Algorytmy i struktury danych

Sortowanie i kopce

Przygotowanie do kolokwium

Przyjmując, że `tabA[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}` oraz `tabB[] = {7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}` i stosując algorytmy sortujące ściśle według procedur z pliku sort2023.cc wykonaj polecenia:

Zadanie 1

Ile dokładnie porównań (między elementami tablic) wykona `insertion_sort(tabB)`, a ile `insertion_sort(tabA)`?

Przypadek optymistyczny

Dla tablicy posortowanej rosnąco o długości n, `insertion_sort` wykona **n-1 porównań**.
`insertion_sort` dla tablicy tabA wykona **6 porównań**.
Złożoność czasowa: $\boldsymbol{O(n)}$

Przypadek pesymistyczny

Dla tablicy posortowanej malejąco o długości n, `insertion_sort` wykona $\frac{n^2-n}{2}$ **porównań**.
`insertion_sort` dla tablicy tabA wykona **21 porównań**.
Złożoność czasowa: $\boldsymbol{O(n^2)}$

Zadanie 2

Ile co najwyżej porównań (między elementami tablic) wykona procedura scalająca `merge` dwie tablice n-elementowe?

Procedura scalająca dwie tablice n-elementowe `merge` wykona co najwyżej $\boldsymbol{2n-1}$ **porównań**
w przypadku, gdy elementy tablic są posortowane naprzemiennie rosnąco.
Złożoność czasowa procedury merge dla każdego przypadku: $\boldsymbol{O(n)}$

```
void merge(int n, int k, double leftTable[], double rightTable[]) {
int i = 0;
int j = k;
int l = 0;
while (i < k && j < n)
    if (leftTable[i] <= leftTable[j])
        rightTable[l++] = leftTable[i++];
    else
        rightTable[l++] = leftTable[j++];

while (i < k)
    leftTable[--j] = leftTable[--k];

for (i = 0; i < j; i++)
    leftTable[i] = rightTable[i];
}
```

Zadanie 3

Jaka jest pesymistyczna złożoność czasowa procedury `merge_sort`? Odpowiedź uzasadnij.

Złożoność czasowa procedury `merge_sort` wynosi $\boldsymbol{O(nlogn)}$, ponieważ każde wywołanie procedury `merge_sort` dzieli tablicę na dwie części o połowie długości, a następnie wywołuje procedurę `merge` na tych dwóch częściach. Złożoność czasowa nie zależy od ilości elementów i tego jak są posortowane. Algorym `merge_sort` składa się z dwóch etapów: divide i merge.

Złożoność czasowa etapu divide wynosi $\boldsymbol{O(n)}$, ponieważ wykonujemy $\boldsymbol{n-1}$ podziałów.
Złożoność czasowa etapu merge wynosi $\boldsymbol{O(nlogn)}$, ponieważ wykonujemy $\boldsymbol{lbn}$ scaleń mając zawsze do dyspozycji $\boldsymbol{n}$ elementów.

Razem złożoność czasowa algorytmu `merge_sort` wynosi: $\boldsymbol{O(n) + O(nlogn) = O(nlogn)}$

Dowód metodą rekurencji uniwersalnej:

$$\boldsymbol{T(n) = 2T(n/2) + O(n)}$$

$$\boldsymbol{f(n) = n^{log_2 2} = n}$$

Rozważamy drugi przypadek:

$$\boldsymbol{T(n) = O(n \log n)}$$

Zadanie 4

Ile co najwyżej porównań (między elementami tablicy) wykona procedura partition?

Procedura partition wykona co najwyżej $\boldsymbol{n+1}$ **porównań**.

```
int partition(double t[], int n)
{
    int k = -1;
    double x = t[n / 2];
    for (;;) {
        do
            ++k;
        while (t[k] < x);

        do
            --n;
        while (t[n] > x);

        if (k < n)
            std::swap(t[k], t[n]);
        else
            return k;
    }
}
```

Zadanie 5

Jak jest średnia a jaka pesymistyczna złożoność `quick_sort`. Odpowiedź uzasadnij.

Średnia złożoność czasowa algorytmu `quick_sort` wynosi $O(nlogn)$.
pesymistyczna złożoność czasowa algorytmu `quick_sort` wynosi $O(n^2)$.

```
void quick_sort(double t[], int n)
{
    if (n > 1) {
        int k = partition(t, n);  // podziel na dwie czesci
        quick_sort(t, k);         // posortuj lewa
        quick_sort(t + k, n - k); // posortuj prawa
    }
}
```

Zadanie 6

Jaka jest złożoność funkcji **buildheap**? Przeprowadź dowód - uzasadnij swoją odpowiedź.

```
void sift_down(double t[], int n, int i)
{   /*
    Przesiej element t[i] w dol kopca:
    t[2*i+1] - lewe dziecko t[i]
    t[2*i+2] - prawe dziecko t[i]
    jesli ktores z dzieci jest wieksze od t[i]:
    - zamien t[i] z tym dzieckiem miejscami
    - sprawdz ponownie t[i] w nowym miejscu
    */

    int k = i;
    double x = t[i];
    // x mniejszy od wiekszego syna
    while (((k += k + 2) < n && t[k - 1] < t[k] || --k < n) && x < t[k])
    {
        t[i] = t[k];
        i = k;
    }
    t[i] = x;
}

void build_max_heap(double t[])
{
    for (int i = n / 2; i >= 0; i--)
        sift_down(t, i);
}
```

Złożoność czasowa funkcji **buildheap** wynosi $O(n)$. **Dowód:**

Na każdym poziomie oprócz ostatniego, węzły mogą mieć maksymalnie dwójkę dzieci: lewe i prawe. Dlatego przesiewając, porównujemy maksymalnie dwa razy. Ostatni poziom drzewa to $n/2$ węzłów. Węzły te nie mają potomków, zatem nie możemy przesiewać. Poziom wyżej to $n/4$ węzłów. Maksymalnie można wykonać 1 przesianie, ponieważ węzeł na tym poziomie może mieć tylko dzieci. Poziom wyżej to $n/8$ węzłów. Węzły te mają maksymalnie dzieci i potomka. Maksymalnie można wykonać 2 przesiania, etc. Ilość porównań `sift_down` to ciąg:

$$2(\frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + ...)$$

Po przekształceniu wzory widoczne jest to, że składa się z on nieskończonych ciągów geometrycznych. Jeśli chcemy policzyć sumę tych ciągów, to możemy użyć wzoru na sumę ciągu geometrycznego. Można

to zrobić pod warunkiem, Jeśli ciąg jest zbieżny, a więc ma skończoną ilość elementów. W naszym przypadku ciąg jest skończony, ponieważ ilość porównań jest ograniczona przez ilość węzłów w drzewie. Dlatego możemy policzyć sumę ciągu geometrycznego. Iloczyn q wynosi 1/2, zatem spełniony jest warunek o zbieżności ciągu. Wzór na sumę ciągu geometrycznego to:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Ilość porównań wykonywanych przez funkcję `sift_down` opisana jest za pomocą poniższego wzoru.

$$2\sum_{i=1}^{h-1} \frac{n}{2^{i+1}} \cdot i$$

$$2(\frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \frac{n}{32} \cdot 4 + \dots)$$

$$\frac{n}{2}(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots)$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 0.5$$

$$\frac{1}{8} + \dots = 0.25$$

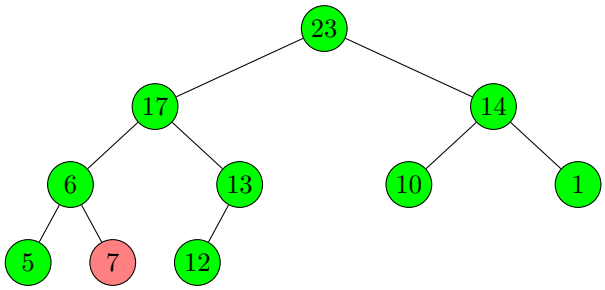
$$\dots$$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{n}{2} \cdot 4 = 2n = O(n)$$

Zadanie 11

Czy ciąg `{23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12}` jest kopcem?

Ciąg nie jest kopcem, ponieważ węzeł o wartości 7 nie spełnia warunku kopca.
Niespełnionym warunkiem kopca jest to, że dziecko nie może być większe od swojego rodzica.



Zadanie 12

Zilustruj działanie procedury buildheap dla ciągu 5,3,17,10,84,19,6,22,9. Narysuj na kartce wygląd tablicy/kopca po każdym wywołaniu procedury przesiej.

```
{5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9}
{5, 3, 17, 22, 84, 19, 6, 10, 9}
{5, 3, 19, 22, 84, 17, 6, 10, 9}
{5, 84, 19, 22, 3, 17, 6, 10, 9}
{84, 5, 19, 22, 3, 17, 6, 10, 9}
{84, 22, 19, 5, 3, 17, 6, 10, 9}
{84, 22, 19, 10, 3, 17, 6, 5, 9}
```