线面角问题

【题型归纳目录】

题型一：定义法

题型二：等体积法

【方法技巧与总结】

线与面的夹角

①定义：平面上的一条斜线与它在平面的射影所成的锐角即为斜线与平面的线面角.

②范围：$[0,\frac{\pi}{2}]$

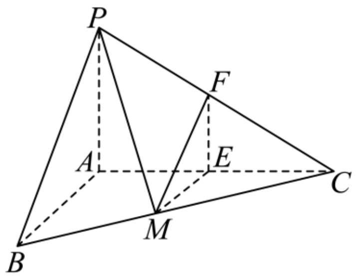
③求法：

常规法：过平面外一点 B 做 $BB'\perp$ 平面 α，交平面 α 于点 B'；连接 AB'，则 $\angle BAB'$ 即为直线 AB 与平面 α 的夹角．接下来在 $Rt\triangle ABB'$ 中解三角形．即 $\sin\angle BAB'=\frac{BB'}{AB}=\frac{h}{斜线长}$（其中 h 即点 B 到面 α 的距离，可以采用等体积法求 h，斜线长即为线段 AB 的长度)；

【典型例题】

题型一：定义法

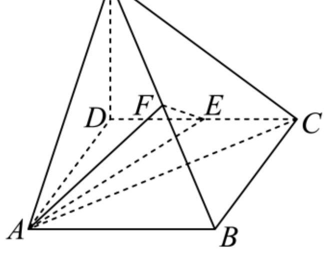
【典例 1-1】（2024·山东·二模）已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABC, AB\perp AC$，过点 M 分别作平行于平面 PAB 的直线交 AC,PC 于点 E,F．



(1)求证：$EF//$ 平面 PAB；

(2)若 M 为 BC 的中点，$PA=AB=3,AC=4$，求直线 PM 与平面 ABC 所成角的正切值.

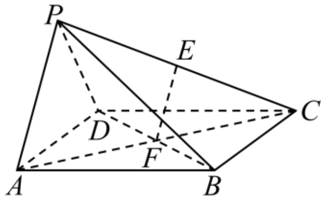
【典例 1-2】（2024·高一·山西大同·阶段练习）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=PD$，E,F 分别为 CD,PB 的中点.



(1)求证：$EF \perp$平面PAB；

(2)设$AB=\sqrt{2}BC$，求AC与平面AEF所成角的正弦值.

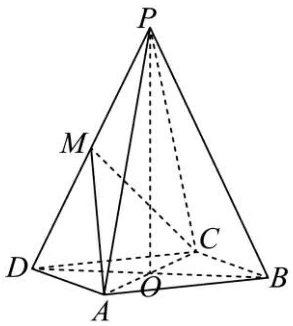
【变式 1-1】（2024·高一·江苏·阶段练习）如图在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧面$PAD\perp$底面$ABCD$，且$PA=PD=\frac{1}{2}BD$，设E,F分别为PC,BD的中点.



(1)求证：平面$PAB\perp$平面PDC；

(2)求直线EF与平面$ABCD$所成角的大小.

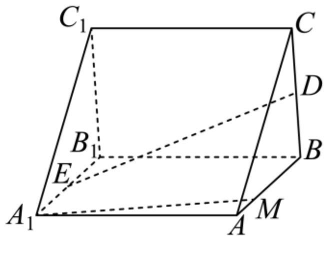
【变式 1-2】（2024·高一·陕西咸阳·阶段练习）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，O是AC与BD的交点，$\angle ADC=45°$，$AD=AC=2,PO\perp$平面$ABCD,PO=2,M$是PD的中点.



(1)证明：$PB//$平面ACM；

(2)求直线AM与平面$ABCD$所成角的正切值.

【变式 1-3】（2024·高三·河北衡水·期中）在如图所示的直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D、E分别是BC,A_1B_1的中点.



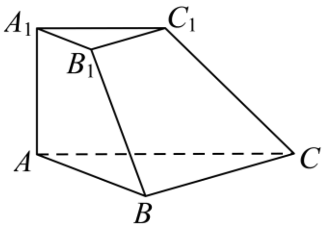
(1)求证: $DE//$平面ACC_1A_1;

(2)若$\triangle ABC$为等边三角形，且$AB=AA_1$，M为AB上的一点，$AM=\frac{1}{4}AB$，求直线DE与直线A_1M所成角的正切值.

题型二：等体积法

【典例 2-1】（2024·高三·全国·阶段练习）如图，在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面ABC，$\angle ABC=90°$，

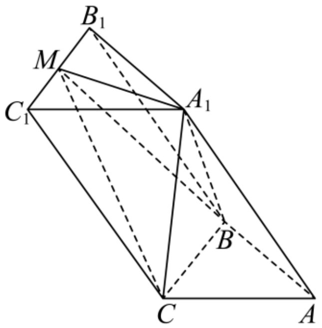
$AA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = 1$， $AB = 2$.



(1)求证：平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1；

(2)求 AC 与平面 BCC_1B_1 所成角正弦值.

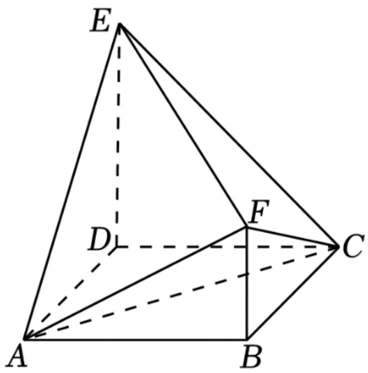
【典例 2-2】（2024·高三·山东菏泽·开学考试）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， A_1 在底面 ABC 上的射影为线段 BC 的中点，M 为线段 B_1C_1 的中点，且 $AA_1 = 2AB = 2AC = 4$， $\angle BAC = 90^\circ$.



(1)求三棱锥 $M-A_1BC$ 的体积；

(2)求 MC 与平面 MA_1B 所成角的正弦值.

【变式 2-1】（2024·高二·浙江绍兴·期末）如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， $ED \perp$ 平面 $ABCD$， $FB//ED$， $AB = ED = 2FB = 2$.



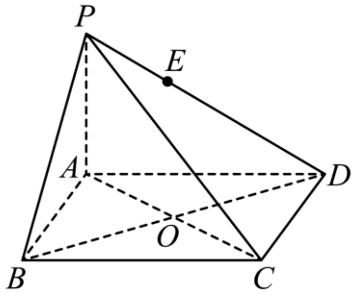
(1)求证： $AC \perp$ 平面 $BDEF$；

(2)求 BC 与平面 AEF 所成角的正弦值.

【过关测试】

1.（2024·高一·北京怀柔·期末）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，

$PA = a, AC \cap BD = O$， $PA \perp$ 底面 $ABCD$.

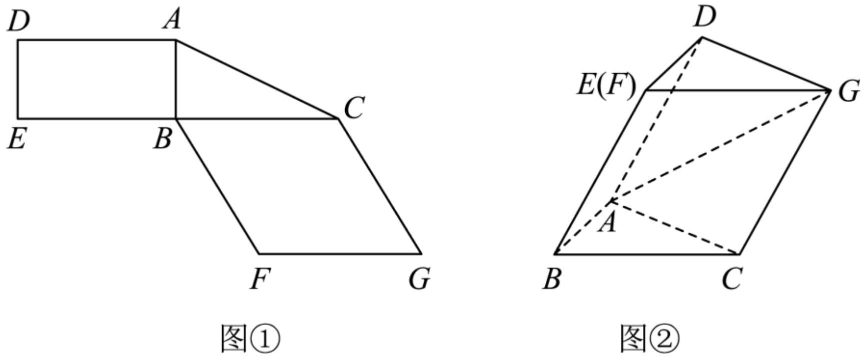


(1)证明：平面 $PBD \perp$ 平面 PAC；

(2)设平面 $PBC \cap$ 平面 PAD 于直线 l，证明：$BC//l$；

(3)若 $\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PD}$，在线段 BC 上是否存在点 F，使得 $EF//$ 平面 PAB，若存在点 F，则 a 为何值时，直线 EF 与底面 $ABCD$ 所成角为 $45°$.

2.（2024·高一·山东威海·期末）图①是由矩形 $ADEB$， $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$， $BE=BF=2$， $\angle CBF=60°$.将其沿 AB， BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连接 DG ，如图②.

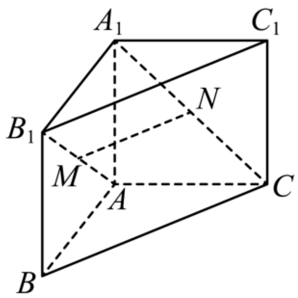


(1)证明：平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$；

(2)证明：$DG//$平面 ABC；

(3)求直线 AG 与平面 ABC 所成角的正切值.

3.（2024·高一·浙江宁波·期末）如图，在堑堵 $ABC-ABC$ 中（注：堑堵是一长方体沿不在同一面上的相对两棱斜解所得的几何体，即两底面为直角三角形的直三棱柱，最早的文字记载见于《九章算术》商功章），已知 $AA_1 \perp$ 平面 ABC， $\angle BAC=90^{\circ}$， $AB=AC=AA_1=2$，点 M 、 N 分别是线段 B_1A 、 A_1C 的中点.

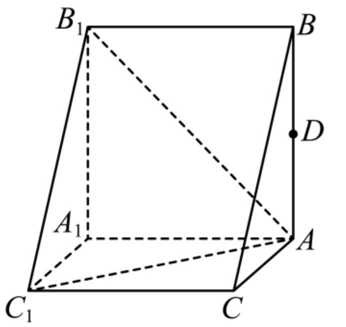


(1)证明：$MN//$ 平面 ABC；

(2)求直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值.

4.（2024·高一·福建福州·期末）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AB 的中点，E 为侧棱 CC_1 的动点，

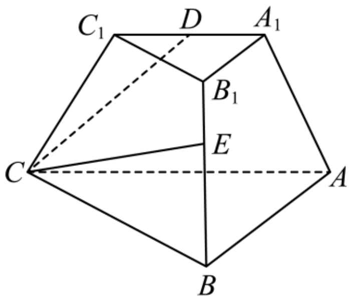
且 $CE=\lambda CC_1\ (0<\lambda<1)$.



(1)是否存在实数 λ，使得 DE // 平面 AB_1C_1？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由；

(2)设 $AB=AA_1=4$，$AC=3$，$BC=5$，求 DE 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值的取值范围.

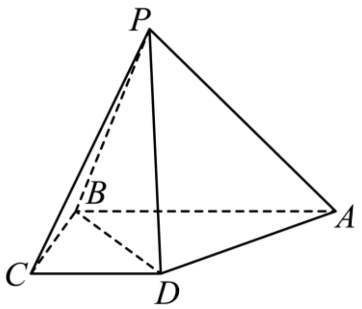
5．（2024·高一·辽宁大连·期末）在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=6$，$A_1B_1=AA_1=3$，D 为 A_1C_1 中点，E 在 BB_1 上，$\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{B_1E}$.



(1)请作出 A_1B_1 与平面 CDE 的交点 M，并写出 A_1M 与 MB_1 的比值（在图中保留作图痕迹，不必写出画法和理由）；

(2)求直线 BM 与平面 ABC 所成角的正弦值.

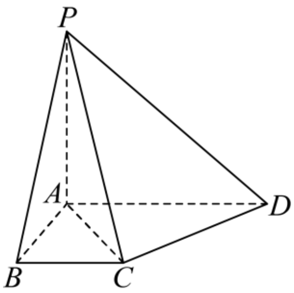
6.（2024·高一·宁夏吴忠·期末）四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PB=PD^2=AB=2BC=2CD=2, AB//CD, \angle ABC=90°$.



(1)求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)当 $PD\perp$ 平面 $ABCD$ 时，求直线 PC 与平面 PAD 所成的角的正切值.

7．（2024·高一·上海奉贤·期末）如图，平面 $ABCD$ 外一点 P，$PA\perp$ 平面$ABCD$，$AD//BC$，$AB\perp BC$，$PA=AD=4$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$，$CD=2\sqrt{3}$.

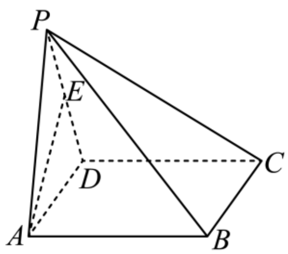


(1)求异面直线 PC 与 AD 所成角的大小

(2)证明：$DC\perp$平面PAC；

(3)求 AD 与平面 PCD 所成角的余弦值.

8．（2024·高一·宁夏银川·期末）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形，$CD=\sqrt{3}$，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD,E$ 为棱 PD 的中点.



(1)求证：$AE\perp$平面PCD；

(2)求直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值.