NOIP 2020 模拟赛题解

p_b_p_b

GDFZ

2020 年 11 月 27 日

目录

A 马卡龙
题目描述

给定 $n \times n$ 的矩阵 M，求对于所有 $1 \sim n$ 的排列 p，$\bigoplus_{i=1}^{n} M_{i,p_i}$ 的值域。
$n \le 60, M_{i,j} \in [0, 2^{12})$。

A 马卡龙

部分分

枚举排列或状压 dp，时间复杂度 $O(n \times n!)$ 或 $O(2^n nV)$。
期望得分 $8 \sim 23$。

A 马卡龙

题解

将矩阵的每个元素看作集合幂级数，乘法看作异或卷积。

A 马卡龙

题解

将矩阵的每个元素看作集合幂级数，乘法看作异或卷积。
所求即为积和式的每一项是否为 0。

A 马卡龙

题解

将矩阵的每个元素看作集合幂级数，乘法看作异或卷积。
所求即为积和式的每一项是否为 0。
给每个元素赋一个随机权值，计算行列式的每一项，若为 0 则直接认为积和式的这一项为 0。

A 马卡龙

题解

将矩阵的每个元素看作集合幂级数，乘法看作异或卷积。
所求即为积和式的每一项是否为 0。
给每个元素赋一个随机权值，计算行列式的每一项，若为 0 则直接认为积和式的这一项为 0。
错误概率 $\leq \frac{n}{p}$，其中 p 为你所选取的模数（必须为质数）。

A 马卡龙

题解

将矩阵的每个元素看作集合幂级数，乘法看作异或卷积。
所求即为积和式的每一项是否为 0。
给每个元素赋一个随机权值，计算行列式的每一项，若为 0 则直接认为积和式的这一项为 0。
错误概率 $\leq \frac{n}{p}$，其中 p 为你所选取的模数（必须为质数）。
总体过程即为将每个元素跑 FWT，每一项分别计算行列式，再 IFWT 回去。

A 马卡龙

题解

将矩阵的每个元素看作集合幂级数，乘法看作异或卷积。
所求即为积和式的每一项是否为 0。
给每个元素赋一个随机权值，计算行列式的每一项，若为 0 则直接认为积和式的这一项为 0。
错误概率 $\leq \frac{n}{p}$，其中 p 为你所选取的模数（必须为质数）。
总体过程即为将每个元素跑 FWT，每一项分别计算行列式，再 IFWT 回去。
时间复杂度 $O(n^3V + V\log V)$。

1. A 马卡龙
2. B 长者
3. C 独白
4. D 吃瓜

B 长者
题目描述

给定 n 个点 m 条边的图，第 i 个点有实数权值 c_i，你需要找出**一条边或简单环**，使得其中点的权值和大于环大小的一半（下取整）。
多组数据，$T \leq 30, n \leq 500, m \leq 2000, c_i \in [0, 1]$，$c_i$ 的小数点后位数不超过 3。

B 长者

Subtask 1

由于图是树，只能找出一条边，直接遍历所有边即可。

B 长者
Subtask 1

由于图是树，只能找出一条边，直接遍历所有边即可。
时间复杂度 $O(m)$，期望得分 10。

B 长者

Subtask 2

将所有 c_i 减去 $\frac{1}{2}$ 之后，题目所求即为：权值和为正的环、权值和 $> -\frac{1}{2}$ 的奇环。

B 长者

Subtask 2

将所有 c_i 减去 $\frac{1}{2}$ 之后，题目所求即为：权值和为正的环、权值和 $> -\frac{1}{2}$ 的奇环。

若一个环的权值和为正，则必定存在其中一条边的两端点权值和为正。直接遍历所有边即可。

B 长者

Subtask 2

将所有 c_i 减去 $\frac{1}{2}$ 之后，题目所求即为：权值和为正的环、权值和 $> -\frac{1}{2}$ 的奇环。

若一个环的权值和为正，则必定存在其中一条边的两端点权值和为正。直接遍历所有边即可。

然后将每条边的权值设为 $-(c_u + c_v)$，此时边权都非负。题目所求即为权值和 < 1 的奇环。

B 长者
Subtask 2

将所有 c_i 减去 $\frac{1}{2}$ 之后，题目所求即为：权值和为正的环、权值和 $> -\frac{1}{2}$ 的奇环。
若一个环的权值和为正，则必定存在其中一条边的两端点权值和为正。直接遍历所有边即可。
然后将每条边的权值设为 $-(c_u + c_v)$，此时边权都非负。题目所求即为权值和 < 1 的奇环。
将每个点拆成两个点，边 (u, v) 变为 (u', v) 和 (v', u)。

B 长者
Subtask 2

将所有 c_i 减去 $\frac{1}{2}$ 之后，题目所求即为：权值和为正的环、权值和 $> -\frac{1}{2}$ 的奇环。
若一个环的权值和为正，则必定存在其中一条边的两端点权值和为正。直接遍历所有边即可。
然后将每条边的权值设为 $-(c_u + c_v)$，此时边权都非负。题目所求即为权值和 < 1 的奇环。
将每个点拆成两个点，边 (u, v) 变为 (u', v) 和 (v', u)。
断掉一条边，枚举端点，跑最短路，枚举另一端点。由于拆了点求奇环，容易证明不会出现不合要求的情况。

B 长者
Subtask 2

将所有 c_i 减去 $\frac{1}{2}$ 之后，题目所求即为：权值和为正的环、权值和 $> -\frac{1}{2}$ 的奇环。

若一个环的权值和为正，则必定存在其中一条边的两端点权值和为正。直接遍历所有边即可。

然后将每条边的权值设为 $-(c_u + c_v)$，此时边权都非负。题目所求即为权值和 < 1 的奇环。

将每个点拆成两个点，边 (u, v) 变为 (u', v) 和 (v', u)。

断掉一条边，枚举端点，跑最短路，枚举另一端点。由于拆了点求奇环，容易证明不会出现不合要求的情况。

时间复杂度 $O(nm \log m)$，期望得分 100。

1. A 马卡龙
2. B 长者
3. C 独白
4. D 吃瓜

C 独白

Subtask 1&2

按题意计算式子。

C 独白
Subtask 1&2

按题意计算式子。
时间复杂度 $O(nk+q)$，期望得分 10。

C 独白

Subtask 1&2

按题意计算式子。
时间复杂度 $O(nk+q)$，期望得分 10。
可以用线段树或分块等方法优化上述过程。

C 独白

Subtask 1&2

按题意计算式子。
时间复杂度 $O(nk+q)$，期望得分 10。
可以用线段树或分块等方法优化上述过程。
时间复杂度 $O(k\log k+q)$ 到 $O(k\sqrt{k}+q)$ 不等，期望得分 20。

C 独白
正解

先证明一个结论：每个数都在 $n-1$ 和 $n+1$ 之间。

C 独白
正解

先证明一个结论：每个数都在 $n-1$ 和 $n+1$ 之间。
使用归纳法。对于 $j < i-n-1$，有 $j + a_j \le j + n + 1 < i$；对于 $j > i-n$，有 $j + a_j \ge j + n - 1 \ge i$。

C 独白

正解

先证明一个结论：每个数都在 $n-1$ 和 $n+1$ 之间。
使用归纳法。对于 $j < i-n-1$，有 $j + a_j \le j + n + 1 < i$；对于 $j > i - n$，有 $j + a_j \ge j + n - 1 \ge i$。
进一步可以得出：a_i 的取值只和 a_{i-n}, a_{i-n-1} 的取值有关。

C 独白
正解

先证明一个结论：每个数都在 $n-1$ 和 $n+1$ 之间。
使用归纳法。对于 $j < i-n-1$，有 $j + a_j \le j + n + 1 < i$；对于 $j > i - n$，有 $j + a_j \ge j + n - 1 \ge i$。
进一步可以得出：a_i 的取值只和 a_{i-n}, a_{i-n-1} 的取值有关。
具体地，$a_i = n - 1 + [a_{i-n} + i - n \ge i] + [a_{i-n-1} + i - n - 1 \ge i]$。
即 $a_i = n - [a_{i-n} = n - 1] + [a_{i-n-1} = n + 1]$。

C 独白

正解

先证明一个结论：每个数都在 $n-1$ 和 $n+1$ 之间。
使用归纳法。对于 $j < i-n-1$，有 $j + a_j \le j + n + 1 < i$；对于 $j > i-n$，有 $j + a_j \ge j + n - 1 \ge i$。
进一步可以得出：a_i 的取值只和 a_{i-n}, a_{i-n-1} 的取值有关。
具体地，$a_i = n - 1 + [a_{i-n} + i - n \ge i] + [a_{i-n-1} + i - n - 1 \ge i]$。
即 $a_i = n - [a_{i-n} = n-1] + [a_{i-n-1} = n+1]$。
下文中令 $a'_i = a_i - n$。那么其取值有 $-1, 0, 1$ 三种，且
$a'_i = [a'_{i-n-1} = 1] - [a'_{i-n} = -1]$。

C 独白

正解

这个序列有很强的周期性，所以我们将其每 n 个写成一行。

C 独白

正解

这个序列有很强的周期性，所以我们将其每 n 个写成一行。

发现从一行变成下一行时，每个 -1 会不动，每个 1 会向右移一个（若超出一行则会再到下一行的第一个）。-1 和 1 在同一个格子时会变成 0。

C 独白

正解

这个序列有很强的周期性，所以我们将其每 n 个写成一行。
发现从一行变成下一行时，每个 -1 会不动，每个 1 会向右移一个（若超出一行则会再到下一行的第一个）。-1 和 1 在同一个格子时会变成 0。
可以精细模拟上面的过程。也可以注意到，在 $O(1)$ 行后，1 和 -1 会只剩下一种（足够多次就会全部抵消掉）。可以减少一些细节。

C 独白

正解

这个序列有很强的周期性，所以我们将其每 n 个写成一行。
发现从一行变成下一行时，每个 -1 会不动，每个 1 会向右移一个（若超出一行则会再到下一行的第一个）。-1 和 1 在同一个格子时会变成 0。
可以精细模拟上面的过程。也可以注意到，在 $O(1)$ 行后，1 和 -1 会只剩下一种（足够多次就会全部抵消掉）。可以减少一些细节。
时间复杂度 $O(n+q)$，期望得分 100。

C 独白

正解

这个序列有很强的周期性，所以我们将其每 n 个写成一行。
发现从一行变成下一行时，每个 -1 会不动，每个 1 会向右移一个（若超出一行则会再到下一行的第一个）。-1 和 1 在同一个格子时会变成 0。
可以精细模拟上面的过程。也可以注意到，在 $O(1)$ 行后，1 和 -1 会只剩下一种（足够多次就会全部抵消掉）。可以减少一些细节。
时间复杂度 $O(n+q)$，期望得分 100。
如果用数据结构模拟了足够多行，可以通过子任务 3，期望得分 20。

D 吃瓜

题解

记“整个序列”表示长度为 n 的那个排列，“吃瓜序列”表示一个人吃了的 $n/3$ 个瓜按顺序组成的序列。

D 吃瓜

题解

记“整个序列”表示长度为 n 的那个排列，“吃瓜序列”表示一个人吃了的 $n/3$ 个瓜按顺序组成的序列。

求解此题分为两步：先计算所有 Y,Z,K 的合法吃瓜序列，再把 K 没吃的瓜用合法的方案填进去。

D 吃瓜

题解

记“整个序列”表示长度为 n 的那个排列，“吃瓜序列”表示一个人吃了的 $n/3$ 个瓜按顺序组成的序列。
求解此题分为两步：先计算所有 Y,Z,K 的合法吃瓜序列，再把 K 没吃的瓜用合法的方案填进去。
限制有 6 个，分别是一个人不能吃掉另一个人要吃的瓜，用 (A, B) 表示 A 不能吃 B 要吃的瓜。那么 (A, B) 只与 A 的整个序列和 B 的吃瓜序列有关。

D 吃瓜

题解

记“整个序列”表示长度为 n 的那个排列，“吃瓜序列”表示一个人吃了的 $n/3$ 个瓜按顺序组成的序列。
求解此题分为两步：先计算所有 Y,Z,K 的合法吃瓜序列，再把 K 没吃的瓜用合法的方案填进去。
限制有 6 个，分别是一个人不能吃掉另一个人要吃的瓜，用 (A, B) 表示 A 不能吃 B 要吃的瓜。那么 (A, B) 只与 A 的整个序列和 B 的吃瓜序列有关。
做第一步时，会把 $(Y, Z), (Z, Y), (Y, K), (Z, K)$ 的限制全部考虑进去，所以第二步只需要考虑 $(K, Y), (K, Z)$ 。那么可以看出第二步与三个人的吃瓜序列具体是什么是没有关系的，即第一步和第二步是独立的。答案就是两步的答案相乘。

D 吃瓜

题解

求第二步的答案是个简单 DP。
设 $dp_{i,j}$ 表示已考虑 Y,Z 的吃瓜序列的前 i 个，剩下 j 个数可以填，那么答案即为 $\sum_j dp_{n/3,j} \cdot j!$。

D 吃瓜
题解

求第二步的答案是个简单 DP。
设 $dp_{i,j}$ 表示已考虑 Y,Z 的吃瓜序列的前 i 个，剩下 j 个数可以填，那么答案即为 $\sum_j dp_{n/3,j} \cdot j!$。
在第一步，我们先确定 Y,Z 的合法吃瓜序列（考虑了 $(Y,Z),(Z,Y)$），再考虑 K 的吃瓜序列的每个位置可以填入剩下哪些没吃的瓜（考虑 $(Y,K),(Z,K)$）。发现一个瓜能填的位置一定是一个后缀，所以设 cnt_i 表示能填在 i 的瓜的个数，答案就是 $\prod(cnt_i - (n/3 - i))$。

D 吃瓜

题解

求第二步的答案是个简单 DP。
设 $dp_{i,j}$ 表示已考虑 Y,Z 的吃瓜序列的前 i 个，剩下 j 个数可以填，那么答案即为 $\sum_j dp_{n/3,j} \cdot j!$。
在第一步，我们先确定 Y,Z 的合法吃瓜序列（考虑了 $(Y,Z),(Z,Y)$），再考虑 K 的吃瓜序列的每个位置可以填入剩下哪些没吃的瓜（考虑 $(Y,K),(Z,K)$）。发现一个瓜能填的位置一定是一个后缀，所以设 cnt_i 表示能填在 i 的瓜的个数，答案就是 $\prod(cnt_i-(n/3-i))$。
从前往后推，确定 Y,Z 的吃瓜序列的每个位置填什么，用前缀和优化转移即可。

D 吃瓜
题解

求第二步的答案是个简单 DP。
设 $dp_{i,j}$ 表示已考虑 Y,Z 的吃瓜序列的前 i 个，剩下 j 个数可以填，那么答案即为 $\sum_j dp_{n/3,j} \cdot j!$。
在第一步，我们先确定 Y,Z 的合法吃瓜序列（考虑了 $(Y,Z),(Z,Y)$），再考虑 K 的吃瓜序列的每个位置可以填入剩下哪些没吃的瓜（考虑 $(Y,K),(Z,K)$）。发现一个瓜能填的位置一定是一个后缀，所以设 cnt_i 表示能填在 i 的瓜的个数，答案就是 $\prod(cnt_i - (n/3 - i))$。
从前往后推，确定 Y,Z 的吃瓜序列的每个位置填什么，用前缀和优化转移即可。
时间复杂度 $O(n^3)$，期望得分 100。