki}$$

当然，该问题中的工厂和位置是对称的：这两个名词在所有的解释中都可互换。

众所周知，如果我们通过给每一行（列）增加常数（正数或负数）来修订给定的盈利能力矩阵A，（2.4）等式两边的数值均会以同样的常数增加，因为该行（列）中只有一个元素会通过置换矩阵在求和过程中合并。因此原始问题的任何分配方案P保留着一个修订问题的分配方案。这表明一个显而易见的事实，如果问题的条件不允许我们转让任何工厂，那么只有每个工厂在不同的位置上的盈利能力的差值重要，而不是盈利的绝对值。出于某些目的，使用这种自由修正原始问题是很方便的，以便使所有组合的利益为正值，即

(2.5) $$a_{ki} > 0 \qquad \text{for } k,\ i = 1, \ldots, n$$

本文的研究即从$n!$个置换矩阵中选出一个置换矩阵，置换矩阵的数量是有限的（尽管数量可能会很多），运用粗暴的强制方法列举所有的置换矩阵，评估每一个置换矩阵的盈利值，然后选择盈利值最多的置换矩阵，原则上该方法是可以得到最优解的。这种考虑方法导致桑代克（Thorndike）[1950]这一派数学家宣称该问题是微不足道的。然而，在这个问题中找到捷径以扩展“问题规模”n仍然存在相当大的数学挑战，我们希望在有限的支出下，通过可使用的计算设备进行计算以解决实际问题。如果位置决策是由n个企业家为了响应价格并根据他们自己掌握的对可选择的位置的生产过程的盈利能力知识独立做出来的，价格体系是否可以维持最优分配对经济学家来说也是一个挑战。

在这两个方面，冯·诺依曼[1953]果断地解决了这个问题，他发现由伯克霍夫[1946]引出的数学定理是简化线性指配问题的一个重要线索。冯·诺依曼运用这个线索构建了一个零和二人游戏，等价于线性指配问题，这一问题我们将在下面的第五节中简要介绍。然而，我们将在下一节中更加仔细地研究从同一线索得到的等价线性规划问题。

3. 一个等价的线性规划问题

在我们的模型中，忽略了工厂的不可分割性，允许小数工厂（*fractional plants*）分配到位置上（即一个工厂可以不作为一个整体进行分配，而是可以划分成多个对象进行分配；从数学角度而言，即将离散变量连续化），尽管从现实的角度来看，这并没有什么意义。位置i处的x_{ki}个工厂的收益为$a_{ki}x_{ki}$，即在位置i处会有整个工厂k的收益的x_{ki}倍。前期的假设为位于不同位置处的工厂的盈利能力不会互相影响，现将其扩展为：无论小数工厂位于同一个位置还是不同的位置，小数工厂之间都不会互相影响。因此，这个虚构问题的极大值可用下述表达式计算：

(3.1) $$\sum_{k,i} a_{ki} x_{ki}$$

然而，位置量x_{ki}不再只等于 0 或 1，该变量仅受到一些“软”约束：

(3.2) $$\begin{cases} (3.2.1) \quad \sum_{i} x_{ki} = 1 & k = 1, \ldots, n \\ (3.2.2) \quad \sum_{k} x_{ki} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ (3.3.3) \quad x_{ki} \geq 0 & k, i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

（3.2.1）表示每种工厂中只有一个工厂可以被分配，（3.2.2）表示每种位置中只有一个位置是可利用的，当所有的工厂分配到该位置的分数之和等于 1 时，则一个位置被完全占据。（3.2.3）避免工厂分配值为负值。

在有n^2个坐标x_{ki}，$k, i = 1, \ldots, n$的欧几里德空间内考虑点集合R，并满足（3.2）的所有约束，它是n个工厂分配至n个位置的所有可能的分配方案的几何影像，其结果可为整数或分数，通过有n^2个半空间的$2n-1$个超平面（每一个均为n^2-1维）相交行成。由于得到的集合是有边界的（每一个x_{ki}必须在 0 和 1 之间，0 作为下界，1 作为上界），因此集合R是一个凸多面体。伯克霍夫定理识别了所有的顶点，给出了精确的$n!$个置换矩阵$[p_{ki}]$。当$n=2$时，集合R是有两个端点的分割线段，其两个端点为：$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$。

当$n=3$时，它是有六个顶点的四维多面体，多面体的顶点分别为：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}。$$

显而易见，不难证明，定义于一个凸多面体的线性方程将会在顶点处找到做大值。如果最大值在任何顶点处都找不到，那么在多面体的其它任何点也不会找

到。如果最大值出现在多个顶点上，那么最大值则会存在于某个多面体面上的所有点，也就是说，一个多面体包含于原多面体的边界，它的顶点是原多面体中函数达到最大值的所有顶点。两种情况如图 1 所示。

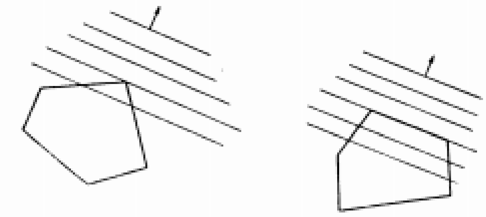

FIGURE 1.—Maximum of a Linear Function on a Polyhedron.

图 1 线性方程在多面体上的最大值

这些简单的几何事实阐明了线性指配问题和线性规划问题之间的联系，在此我们运用线性规划问题代替线性指配问题。如果线性指配问题只有一个结果（一个最优的分配），该结果也会是线性规划的唯一结果。如果线性指配问题有多个最优解，则线性规划问题的最优解为线性指配问题的最优值对应的点作为顶点构成的面上的所有点。因此，通过允许小数分配，我们并没有丢失任何整数分配（*integral assignment*）中的解。

虽然如此，读者将希望知道通过采取分数分配的方法扩大问题解范围的优势。有两个优势：第一个是由冯·诺依曼提出，得到计算最优解的一个重要的简化，扩大了计算机设备可处理问题的数量级。

简而言之，粗鲁的强制方法需要对$n!$个置换矩阵进行评估。当$n = 10$时，$n!$大约等于 360 万。另一方面，线形规划问题（3.1），（3.2）中n^2个未知量受$2n-1$个约束条件管控。此外，Votaw（沃陶）和 Orden（奥登）[1952]发现线形规划问题是一项格外简单的交通问题的代表[Koopmans（科普曼斯）和 Reiter（赖特尔），1951]，该问题本身就是一个具有特殊特征的类别，可用简单算法求解。

虚构的分数分配得到的第二个优势是下一节讲述的主题。

4. 与线性指配问题的解相关的价格体系

线性规划问题的每一种解决方案（更普遍的是线性活动分析问题的每一个有效的点）都可以与商品的价格体系联系起来，该价格体系具有维持分散化的最大化利益的决策制作的最佳点（有效点）的属性。下述的数学事实可以用数学不等式 Minkowski-Farkas 引理[Gale，Kuhn 和 Tucker，1951]来表达，反过来也可以从

凸集合的分离定理[例如冯·诺依曼和 Morgenstern，1947，16.3 节]得到。至于交通运输模型（因此也是线性指配问题），[Koopmans 和 Reiter，1951]给出了价格体系所具有的属性在构造上的简单证明。我们仅仅陈述应用于线性指配问题的定理，从附录 B 中的 Minkowski-Farkas 引理得到。

给定整数最优分配，将工厂和位置重新编号，编号方式为：在最优分配中，每一个工厂与有同样编号的位置匹配。然后，根据我们的定理，则存在租金收入体系：工厂租金：q_k，$k = 1, \dots, n$,；位置租金：r_i，$i = 1, \dots, n$, 在所有的位置都满足：

$$(4.1)\qquad \begin{cases} (4.1.1) & a_{kk} = q_k + r_k & k = 1, \dots, n \\ (4.1.2) & a_{ki} \le q_k + r_i & k,\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

相反地，如果存在这样的租金系统，那么将工厂匹配到与其具有相同编号的位置上即是最优的分配方案。

第一个条件（4.1.1）表明最优分配方案中每一个工厂-位置对应的利益可以分成两部分，一部分租金估算到工厂上，另一部分租金估算到位置上。第二个条件（4.1.2）表明，如果通过从该位置获得的收益减去估算到该位置的租金计算得到工厂的盈利，则估算到工厂的租金最高等于该工厂从任何位置中赚到的最高盈利。对称地，估算到位置上的租金等于通过吸引工厂放置到该位置上获得的最高收入来保证，该位置获得的收益减去估算到工厂的租金即为位置租金。假设租金已知，有着前述属性的租金的影响为：在没有任何位置或者承租工厂者可以被选择的势态下，工厂持有者或房东都会不满意，除非他们已处在最优分配下。从这个意义上讲，亦可以说成通过响应租金系统的利益最大化的市场机制运营来维持分配结果。

价格条件（4.1）许可维持最优分配的市场机制在工厂和位置之间完全是对称的这一解释。然而，市场单方面的租金响应对于价格系统运营是足够的。假设工厂不能租赁，但其所属权为决定它们的位置的企业家。然后，只有位置租金需要报价。消除q_k，仅以位置租金的形式，等价于（4.1）的条件：

$$(4.2)\qquad a_{ki} - a_{kk} \le r_i - r_k \qquad k,\ i = 1, \dots, n$$

给定最优分配，则存在一个满足（4.2）的位置租金系统，即移动任何工厂而引起的盈利能力增加都不会超过租金的增加，因此这些租金通过自身维持最优分

配。

相反地，如果找到了满足（4.2）的位置租金r_k，然后通过工厂租金$q_k = a_{kk} - r_k$补偿的这些相同租金将会满足（4.1）。它遵循位置租金r_k维持的分配方案是最优分配方案，工厂租金则不需要再进行对比。

市场机制描述的一个重要的特征是它的信息需求方式是分散式的。每一个工厂拥有者仅需要知道位置的租金和他自己的工厂在每个位置的盈利能力。相对于任何其他人来说，他更容易得到后者信息（矩阵$[a_{ki}]$的行的值是他自己的工厂在每个位置的盈利能力）。因此，位置租金可看成是整个盈利矩阵a_{ki}中的信息凝结出的较少数量但足够用的数据，再结合他自己的矩阵行，使每一个工厂拥有者在最优的分配中有自己的地方。在此我们看到了价格体系造成的信息分散，许多经济学家都强调这是通过竞争市场进行资源分配的主要优点之一。

应该补充的是，一旦竞争市场和与其相关联的租赁系统已构建，竞争市场就可以维持最优分配，并且这样的竞争市场不能维持任何非最优分配。如果没有指定相关市场的动态特征，竞争市场是否可以通过交替调整价格和位置的选择找到最优分配是无法回答的。因为这个主题超出了本文的范围，在此我们仅指出上面提到的运输问题的迭代计算方法与这里提到的市场调整过程之间存在平行关系。

由于目前问题的特殊特征，即使仅存在一种最优分配，最优分配下的工厂和位置租金的设定决不是唯一的。首先，将所有工厂租金减去任何常值λ，所有的位置租金加上任何常值λ：

$$(4.3) \qquad q_k^* = q_k - \lambda, \qquad r_i^* = r_i + \lambda, \qquad k，i = 1，\ldots，n$$

如果原值满足条件（4.1），则新的租金也满足条件（4.1）。此外，在考虑到不应允许非最优对在支付租金后还有利可图的范围内，在最优分配中，每一单独对的双方租金通常可以进行类似的转移：

$$(4.4) \qquad q_k^* = q_k - \lambda_k, \quad r_i^* = r_i + \lambda_k, \quad a_{ki} \le q_k - \lambda_k + r_i + \lambda_i, \qquad k，i = 1，\ldots，n$$

此时也没有违背条件（4.1）。因此，单独的分配考虑不能完全决定目前案例的价格体系。在不可分割资源仅具有有限数量的可选择用途的问题中，可以预期这种不确定性的范围。在现在的模型中，不确定性的增加是由于工厂和位置的数量是均衡匹配的，因此没有来自未使用的资源的竞争而导致一个或多个价格降为零。同时，所述的不确定使目前的模型能够适用于嵌入到各种更一般的模型中，这些

模型识别工厂在给定位置处可选择的用途，或者从更稀缺的资源中建造工厂本身可选择的方法等等。

以稍尖锐的理由，如果所有的盈利能力a_{ki}是非负值，则每一个最优分配均可与满足价格条件（4.1）的一个非负租金q_k，r_i系统相关联。为了得到这个结论，我们允许保留部分工厂和位置不分配。则约束条件（3.2）则可以使用更具包容性的形式：

$$
(4.5)\begin{cases}
(4.5.1) & \sum_i x_{ki} \le 1, & k=1,\ldots,n \\
(4.5.2) & \sum_k x_{ki} \le 1, & i=1,\ldots,n \\
(4.5.3) & x_{ki} \ge 0, & k,\ i=1,\ldots,n
\end{cases}
$$

现在因为每一个位置的每一个工厂均有非负的盈利，在最优但不完全分配下，任何未被分配的对或部分对盈利必须为零。因此总是可以完成尚未完成的最优分配，而不丢失最优特征。然而，应用于满足约束条件（4.5）下的最优完全分配的 Minkowski-Farka 定理意味着（见附录 B）满足条件（4.1）的非负租金系统可以与该最优分配相关联。

最后，所有的盈利能力a_{ki}是正值，每一个完整的最优分配，可以与满足约束条件（4.1）的正租金q_k^*，r_i^*系统相关联。需要注意，q_k，r_i是满足（4.1）的非负值系统，假设$r_{i0}=0$，（4.1.2）可转化为：

$$
(4.6)\qquad q_k = q_k + r_{i0} \ge a_{ki0} > 0, \qquad k=1,\ldots,n
$$

因此，如果在（4.3）中插入：

$$
(4.7)\qquad \lambda \equiv 1/2 \min_k q_k > 0
$$

我们可以得到正值租金q_k^*，r_i^*系统满足（4.1）。当然，如果用$q_{k0}=0$代替$r_{i0}=0$，则类似的推理也适用。

值得注意的是，对于工厂所遇到的位置租金差异和盈利能力差异之间的联系，不等式（4.2）有一些简单而有趣的含义。首先，我们有

$$
(4.8)\qquad a_{ki} > a_{kk} \quad \text{代表} \quad r_i > r_k
$$

换言之，对于工厂k来说，如果位置i比最优分配的位置k有更高的盈利能力，则位置i的租金超过位置k的租金。除非已经知道最优分配，否则这个明显的陈述迄今没有什么帮助。然而，它意味着一个不取决于最优分配的较弱的陈述：

(4.9) 对于所有的j $a_{ji} > a_{jk}$ 代表 $r_i > r_k$

总而言之，如果对于每一个工厂，位置i比位置k都具有更高的盈利能力，位置i的租金超过位置k的租金。

第二，从（4.2）得知：

(4.10) $r_i < r_k$ 代表 $a_{ki} < a_{kk}$

也就是说，如果位置k的租金比位置i的租金更高，最优分配到位置k的工厂的盈利能力会比在位置i处的盈利能力更高。尤其是工厂分配至租金最高的位置（如果只有一个这样的位置）处会比在其他位置处的盈利更多。相似的说法也适用于分配至位置租金第二高的工厂。遵循这样的规律：如果工厂按照最优位置租金递减排序，则可以通过先定位第一个工厂，以最大化其盈利能力，在从剩余的位置里定位第二个工厂使其赢利能力最大化等重新构造最优分配。因此也把工厂按照最优位置租金递减排序的顺序作为分配问题的未知条件。

最后，（4.2）允许我们在不需要最优分配的知识的情况下，设定位置租金的上界和下界。首先，从（4.2）可知：

$$\min_j \max_{i,k} (a_{ji} - a_{jk}) \leq \max_{i,k} (a_{ki} - a_{kk}) \leq \max_{i,k} (r_i - r_k)$$

第二，在交换i和k，颠倒标志，从（4.2）可知：

$$\max_{i,k} (r_i - r_k) \leq \max_{i,k} (a_{ki} - a_{kk}) \leq \min_j \max_{i,k} (a_{ji} - a_{jk})$$

将这些关系结合起来得知：

(4.11) $$\min_j \max_{i,k} (a_{ji} - a_{jk}) \leq \max_{i,k} (r_i - r_k) \leq \max_j \max_{i,k} (a_{ji} - a_{jk})$$

我们看到位置租金的范围包含于不同位置之间的个别工厂的盈利能力的最低和最高之间。

当然，所有的关系式（4.8）-（4.11）可以被转化成工厂租金的差异和收益能力差异之间的对应关系，就像不同地点与可选择的工厂之间的关系一样。

在决定讨论最优价格体系之前，我们应该指出，在不存在或者不能建立市场机制的情况下，上述描述的价格体系在计算最优分配时仍然是重要的辅助手段。该价格体系可进一步减少未知量的数量，从n^2个x_{ki}变量减至$2n$个租金q_k，r_i变量。这些租金可以被看成矩阵$[a_{ki}]$中的盈利能力分别减去对应的行和列，从而产生一个等效的分配问题，矩阵的特征为：

(4.12) $$a_{ki}^{*} = a_{ki} - q_k - r_i$$

在此类形式的分配问题中，结果可以通过选择每一行和每一列的最大元素立刻读取出来。为了介绍该方法，在此指出与问题（2.1）相关联的价格：

(4.13) $$[q_k] = [10,\ 3,\ 6,\ 1] \qquad [r_i] = [16,\ 10,\ -3,\ 9]$$

等价问题的矩阵为：

(4.14) $$[a_{ki}^{*}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tornquist[1953]已经讨论过线性和二次分配问题基于此原则的算法。

5. 冯·诺依曼的等效对策

将线性指派问题缩小为易管理的适度n值的规模决定性的一步是 Birkhoff（伯克霍夫）定理的应用。除此以外，有很多种方法可以实现缩小规模，我们使用了其中的一种方法，进而得到了一个等价的线性规划问题。冯·诺依曼[1953]已经选择了另一种方法主导独创性的零和二人游戏，该零和二人游戏同样地等价于指派问题。我们可以简短地描述这个游戏和它的解决方案（无证明），因为它和上述讨论的价格体系之间存在联系。不熟悉游戏理论的读者可略过该节。

游戏规则如下：玩家Ⅰ在n行$\times$ n列的棋盘上选择领域(k,i)，并与裁判员交流。玩家Ⅱ猜测玩家Ⅰ选择的领域的行k和列i，并指出他是通过行还是列进行猜测的。如果猜测是正确的，玩家Ⅱ从玩家Ⅰ处获得一份酬劳（满足（2.5）的假设），酬劳为：

(5.1) $$1/a_{ki}$$

如果猜测是错误的，则没有酬劳。

游戏的求解方案如下：玩家Ⅰ的策略为：在矩阵a_{ki}定义的线性指派问题中仅选择属于最优分配的领域，并以与$1/a_{ki}$成比例的概率选择在该分配中出现的任何给定的领域。如果存在多个最优分配，他可以选择与最优分配相关的这类策略的任何概率的组合。玩家Ⅱ的游戏得分为：

(5.2) $$\frac{1}{\sum_{k,i} a_{ki}\,\hat{p}_{ki}}$$

其为最优分配$\hat{p}_{ki}$的得分总和的最大值的倒数。玩家Ⅱ选择策略为：选择k行和i列的概率与最优分配相关联（通过（4.1）进行关联）的任何非负价格q_k，r_i成比例。

6. 二次分配问题

某个位置的经济活动的利益不依赖于其它位置的使用这一假设对于位置决策的复杂性来说是完全不够的。著作包含了许多“直接”相互影响的文献，例如将一块土地延伸到相邻土地的改善的好处，或者周围活动带来的噪音、振动、光污染和水污染不利的影响。除了经常倾向支持同一街区相似活动的聚集这一明显的言辞，本文不会讨论这些直接的相互影响。这些相互影响在文献中引起了人们的注意，主要是社会成本（收益）或个人成本的差异，这些差异会影响作为有效的资源分配者的价格体系。

我们的主要观点是，生产和/或消耗过程之间的“直接的”物理相互影响决不是价格体系失败的唯一原因。利用稀缺资源在工厂间运输中间商品流这一事实似乎足以使价格体系丧失诱导或维持有效的分散配置的决策能力。为了锐利地展示这个观点，我们现在介绍二次分配问题。

再一次考虑n个工厂和n个位置，矩阵$[a_{ki}]$，矩阵要素a_{ki}现在表示工厂k在位置i处的“半净利”运营收益，即总盈利减去最初输入的成本，但是不包括减去工厂间运输中间产品的成本。采用此定义，我们仍然假设“半净利”收益a_{ki}与其他工厂分配至其他位置无关。

为了表达工厂间的运输成本，运用一组非负数b_{kl}，$k \neq l$，k，$l = 1$，…，n，表示工厂k到工厂l需要的商品流（权重单位），一组正数c_{ij}，$i \neq j$，i，$j = 1$，…，n，表示从位置i到位置j运输单位流的成本。假设流系数b_{kl}与分配到的位置无关，运输成本系数c_{ij}与工厂分配无关，可适用于流的所有数量和所有组成。c_{ij}满足三角不等式：

$$c_{ij} \le c_{ik} + c_{kj} \qquad i，j，k = 1，…，n \tag{6.1}$$

该式表明通过第三个位置k，位置i到位置j的运输成本并不比直接运输便宜。

如果每一个工厂都被分配至相同编号的位置，总的厂际间的运输成本为：

$$\sum_{k,l} b_{kl} c_{kl} \tag{6.2}$$

其中，令

$$b_{kk}=0 \qquad c_{kk}=0 \qquad k=1,\ldots,n \tag{6.3}$$

对于任何其他分配，在求和之前，每一个b_{kl}必须乘以工厂k和l匹配的位置之间的c_{ij}。如果分配由置换矩阵$[p_{ki}]$定义，容易得到下述表达式：

$$\sum_{k,l}\sum_{i,j} b_{kl}\, p_{ki} c_{ij} p_{ij} \tag{6.4}$$

工厂聚集的总净收益为：

$$\sum_{k,l} a_{ki}\, p_{ki} - \sum_{k,l}\sum_{i,j} b_{kl}\, p_{ki} c_{ij} p_{ij} \tag{6.5}$$

二次分配问题即通过选择合适的置换矩阵$[p_{ki}]$，使该表达式最大化。之所以称为二次，是因为极大值包含未知置换矩阵中的二阶项。

此外，这个模型比经济事实更加精确。一些在工厂间流动的商品流束可能有一种或者多种共同的商品流，在这种情况下，工厂位置重组可能也会导致提供和接收工厂间的中间商品流的重组。此外，生产过程在某种程度上根据所考虑的每一个位置附近的现有的投入商品种类加以调整。因此，我们可能忽略了这种灵活性，从而使我们的做法与价格体系的有效性背道而驰。然而，现有模型聚焦的选址问题独有的复杂性为：位置决策的相互依赖性起因于中间商品流的运输成本，如果供给者和加工进程的选择引入更好的灵活性，则运输成本不可能完全被消除。因此，首先单独研究这种独特的复杂性似乎看起来是值得的。

即使对于适度的n值（$n=10$），至今为止仍然难以克服寻找二次分配问题的解的计算困难。据我们所知，至今为止仅计算的唯一一个相当大的例子与一种特殊案例相关，即旅行商问题。在例子中，令$a_{ki}=0$，令b_{kl}为：

$$b_{kk}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

该矩阵本身为一个置换矩阵。现在唯一的“中间商品流”是一位旅行商，他需要在每一个位置拜访一次，然后返回至出发地点。分配问题即选择旅行商拜访的顺序，使其总运输成本最小化。Dantzig，Fulkerson 和 Johnson [1954]计算了穿过美国 49 个城市（每个州和华盛顿特区各包含个城市）最小的旅行成本。他们将道

路长度视为成本并证明了解的有效性。使用的方法为临时方法，这些方法可解决手头的问题，但不一定会推广到二次分配问题的其他情况。

鉴于二次分配问题计算的复杂性，价格体系保持最优分配的可能性是非常相关的。如果可以依赖市场维持甚至引导最优分配，那么不可用的实用计算方法将不会成为有效使用资源的障碍。不幸的是，我们对这个问题的初步和启发式探索，将在下一节报告，也会遇到负面结果。

7. 价格体系是否可以维持最优的相互依赖的位置决策？

通过类比价格体系在线性指配问题和交通运输问题中的功能，检查位置和/或工厂的租金体系以及取决于商品报价的位置的中间商品流的价格体系是否可以维持二次分配问题的最优分配。

通过一系列有意思的推理，人们可以反驳这种可能性，因为乍看之下这可能是定义价格体系运营的最自然的方式。这个推论再次使用了虚构的小数工厂共享位置的策略。

假设在位置i的分数工厂k的“半净利”税收和进出入该工厂的中间货物的输入流和输出流一样，都与分数x_{ki}成比例。正如已经指出的那样，假设工厂k和工厂l之间的商品束仅存在于这种有序的工厂对。该商品束，或者任何组合的商品，不可能来源于（分数）工厂k以外的其他任何类型的工厂，并且除了工厂l以外的其他任何类型的工厂也不能使用该商品束。因此，将这种商品束视为一种独立的商品，而且通过指标(k,l)的结合完全可以迅速地辨别该商品束。

在给定的规定范围内，我们允许并且确实需要分数工厂之间的每种不同商品(k,l)的大多数经济路线。尤其是，如果维持条件（6.3），我们认为同一位置的分数工厂之间的运输是无成本的，这将有利于分数工厂的结合分配至同一位置，这些分数工厂之间也互相提供商品流。

位置i到位置j且由工厂k到工厂l提供的商品流用$x_{kl,ij}$表示。为了避免不相关的不确定性，令$x_{kl,ii}=0$。问题即转为：通过选择合适的x_{ki}和$x_{kl,ij}$，最大化（7.1）：

(7.1)
$$\sum_{k,i} a_{ki} x_{ki} - \sum_{k,l} \sum_{i,j} c_{ij} x_{kl,ij}$$

约束条件包括：

$$(7.2)\quad\begin{cases}(7.2.1) & x_{ki}b_{kl}+\sum_j x_{kl,ji}=x_{li}b_{kl}+\sum_j x_{kl,ij} \quad k,\ l,\ i=1,\ \ldots,\ n\\ (7.2.2) & \sum_i x_{ki}=1 \quad k=1,\ \ldots,\ n\\ (7.2.3) & \sum_k x_{ki}=1 \quad i=1,\ \ldots,\ n\\ (7.2.4) & x_{ki}\geq 0 \quad x_{kl,ij}\geq 0 \quad x_{k,ii}=0 \quad k,\ l,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n\end{cases}$$

约束条件（7.2.1）说明中间商品(k,l)从位置i的总进入流加上该位置的生产力等于从位置i流出的总流加上在同样位置的消耗力。（7.2.4）说明了中间商品流的非负特征，其他约束条件与前述一致。

值得指出：引入简单的非线性约束条件（7.3），则（7.1）和（7.2）定义的线性问题与（6.1）、（6.3）和（6.5）定义的二次分配问题是等价的。

$$(7.3)\qquad x_{ki}=0 \quad 或\quad 1 \qquad k,\ i=1,\ \ldots,\ n$$

然而，如果我们不加（7.3）这样的约束条件，则问题是完全线性的，有线性规划问题的所有一般属性。上文我们已经使用了价格体系与线性规划问题的解相关联这一属性，该价格体系满足允许通过分散化的利益最大化维持解这一必然条件。然而，我们也注意到了相反的属性：如果满足条件的价格体系与满足约束条件（7.2）的点（一组值x_{ki}，$x_{kl,ij}$）相关联，这个点则是问题的解。特别是，在等价的否定形式中我们可以使用这个属性：如果满足约束条件的点不是问题的解，则不存在与该点相关联的满足条件的价格。

现如今我们可以容易地描述一个特殊案例，可直接看到取代二次分配问题的线性问题（7.1）和（7.2）的解的性质。这个情况是通过指定给定工厂的“半净利”收入与其位置无关得到的，数学表达式为：

$$(7.4)\qquad a_{ki}=a_k \qquad i=1,\ \ldots,\ n$$

在此假设下，总收益（7.1）中的第一项变为一个与所选分配无关的常数：

$$(7.5)\qquad \sum_{k,i}a_k\ x_{ki}=\sum_k(a_k\sum_i x_{ki})=\sum_k a_k$$

总收益最大化则等价于在分配分数工厂的约束条件（7.2）下使总运输成本最小。

$$(7.6)\qquad \sum_{k,l}\sum_{i,j}c_{ij}x_{kl,ij}$$

该问题的一个显而易见的解是将每一个工厂平均分配到所有的位置上：

$$(7.7)\qquad x_{ki}=1/n \qquad x_{kl,ij}=0 \qquad k,\ l,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n$$

在此情况下，不需要运输，因此运输成本为零。

如果每一个流系数$b_{kl}(k \neq l)$是正值，则有唯一的解。如果某些b_{kl}等于零，则解不唯一，但是只要至少有一个b_{kl}是正值，则没有工厂完整分配至位置这样的解，因为正系数b_{kl}将与运输成本系数$c_{ij}(i \neq j)$相乘，其中c_{ij}均为正值。尤其是，（6.5）和（7.4）定义的二次分配问题的任何解，都是通过整数分配定义，并不是线性问题（7.6）的解，因此满足我们现在写下的约束条件的价格体系不能与其相关联。

相关条件遵循极大值和约束条件（7.2）的形式。我们将由约束条件保护的商品的价格与每一个约束条件（7.2.1-3）相关联。用$u_{kl,i}$表示商品(k,l)在位置i的价格，q_k表示单位工厂k的租金，r_i表示单位位置i的租金。我们再一次对工厂编号，以使在最优分配中每一个工厂作为一个整体分配至与其有相同编号的位置上。价格条件不能满足：

$$c_{kl} = u_{kl,l} - u_{kl,k} \qquad k \neq l \tag{7.8.1}$$

$$c_{ij} \geq u_{kl,j} - u_{kl,i} \qquad i \neq j \tag{7.8.2}$$

$$(a_{kk} =) a_k = q_k + r_k - \sum_l b_{kl} u_{kl,k} + \sum_l b_{lk} u_{lk,k} \qquad k，l，i，j = 1，\ldots，n \tag{7.8.3}$$

$$(a_{ki} =) a_k \leq q_k + r_i - \sum_i b_{kl} u_{kl,i} + \sum_i b_{lk} u_{lk,i} \qquad k，l，i，j = 1，\ldots，n \tag{7.8.4}$$

条件（7.8.1）表明，最优分配提倡商品(k,l)一条路径上（$i = k, j = l$）运输，商品在需求点l和可用点k的价格之差等于其运输成本。类似地，（7.8.3）表明对于每个工厂k，考虑到出售中间产出的收益和购买中间投入的成本，半净利收入足以够支付最优分配中的工厂和位置的租金，再次根据工厂（最优）分配的位置的价格进行评估。条件（7.8.2）表明商品流在所有位置上的价格价目应受满足：两个位置之间的价格之差不超过运输成本。最后，条件（7.8.4）表明没有工厂可以在任何位置获得正收益。

再次回顾我们所展示的最优完整分配中不能满足的条件，或者在任何最优分配中重要的约束条件。对于我们来说，否定结论的含义似乎值得研究。它意味着工厂、位置和所有位置上的商品没有对应的价格体系，价格都是由工厂拥有者确定，也就是说，没有价格体系可以维持任何分配。总会有动机促使工厂去寻找不

同于他持有的位置。对于处于规划蓝图中的工厂，兼容的选择不能通过价格体系引导或维持。对于实际中已经完成定位的工厂，在我们假设的科技环境中，移动的成本是稳定性的唯一要素。如果没有对移动进行限制，就会有一场没完没了的抢椅子游戏。无论是分配，中间商品的价格和位置的租金都不能如此成比例，以至于不会让工厂有任何动力寻找其所持有的以外的位置。

可能有人反对说，我们通过寻找价格体系来制造这种困难，这个价格体系不仅仅是无效率的，而且是无论如何不可能的。我们已经寻求了一个价格体系，在没有询问拥有者l是否有相似的诱因，使他自己通过另一个移动来实现位置的变换的情况下，将阻止工厂拥有者k渴望改变工厂的位置至拥有者l持有的位置。

在进一步研究这个异议之前，应该回顾一下，在线性指配问题中，价格体系不会引发不兼容的选择。如果仅有一种最优分配，则可以找到价格，使得对于所有相关的工厂拥有者而言，替代性选择较差。如果有多种最优分配存在，则始终存在一组兼容的选择，使得每个工厂拥有者的选择对他而言都不低于任何替代选择。这表明一般情况下，线性活动分析中的效率价格，尤其是线性规划中的效率价格，在已经给定分配数量的情况下，不仅仅阻碍资源的低效使用，而且消除了任何人要求更多的稀缺资源超过可用资源的动机。因此，除价格除能阻碍低效性以外，我们应该要求价格能管理稀缺性，从而使我们的问题更加困难，这必然是由于当前问题的非线性特征。

这至少是我们困难的一部分，通过观察仅有两个工厂和两个位置（$n=2$）的最简单的厂际运输成本最小化问题，该问题就变的清晰了。如果最初的分配为“$k\ to\ k$”，如果两个工厂之间双向运行的货物量b_{kl}，$k\neq l$，均为正值，则（7.8.1）变为：

(7.9) $$a_{12}=u_{12,2}-u_{12,1} \qquad\qquad c_{21}=u_{21,1}-u_{21,2}$$

工厂 1 在位置 1 处的收益的相关项为：

(7.10) $$b_{12}u_{12,1}-b_{21}u_{21,1}-r_1$$

工厂 1 在位置 2 处的收益的相关项为：

(7.11) $$b_{12}u_{12,2}-b_{21}u_{21,2}-r_2$$

在位置 1 处的收益比位置 2 处的收益多：

(7.12) $$b_{12}(u_{12,1}-u_{12,2})-b_{21}(u_{21,1}-u_{21,2})-r_1+r_2=-b_{12}c_{12}-b_{21}c_{21}-r_1+r_2$$

这表明了一个简单的事实，如果以与给定的初始“$k\ to\ k$”分配相对应的价格评估工厂 1 到位置 2 的移动，则其对工厂 1 的收益的影响与工厂 2 在位置 2 处的收益的两倍的影响相同。则可以节省完整的厂际运输成本。当然，可以通过更大的租金差$-r_1+r_2$移动工厂 1，但是这仅仅加强了工厂 2 移动到位置 1 的盈利动机：

(7.13) $$-b_{21}c_{21}-b_{12}c_{12}-r_2+r_1$$

因为两个动机（7.12)、（7.13）的总和为-2（$b_{21}c_{21}+b_{12}c_{12}$），如果运输成本$c_{ij}$是正值，则不可能找到阻止双方工厂拥有者渴望搬走所对应租金r_i。这与初始分配是否是最优分配无关。

根据这个例子，我们可以认为，一个人对价格体系的所有要求是，对于得到最优分配过程中的任何非最优置换矩阵，应该至少有一个工厂拥有者拒绝提出的移动，从而造成置换被锁定。然而，很难看到这样的要求如何引导确定租金。工厂拥有者是否愿意参与其他有吸引力的置换矩阵，可以通过向其所在地的拥有者出更高的租金来测试。如果租金应该反映每个位置对占用者的价值的想法不能被纳入，那么寻找价格体系似乎失去了它的大部分兴趣。

如果探索性推论被接受，则有另一种可能性有待探索。人们可以搁置两个工厂的例子中的价格体系的失败，或许在之前考虑的n个工厂的例子中也会失败，根据这个事实，在没有考虑对后续需要为第一个移动创造空间的工厂的移动的运输成本的情况，评估一个工厂的移动。这种忽视是在尝试在不同地点采用一种特定的商品价格体系制度释固有的。为了避免这种忽略，一个人可以完全放弃寻找商品价格，而是寻找能够改变整个厂际运输成本的原则，以便对个体工厂预算产生影响，为了响应结合了这些原则确定的租赁系统，置换矩阵中的每一个参与者都会拒绝从寻求最优分配的过程中得到的非最优置换矩阵。沿着这些线索我们已经进行了探索，我们已经接收到了 Theodore Motzkin 教授的大量的帮助。然而这些尝试的许多详细的报告将会超出文章的限制范围，但在这里可以指出，仍然没有发现租金系统制度能够满足信息分散化的要求，即使是一半。

坦白来说，我们感到困惑的是，难以在一个基本问题中构建位置租金和运输

成本之间有意义的关系，如二次选址分配问题。为了这个原因，我们已经推迟了好几年发表我们的结论，希望可以得到更多的确定性的结果。现在似乎呈现这样大部分的负面结果是更好的，因为我们已经得到了二次分配问题有关的定价的发展潜力，因为这个问题似乎更接近选址理论的核心，希望检测价格体系的明显失败的例子可能基本上可以导致更好的观察价格体系作为一种分散化不可分割资源的分配的发展潜力和局限性。

附录 A

BIRKHOFF 定理的证明和应用

我们将所讨论的定理[Birkhoff，1946]，以目前应用所需要的最小表述的形式用公式表达出来，并且相应地改编了冯·诺依曼的证明：

任何满足约束条件的n维矩阵$[x_{ki}]$

(A.1) $$\sum_{k=1}^{n} x_{ki} = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ki} = 1 \qquad x_{ki} \geq 0 \qquad k，i = 1，\dots，n$$

可被写成加权平均数，注意采用的是非负加权，

(A.2) $$x_{ki} = \sum_{r=1}^{n!} w_r p_{ki}^r \qquad w_r \geq 0 \qquad \sum_{r=1}^{n!} w_r = 1$$

$n!$个置换矩阵$[p_{ki}^r]$，$r = 1，\dots，n!$。

在证明过程中，如果$0 < x_{k1i1} < 1$，则称x_{k1i1}为矩阵$[x_{ki}]$的内部元素，如果$x_{k1i1} = 0$或$x_{k1i1} = 1$，则称其为外部元素。它遵循（A.1），任何行或列的内部元素的数量要么为 0，要么至少为 2。设v为给定矩阵$[x_{ki}]$的内部元素的数量，如果$v = 0$则定理的断言是正确的，如果$v > 0$，将矩阵$[x_{ki}]$写为满足（A.1）的两个矩阵的加权平均值，则改写后的矩阵有更少的内部元素，如下所述。

设x_{k1i1}为任意的内部元素，x_{k1i2}为行k_1的另一个内部元素，x_{k2i2}为列i_2的另一个内部元素，x_{k2i3}为列k_2的另一个内部元素，依次按此规律进行设置。因为元素的总数量是有限的，这种构建在某种情况下将会造成元素重复，如图片 2 所示。删除要重复的第一个元素之前的序列中的所有的元素，则序列具有下述两种形式之一：

(A.3) $$x_{k_m i_m},\ x_{k_m i_{m+1}},\ x_{k_{m+1} i_{m+1}},\dots,\ x_{k_p i_p} \qquad p > m,\ k_p = k_m,\ i_p = i_m$$

或 $$x_{k_m i_{m+1}},\ x_{k_{m+1} i_{m+1}},\ x_{k_{m+1} i_{m+2}},\dots,\ x_{k_p i_{p+1}} \qquad p > m,\ k_p = k_m,\ i_{p+1} = i_{m+1}$$

将重复元素$x_{k_p i_{p+1}}$放到最后，并重复前面的元素$x_{k_p i_p} x_{k_m i_m}$，$i_m = i_p$，第二种形式可缩减为第一种形式。将（A.3）作为已发现的序列的符号，考虑由（A.4）定义的矩阵$[x_{ki}(\epsilon)]$

$$\text{(A.4)} \begin{cases} x_{k_q i_q}(\epsilon) = x_{k_q i_q} + \epsilon & q = m, m+1, \ldots, p-1 \\ x_{k_q i_{q+1}}(\epsilon) = x_{k_q i_{q+1}} - \epsilon & q = m, m+1, \ldots, p-1 \\ x_{ki}(\epsilon) = x_{ki} \quad \text{当}(k,i) = \left(k_q, i_q\right)\text{或}(k,i) = \left(k_q, i_q\right)\text{；不存在} & q = m, m+1, \ldots, p-1 \end{cases}$$

$$\text{(A.4)} \quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} x_{k_q i_q}(\epsilon) &= x_{k_q i_q} + \epsilon, \\ x_{k_q i_{q+1}}(\epsilon) &= x_{k_q i_{q+1}} - \epsilon, \end{aligned}\right\} \quad q = m, m+1, \cdots, p-1, \\ x_{ki}(\epsilon) = x_{ki} \quad \text{whenever for no } q = m, \cdots, p-1 \\ \qquad \text{either } (k,i) = (k_q, i_q) \text{ or } (k,i) = (k_q, i_{q+1}) \end{cases}$$

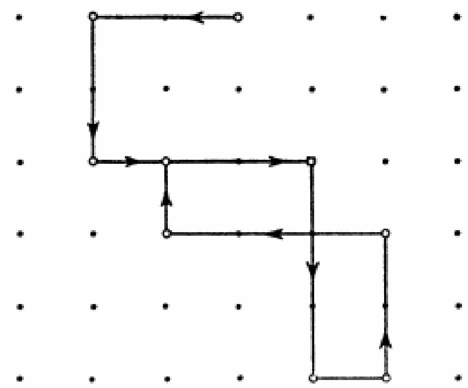

FIGURE 2.—Illustration of the Sequence (A.3).
The first element to be repeated is indicated by □.

图 2 序列（A.3）的介绍（第一个要重复元素用 表示）

运用$x_{ki}(\epsilon)$取代（A.1）中的x_{ki}，且对于所有的ϵ，$x_{ki}(\epsilon)$满足（A.1）中的前两个条件，因为在行或列上每添加一个ϵ，总和要减去ϵ。矩阵$[x_{ki}(\epsilon)]$的内部元素的数量$v(\epsilon)$最多不会超过矩阵$[x_{ki}]$内部元素的数量，因为矩阵$[x_{ki}]$的任何外部元素$x_{k_o i_o}$不可能出现在序列（A.3）中，对应的矩阵$[x_{ki}(\epsilon)]$中的元素$x_{k_o i_o}(\epsilon)$等于$x_{k_o i_o}$，并且也为外部元素。

满足（A.1）中的第三个条件的矩阵$[x_{ki}(\epsilon)]$对应的ϵ值的集合很容易看成下述区间：

(A.5) $$\underline{\epsilon} \le \epsilon \le \overline{\epsilon} \qquad \underline{\epsilon} = -\min x_{k_q i_q} \qquad \overline{\epsilon} = \min x_{k_q i_{q+1}}$$

极小值由$q = m$，$m + 1$， …，$p - 1$取代。因此所有涉及到的$x_{k_q i_q}$和$x_{k_q i_{q+1}}$均为正值：

(A.6) $$\underline{\epsilon} \le 0 \le \overline{\epsilon}$$

此外，因为至少$x_{ki}(\epsilon)$会在$\epsilon = \underline{\epsilon}$和$\epsilon = \overline{\epsilon}$消失一次，

(A.7) $$v(\underline{\epsilon}) < v(0) \qquad v(\overline{\epsilon}) < v(0) = v$$

最后，因为$[x_{ki}(\epsilon)]$在ϵ是线性的，

(A.8) $$x_{ki} = x_{ki}(0) = -\frac{\underline{\epsilon}}{\overline{\epsilon} - \underline{\epsilon}} x_{ki}(\overline{\epsilon}) + \frac{\overline{\epsilon}}{\overline{\epsilon} - \underline{\epsilon}} x_{ki}(\underline{\epsilon})$$

在（A.8）中，给定矩阵$[x_{ki}]$被写成$[x_{ki}(\underline{\epsilon})]$和$[x_{ki}(\overline{\epsilon})]$两个矩阵的正值加权平均值，两个矩阵均满足（A.1），且内部元素的数量均比矩阵$[x_{ki}]$的内部数量少。只要还有正值，这些中的任何一个都可以依次写成满足（A.1）条件且有更少的内部元素的两个矩阵的加权平均值。因为加权平均值的加权平均值本身就是一个加权平均值，因此任何给定的矩阵$[x_{ki}]$基本上都可以被写成满足（A.1）且无内部元素的两个矩阵的加权平均值，即所谓的置换矩阵。因此，定理证明完毕。

附录 B

MINKOW'SKI-FARKAS 引理的声明和应用

第四节提到的引理如下所描述：

为了使

(B.1) $$\sum_{n=1}^{N} g_n u_n \le 0$$

对于所有的$u = [u_n]$，$n = 1$， …，N，满足

(B.2) $$\sum_{n=1}^{N} h_{mn} u_n \le 0 \qquad m = 1, \ldots, M'$$

对于一些$v = [v_m]$，例如$v_m \ge 0$，$m = 1$，..，M'，它是充分必要的：

(B.3) $$g_n = \sum_{m=1}^{M'} v_m h_{mn} \qquad n = 1, \ldots, N$$

为证明和进一步的讨论，可看 Farkas[1902]和 Gale，Kuhn 和 Tucker [1951]的文章。

下述几何学的解释给此定理直观的展示。满足（B.1）的 N 维空间的半空间的向量集合$u = [u_n]$包含边界超平面的起点。该半空间可通过超平面的向量$g =$

$[g_n]$和指向半空间的里面呈现。

同样地，满足（B.2）的向量u的集合是类似半空间的M'的交集（公有部分），每一个相似的向量通过向量$\mathrm{h}^{(m)} = [h_{mn}]$，$m = 1$，…，$M'$来表示。

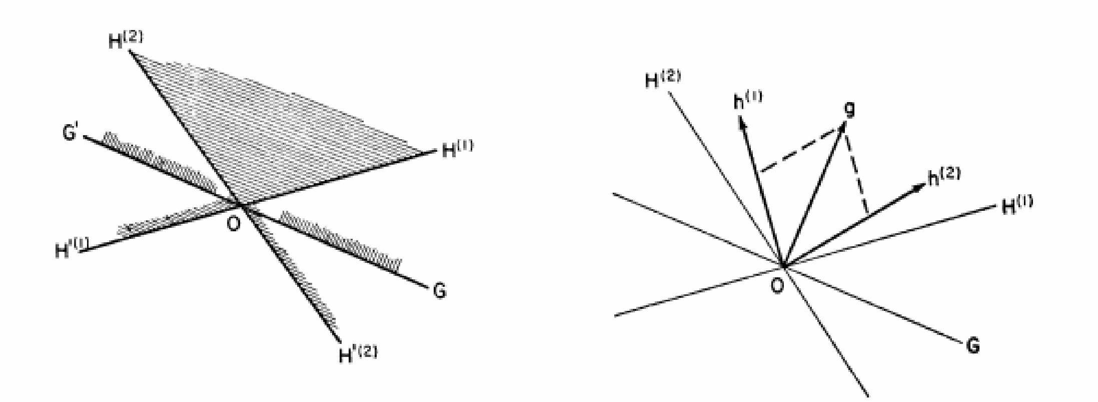

FIGURE 3a.—Illustration of the Requirement of the Minkowski-Farkas Lemma.

FIGURE 3b.—Illustration of the Condition of the Minkowski-Farkas Lemma.

图 3a MINKOW'SKI-FARKAS 引理要求介绍

图 3b MINKOW'SKI-FARKAS 引理条件介绍

该引理表明下述的条件：没有非负权重$\mathrm{h}^{(1)}$，…，$\mathrm{h}^{(M')}$的线性组合可以包含g，其中g表示的半空间包含由$\mathrm{h}^{(1)}$，…，$\mathrm{h}^{(M')}$表示的半空间的交集。

图片 3a 和 3b 介绍了这个条件，在二维空间里（半空间是一个半平面，通过一条线限制）。在图片 3a 中，以$G'OG$（并隐藏线$G'OG$的一边）为边界的半平面包含$H^{(1)}OH^{(2)}$半平面的交集，边界为$H'^{(1)}OH'^{(1)}$和$H'^{(2)}OH'^{(2)}$。图 3b 展示了其他两个半平面的两个法线$h^{(1)}$，$h^{(2)}$所跨越的角度内的第一个半平面的内部的法线g。虽然可以对下面的命题做出类似的几何解释，我们不再进一步讨论这个问题。

线性规划的价格定理[Koopmans，1951，p. 82，定理 5.4.1]如下：

为了使，对于所有的$x = [x_n]$满足：

(B.4) $$\sum_n g_n x_n \le \sum_n g_n \hat{x}_n \qquad n = 1, \ldots, N$$

对于所有的$x = [x_n]$满足

(B.5) $$\sum_n h_{mn} x_n \le k_m \qquad x_n \ge 0 \qquad m = 1, \ldots, M \qquad n = 1, \ldots, N$$

如果用$\hat{x}$替代x，给定满足（B.5）的$\hat{x} = [\hat{x}_n]$，存在λ_m，$m = 1$，…，M，是

充分必要的，

$$\text{(B.6)} \qquad \sum_m \lambda_m h_{mn} \begin{Bmatrix} = \\ \geq \end{Bmatrix} g_n \qquad \text{根据} \qquad \hat{x}_n \begin{Bmatrix} = \\ \geq \end{Bmatrix} 0$$

和

$$\text{(B.7)} \qquad \lambda_m \begin{Bmatrix} \geq \\ = \end{Bmatrix} g_n \qquad \text{根据} \qquad \sum_n h_{mn} \hat{x}_n \begin{Bmatrix} = \\ < \end{Bmatrix} k_m$$

证明：充分性。假设对某个$\hat{x}$，存在满足（B.6）和（B.7）的λ_m的集合。然后，对于满足（B.5）的所有x，从每一步表明的关系得到一系列的步骤：

$$\sum_n g_n \hat{x}_n \overset{\text{(B.6)}}{=} \sum_{m,n} \lambda_m h_{mn} \hat{x}_n \overset{\text{(B.7)}}{=} \sum_m \lambda_m k_m \overset{\text{(B.5,B.7)}}{\geq} \sum_{m,n} \lambda_m h_{mn} x_n \overset{\text{(B.5,B.6)}}{\geq} \sum_n g_n x_n$$

必要性。对于所有的$x = [x_n]$，$\hat{x} = [\hat{x}_n]$满足（B.4）。不失一般性，我们可以指定：在（B.4）和（B.5）中插入$x = \hat{x} + u$，前提被认为是在暗示，对于所有的$u_n < \delta$，$n = 1$， …，N，例如：

$$\text{(B.8)} \qquad \hat{x}_n = 0 \quad n = 1, \ldots, \overline{N} \qquad \hat{x}_n > 0 \quad n = \overline{N}+1, \ldots, N$$
$$\sum_n h_{mn} \hat{x}_n = k_m \quad m = 1, \ldots, \overline{M} \qquad \sum_n h_{mn} \hat{x}_n < k_m \quad m = \overline{M}+1, \ldots, M$$

通过在（B.4）和（B.5）中插入$x = \hat{x} + u$，我们的前提意味着：

$$\text{(B.9)} \qquad \sum_n g_n u_n \leq 0$$

对于所有的 $u_n < \delta, n = 1, \ldots, N$

$$\text{(B.10)} \qquad \sum_n h_{mn} u_n \leq 0 \quad m = 1, \ldots, \overline{M}$$
$$u_n \geq 0 \quad n = 1, \ldots, \overline{N}$$

提供的δ是一个足够小的正数以保证条件（B.5），$m = \overline{M} + 1$， …，M，$n = \overline{N} + 1$， …，N。然而，因为（B.9）和（B.10）中所有左边的数值均为线性且在u_n中是同质的，要求$u_n < \delta$在此陈述中可省略。因此我们可以使用 MINKOW'SKI-FARKAS 引理（必要条件），（B.2）和（B.3）中的矩阵$[h_{mn}]$可替换成：

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1\bar{N}} & h_{1,\bar{N}+1} & \dots & h_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{\bar{M}1} & & h_{\bar{M}\bar{N}} & h_{\bar{M},\bar{N}+1} & \dots & h_{\bar{M}N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

以显示非负值v_m，$m = 1$，…，$\overline{M}$和w_n，$n = 1$，…，$\overline{N}$的存在，以至于：

(B.11)
$$g_n = \sum_{m=1}^{\bar{M}} v_m h_{mn} - w_n \quad n = 1, \dots, \bar{N}$$
$$g_n = \sum_{m=1}^{\bar{M}} v_m h_{mn} - w_n \quad n = \bar{N}+1, \dots, \bar{N}$$

现在线性规划的价格定理的必要条件遵循指定的$\lambda_m = v_m$，$m = 1$，…，$\overline{M}$和$\lambda_m = 0$，$m = \overline{M} + 1$，…，M。

在限制条件（4.5）下应用线性指配问题，（3.1）中的核心矩阵$[a_{ki}]$的元素组成（B.4）中的向量$[g_n]$，鉴于（B.5）中的矩阵$[h_{mn}]$和向量$[k_m]$的元素均是 0 或 1，因此选择的（B.5）代表约束条件（4.5）。现在如果一个最优分配是完全（也满足约束条件（3.2））的，无论是整数还是分数的，都只能出现区别于（B.7）的第一个案例。因此从（B.7）中可以得到结论：用λ_m表示的所有的租金q_k，r_i，均是非负的，且（B.7）中不会再出现其它条件。为了更自然的解释，颠倒（B.6）中的案例区分的顺序，我们得到：在约束条件（4.5）的限制下，完整的分配$[\hat{x}_{ki}]$是最优的，如果仅存在非负的租金q_k，r_i体系，那么

$$\hat{x}_{ki} \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \right\} 0 \qquad \text{根据} \qquad q_k + r_i \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} a_{ki}$$

通过另外指定给定的赋值是整数，我们得到（4.1）相关内容的声明，并添加了q_k，$r_i \geq 0$条件。

如果某个盈利能力a_{ki}是负数，在约束条件（4.5）的限制下，不存在完全的最优分配，无论是分数最优分配还是整数最优分配。在此情况下，如果我们通过（3.2）进一步限制问题，使在所有的比较方案中，只允许有完全的分配，在（B.5）

我们必须补充每一个约束条件$f(x) \leq 1$,通过另一个形式通过$-f(x) \geq -1$使（B.5）等价于（3.2）。在这种情况下，每一个q_k，r_i表示两个非负数λ_m之差，在没有对q_k或r_i没有进一步的限制的情况下，得到（4.1）相关内容的声明。