【新结构】2024年九省新高考适应性测试数学试题❖

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 16，24，14，10，20，30，12，14，40 的中位数为(   )

A. 14　　B. 16　　C. 18　　D. 20

2. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$(   )

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3+a_7=6$，$a_{12}=17$，则 $S_{16}=$(   )

A. 120　　B. 140　　C. 160　　D. 180

4. 设 α，β 是两个平面，m，l 是两条直线，则下列命题为真命题的是(   )

A. 若 $\alpha\perp\beta$，$m//\alpha$，$l//\beta$，则 $m\perp l$

B. 若 $m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，$m//l$，则 $\alpha//\beta$

C. 若 $\alpha\cap\beta=m$，$l//\alpha$，$l//\beta$，则 $m//l$

D. 若 $m\perp\alpha$，$l\perp\beta$，$m//l$，则 $\alpha\perp\beta$

5. 甲、乙、丙等 5 人站成一排，且甲不在两端，乙和丙之间恰有 2 人，则不同排法共有(   )

A. 20 种　　B. 16 种　　C. 12 种　　D. 8 种

6. 已知 Q 为直线 $l: x+2y+1=0$ 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，记 P 的轨迹为 E，则(   )

A. E 是一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆　　B. E 是一条与 l 相交的直线

C. E 上的点到 l 的距离均为 $\sqrt{5}$　　D. E 是两条平行直线

7. 已知 $\theta\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$，$\tan 2\theta=-4\tan(\theta+\frac{\pi}{4})$，则 $\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=$(   )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

8. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过坐标原点的直线与 C 交于 A，B 两点，$|F_1B|=2|F_1A|$，$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=4a^2$，则 C 的离心率为(　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{3\pi}{4})+\cos(2x+\dfrac{3\pi}{4})$，则(　)

A. 函数 $f(x-\dfrac{\pi}{4})$ 为偶函数

B. 曲线 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=k\pi$，$k\in Z$

C. $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增

D. $f(x)$ 的最小值为 -2

10. 已知复数 z，w 均不为 0，则(　)

A. $z^2=|z|^2$　　B. $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z^2}{|z|^2}$　　C. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$　　D. $|\dfrac{z}{w}|=\dfrac{|z|}{|w|}$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(\dfrac{1}{2})\neq 0$，若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则(　)

A. $f(-\dfrac{1}{2})=0$　　B. $f(\dfrac{1}{2})=-2$

C. 函数 $f(x-\dfrac{1}{2})$ 是偶函数　　D. 函数 $f(x+\dfrac{1}{2})$ 是减函数

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知集合 $A=\{-2,0,2,4\}$，$B=\{x||x-3|\leqslant m\}$，若 $A\cap B=A$，则 m 的最小值为_________.

13. 已知轴截面为正三角形的圆锥 MM' 的高与球 O 的直径相等，则圆锥 MM' 的体积与球 O 的体积的比值是_________，圆锥 MM' 的表面积与球 O 的表面积的比值是_________.

14. 以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数.设 $0<a<b<c<1$，已知 $b\geqslant 2a$ 或 $a+b\leqslant 1$，则 $\max\{b-a,c-b,1-c\}$ 的最小值为_________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+x^2+ax+2$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直.

(1) 求 a;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

16.（本小题 15 分）

盒中有标记数字 1，2，3，4 的小球各 2 个，随机一次取出 3 个小球.

(1) 求取出的 3 个小球上的数字两两不同的概率;

(2) 记取出的 3 个小球上的最小数字为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

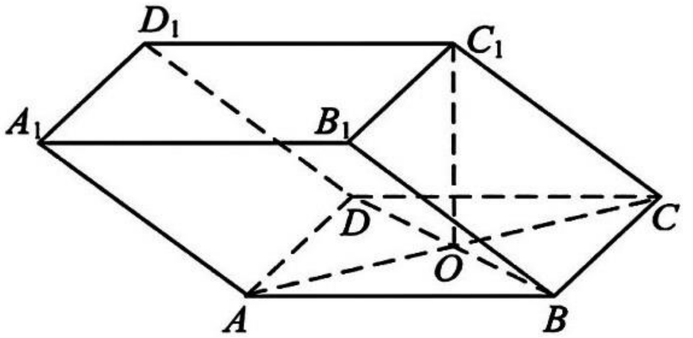
17.（本小题 15 分）

如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，

$AA_1=2$，$\angle C_1CB=\angle C_1CD$，$\angle C_1CO=45°$.

(1) 证明：$C_1O\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求二面角 $B-AA_1-D$ 的正弦值.



18.（本小题 17 分）

已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D，E 两点，其中 B，D 在 x 轴上方，M，N 分别为 AB，DE 的中点.

(1) 证明：直线 MN 过定点;

(2) 设 G 为直线 AE 与直线 BD 的交点，求 $\triangle GMN$ 面积的最小值.

19.（本小题 17 分）

离散对数在密码学中有重要的应用.设 p 是素数，集合 $X=\{1,2,\cdots,p-1\}$，若 u，$v\in X$，$m\in N$，记 $u\otimes v$ 为 uv 除以 p 的余数，$u^{m,\otimes}$ 为 u^m 除以 p 的余数;设 $a\in X$，1，a，$a^{2,\otimes}$，$\cdots$，$a^{p-2,\otimes}$ 两两不同，若 $a^{n,\otimes}=b(n\in 0,1,\cdots,p-2)$，则称 n 是以 a 为底 b 的离散对数，记为 $n=\log(p)_a b$.

(1) 若 $p=11$，$a=2$，求 $a^{p-1,\otimes}$;

(2) 对 m_1， $m_2 \in \{0,1,\cdots,p-2\}$，记 $m_1 \oplus m_2$ 为 m_1+m_2 除以 $p-1$ 的余数(当 m_1+m_2 能被 $p-1$ 整除时，$m_1 \oplus m_2=0$). 证明： $\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$，其中 b， $c\in X$;

(3) 已知 $n=\log(p)b$. 对 $x\in X$， $k\in\{1,2,\cdots,p-2\}$，令 $y_1=a^{k,\otimes}$， $y_2=x\otimes b^{k,\otimes}$. 证明： $x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

答案和解析

1.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查中位数的求法，属于基础题.

根据中位数的定义即可求解.

【解答】

解：把数据从小到大排列为 10，12，14，14，16，20，24，30，40，中位数16.

2.【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查椭圆的标准方程及几何意义，属于基础题.

根据椭圆方程以及 a，b，c 之间的关系即可求解.

【解答】

解：$\because e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{1}{2}$，

$\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选 A.

3.【答案】C

【解析】【分析】

本题主要考查等差数列的通项公式以及求和，属于基础题.

根据已知条件求出首项和公式，再根据前 n 项和公式求和即可.

【解答】

解：$\because a_3+a_7=6$，$a_{12}=17$，

$\therefore \{a_1+2d+a_1+6d=6a_1+11d=17$，

$\therefore \{a_1=-5d=2$，

$\therefore S_{16}=16\times(-5)+\frac{16\times 15}{2}\times 2=160.$

故选 C.

4.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查空间中直线与平面的位置关系、空间中平面与平面的位置关系、空间中直线与直线的位置关系，属于基础题.

根据题意结合线面关系对选项逐个进行分析判断即可.

【解答】

解：正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

对于 A，设面 α 为面 $ABCD$，面 β 为 ADD_1A_1， $m=B_1C_1$， $l=BC$，

满足 $m//\alpha$， $l//\beta$， $\alpha\perp\beta$ 但 $m//l$，故 A 错误；

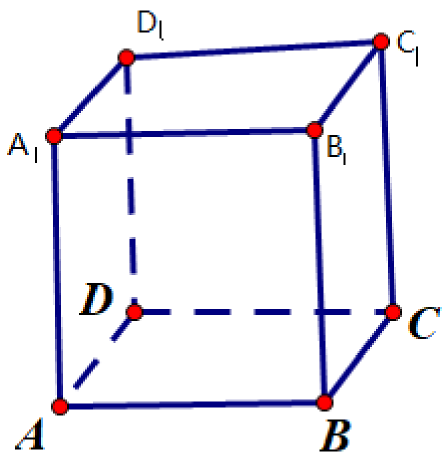
对于 B，设 $m=BC$，面 α 为面 $ABCD$， $l=AD$，面 β 为面 ADD_1A_1，

此时 $m\subset\alpha$， $l\subset\beta$， $m//l$，但 α 与 β 不平行，故 B 错误；

对于 D，面 α 为面 $ABCD$，面 β 为面 $A_1B_1C_1D_1$， $m=AA_1$， $l=BB_1$，

此时 $m\perp\alpha$， $l\perp\beta$， $m//l$，但平面 α 与平面 β 平行不垂直，故 D 错误.

结合线面平行的性质可知 C 正确.



5.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查排列与组合的综合应用，属于中档题.

分类讨论：乙丙及中间 2 人占据首四位、乙丙及中间 2 人占据尾四位，然后根据分类加法计数原理求得结果.

【解答】

解：因为乙和丙之间恰有 2 人，所以乙丙及中间 2 人占据首四位或尾四位，

①当乙丙及中间 2 人占据首四位，此时还剩末位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两个位置两人全排列有 A_2^2 种排法，

所以有 $A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$ 种方法;

②当乙丙及中间 2 人占据尾四位，此时还剩首位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两个位置两人全排列有 A_2^2 种排法，

所以有 $A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$ 种方法;

由分类加法计数原理可知，一共有 $8+8=16$ 种排法，

故选： B.

6.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查轨迹方程的求法以及平行线间的距离公式，属于基础题.

根据题意设 $P(x,y)$， $Q(m,n)$，利用相关点法可得 $x+2y+6=0$，利用两平行线间的距离公式即可求解.

【解答】

解：设 $P(x,y)$， $Q(m,n)$，

则 $\overrightarrow{QP}=(x-m,y-n)=(1,-3)$，

$\therefore m=x-1$， $n=y+3$，

$\because Q(x-1,y+3)$ 在 $x+2y+1=0$ 上，

$\therefore x+2y+6=0$，

所以轨迹 E 为直线，且与直线 l 平行，

所以 E 上的点到 l 的距离 $d=\frac{|6-1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

故 A，B，D 错误.

故选 C.

7.【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查二倍角公式和同角三角函数基本关系，属于基础题.

根据二倍角公式以及两角和的正切公式可得 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，利用齐次式求解即可.

【解答】

解：$\tan 2\theta=-4\tan(\theta+\frac{\pi}{4})$，即 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-4\times\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}$，

$\therefore 2\tan^2\theta+5\tan\theta+2=0$， $\tan\theta=-\frac{1}{2}$ 或 -2， $\theta\in(\frac{3}{4}\pi,\pi)$，

$\therefore \tan\theta\in(-1,0)$， $\therefore \tan\theta=-\frac{1}{2}$，

$\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta+1}{2+2\tan\theta}=\frac{\tan\theta+1}{2}=\frac{1}{4}$，

选 A.

8.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了双曲线的离心率，向量的数量积，属于一般题.

根据题意结合双曲线的定义可得 $|F_1A|=2a$， $|F_2A|=4a$， 根据向量的数量积运算可得 $\cos\angle F_2BF_1=-\frac{1}{2}$，

利用余弦定理可得离心率.

【解答】

解：如图，由双曲线的对称性可知，

$|F_1A|=|F_2B|$， $|F_2A|=|F_1B|$，则四边形 AF_1BF_2 为平行四边形，

令 $|F_1A|=|F_2B|=m$， 则 $|F_2A|=|F_1B|=2m$，

由双曲线的定义可知 $|F_2A|-|F_1A|=2a$， 即 $2m-m=2a$，

所以 $m=2a$， 即 $|F_1A|=|F_2B|=2a$，

$|F_2A|=|F_1B|=4a$，

由 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=|\overrightarrow{F_2A}|\cdot|\overrightarrow{F_2B}|\cos\angle AF_2B=2a\times 4a\times\cos\angle AF_2B=4a^2$

所以 $\cos\angle AF_2B=\frac{1}{2}$，

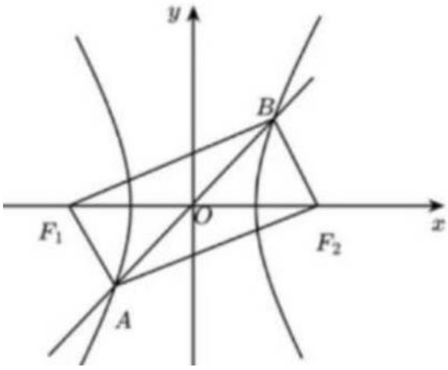
在 $\triangle AF_2B$ 中，因为 $0<\angle AF_2B<\pi$， 所以 $\angle AF_2B=\frac{\pi}{3}$， 则 $\angle F_2BF_1=\frac{2\pi}{3}$，

则有 $\cos\angle F_2BF_1=\frac{|F_1B|^2+|F_2B|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1B||F_2B|}=\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\times4a\times2a}=-\frac{1}{2}$，

即 $\frac{20a^2-4c^2}{16a^2}=-\frac{1}{2}$，则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=7$，

由 $e>1$，所以 $e=\sqrt{7}$，

故选 D.



9.【答案】AC

【解析】【分析】

本题主要考查了判断正弦型函数的单调性或求解单调区间、求正弦型函数的值域或最值求正弦(型)、函数的对称轴、正弦型函数的奇偶性，属于中档题.

化简函数解析式为 $f(x)=-\sqrt{2}\sin2x$，结合正弦函数的奇偶性、单调性、三角函数的最值逐项判断即可求解.

【解答】

解：$f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{4})+\cos(2x+\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\sin2x$，

$f(x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\sin2(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos2x$， $f(x-\frac{\pi}{4})$ 为偶函数，故 A 对；

由 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in Z$， 则 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi$， $k\in Z$， 即 $f(x)$ 对称轴 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi$， $k\in Z$， 故 B 错；

由 $\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3}{2}\pi$， 得 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$，

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)$ 单调增，而 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})\subseteq(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12})$ 单调增，故 C 对；

当 $\sin2x=1$ 时， $f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$，故 D 错.

故选 AC.

10.【答案】BCD

【解析】【分析】

本题考查复数的的四则运算、共轭复数、复数的模计算，属于中档题.

设出 $z=a+bi$ 、 $w=c+di$ ，结合复数的运算、共轭复数定义及复数的模的性质逐个计算即可得.

【解答】

解：设 $z=a+bi(a,b\in R)$ 、$w=c+di(c,d\in R)$;

对 A: 设 $z=a+bi(a,b\in R)$，则

$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi-b^2=a^2-b^2+2abi$,

$|z|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$ ，故 A 错误;

对 B: $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z^2}{\overline{z}\cdot z}$ ，又 $\overline{z}\cdot z=|z|^2$ ，即有 $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$ ，故 B 正确;

对 C: $z-w=a+bi-c-di=a-c+(b-d)i$,

则 $\overline{z-w}=a-c-(b-d)i$,

$\overline{z}=a-bi$ ， $\overline{w}=c-di$ ，则 $\overline{z}-\overline{w}=a-bi-c+di=a-c-(b-d)i$,

即有 $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$ ，故 C 正确;

对 D: $|\frac{z}{w}|=|\frac{a+bi}{c+di}|=|\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}|=\sqrt{(\frac{ac+bd}{c^2+d^2})^2+(\frac{ad-bc}{c^2+d^2})^2}=\frac{\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}}{c^2+d^2}$,

$\frac{|z|}{|w|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{c^2+d^2}=\frac{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2}}{c^2+d^2}$,

故 $|\frac{z}{w}|=\frac{|z|}{|w|}$ ，故 D 正确.

故选： BCD.

11.【答案】ABD

【解析】【分析】

本题考查求抽象函数的解析式、判断或证明函数的单调性、判断或证明函数的奇偶性，属于中档题.

对抽象函数采用赋值法，令 $x=\frac{1}{2}$ ， $y=0$ ，结合题意可得 $f(0)=-1$ ，对 A: 令 $x=\frac{1}{2}$ ， $y=-\frac{1}{2}$ ，代入计

算即可得;对 B、C、D:令 $y=-\frac{1}{2}$，可得 $f(x-\frac{1}{2})=-2x$，即可得函数 $f(x-\frac{1}{2})$ 及函数 $f(x+\frac{1}{2})$ 的性质，代入 $x=1$，即可得 $f(\frac{1}{2})$.

【解答】

解：令 $x=\frac{1}{2}$， $y=0$，则有 $f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})\times f(0)=f(\frac{1}{2})[1+f(0)]=0$，

又 $f(\frac{1}{2})\neq 0$，

故$1+f(0)=0$，即 $f(0)=-1$，

令 $x=\frac{1}{2}$， $y=-\frac{1}{2}$，

则有 $f(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})f(-\frac{1}{2})=4\times\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})$，

即 $f(0)+f(\frac{1}{2})f(-\frac{1}{2})=-1$，

由 $f(0)=-1$，可得 $f(\frac{1}{2})f(-\frac{1}{2})=0$，

又 $f(\frac{1}{2})\neq 0$，故 $f(-\frac{1}{2})=0$，故 A 正确;

令 $y=-\frac{1}{2}$，则有 $f(x-\frac{1}{2})+f(x)f(-\frac{1}{2})=4x\times(-\frac{1}{2})$，

即 $f(x-\frac{1}{2})=-2x$，故函数 $f(x-\frac{1}{2})$ 是奇函数，故 C 错误;

有 $f(x+1-\frac{1}{2})=-2(x+1)=-2x-2$，

即 $f(x+\frac{1}{2})=-2x-2$，

即函数 $f(x+\frac{1}{2})$ 是减函数，故 D 正确;

令 $x=1$，有 $f(\frac{1}{2})=-2\times 1=-2$，故 B 正确.

故选 ABD.

12.【答案】5

【解析】【分析】

本题考查利用集合间的关系求参数，属于基础题.

根据题意可得 $A\subseteq B$，列不等式组即可求解.

【解答】

解： $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$， $\therefore B=\{x|3-m\leqslant x\leqslant 3+m\}$，

$\therefore\{3+m\geqslant 43-m\leqslant -2$， $\therefore m\geqslant 5$， $\therefore m_{\min}=5$.

13.【答案】 $\dfrac{2}{3}$ ；

1

【解析】【分析】

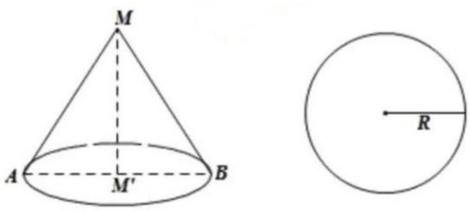
本题考查圆锥的体积、球的表面积、球的体积、圆锥的表面积，属于基础题.

利用圆锥和球的表面积和体积公式直接求即可.

【解答】

解：设圆锥底面圆半径为 r，则高为 $\sqrt{3}r$，

设球半径为 R，



则 $2R=\sqrt{3}r$， $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$， 设圆锥 MM' 的体积与球 O 的体积分别为 V_1,V_2，

则 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\sqrt{3}r}{\frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{3}}{2}r)^3}=\dfrac{2}{3}$，

圆锥的表面积 $S_1=\pi r^2+\pi r\cdot 2r=3\pi r^2$，

球 O 的表面积 $S_2=4\pi R^2=4\pi\cdot\dfrac{3}{4}r^2=3\pi r^2$，

则 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3\pi r^2}{3\pi r^2}=1$.

14.【答案】 $\dfrac{1}{5}$

【解析】【分析】

本题考查最值的求法，属于中档题.

根据题意令 $b-a=m$， $c-b=n$， $1-c=p$， m， n， $p>0$，结合新定义分 $b\geqslant 2a$ 和 $a+b\leqslant 1$ 两种情况讨论

即可求解.

【解答】

解：令$b-a=m$，$c-b=n$，$1-c=p$，m，n，$p>0$，

则$\begin{cases}b=1-n-p\\a=1-m-n-p\end{cases}$，

①若$b\geqslant 2a\Rightarrow 1-n-p\geqslant 2-2m-2n-2p\Rightarrow 2m+n+p\geqslant 1$，

令$M=\max\{b-a,c-b,1-c\}=\max\{m,n,p\}$，

$\therefore\begin{cases}2M\geqslant 2m\\M\geqslant n\\M\geqslant p\end{cases}\Rightarrow 4M\geqslant 2m+n+p\geqslant 1\Rightarrow M\geqslant\frac{1}{4}$；

②若$a+b\leqslant 1$，即$2-m-2n-2p\leqslant 1\Rightarrow m+2n+2p\geqslant 1$，

令$M=\max\{m,n,p\}$，

$\therefore\begin{cases}M\geqslant m\\2M\geqslant 2n\\2M\geqslant 2p\end{cases}\Rightarrow 5M\geqslant m+2n+2p\geqslant 1$，

$\therefore M\geqslant\frac{1}{5}$，当$m=2n=2p$时，等号成立，

综上可知，$\max\{b-a,c-b,1-c\}$的最小值为$\frac{1}{5}$.

故答案为$\frac{1}{5}$.

15.【答案】解：(1)$f'(x)=\frac{1}{x}+2x+a$，$f'(2)=\frac{9}{2}+a$，

直线$2x+3y=0$的斜率$-\frac{2}{3}$，$f(x)$在$(2,f(2))$处的切线与直线$2x+3y=0$垂直，

则$(\frac{9}{2}+a)(-\frac{2}{3})=-1$，

$\therefore a=-3$；

(2)$f(x)=\ln x+x^2-3x+2$，定义域为$(0,+\infty)$，

令$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}=0$，解得$x=\frac{1}{2}$或1，

所以当$0<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增;

当$\frac{1}{2}<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减;

当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以 $f(x)_{极大值}=f(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}+2=\frac{3}{4}-\ln 2$，

$f(x)_{极小值}=f(1)=\ln 1+1^2-3+2=0.$

【解析】本题考查求曲线上一点的切线方程(斜率、倾斜角)、两条直线垂直的判定及应用、利用导数判断或证明已知函数的单调性、利用导数求已知函数的极值或极值点(不含参)，属于中档题.

(1) 对函数求导， $f'(2)=\frac{9}{2}+a$，利用直线垂直斜率间的关系可得 a；

(2) 对函数求导，根据导数的正负可得函数的单调性以及极值.

16.【答案】解：(1)“一次取出的 3 个小球上的数字互不相同”的事件记为 A，

则 $P(A)=\frac{C_4^3\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{C_8^3}=\frac{4}{7}$；

(2) X 的所有可能取值为 1，2，3.

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^2+C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\frac{9}{14},$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1}{C_8^3}=\frac{2}{7},$$

$$P(X=3)=\frac{C_2^1C_2^2+C_2^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{1}{14}.$$

$\therefore$ X 的分布列如下：

X	1	2	3
P	$\frac{9}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$

$E(X)=\frac{9}{14}+\frac{4}{7}+\frac{3}{14}=\frac{10}{7}.$

【解析】本题考查古典概型以及离散型随机变量的分布列和期望，属于中档题.

(1) 利用排列组合的知识以及古典概型概率公式即可求解；

(2) 根据题意可得 X 的所有可能取值为 1，2，3，求出相应的概率可得分布列和期望.

17.【答案】解：(1) 证明：因为 $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CC_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$，

所以$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=[\overrightarrow{CC_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})](\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$

$=(\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CB})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{CB}^2)=0$，

$\therefore OC_1\perp BD$，

而$CC_1=2$，$CO=\sqrt{2}$，$\angle C_1CO=45°$，

$\therefore C_1O=\sqrt{2}$，

$\therefore C_1O^2+OC^2=CC_1^2$，

$\therefore C_1O\perp OC$，

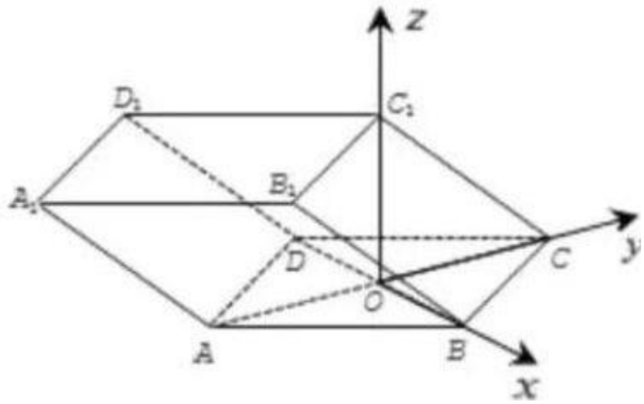
$\because BD\cap OC=O$，$BD,OC\subset$平面$ABCD$，

$\therefore C_1O\perp$平面$ABCD$;

(2)如图建系，

则$B(\sqrt{2},0,0)$，$A(0,-\sqrt{2},0)$，$C_1(0,0,\sqrt{2})$，$C(0,\sqrt{2},0)$，

$\therefore A_1(0,-2\sqrt{2},\sqrt{2})$，$D(-\sqrt{2},0,0)$，



$\therefore\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

设平面AA_1B与平面AA_1D的一个法向量分别为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\therefore$由$\left\{\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0-\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_1=0\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(1,-1,-1)\right.$，

由$\left\{-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}z_2=0-\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2=0\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)\right.$，

设$B-AA_1-D$的平面角为θ，

$\therefore \cos\theta = \left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$，

则 $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

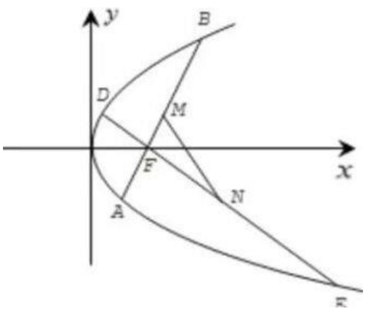
【解析】本题考查线面垂直的判定、平面与平面所成角的向量求法、线线垂直的向量表示，属于中档题.

(1) 根据 $\overrightarrow{C_1O}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，得出 $C_1O\perp BD$，再证出 $C_1O\perp OC$，即可证出结果；

(2) 建立空间直角坐标系，求出平面 AA_1B 与平面 AA_1D 的一个法向量分别 $\overrightarrow{n_1}$ 和 $\overrightarrow{n_2}$，利用 $\cos\theta = \left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|$，

求出 $\cos\theta$，即可求出结果.

18.【答案】(1) 证明：由题意可得 $F(1,0)$，



设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，$m\neq 0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D\left(x_3,y_3\right)$，$E\left(x_4,y_4\right)$，

由 B，D 在 x 轴上方可知，$x_2>0, y_2>0, x_3>0, y_3>0$，

联立 $\left\{x=my+1y^2=4x\right.\Rightarrow y^2-4my-4=0$，

$y_1y_2=-4$，$y_1+y_2=4m, x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，

$x_1x_2=\left(my_1+1\right)\left(my_2+1\right)=m^2y_1y_2+m\left(y_1+y_2\right)+1=1$，

依题意，M 分别为 AB 的中点.设 $M(x_0,y_0)$，

$\therefore y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2m$，$\therefore x_0=2m^2+1$，

$\therefore M(2m^2+1,2m)$，

设与直线 AB 垂直的直线 DE 的方程为：$y=-m(x-1)$，

联立 $\left\{y=-m(x-1)y^2=4x\right.\Rightarrow m^2x^2-(2m^2+4)x+m^2=0$，

则 $x_3+x_4=\frac{4}{m^2}+2, x_3x_4=1$，

可得 $y_3+y_4=-m(x_3+x_4-2)=-\frac{4}{m}$， $y_3y_4=m^2\left(x_3-1\right)\left(x_4-1\right)=m^2\left[x_3x_4-\left(x_3+x_4\right)+1\right]=-4$，

依题意，N 是线段 CD 的中点，则 $N(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m})$，

则直线 MN 的直线方程为： $x=\left(m-\frac{1}{m}\right)y+3$，

令 $y=0$，则 $x=3$，

故直线 MN 过定点 $(3,0)$；

(2) 解：直线 BD 的解析式为： $y-y_2=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}\left(x-x_2\right)$，直线 AE 的解析式为： $y-y_1=\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4}\left(x-x_1\right)$，

又 $\because$ A，B，D，E 在抛物线 C 上，则 $\left\{y_1{}^2=4x_1, ①\, y_4{}^2=4x_4, ②\right.$，

由①-②得：$\left(y_1-y_4\right)\left(y_1+y_4\right)=4\left(x_1-x_2\right)$，即 $\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\frac{4}{y_1+y_4}$，

同理可得 $\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{4}{y_2+y_3}$，

$\therefore$ 直线 BD 和 AE 解析式可变形为： $y-y_2=\frac{4}{y_2+y_3}\left(x-x_2\right)$， $y-y_1=\frac{4}{y_1+y_4}\left(x-x_1\right)$，

联立 BD 和 AE 解析式可得：

$$x_G=\frac{\frac{y_1y_4}{y_1+y_4}-\frac{y_2y_3}{y_2+y_3}}{\frac{4}{y_2+y_3}-\frac{4}{y_1+y_4}}=\frac{y_1y_4(y_2+y_3)-y_2y_3\left(y_1+y_4\right)}{4\left(y_1+y_4-y_2-y_3\right)}=\frac{4\left(y_2+y_3-y_1-y_4\right)}{4\left(y_1+y_4-y_2-y_3\right)}=-1,$$

则 $y_G=\frac{y_2y_3-4}{y_2+y_3}=\frac{2(m+\sqrt{m^2+1})\cdot 2(-\frac{1}{m}+\sqrt{\frac{1}{m^2}+1})-4}{2(m-\frac{1}{m}+\sqrt{m^2+1}+\sqrt{\frac{1}{m^2+1}})}=\frac{2(m-1)}{m+1}$，

$\therefore G(-1,\frac{2(m-1)}{m+1})$；

则点 G 到直线 MN 的距离为： $d=\frac{\left|\frac{-4m}{m^2-1}-\frac{2(m-1)}{m+1}\right|}{\sqrt{1+(\frac{m}{m^2-1})^2}}=\frac{\left|\frac{2m^2+2}{m^2-1}\right|}{\sqrt{1+(\frac{m}{m^2-1})^2}}$，

$|MN|=\sqrt{1+(\frac{m}{m^2-1})^2}\cdot\left|2m^2-\frac{2}{m^2}\right|$，

$$\therefore S_{\triangle GMN}=\frac{1}{2}\cdot 2\left|m^2-\frac{1}{m^2}\right|\sqrt{1+(\frac{m}{m^2-1})^2}\cdot\frac{\left|\frac{2m^2+2}{m^2-1}\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{m^2-1}\right)^2}}$$

$$=|\frac{m^4-1}{m^2}.\frac{2(m^2+1)}{m^2-1}|=\frac{2(m^2+1)^2}{m^2}=\frac{2(m^4+2m^2+1)}{m^2}=2(m^2+\frac{1}{m^2}+2)\geqslant 2\left(2\sqrt{m^2\cdot\frac{1}{m^2}}+2\right)=8,$$

当且仅当 $m^2=\frac{1}{m^2}$ 即 $m=\pm1$ 时取"=",

所以 $\triangle GMN$ 面积的最小值为8.

【解析】本题考查直线与抛物线相交的定点定值以及面积问题，属于难题.

(1) 设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，与抛物线方程联立可得 $M(2m^2+1,2m)$，$N(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m})$，进一步可得直线 MN 的方程，即可求定点坐标;

(2) 根据题意联立直线方程求出 G 的坐标，表示出三角形面积，结合基本不等式求最值即可求解.

19.【答案】解：(1) $p=11$，$a=2$，$a^{p-1,\otimes}=2^{10,\otimes}$ 为 $\frac{2^{10}}{11}$ 的余数为 1，所以 $2^{10,\otimes}=1$，

$\therefore a^{p-1,\otimes}=1$.

(2) 设 $\log(p)_a b=m_1$，$\log(p)_a c=m_2$，

$\therefore a^{m_1}$ 除以 p 的余数为 b，a^{m_2} 除以 p 的余数为 c，

$a^{m_1}=\lambda p+b$，$a^{m_2}=\mu p+c$，m_1，$m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，λ，$\mu\in N\Leftrightarrow$ 证：$\log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2$，

$$\frac{a^{m_1+m_2}}{p}=\frac{(\lambda p+b)(\mu p+c)}{p}=\frac{\lambda\mu p^2+(\lambda c+b\mu)p+bc}{p}$$

$a^{m_1+m_2}$ 除以 p 的余数为 bc 除以 p 的余数，即为 $b\otimes c$

$\therefore \log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$.

(3) 若 m 除以 n 的余数为 b，可记为 $m=b(modn)$

由 $n=\log(p)_a b$，$\therefore a^n=b(modp)$

$\therefore y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}\equiv y_2\cdot y_1^{n(p-2)}(modp)\equiv x\cdot b^k\cdot(a^k)^{n(p-2)}(modp)$

$=xa^{nk}\cdot a^{nk(p-2)}(modp)=x\cdot a^{nk(p-1)}(modp)=x(a^{p-1})^{nk}(modp)(\because a^{p-1}$ 除以 p 的余数为1)

$=x\cdot 1^{nk}(modp)=x(modp)$

$\because y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$，，$x \in \{1,2,\cdots,p-1\}$，$\therefore x = y_2 \otimes y_1^{n(p-2)}$.

(2) 令 $n = \log(p)_a(b \otimes c)$，$n_1 = \log(p)_a b$，$n_2 = \log(p)_a c$，则

$a^{n_1} = p^{m_1} + b$，$a^{n_2} = p^{m_2} + c$，其中 m_1，$m_2 \in N$，

$\therefore a^{n_1+n_2} \equiv b \subset (modp)$，而 $a^n = b \otimes c(modp) \equiv bc(modp)$，

$\therefore a^n = a^{n_1+a_2}(modp)$，由费马定理，$a^{s(p-1)+t} \equiv a^t(modp)$

则 $n = n_1 + n_2$ 或 $n = (n_1 + n_2) + p - 1$，

则 $n = n_1 \otimes n_2$，$\therefore \log(P)_a(b \otimes c) = \log(P)_a \otimes \log(P)_a c$

(3) $\because n = \log(p)_a b$，$\therefore a^n \equiv b(modp)$，且 $y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes} \equiv y_2 \cdot y_1^{n(p-2),\otimes} \equiv x(modp)$，

$\therefore x \in X$，$\therefore x = y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.

【解析】本题主要考查函数的新定义，属于难题.

(1) 利用函数的新定义，即可得；

(2) 令 $n = \log(p)_a(b \otimes c)$，$n_1 = \log(p)_a b$，$n_2 = \log(p)_a c$，即可得；

(3) 令 $n = \log(p)_a b$，$\therefore a^n \equiv b(modp)$，且 $y_2 \otimes y_1^{n(p-2),\otimes} \equiv y_2 \cdot y_1^{n(p-2),\otimes} \equiv x(modp)$，即可得.