



浙江省象山中学
ZHE JIANG XIANG SHAN HIGH SCHOOL

富比尼原理在解三角形中的应用

浙江省象山中学
许泽建





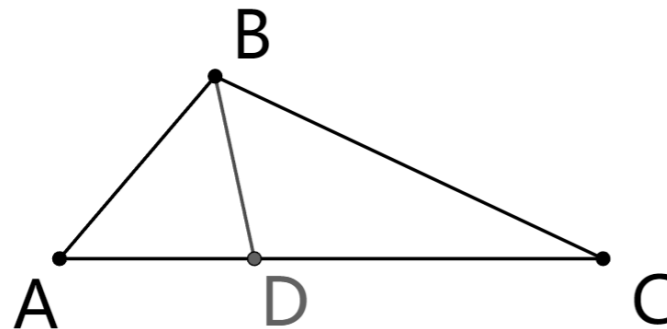
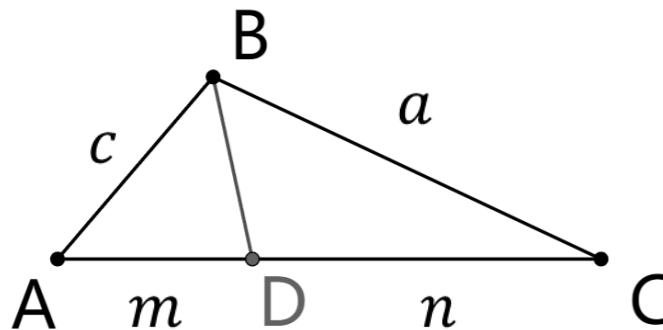
甲有书的本数是乙有书的本数的3倍，甲、乙两人平均每人有82本书，求甲、乙两人各有书多少本.

富比尼原理

为了得到方程，我们把同一个量用两种方法表示出来
也就是把同一个量从不同角度“算两次”



BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线;
有角平分线定理: $AB:BC = AD:DC$.



在**现有条件与结论**的基础下, 运用“算两次”这个桥梁
构造出新的方程, 勾连起各个量之间的联系。



例1.在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线, 且 $BD = 1$, 求 $4a + c$ 的最小值.

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC = \frac{1}{2}AB \times BD \times \sin\angle ABD + \frac{1}{2}BD \times BC \times \sin\angle DBC$$

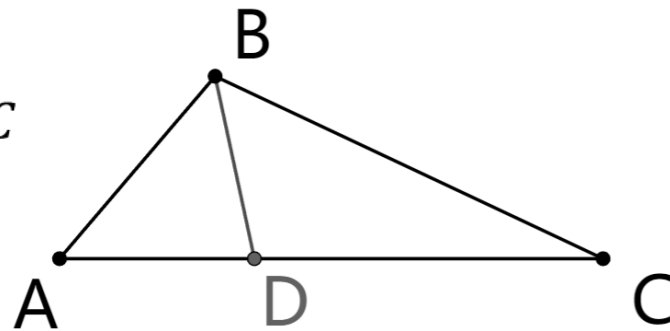
$$\frac{1}{2}ac\sin 120^\circ = \frac{1}{2}AB \times BD \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2}BD \times BC \times \sin 60^\circ$$

$$ac = a + c$$

$$\text{即: } 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

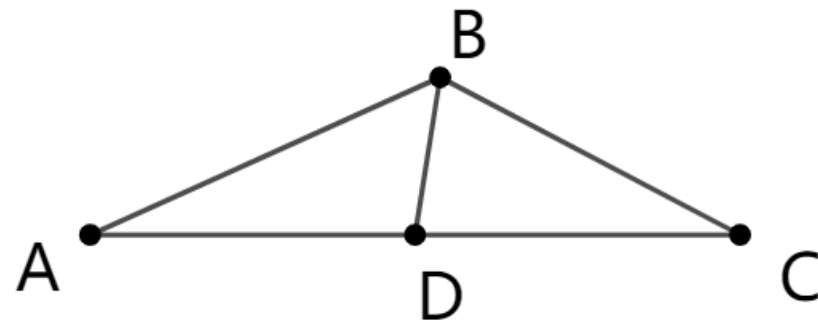
$$4a + c = (4a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 5 + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} \geq 9$$

$$\text{当} \frac{c}{a} = \frac{4a}{c}, \text{即} 2a = c \text{时取到等号}$$





例2.在 $\triangle ABC$ 中, BD 为 $\angle ABC$ 的中线, 且 $BD = 1$, $AC = 4$, 求 ac 的最大值.



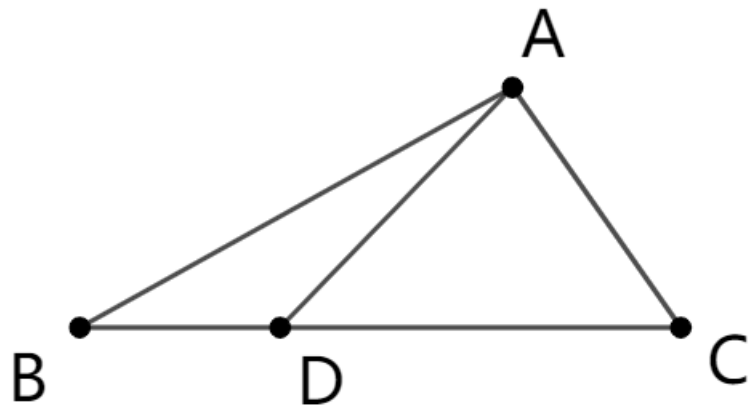


提问: $BD:DC = m:n$?

角的正弦算两次

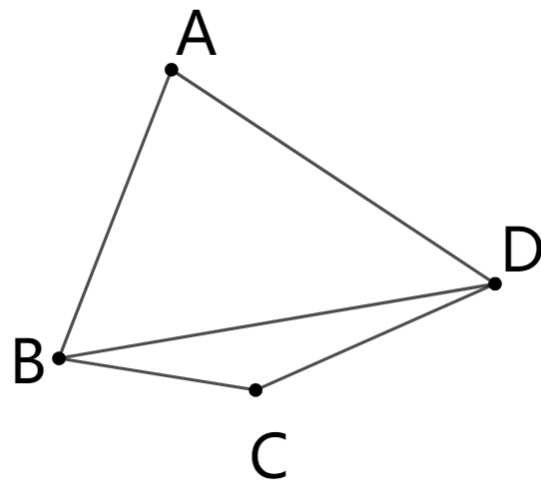
例3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一近 B 点的三等分点, 且 $AB = \sqrt{3}, AC = \sqrt{2}$, 则

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



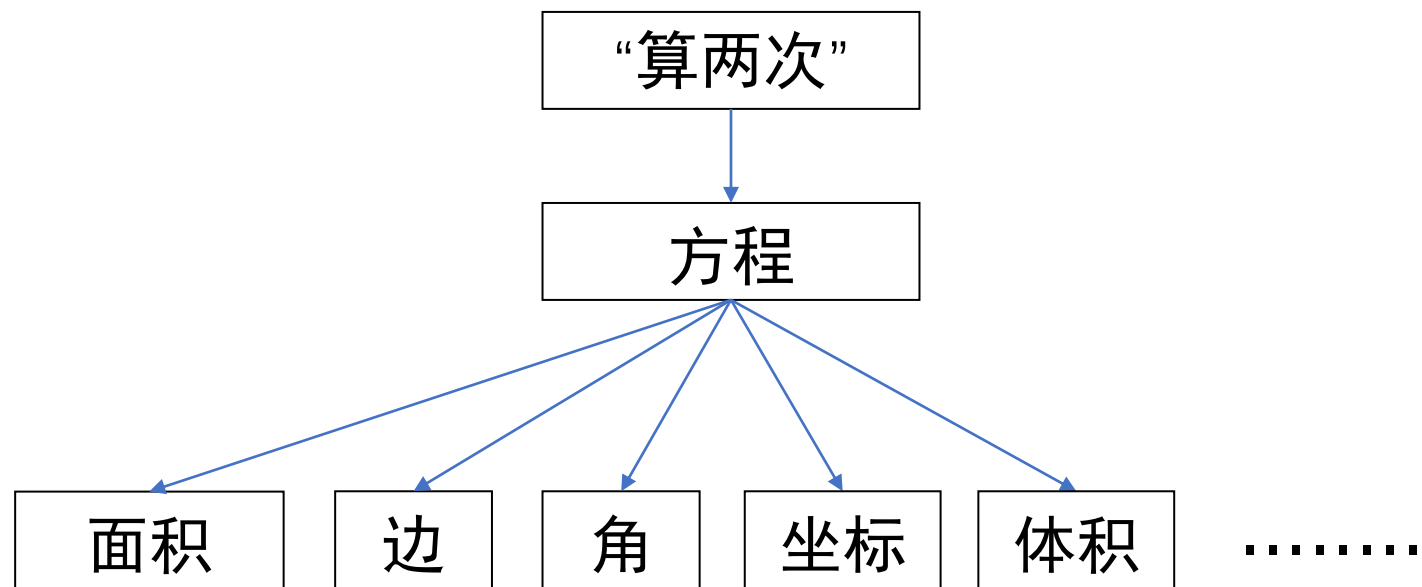


例4. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3, AD = 4, BC = 2, CD = 1$, 求四边形面积的最大值.





富比尼原理



横看成岭侧成峰，远近高低各不同。



(2021全国新高考第19题)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .已知 $b^2 = ac$,点 D 在边 AC 上, $BD \sin \angle ABC = a \sin C$
(1)证明: $BD = b$;(2)若 $AD = 2DC$,求 $\cos \angle ABC$.