浙江省象山中学
ZHE JIANG XIANG SHAN HIGH SCHOOL

# 九省联考18题

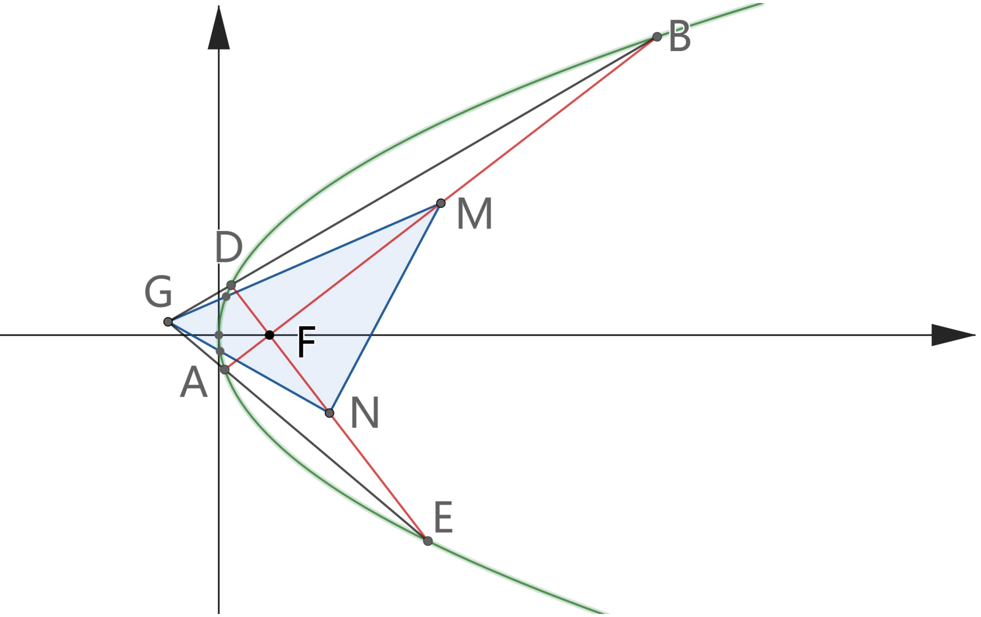
象山中学
许泽建

# 试题呈现

18.（本题17分）已知抛物线$C: y^2 = 4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

（1）证明：直线MN过定点；

（2）设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.




知识点：1.三角形面积计算；
2.点线距离；
3. 抛物线的性质

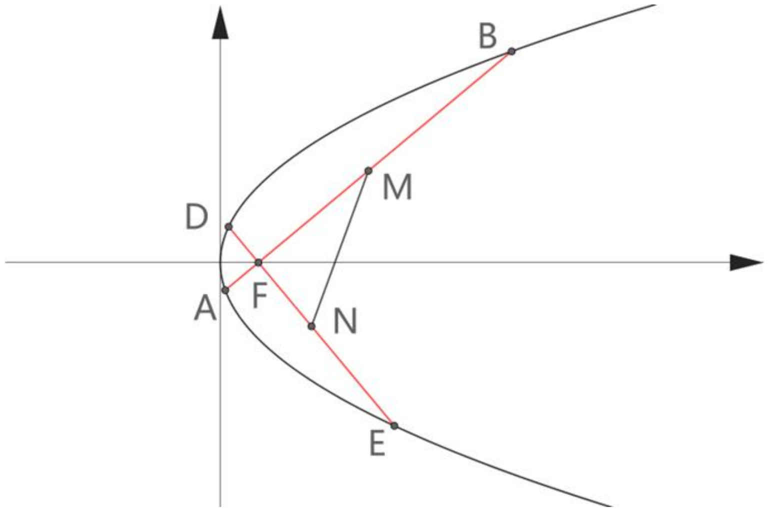
思想方法：转化与化归、数形结合等

核心素养：逻辑推理、数学运算等

# 试题呈现

18.(本小题17分)已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

(1)证明：直线MN过定点;




1、已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点 A（−2，0）在 C 上。

（1）求椭圆 C 的标准方程；

2023年全国乙卷

4、已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 X 轴，Y 轴，且过点 A（0，-2），B（$\dfrac{3}{2}$，-1）l，N，证

两点。

（1）求椭圆 E 的方程；

2022年全国乙卷

2、已知双曲线 C 的中心为坐标原点，左焦点为（$-2\sqrt{5}$，0），离心率为$\sqrt{5}$。

（1）求 C 的方程；

2023年新课标 II 卷

（2）记 C 的左，右顶点分别为 $A_1$，$A_2$，过点（-4，0）的直线与 C 的左支相交于 M，N 两点，M 在第二象限，直线 M$A_1$与直线 N$A_2$相交于点 P，证明：点 P 在定直线上。

常规直线上定点问题

特殊探路，一般证明 → 先通过特殊情况确定定点，再转化为有方向、有目的的一般性证明

一般推理，特殊求解 → 设出定点坐标，建立一个直线系或曲线的方程，再根据参数的任意性得到一个关于定点坐标的方程组

# 试题解析

18. 已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中$B$，$D$在$x$轴上方，$M$，$N$分别为$AB$，$DE$的中点.

(1)证明：直线MN过定点；

## 解法1：一般推理，特殊求解

设出定点坐标 → 根据参数任意性得到方程求解

设$AB:x=my+1$,则$DE:x=-\frac{1}{m}y+1$

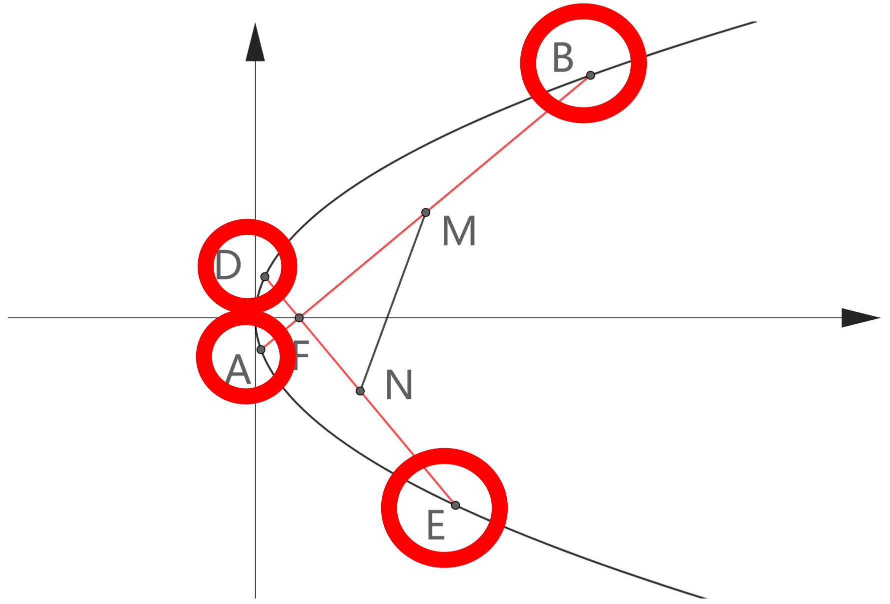
$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$得$y^2-4my-4=0, y_m=\frac{y_A+y_B}{2}=2m$

所以$M(2m^2+1,2m)$，同理得$N\left(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m}\right)$

设定点$P(x_p,y_p)$,则有$\frac{y_M-y_p}{x_M-x_p}=\frac{y_N-y_p}{x_N-x_p}$

得到$(3-x_p)\left(2m+\frac{2}{m}\right)+y_p\left(2m^2-\frac{2}{m^2}\right)=0$

由m的任意性可得$x_p=3, y_p=0$



# 试题解析

18. 已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中$B$，$D$在$x$轴上方，$M$，$N$分别为$AB$，$DE$的中点.

(1)证明：直线MN过定点;

## 解法2：特殊探路，一般证明

通过对称性和斜率为1的特殊位置确定定点为（3，0）

有目的地进行证明

设$AB: x=my+1$,则$DE: x=-\frac{1}{m}y+1$

$\begin{cases} x=my+1 \\ y^2=4x \end{cases}$得$y^2-4my-4=0, y_m=\frac{y_A+y_B}{2}=2m$

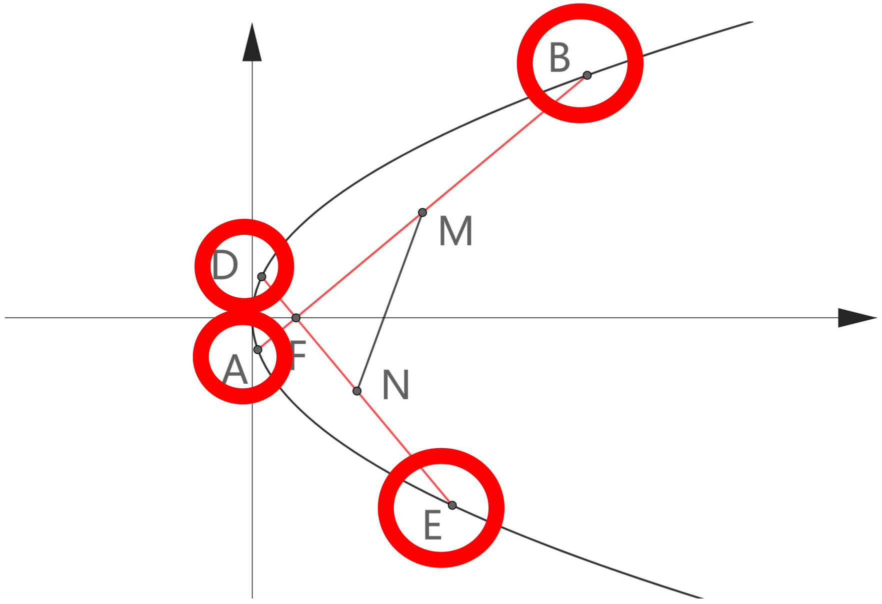
所以$M(2m^2+1,2m)$

同理得N$\left(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m}\right)$

于是只需要证明$\frac{y_M-0}{x_M-3}=\frac{y_N-0}{x_N-3}$

通过计算得$y_M\cdot(x_N-3)=y_N\cdot(x_M-3)$,得证

逻辑推理



# 试题解析

18. 已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

(2) 设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.

## 解法1：常规计算

设A$\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)\ D\left(\frac{y_3^2}{4},y_3\right),E\left(\frac{y_4^2}{4},y_4\right)$,则$k_{BD}=\dfrac{y_3-y_2}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}=\dfrac{4}{y_2+y_3}$

此时$BD$的方程为$y=\dfrac{4}{y_2+y_3}\left(x-\dfrac{y_2^2}{4}\right)+y_2$，即$y=\dfrac{4}{y_2+y_3}x+\dfrac{y_2y_3}{y_2+y_3}$

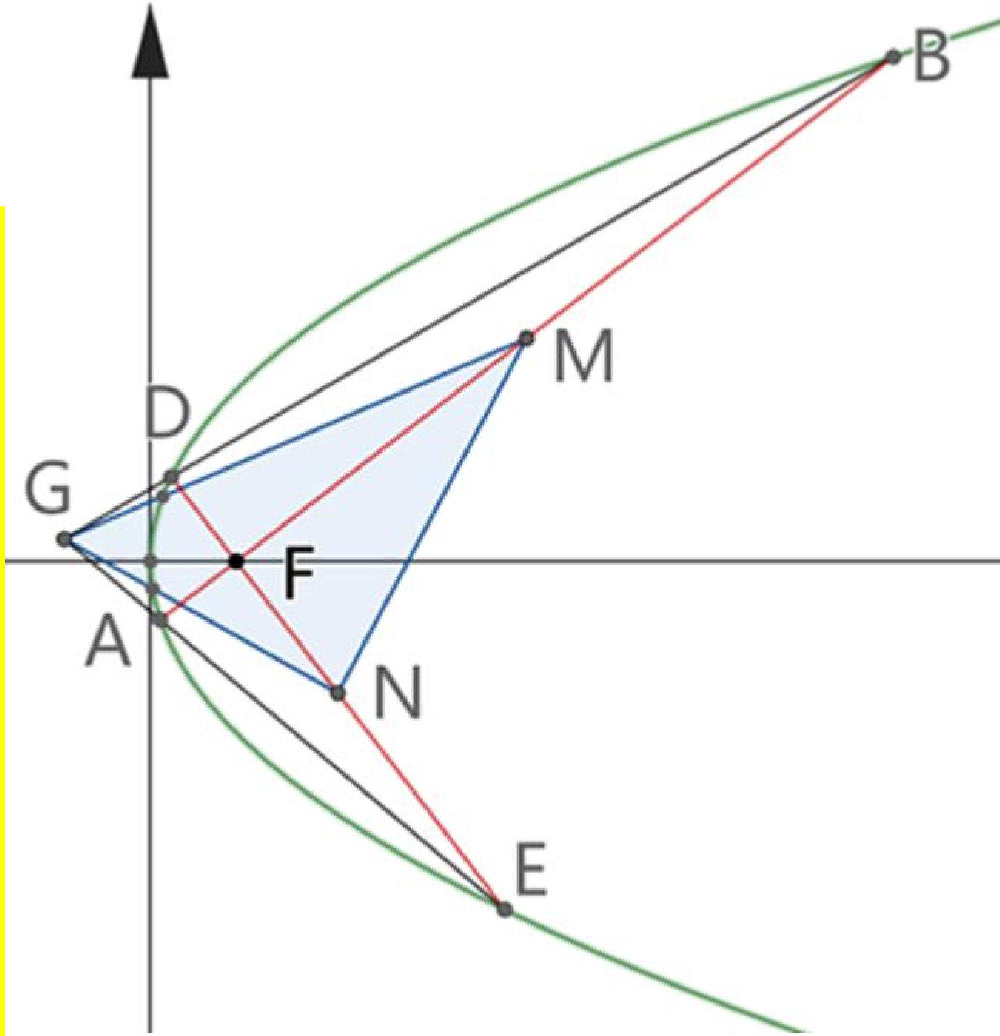
同理$AE$: $y=\dfrac{4}{y_1+y_4}x+\dfrac{y_1y_4}{y_1+y_4}$

联立直线$AE$和$BD$方程得到: $\left(\dfrac{4}{y_2+y_3}-\dfrac{4}{y_1+y_4}\right)x=\dfrac{y_1y_4}{y_1+y_4}-\dfrac{y_2y_3}{y_2+y_3}$

又$y_1y_2=y_3y_4=-4$，有

$$4(y_1+y_4-y_2-y_3)x=-4y_4-4y_1+4y_3+4y_2$$

解得$x=-1$



# 试题解析

18. 已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

(2)设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.

## 解法1：常规计算

带入$BD$得到$y_G=\frac{y_2y_3-4}{y_2+y_3}$

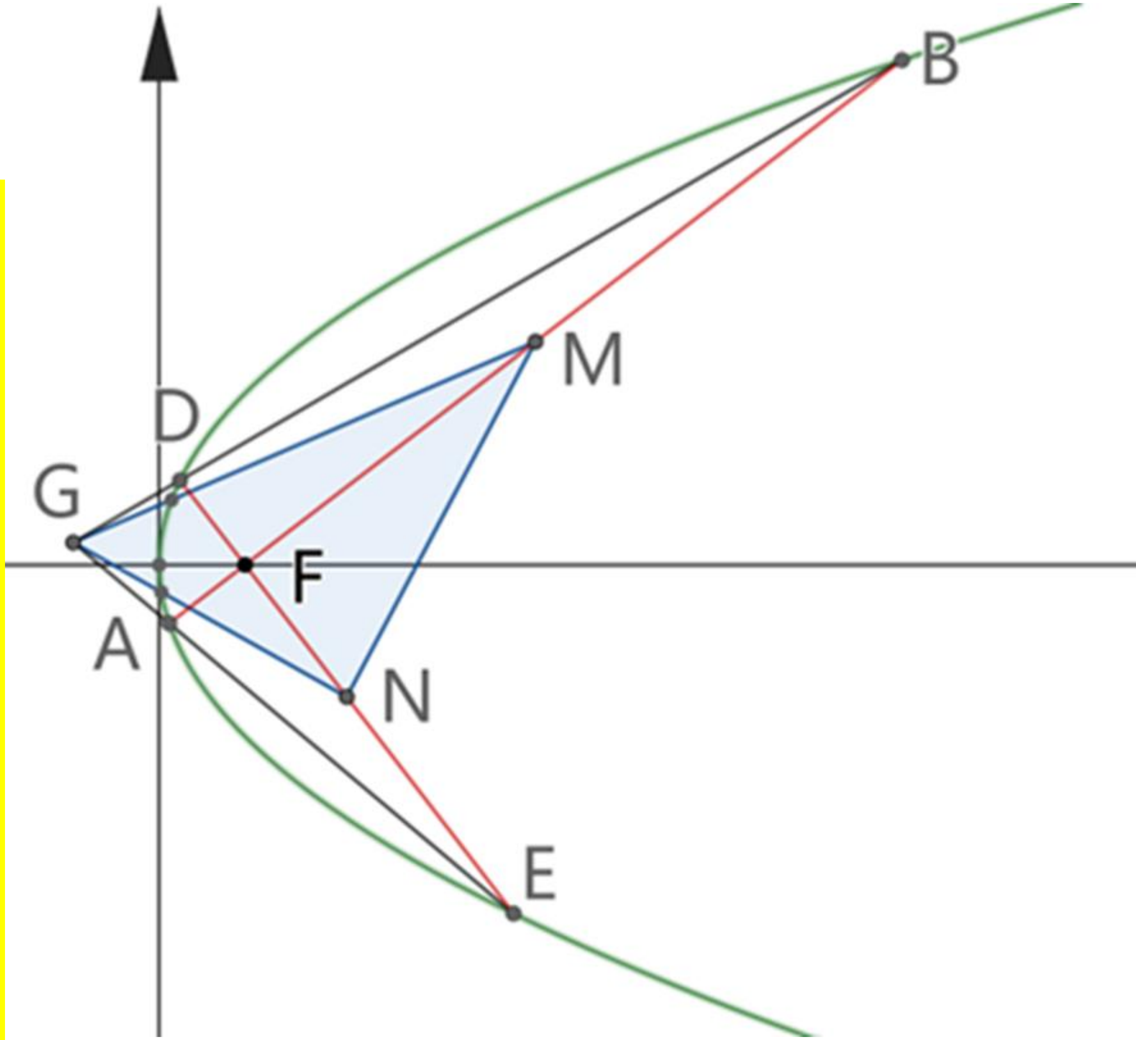
AB和抛物线联立，通过求根公式得到$y_2=2m+2\sqrt{m^2+1}$

同理$y_3=-\frac{2}{m}+2\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}$

带入得到$y_G=\frac{2(m-1)}{m+1}$，故G$\left(-1,\frac{2(m-1)}{m+1}\right)$

$MN:x=(m-\frac{1}{m})y+3$，G到MN的距离为：$d=\frac{2m^2+2}{\sqrt{m^2+(m^2-1)^2}}$；

$|\mathrm{MN}|=2\left(m+\frac{1}{m}\right)\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2+1}$



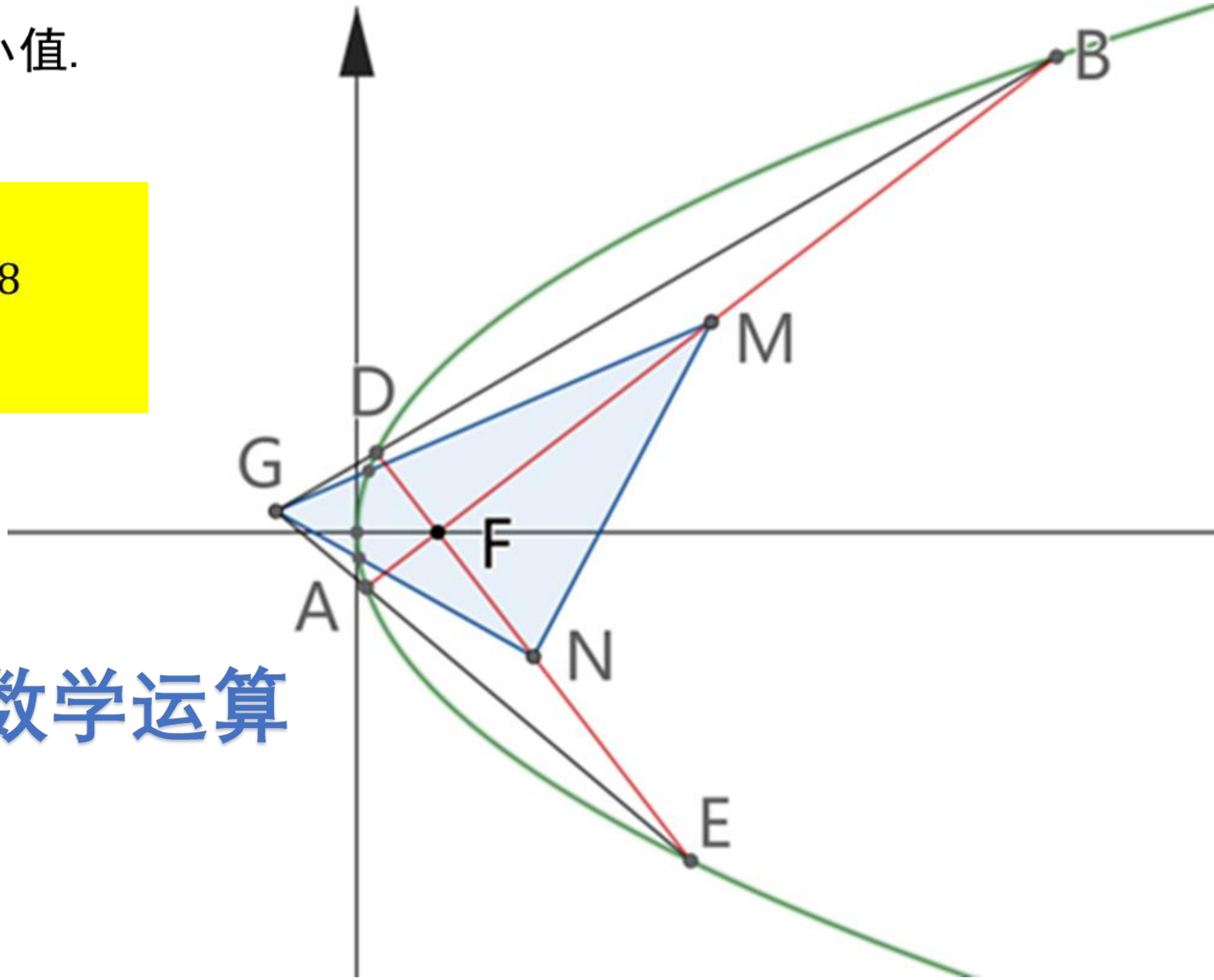
# 试题解析

18. 已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.
(2) 设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.

## 解法1：常规计算

最后$S=\frac{1}{2}d\cdot|MN|=\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(2m+\frac{2}{m}\right)=2\left(m+\frac{1}{m}\right)^2\geq 8$

当$m=\pm1$取到等号。



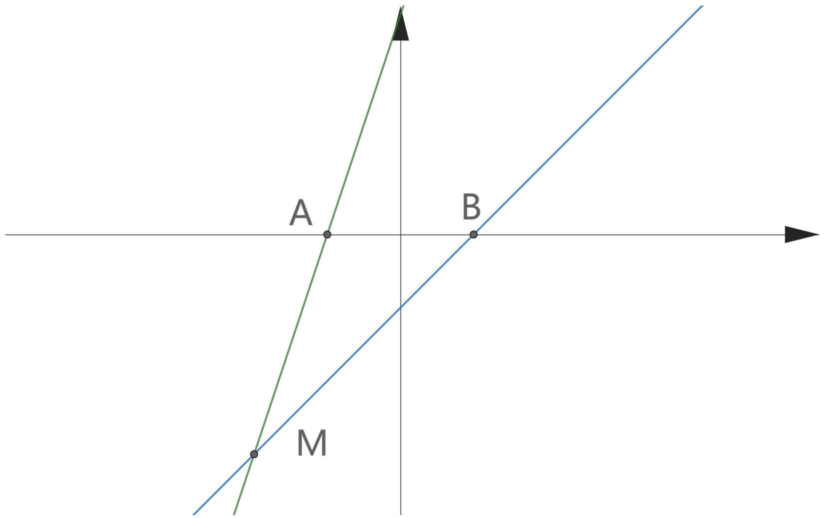

本题中，G点横坐标的求解为常规题，难点在于利用求根公式对G点纵坐标的计算，以及面积计算，计算量很大.

数学运算

# 试题解析

## 母题追溯 选择性必修一P139第11题；P145第9题

11.已知A,B两点的坐标分别是(-1,0),(1,0),直线AM，BM相交于点M，且直线AM的斜率于直线BM的斜率差是2,求点M的轨迹方程。




回归课本，本题的思路和书本中的母题思路一脉相承，是书本内核的延续，也是提升。

**普通高等学校招生全国统一考试大纲**内也表明，精心设计考察数学主体内容、体现数学素养的试题时，也要有反映数、形运动变化的试题以及研究型、探索型、开放型等类型的试题。

# 试题解析

18. 已知抛物线C: $y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

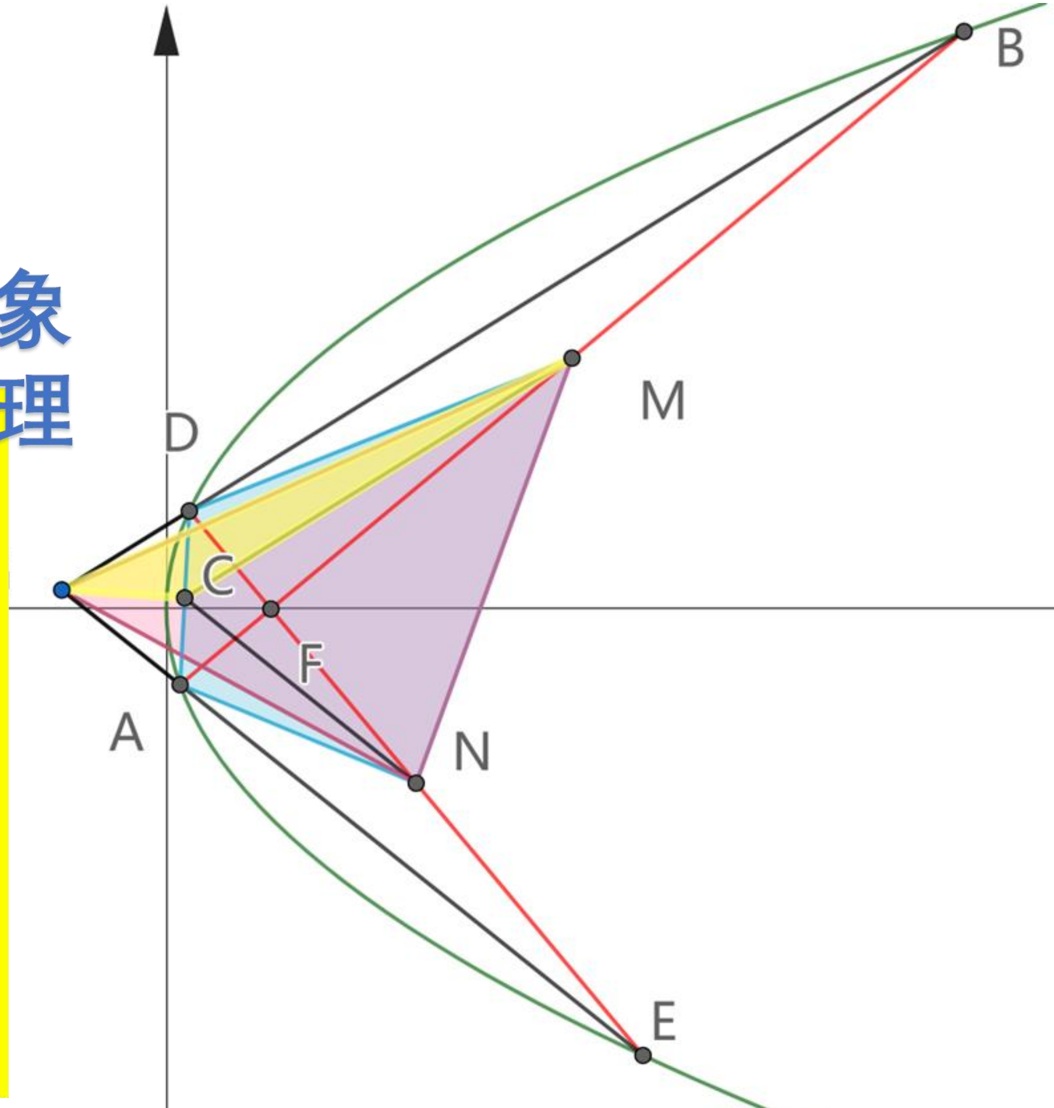
(2) 设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.

## 解法2：几何法

连接AD中点C与M, N，得到CM和CN分别是$\Delta ABD$和$\Delta DAE$的中位线

直观想象

逻辑推理




GB//CM,于是$S_{\Delta GCM}=S_{\Delta DCM}$;同理$S_{\Delta GCN}=S_{\Delta ACN}$

最后把三角形$\Delta GMN$面积转化成了四边形DANM的面积

所以$S=\frac{1}{2}AM\cdot DN$,

$AM,DN$均为焦点弦，且互相垂直，可用角度形式进行计算

设$AB$与$x$轴夹角为$\alpha$,

$$所以，|AB|=\frac{4}{sin^2\alpha};|DE|=\frac{4}{sin^2(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$

S= $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{sin^2\alpha}\cdot\frac{2}{sin^2(\alpha+\frac{\pi}{2})}=\frac{8}{sin^2 2\alpha}\geq 8$，当$sin^2 2\alpha=1$，即$\alpha=\frac{\pi}{4}$时取到最小值。

# 试题解析

18. 已知抛物线$C: y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

(2) 设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.

## 解法3：向量法

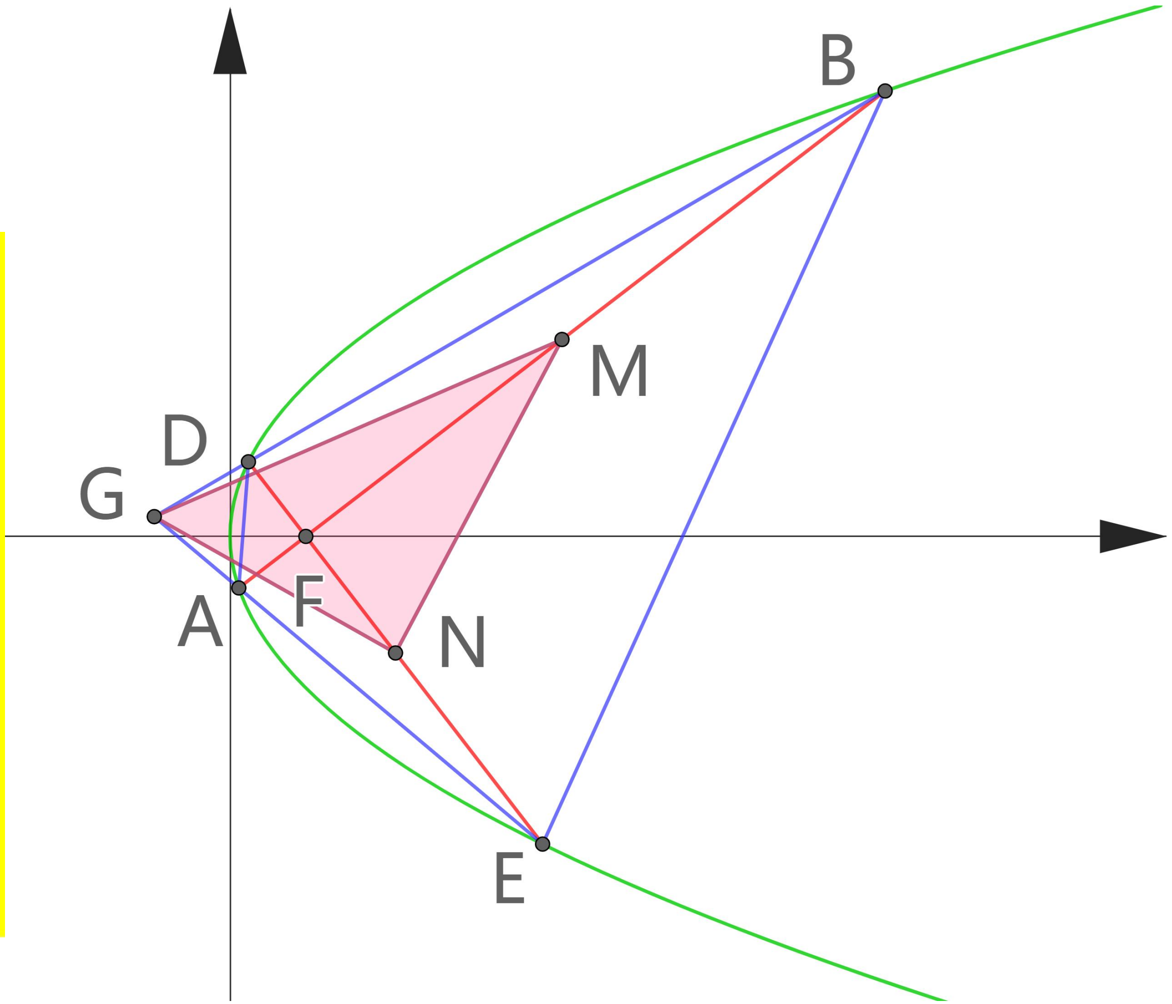
$$S_{\Delta GMN}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{GM}\times\overrightarrow{GN}\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}}{2}\right)\times\left(\frac{\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{8}\left|\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GE}\right|$$

$$=\frac{1}{8}\left|\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GE}\right|$$

$$=\frac{1}{8}\left|\left|\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GE}\right|-\left|\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GD}\right|\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left(S_{\Delta GBE}-S_{\Delta GDA}\right)=\frac{1}{4}S_{ADBE}$$



# 试题解析

18. 已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

(2)设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.

## 解法4：铅锤高水平宽

由极点极线的概念，抛物线的极线为$x=-1$

因为$AB$和$DE$过焦点，所以$EA$和$BD$焦点在极线上

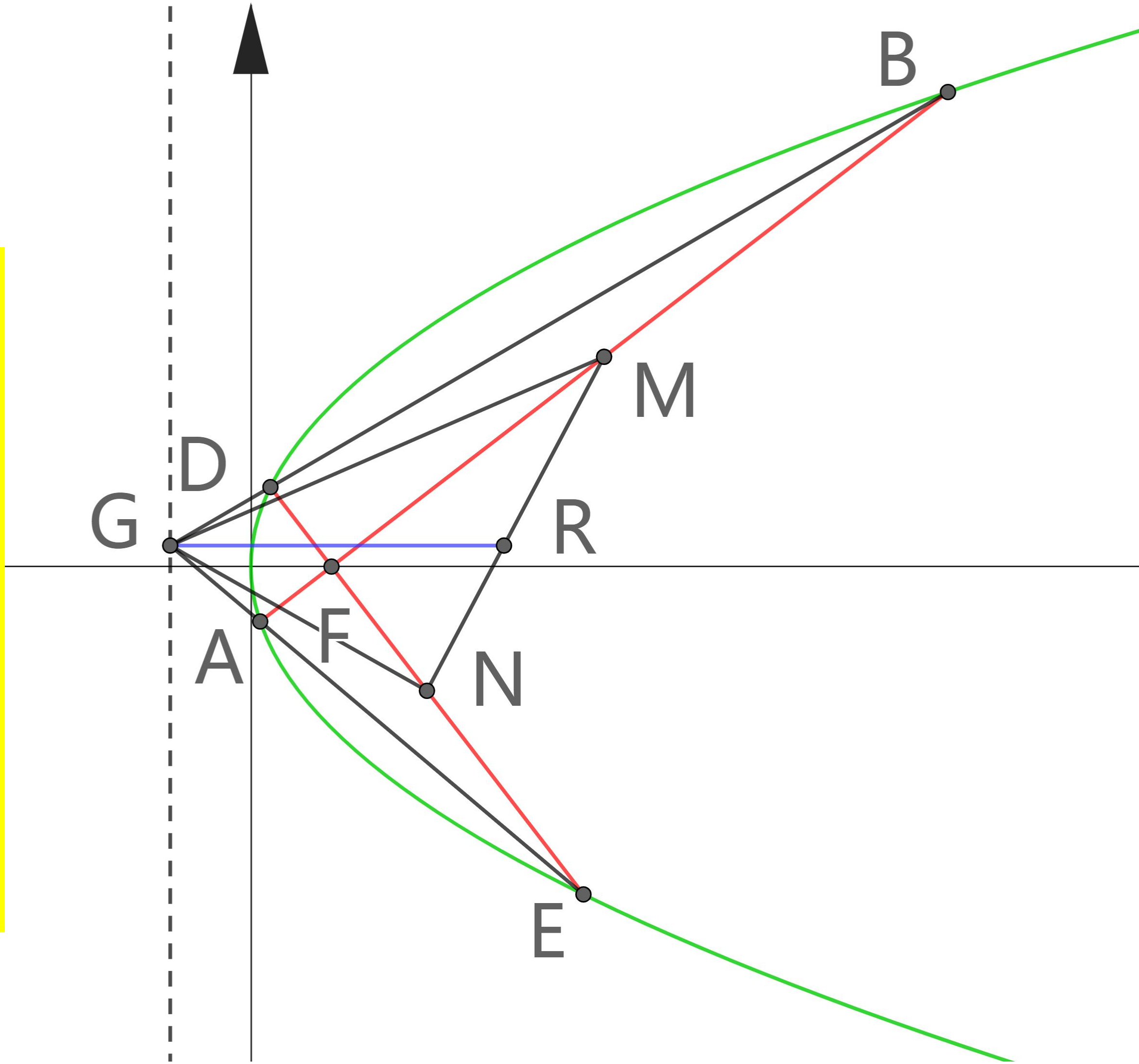
过$G$做$x$轴平行线交$MN$于$R$，$MN$过定点$(3,0)$，

所以$|GR|\geq 4$

$$S_{\Delta GMN}=\frac{1}{2}\cdot|GR|\cdot|y_M-y_N|=\frac{1}{2}\cdot|GR|\cdot\left|2m+\frac{2}{m}\right|$$

当$m=1$时，恰巧$|GR|$取到最小值，$\left|2m+\frac{2}{m}\right|$也取到最小值

故面积最小值为8.



# 归纳与延申

**常规计算：处理策略固定，思路相对简单，但运算量极大。**

**几何法：需要先对题目进行几何转化，运算量小，但**对学生的思维能力和逻辑推理能力要求较高，一般学生较难想到。

**其他：需要有一定知识积累，运算量小。**

多样性：对于题目可以有不同的思考方式。
各个方法没有孰优孰劣，能解题的就是好方法。
而我们应该做的是在保证常规方法解题的同时，去思考其他巧解。

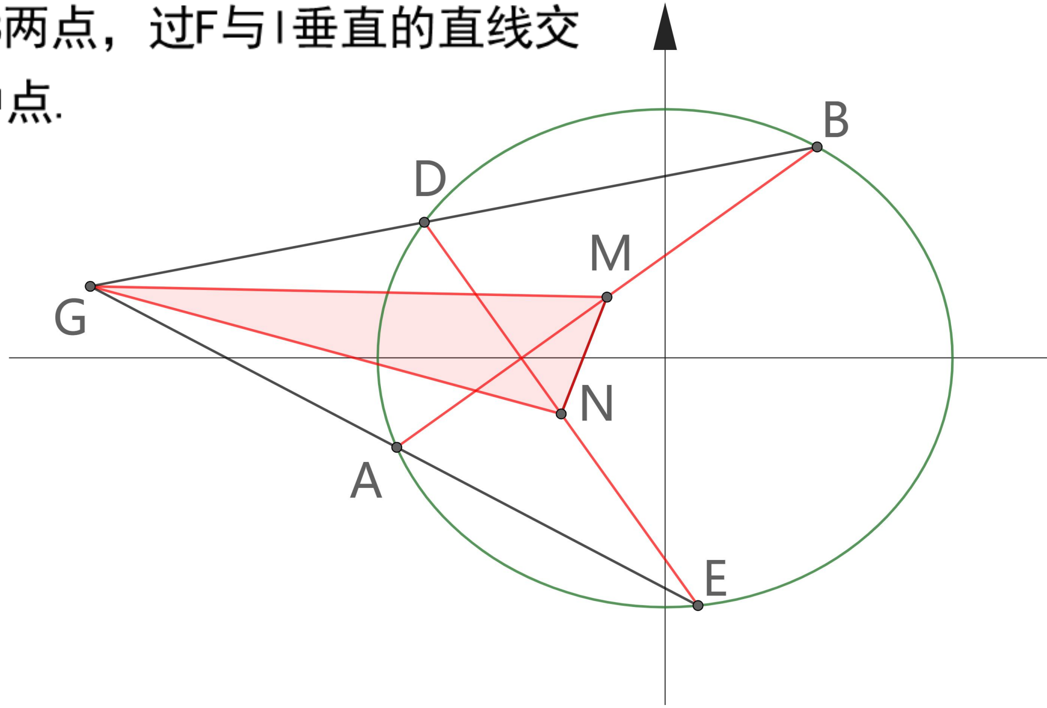
# 变题拓展

## 变模型

已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左焦点为F，过F的直线l交C于A，B两点，过F与l垂直的直线交C于D，E两点，其中B，D在x轴上方，M，N分别为AB，DE的中点.

(1)证明：直线MN过定点;

(2)设G为直线AE与直线BD的交点，求△GMN面积的最小值.




**设计意图：**

将模型换到椭圆大大增加了计算的难度，用方法1计算时会更困难，此时事前用几何条件优化就显得比较重要。

# 教学反思

解析几何大题考验学生的计算功底，利用坐标系建立曲线和方程的联系是基础，是得分的保障，而这其中不仅包含计算，也包含计算过程中的优化例如换元、同构等等，合理利用能大幅度减轻运算强度。

而在九省联考中，解析几何也强调转变和提升，提前注意观察几何图形的特征也很重要，把握几何图象的要素，利用题目几何关系优化方法，能够大大缩减运算过程，但考验学生的思维深度，学生较难想得到。

因此教学过程中，不仅需要培养学生的计算能力，扎实运算基础才能使得解析几何答题有一定保障，另外也需要有目的地培养学生优先根据题目几何条件简化运算的意识。

浙江省象山中学
ZHE JIANG XIANG SHAN HIGH SCHOOL

# 感谢各位老师聆听
# 恳请大家批评指正