重难点专题 13　轻松搞定线面角问题

【题型归纳目录】

【方法技巧与总结】

线与面的夹角

①定义：平面上的一条斜线与它在平面的射影所成的锐角即为斜线与平面的线面角．

②范围：$[0,\dfrac{\pi}{2}]$

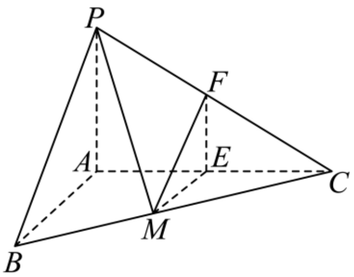
③求法：

常规法：过平面外一点 B 做 $BB'\perp$ 平面 α，交平面 α 于点 B'；连接 AB'，则 $\angle BAB'$ 即为直线 AB 与平面 α 的夹角．接下来在 $Rt\triangle ABB'$ 中解三角形．即 $\sin\angle BAB'=\dfrac{BB'}{AB}=\dfrac{h}{斜线长}$（其中 h 即点 B 到面 α 的距离，可以采用等体积法求 h，斜线长即为线段 AB 的长度）；

【典型例题】

题型一：定义法

【典例 1-1】（2024·山东·二模）已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABC, AB\perp AC$，过点 M 分别作平行于平面 PAB 的直线交 AC,PC 于点 E,F．



(1)求证：$EF//$ 平面 PAB；

(2)若 M 为 BC 的中点，$PA=AB=3,AC=4$，求直线 PM 与平面 ABC 所成角的正切值．

【解析】（1）由 $ME//$ 平面 $PAB, MF//$ 平面 PAB，$ME\cap MF=M, ME,MF\subset$ 平面 MEF，

得平面 $MEF//$ 平面 PAB，而 $EF\subset$ 平面 MEF，

所以 $EF//$ 平面 PAB．

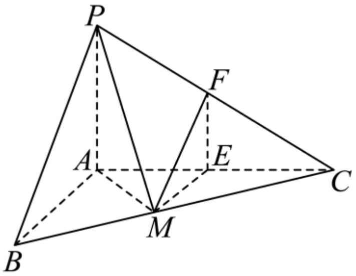
（2）连接 AM，由 $PA\perp$ 平面 $ABC, AM\subset$ 平面 ABC，得 $PA\perp AM$，

则 AM 是直线 PM 在平面 ABC 内的射影，$\angle PMA$ 是直线 PM 与平面 ABC 所成的角，

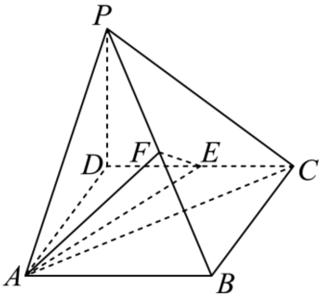
在 $\triangle ABC$ 中，$AB\perp AC, AB=3, AC=4$，则 $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

由点 M 是 BC 的中点，得 $AM=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PAM$ 中，$\tan\angle PMA=\frac{PA}{AM}=\frac{3}{\frac{5}{2}}=\frac{6}{5}$，

所以直线 PM 与平面 ABC 所成角的正切值是 $\frac{6}{5}$.



【典例 1-2】（2024·高一·山西大同·阶段练习）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=PD$，E,F 分别为 CD,PB 的中点.



(1)求证：$EF\perp$ 平面 PAB；

(2)设 $AB=\sqrt{2}BC$，求 AC 与平面 AEF 所成角的正弦值.

【解析】（1）证明：因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AB$，

因为 $AD\perp AB$，且 $PD\cap AD=D$，$PD,AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，

又因为 $PA\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PA$，

取 AB 的中点 G，连接 EG,FG，如图所示，

因为 E 为 CD 的中点，所以 $EG\perp AB$，

再由 FG 为 $\triangle BAP$ 的中位线，可得 $FG//PA$，所以 $FG\perp AB$，

所以 AB 垂直于平面 EFG 内的两条相交直线 EG,FG，所以 $AB\perp$ 平面 EFG，

又因为 $EF\subset$ 平面 EFG，所以 $AB\perp EF$，

连接 EP,EB，因为 $AD=PD$，则 $EP=\sqrt{PD^2+DE^2},EB=\sqrt{BC^2+CE^2}$，

所以 $EP=EB$，所以 $\triangle EPB$ 为等腰三角形，所以 $EF\perp BP$，

因为 $AB\cap BP=B$ 且 $AB,BP\subset$ 平面 PAB，所以 $EF\perp$ 平面 PAB.

（2）不妨设 $BC=1$，则 $AD=PD=1$，

因为 $AB=\sqrt{2}BC$，可得 $AB=\sqrt{2},PA=\sqrt{2},AC=\sqrt{3}$，

所以 $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，且 $PB=2$，

又因为F是PB的中点，所以$BF=1$，且$AF\perp PB$，

因为$EF\perp BP$，且$AF\cap EF=F$，$AF,EF\subset$平面AEF，所以$PB\perp$平面AEF，

设BE交AC于点K，过点K作$KH//PB$交EF于点H，则$KH\perp$平面AEF，

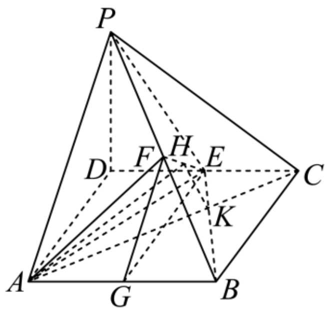
连接AH，所以$\angle KAH$为AC与平面AEF所成的角，

由$\triangle EKC\sim\triangle BKA$，可得$EK=\frac{1}{2}KB,AK=2CK$，

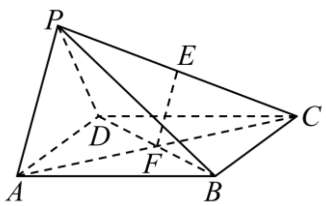
所以$EK=\frac{1}{3}EB=\frac{\sqrt{6}}{6},AK=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

又由$\triangle EKH\sim\triangle EBF$，可得$KH=\frac{1}{3}BF=\frac{1}{3}$，

所以$\sin\angle KAH=\frac{KH}{AK}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，即$AC$与平面$AEF$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.



【变式1-1】（2024·高一·江苏·阶段练习）如图在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧面$PAD\perp$底面$ABCD$，且$PA=PD=\frac{1}{2}BD$，设E,F分别为PC,BD的中点.



(1)求证：平面$PAB\perp$平面PDC；

(2)求直线EF与平面$ABCD$所成角的大小.

【解析】（1）因为面$PAD\perp$面$ABCD$，且面$PAD\cap$面$ABCD=AD$，$CD\perp AD$，$CD\subset$面$ABCD$，

所以$CD\perp$面PAD，又$PA\subset$面PAD，

所以$CD\perp PA$，

又$PA=PD=\frac{1}{2}BD$，又$BD=\sqrt{2}AD$，

所以$PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，

所以$\triangle PAD$为等腰直角三角形，且$PA\perp PD$，

又 $CD\cap PD=D$，且 $CD,PD\subset$ 面 PDC，

所以 $PA\perp$ 面 PDC，又 $PA\subset$ 面 PAB，

所以平面 $PAB\perp$ 平面 PDC；

（2）因为 E,F 分别为 PC,BD 的中点，所以 $EF//PA$，

所以直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成角的大小等于直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角的大小，

因为侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，

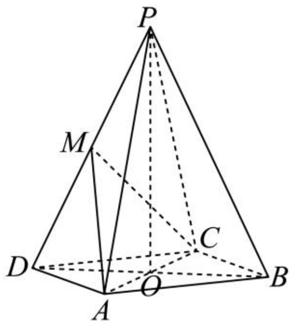
所以 $\angle PAD$ 就是直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角，

又 $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，且 $PA\perp PD$，

所以 $\angle PAD=\frac{\pi}{4}$，

即直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

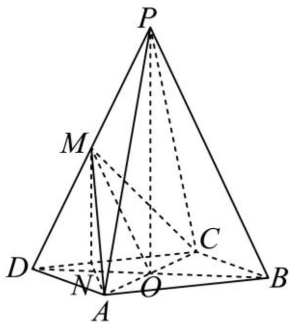
【变式 1-2】（2024·高一·陕西咸阳·阶段练习）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，O 是 AC 与 BD 的交点，$\angle ADC=45°$，$AD=AC=2, PO\perp$ 平面 $ABCD, PO=2, M$ 是 PD 的中点.



(1)证明：$PB//$ 平面 ACM；

(2)求直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

【解析】（1）连接 OM，



在平行四边形 $ABCD$ 中，

$\because O$ 为 AC 与 BD 的交点，$\therefore O$ 为 BD 的中点，

又 M 为 PD 的中点，$\therefore PB// MO$，

又 $PB\not\subset$ 平面 $ACM, MO\subset$ 平面 $ACM, \therefore PB//$ 平面 ACM；

（2）取 DO 的中点 N，连接 MN, AN，

$\because M$ 为 PD 的中点，$\therefore MN // PO$，且 $MN=\frac{1}{2}PO=1$，

由 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，得 $MN\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore \angle MAN$ 是直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成的角，

$\because \angle ADC=45°, AD=AC=2, \therefore \angle ACD=\angle ADC=45°, \therefore \angle CAD=90°$，

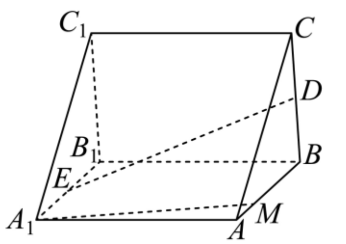
在 Rt△DAO 中，$AD=2, AO=\frac{1}{2}AC=1$，

$\therefore DO=\sqrt{5}$，从而 $AN=\frac{1}{2}DO=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

在 Rt△ANM 中，$\tan\angle MAN=\frac{MN}{AN}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$ 直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【变式1-3】（2024·高三·河北衡水·期中）在如图所示的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D、E 分别是 BC, A_1B_1 的中点.



(1)求证：$DE//$ 平面 ACC_1A_1；

(2)若 $\triangle ABC$ 为等边三角形，且 $AB=AA_1$，M 为 AB 上的一点，$AM=\frac{1}{4}AB$，求直线 DE 与直线 A_1M 所成角的正切值.

【解析】（1）取 AB 的中点 F，连接 DF, EF

在 $\triangle ABC$ 中，因为 D, F 分别为 BC, AB 的中点，

所以 $DF//AC, DF\not\subset$ 平面 $ACC_1A_1, AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $DF//$ 平面 ACC_1A_1

在矩形 ABB_1A_1 中，因为 E, F 分别为 A_1B_1, AB 的中点，

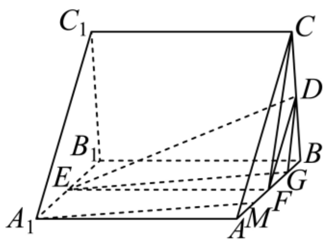
所以 $EF//AA_1, EF\not\subset$ 平面 $ACC_1A_1, AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $EF//$ 平面 ACC_1A_1，

因为 $DF\cap EF=F$，$DF, EF\subset$ 平面 DEF，

所以平面 $DEF//$ 平面 ACC_1A_1

因为 $DE\subset$ 平面 DEF，

所以 $DE//$ 平面 ACC_1A_1；



（2）因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

连接 CF，因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，F 为 AB 中点，

所以 $CF\perp AB$，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，所以 $CF\perp$ 平面 ABB_1A_1，

取 BF 的中点 G，连接 DG,EG，可得 $DG//CF$，故 $DG\perp$ 平面 ABB_1A_1，

又因为 $AM=\dfrac{1}{4}AB$，

则 A_1E/MG 且 $\mathbf{A_1E=MG}$，故四边形 $\mathbf{A_1EGM}$ 为平行四边形，

所以 $EG//A_1M$，

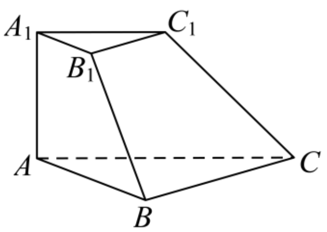
所以 $\angle DEG$ 即为直线 DE 与直线 A_1M 所成角，

设 $AB=4$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DEG$ 中，$DG=\dfrac{1}{2}CF=\sqrt{3},EG=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$，

所以 $\tan\angle DEG=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{51}}{17}$.

题型二：等体积法

【典例 2-1】（2024·高三·全国·阶段练习）如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=90^\circ$，$AA_1=A_1B_1=B_1C_1=1$，$AB=2$.



(1)求证：平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1；

(2)求 AC 与平面 BCC_1B_1 所成角正弦值.

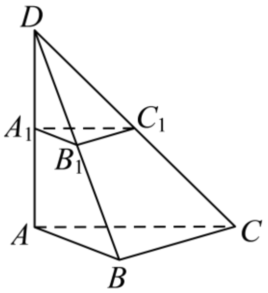
【解析】（1）由 $\angle ABC=90^\circ$，得 $AB\perp BC$，

由 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，则 $AA_1\perp BC$，

又 $AA_1\cap AB=A,AA_1,AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $BC\subset$ 平面 ABC_1B_1，所以平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1.

（2）将棱台补全为如下棱锥 $D-ABC$，



由$\angle ABC=90°$，$AA_1=A_1B_1=B_1C_1=1$，$AB=2$，易知$DA=AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{2}$，

由$AA_1\perp$平面ABC，$AB,AC,BC\subset$平面ABC，则$AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$，$AA_1\perp BC$，

所以$BD=2\sqrt{2}$，$CD=2\sqrt{3}$.

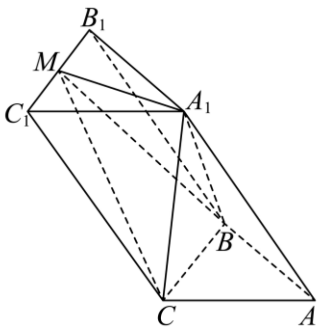
可得$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，

设A到平面BCC_1B_1的距离为h，又$V_{D-ABC}=V_{A-BCD}$，

则$\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{1}{3}h\times2\sqrt{2}$，可得$h=\sqrt{2}$，

设AC与平面BCC_1B_1所成角为θ，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则$\sin\theta=\frac{h}{AC}=\frac{1}{2}$.

【典例 2-2】（2024·高三·山东菏泽·开学考试）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，A_1在底面ABC上的射影为线段BC的中点，M为线段B_1C_1的中点，且$AA_1=2AB=2AC=4$，$\angle BAC=90^{\circ}$.



(1)求三棱锥$M-A_1BC$的体积；

(2)求MC与平面MA_1B所成角的正弦值.

【解析】(1）取BC的中点O，连接OA，OA_1，

因为A_1在底面ABC上的射影为O，

所以$OA_1\perp$面ABC，

在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，面ABC // 面$A_1B_1C_1$，

所以$OA_1\perp$面$A_1B_1C_1$.因为$MA_1\subset$面$A_1B_1C_1$，

所以$OA_1\perp MA_1$，

在$\triangle A_1B_1C_1$中，M为线段B_1C_1的中点，$B_1C_1\perp MA_1$，

因为 $BC // B_1C_1$，

所以 $BC \perp MA_1$，

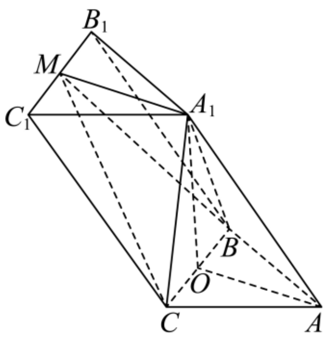
因为 $OA_1 \subset$ 面 A_1BC， $BC \subset$ 面 A_1BC， $OA_1 \cap BC = O$，

所以 $MA_1 \perp$ 面 A_1BC，

$\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 2$， $\angle BAC = 90^{\circ}$， 所以 $BC = 2\sqrt{2}$， $OA = \sqrt{2}$，

所以 $V_{M-A_1BC} = \frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC} \cdot MA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}BC \cdot OA_1 \cdot MA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}BC \cdot \sqrt{AA_1^2 - OA^2} \cdot MA_1$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{16-2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$；



（2）设 C 到平面 MA_1B 的距离为 d，则

在 $\mathrm{Rt}\triangle MA_1B$ 中， $MA_1 = \sqrt{2}$， $A_1C = A_1B = \sqrt{OA_1^2 + OB^2} = \sqrt{14+2} = 4$，

所以 $S_{\triangle MA_1B} = \frac{1}{2}MA_1 \cdot A_1B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$，

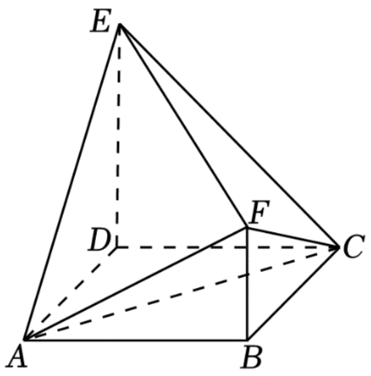
所以 $d = \frac{3V_{M-A_1BC}}{S_{\triangle MA_1B}} = \sqrt{7}$，

设 MC 与平面 MA_1B 所成角为 θ，则

$\sin\theta = \frac{d}{MC} = \frac{d}{\sqrt{MA_1^2 + A_1C^2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2+16}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$，

所以 MC 与平面 MA_1B 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

【变式 2-1】（2024·高二·浙江绍兴·期末）如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， $ED \perp$ 平面 $ABCD$， $FB // ED$， $AB = ED = 2FB = 2$．

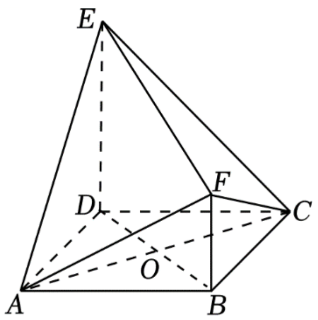


(1)求证：$AC \perp$平面$BDEF$；

(2)求BC与平面AEF所成角的正弦值．

【解析】（1）

连接BD交AC于O，如图，



由四边形$ABCD$为正方形，得$AC \perp BD$，

又$ED \perp$平面$ABCD$，$AC \subset$平面$ABCD$，则$ED \perp AC$，

而$FB//ED$，即B，D，E，F四点共面，又$ED \cap BD = D$，且$ED, BD \subset$平面$BDEF$，

所以$AC \perp$平面$BDEF$．

（2）因为$BC//AD$，则BC与平面AEF所成角等于AD与平面AEF所成角，

显然$AE = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$，$AF = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$，$EF = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2} = 3$，

在$\triangle AEF$中，由余弦定理得$\cos\angle AEF = \dfrac{AE^2+EF^2-AF^2}{2AE \cdot EF} = \dfrac{8+9-5}{2\times 2\sqrt{2}\times 3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\sin\angle AEF = \sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此$S_{\triangle AEF} = \dfrac{1}{2}AE \cdot EF\sin\angle AEF = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3$，

设点D到平面AEF的距离为d，

由$ED \perp$平面$ABCD$，知$DE \perp AB$，而$AD \perp AB$，$AD \cap DE = D$，则$AB \perp$平面ADE，

又$FB//ED$，$FB \not\subset$平面ADE，$ED \subset$平面ADE，

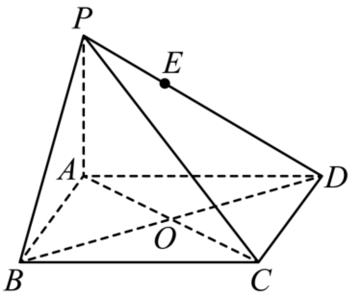
则$FB//$平面ADE，即有点F到平面ADE的距离为AB长2，又$S_{\triangle ADE} = \dfrac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$，

由$V_{D-AEF} = V_{F-ADE}$，得$\dfrac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot d = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ADE}\times 2$，即$\dfrac{1}{3}\times 3d = \dfrac{1}{3}\times 2\times 2$，解得$d = \dfrac{4}{3}$，

所以 BC 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\frac{d}{AD}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{2}{3}$.

【过关测试】

1．（2024·高一·北京怀柔·期末）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA=a, AC\bigcap BD=O$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$.



(1)证明：平面 $PBD\perp$ 平面 PAC；

(2)设平面 $PBC\cap$ 平面 PAD 于直线 l，证明：$BC//l$；

(3)若 $\overrightarrow{PE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$，在线段 BC 上是否存在点 F，使得 $EF//$ 平面 PAB，若存在点 F，则 a 为何值时，直线 EF 与底面 $ABCD$ 所成角为 $45°$.

【解析】（1）∵ $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，∴ $PA\perp BD$

又底面 $ABCD$ 为正方形，∴ $AC\perp BD$

而 $PA\bigcap AC=A$，$PA, AC\subset$ 平面 PAC，∴ $BD\perp$ 平面 PAC，

又∵ $BD\subset$ 平面 PBD，∴平面 $PBD\perp$ 平面 PAC.

（2）在正方形 $ABCD$ 中，$BC//AD$，$BC\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，

∴ $BC//$ 平面 PAD，∵ $BC\subset$ 平面 PBC，平面 $PBC\cap$ 平面 $PAD=l$，

∴ $BC//l$.

（3）存在点 F 在 BC 的 $\frac{1}{3}$ 处，使得 $EF//$ 平面 PAB.

在线段 PA 上取点 K，使 $\frac{PK}{PA}=\frac{1}{3}$ 连接 KE，KB，EF.

∵ $\triangle PAD$ 中，$\overrightarrow{PE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$，即 $\frac{PE}{PD}=\frac{PK}{PA}=\frac{1}{3}$，

∴ $KE//AD$，且 $KE=\frac{1}{3}AD$，

在正方形 $ABCD$ 中，F 在 BC 的 $\frac{1}{3}$ 处，∴ $BF//AD$，且 $BF=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}AD$，

∴ $BF//KE$，且 $BF=KE$，∴ $BFEK$ 为平行四边形，

∴ $EF//BK$，又 $BK\subset$ 平面 PAB，$EF\not\subset$ 平面 PAB，∴ $EF//$ 平面 PAB，

在 AD 的 $\frac{1}{3}$ 处取点 M，连接 EM, FM .

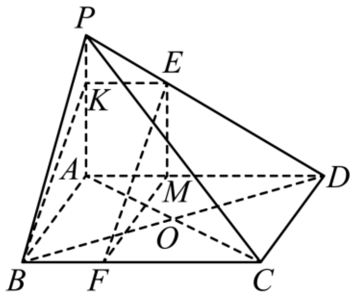
$\triangle PAD$ 中，点 E，M 分别为 PA, AD 的 $\frac{1}{3}$ 处，$\therefore PA // EM$，且 $\frac{EM}{PA}=\frac{2}{3}$

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore EM \perp$ 平面 $ABCD$，

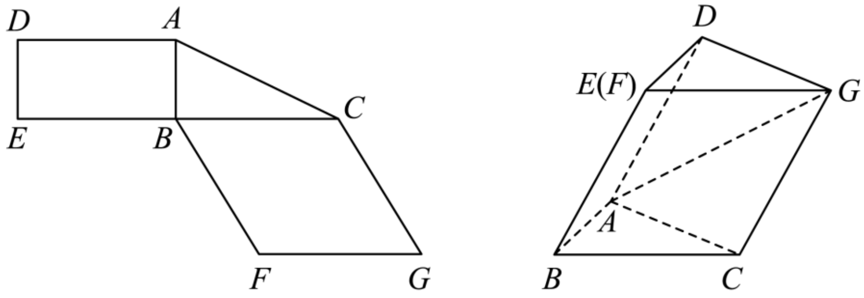
$\therefore EF$ 在平面 $ABCD$ 上的射影 MF，

$\therefore \angle EFM$ 即为 EF 与底面 $ABCD$ 所成角，

在 $Rt\triangle EMF$ 中，$FM=2$，若 $\angle EFM=45°, EM=2$，$\therefore PA=a=3$



2．（2024·高一·山东威海·期末）图①是由矩形 $ADEB$，$Rt\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$，$BE=BF=2$，$\angle CBF=60°$.将其沿 AB，BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连接 DG，如图②.



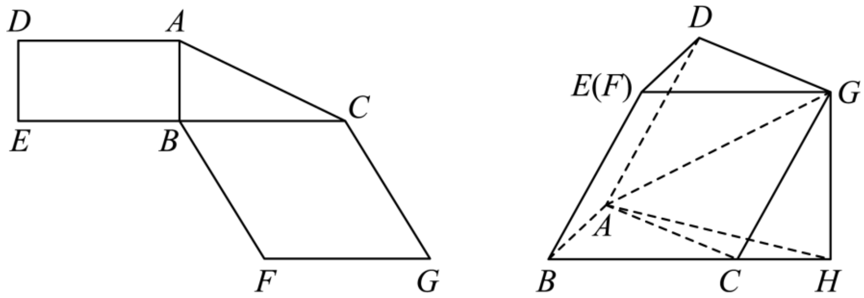
图①　　　　图②

(1)证明：平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$；

(2)证明：$DG //$ 平面 ABC；

(3)求直线 AG 与平面 ABC 所成角的正切值.

【解析】(1)



图①　　　　图②

由题意知 $AB \perp BE$，$AB \perp BC$，$BE \cap BC=B, BE, BC \subset$ 平面 $BCGE$，

所以 $AB \perp$ 平面 $BCGE$，

又 $AB \subset$ 平面 ABC，

所以平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$.

（2）法一：由题意可知 $AD//BE, AD=EB$，$CG//BE, CG=BE$，

所以 $AD//CG, AD=CG$，

所以四边形 $ACGD$ 为平行四边形，所以 $AC//DG$，

又 $AC \subset$ 平面 ABC，$DG \not\subset$ 平面 ABC，所以 $DG//$ 平面 ABC.

法二：因为 $ED//AB$，$AB \subset$ 平面 ABC，$ED \not\subset$ 平面 ABC，所以 $ED//$ 平面 ABC，

$EG//BC$，$BC \subset$ 平面 ABC，$EG \not\subset$ 平面 ABC，所以 $EG//$ 平面 ABC，

$ED \cap EG = E, ED, EG \subset$ 平面 EDG，

所以平面 $DEG//$ 平面 ABC，

又 $DG \subset$ 平面 DEG，所以 $DG//$ 平面 ABC.

（3）过 G 作 $GH \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H，连接 AH，

因为平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$，且交线为 $BC, GH \subset$ 平面 $BCGE$，

所以 $GH \perp$ 平面 ABC，

所以 AG 在平面 ABC 内的射影为 AH，

所以 AG 与平面 ABC 所成的角为 $\angle GAH$，

因为 $\angle CBF = 60^\circ$，所以 $\angle GCH = 60^\circ$，

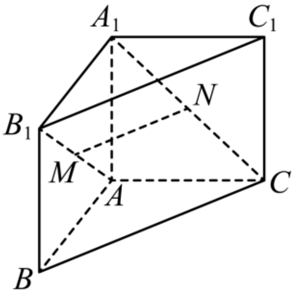
在 $\mathrm{Rt}\triangle CHG$ 中，$CH = 2\cos 60^\circ = 1$，$GH = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，$AB = 1$，$BH = 1+2=3$，所以 $AH = \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$，

所以 $\tan\angle GAH = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$，

所以 AG 与平面 ABC 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

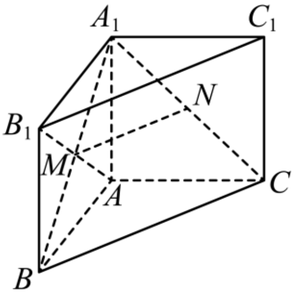
3．（2024·高一·浙江宁波·期末）如图，在堑堵 $ABC-ABC$ 中（注：堑堵是一长方体沿不在同一面上的相对两棱斜解所得的几何体，即两底面为直角三角形的直三棱柱，最早的文字记载见于《九章算术》商功章），已知 $AA_1 \perp$ 平面 ABC，$\angle BAC = 90^\circ$，$AB = AC = AA_1 = 2$，点 M、N 分别是线段 B_1A、A_1C 的中点.



(1)证明：$MN//$ 平面 ABC；

(2)求直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值.

【解析】(1）证明：连接 A_1B，



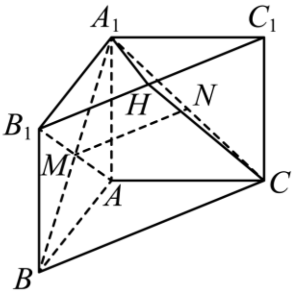
因为 $AA_1//BB_1$ 且 $AA_1=BB_1$，故四边形 AA_1B_1B 为平行四边形，

因为 M 为 AB_1 的中点，则 M 为 A_1B 的中点，

又因为 N 为 A_1C 的中点，所以，$MN//BC$，

因为 $MN\not\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $MN//$ 平面 ABC.

（2）取 B_1C_1 中点 H，由题意可知 $A_1B_1=A_1C_1=2$，所以 $A_1H\perp B_1C_1$，且 $A_1B_1\perp A_1C_1$，



因为 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1H\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $A_1H\perp AA_1$，

又 $AA_1//CC_1$，所以 $A_1H\perp CC_1$，

因为 $B_1C_1\cap CC_1$，CC_1、$B_1C_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $A_1H\perp$ 平面 BCC_1B_1.

连接 CH，则 $\angle A_1CH$ 是直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成的角.

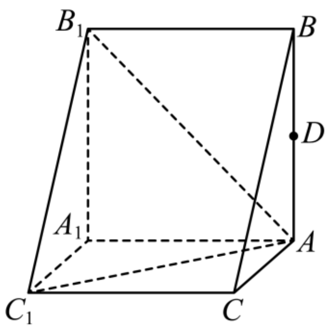
由题意 $A_1C=\sqrt{AC^2+AA_1^2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$，同理可得 $B_1C_1=2\sqrt{2}$，

则 $A_1H=\dfrac{1}{2}B_1C_1=\sqrt{2}$，

因为 $A_1H\perp$ 平面 BCC_1B_1，$CH\subset$ 平面 BCC_1B_1，则 $A_1H\perp CH$，则 $\sin\angle A_1CH=\dfrac{A_1H}{A_1C}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $\angle A_1CH\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\angle A_1CH=\dfrac{\pi}{6}$，即直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.（2024·高一·福建福州·期末）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AB 的中点，E 为侧棱 CC_1 的动点，且 $CE=\lambda CC_1$ $(0<\lambda<1)$.



(1)是否存在实数λ，使得DE // 平面AB_1C_1？若存在，求出λ的值；若不存在，请说明理由；

(2)设$AB=AA_1=4$，$AC=3$，$BC=5$，求DE与平面ABB_1A_1所成角的正弦值的取值范围．

【解析】（1）解法一：存在实数$\lambda=\frac{1}{2}$，使得DE // 平面AB_1C_1．

理由如下：

如图，连接EA_1，DA_1，设$DA_1\cap AB_1=M$，$EA_1\cap AC_1=N$，

因为$CE=\frac{1}{2}CC_1$，AA_1 // CC_1，$AA_1=CC_1$，

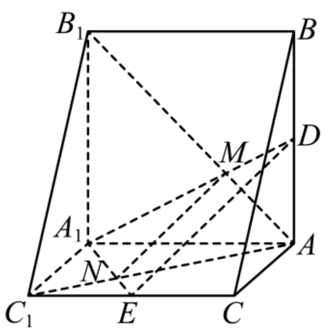
所以$AA_1=2EC_1$，AA_1 // EC_1，所以$\frac{EN}{A_1N}=\frac{EC_1}{A_1A}=\frac{1}{2}$，

因为D为AB的中点，AB // A_1B_1，$AB=A_1B_1$，

所以$2AD=A_1B_1$，AD // A_1B_1，所以$\frac{DM}{A_1M}=\frac{AD}{B_1A_1}=\frac{1}{2}$，

所以$\frac{EN}{A_1N}=\frac{DM}{A_1M}=\frac{1}{2}$，所以$MN$ // DE，

又因为$MN\subset$平面AB_1C_1，$DE\not\subset$平面AB_1C_1，所以DE // 平面AB_1C_1；



解法二：存在实数$\lambda=\frac{1}{2}$，使得DE // 平面AB_1C_1．理由如下：

如图，连接A_1B交AB_1于点G，连接GD，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，四边形ABB_1A_1为矩形，所以点G为A_1B的中点，

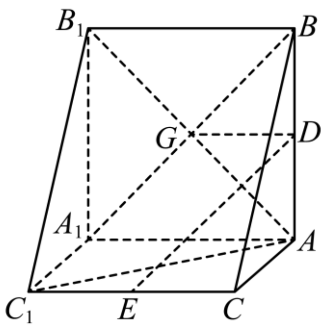
因为D为棱AB的中点，所以GD // A_1A，$GD=\frac{1}{2}A_1A$，

又因为$C_1E \parallel A_1A$，$C_1E=\dfrac{1}{2}A_1A$，

所以$C_1E \parallel GD$，$C_1E=GD$，所以四边形$GDEC_1$为平行四边形，所以$DE \parallel GC_1$，

又因为$GC_1 \subset$平面AB_1C_1，$DE \not\subset$平面AB_1C_1，

所以$DE \parallel$平面AB_1C_1；



（2）因为$AB=AA_1=4$，$AC=3$，$BC=5$，所以$AB^2+AC^2=BC^2$，所以$AC \perp AB$，

过点E作$EK \parallel AC$交AA_1于点K，则$EK \perp AB$，，

又因为$AC \perp AA_1$，所以$EK \perp AA_1$，

因为$AB \cap AA_1=A$，$AB,AA_1 \subset$平面ABB_1A_1，所以$EK \perp$平面ABB_1A_1，

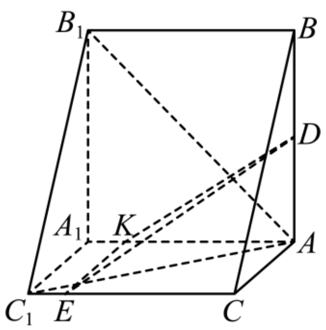
所以$\angle EDK$为DE与平面ABB_1A_1所成角，

设$CE=x(0<x<4)$，在$\mathrm{Rt}\triangle EDK$中，$EK=AC=3$，

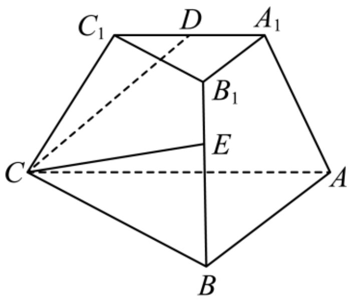
$$DE=\sqrt{EK^2+KD^2}=\sqrt{EK^2+AK^2+AD^2}=\sqrt{3^2+x^2+2^2}=\sqrt{13+x^2},$$

所以$\sin\angle EDK=\dfrac{EK}{DE}=\dfrac{3}{\sqrt{13+x^2}} \in \left(\dfrac{3\sqrt{29}}{29},\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right)$，

即DE与平面ABB_1A_1所成角的正弦值的取值范围为$\left(\dfrac{3\sqrt{29}}{29},\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.



5．（2024·高一·辽宁大连·期末）在正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=6$，$A_1B_1=AA_1=3$，D为A_1C_1中点，E在BB_1上，$\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{B_1E}$.

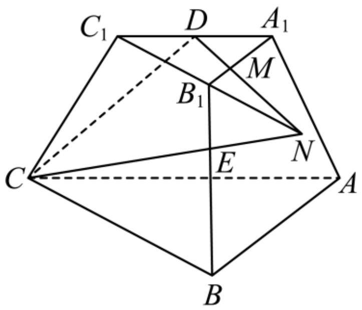


(1)请作出 A_1B_1 与平面 CDE 的交点 M，并写出 A_1M 与 MB_1 的比值（在图中保留作图痕迹，不必写出画法和理由）；

(2)求直线 BM 与平面 ABC 所成角的正弦值.

【解析】(1) ①作图步骤：延长 CE, C_1B_1，使其相交于 N，连接 DN，则可得 $DN \cap A_1B_1 = M$；

作图如下：



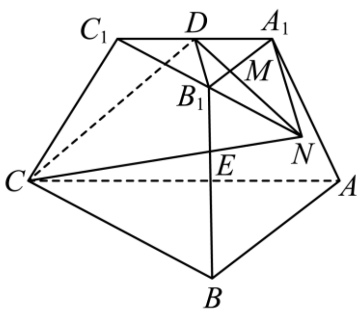
作图理由：在平面 CBB_1C_1 中，显然 CE 与 C_1B_1 不平行，延长相交于 N，

由 $N \in CE$，则 $N \in$ 平面 CED，由 $D \in$ 平面 CED，则 $DN \subset$ 平面 CED，

由 $N \in B_1C_1$，$D \in A_1C_1$，则 $DN \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，可得 $ND \cap A_1B_1 = M$

故 $A_1B_1 \cap$ 平面 $CDE = M$.

②连接 DB_1, A_1N，如下图所示：



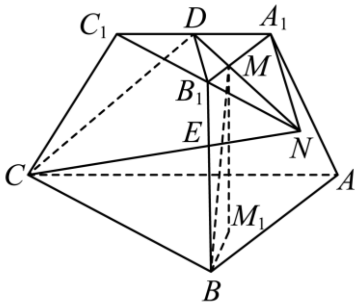
在正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，$BC // B_1C_1$，即 $B_1N // BC$，易知 $\triangle BCE \sim \triangle B_1NE$，

则 $\dfrac{B_1N}{BC} = \dfrac{B_1E}{BE}$，由 $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EB_1}$，且 $BC = 6$，则 $B_1N = 3$，显然 $B_1C_1 = B_1N = 3$，

由 B_1, D 分别为 C_1N, C_1A_1 的中点，则 $DB_1 = \dfrac{1}{2}A_1N$，且 $B_1D // NA_1$，

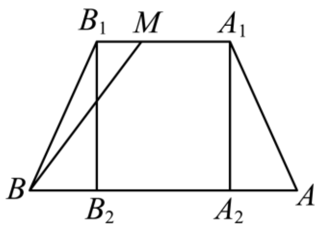
易知$\triangle B_1DM \sim \triangle A_1NM$，故$\frac{A_1M}{MB_1}=\frac{A_1N}{DB_1}=2$.

（2）由题意，过M作平面ABC的垂线，垂足为M_1，并连接BM_1，如下图所示：



由（1）可知：$\frac{A_1M}{MB_1}=2$且$A_1B_1=B_1C_1=3$，则$B_1M=1$，由$AB=6$，$AA_1=A_1B_1=3$，

在侧面AA_1B_1B中，过B_1,A_1分别作AB的垂线，垂足分别为B_2,A_2，如下图所示：



易知$BB_2=\frac{1}{2}\left(AB-A_2B_2\right)=\frac{1}{2}\left(AB-A_1B_1\right)=\frac{3}{2}$，$\cos\angle B_1BA=\frac{BB_2}{BB_1}=\frac{1}{2}$，所以$\cos\angle BB_1A_1=-\frac{1}{2}$，

在$\triangle BB_1M$中，$BM^2=BB_1^2+B_1M^2-2\times BB_1\times B_1M\times\cos\angle BB_1A_1=13$，则$BM=\sqrt{13}$，

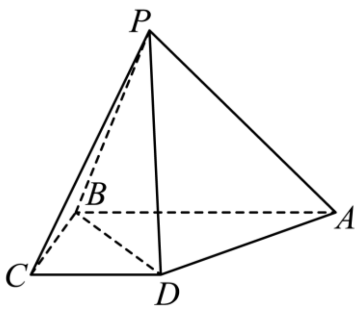
棱台的高$MM_1=\sqrt{3^2-\left[\frac{2}{3}\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2}=\sqrt{6}$，

由图可知直线BM与平面ABC所成角为$\angle MBM_1$，

因为$MM_1\perp$平面ABC，且$M_1B\subset$平面ABC，所以$M_1B\perp MM_1$，

所以$\sin\angle MBM_1=\frac{MM_1}{BM}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{78}}{13}$.

6.（2024·高一·宁夏吴忠·期末）四棱锥$P-ABCD$中，$PB=PD^2=AB=2BC=2CD=2, AB//CD, \angle ABC=90^\circ$.



(1)求证：平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

(2)当 $PD\perp$ 平面 $ABCD$ 时，求直线 PC 与平面 PAD 所成的角的正切值.

【解析】(1）证明：取 AB 的中点 E，连接 DE，

因为 $AB=2BC=2CD=2, AB//CD, \angle ABC=90^\circ$，

则四边形 $CDEB$ 为边长为 1 的正方形，可得 $AD=\sqrt{ED^2+EA^2}=\sqrt{2}$，

由 $BD=\sqrt{2}, AD=\sqrt{2}, AB=2$，可得 $BD^2+AD^2=AB^2$，所以 $BD\perp AD$，

又由 $PD=\sqrt{2}, BD=\sqrt{2}, PB=2$，可得 $PD^2+BD^2=4=PB^2$，所以 $BD\perp PD$，

因为 $AD\cap PD=D$，且 $PD, AD\subset$ 平面 PAD，所以 $BD\perp$ 平面 PAD，

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD.

（2）过点 C 作 $CF//BD$ 交 AD 的延长线于点 F，连接 PF，

由（1）知 $BD\perp$ 平面 PAD，所以 $CF\perp$ 平面 PAD，

所以 $\angle CPF$ 为 PC 与平面 PAD 所成的角，

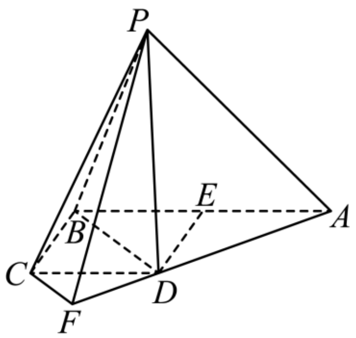
因为 $CF\perp FD, \angle CDF=45^\circ$，所以 $\triangle CFD$ 为等腰直角三角形，所以 $CF=DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $DF\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp DF$，

所以 $PF=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

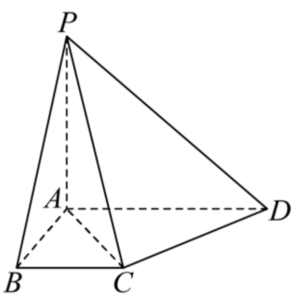
因为 $CF\perp$ 平面 PAD，且 $PF\subset$ 平面 PAD，所以 $CF\perp PF$，

所以 $\tan\angle CPF=\dfrac{CF}{PF}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，即 PC 与平面 PAD 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



7.（2024·高一·上海奉贤·期末）如图，平面 $ABCD$ 外一点 P，$PA\perp$ 平面$ABCD$，$AD//BC$，$AB\perp BC$，

$PA=AD=4$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$，$CD=2\sqrt{3}$.



(1)求异面直线 PC 与 AD 所成角的大小

(2)证明：$DC\perp$平面PAC；

(3)求 AD 与平面 PCD 所成角的余弦值.

【解析】(1) 由题意，

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\perp BC$，

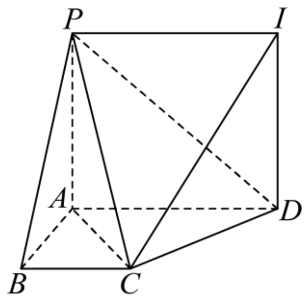
$AB\subset$面$ABCD$，$AD\subset$面$ABCD$，

$\therefore PA\perp AB, PA\perp AD$，

$\because PA=AD=4$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$，$CD=2\sqrt{3}$

作 $PI//AD$ 且 $PI=AD=4$，则 $\angle CPI$ 即为异面直线 PC 与 AD 所成角

$ID=PA=4$，$\angle CDI=90^\circ$，



由几何知识得，$CD=\sqrt{AB^2+(AD-BC)^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(4-1)^2}=2\sqrt{3}$，

在 Rt$\triangle CDI$ 中，由勾股定理得，

$CI=\sqrt{CD^2+ID^2}=2\sqrt{7}$，

在$\triangle CIP$ 中，由余弦定理得，

$CI^2=CP^2+PI^2-2CP\cdot PI\cos\angle CPI$，

解得：$\cos\angle CPI=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$，

$\therefore \sin\angle CPI=\sqrt{1-\cos^2\angle CPI}=\sqrt{\dfrac{19}{20}}$，

$\tan\angle CPI=\dfrac{\sin\angle CPI}{\cos\angle CPI}=\sqrt{19}$，

$\therefore$直线 PC 与 AD 所成角的大小为 $\arctan\sqrt{19}$.

(2) 由题意及 (1) 得，

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp AD, PA=AD=4, AB=\sqrt{3}, BC=1$

在 Rt$\triangle ADP$ 中，由勾股定理得，$PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理得，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

在$\triangle ACD$中，由勾股定理得，$AC^2+CD^2=AD^2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle CDP$中，由勾股定理得，$AD^2+CP^2=PD^2$，

$\therefore AC\perp CD, AP\perp CD$，

$\because AC\cap AP=A$，$AC, AP\subset$平面PAC，

$\therefore DC\perp$平面PAC.

（3）由题意及（1）（2）得，

作$AH\perp PC$，垂足为H，连接DH，

因为$DC\perp$平面PAC，$AH\subset$平面PAC，

$\therefore AH\perp CD$，

$\because CD\cap PC=C$且$CD, PC\subset$平面PAC，

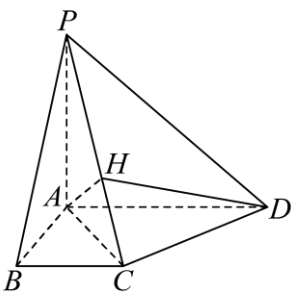
$\therefore \mathrm{AH}\perp$平面$PCD$，

$\therefore \angle ADH$为AD与平面PCD所成的角，

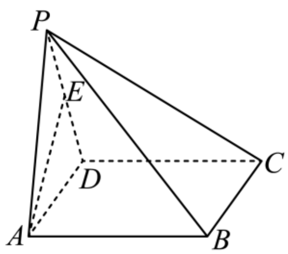
在$\triangle PAC$中，$AH=\dfrac{PA\cdot AC}{PC}=\dfrac{4\times 2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，

$\sin\angle ADH=\dfrac{AH}{DA}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$直线AD与平面PCD所成角的余弦值为：$\sqrt{1-\sin^2\angle ADH}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



8．（2024·高一·宁夏银川·期末）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$\triangle PAD$是边长为2的正三角形，$CD=\sqrt{3}$，平面$PAD\perp$平面$ABCD, E$为棱PD的中点.



(1)求证：$AE\perp$平面PCD；

(2)求直线PC与平面$ABCD$所成角的余弦值.

【解析】（1）证明：在$\triangle PAD$中，$PA=AD, E$为PD的中点，所以$AE\perp PD$，

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD, AD\perp CD, CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

因为 $AE\subset$ 平面 PAD，所以 $AE\perp CD$.

因为 $CD\subset$ 平面 $PCD, PD\subset$ 平面 $PCD, PD\cap CD=D$，

所以 $AE\perp$ 平面 PCD.

（2）取 AD 的中点 M，连接 PM, MC.

在 $\triangle PAD$ 中，$PA=PD=2$，所以 $PM\perp AD, PM=\sqrt{3}$.

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD, PM\subset$ 平面 PAD，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $\angle PCM$ 为直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MCD$ 中，$MD=1, DC=\sqrt{3}$，则 $MC=2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMC$ 中，$MC=2$，$PM=\sqrt{3}$，则 $PC=\sqrt{PM^2+MC^2}=\sqrt{7}$

所以 $\cos\angle PCM=\dfrac{MC}{PC}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.