

Algorytmy i struktury danych

Sortowanie i kopce

Przygotowanie do kolokwium

Przyjmując, że `tabA[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}` oraz `tabB[] = {7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}` i stosując algorytmy sortujące ściśle według procedur z pliku `sort2023.cc` wykonaj polecenia:

Zadanie 1

Ile dokładnie porównań (między elementami tablic) wykona `insertion_sort(tabB)`, a ile `insertion_sort(tabA)`?

Przypadek optymistyczny

Dla tablicy posortowanej rosnąco o długości n , `insertion_sort` wykona **$n-1$ porównań**.

`insertion_sort` dla tablicy `tabA` wykona **6 porównań**.

Złożoność czasowa: $O(n)$

Przypadek pesymistyczny

Dla tablicy posortowanej malejąco o długości n , `insertion_sort` wykona $\frac{n^2-n}{2}$ **porównań**.

`insertion_sort` dla tablicy `tabA` wykona **21 porównań**.

Złożoność czasowa: $O(n^2)$

Zadanie 2

Ile co najwyżej porównań (między elementami tablic) wykona procedura scalająca `merge` dwie tablice n -elementowe?

Procedura scalająca dwie tablice n -elementowe `merge` wykona co najwyżej **$2n - 1$ porównań**

w przypadku, gdy elementy tablic są posortowane naprzemiennie rosnąco.

Złożoność czasowa procedury `merge` dla każdego przypadku: $O(n)$

```
void merge(int n, int k, double leftTable[], double rightTable[]) {
    int i = 0;
    int j = k;
    int l = 0;
    while (i < k && j < n)
        if (leftTable[i] <= leftTable[j])
            rightTable[l++] = leftTable[i++];
        else
            rightTable[l++] = leftTable[j++];

    while (i < k)
        leftTable[--j] = leftTable[--k];

    for (i = 0; i < j; i++)
        leftTable[i] = rightTable[i];
}
```

Zadanie 3

Jaka jest pesymistyczna złożoność czasowa procedury `merge_sort`? Odpowiedź uzasadnij.

Złożoność czasowa procedury `merge_sort` wynosi $O(n \log n)$, ponieważ każde wywołanie procedury `merge_sort` dzieli tablicę na dwie części o połowie długości, a następnie wywołuje procedurę `merge` na tych dwóch częściach. Złożoność czasowa nie zależy od ilości elementów i tego jak są posortowane.

Algorytm `merge_sort` składa się z dwóch etapów: `divide` i `merge`.

Złożoność czasowa etapu `divide` wynosi $O(n)$, ponieważ wykonujemy $n - 1$ podziałów.

Złożoność czasowa etapu `merge` wynosi $O(n \log n)$, ponieważ wykonujemy $\log n$ skaleń mając zawsze do dyspozycji n elementów.

Razem złożoność czasowa algorytmu `merge_sort` wynosi: $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

Dowód metodą rekurencji uniwersalnej:

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

$$f(n) = n^{\log_2 2} = n$$

Rozważamy drugi przypadek:

$$T(n) = O(n \log n)$$

Zadanie 4

Ile co najwyżej porównań (między elementami tablicy) wykona procedura `partition`?

Procedura `partition` wykona co najwyżej $n + 1$ porównań.

```
int partition(double t[], int n)
{
    int k = -1;
    double x = t[n / 2];
    for (;;) {
        do
            ++k;
        while (t[k] < x);

        do
            --n;
        while (t[n] > x);

        if (k < n)
            std::swap(t[k], t[n]);
        else
            return k;
    }
}
```

Zadanie 5

Jak jest średnia a jaka pesymistyczna złożoność `quick_sort`. Odpowiedź uzasadnij.

Średnia złożoność czasowa algorytmu `quick_sort` wynosi $O(n \log n)$.
pesymistyczna złożoność czasowa algorytmu `quick_sort` wynosi $O(n^2)$.

```
void quick_sort(double t[], int n)
{
    if (n > 1) {
        int k = partition(t, n); // podziel na dwie czesci
        quick_sort(t, k);        // posortuj lewa
        quick_sort(t + k, n - k); // posortuj prawa
    }
}
```

Zadanie 6

Jaka jest złożoność funkcji `buildheap`? Przeprowadź dowód - uzasadnij swoją odpowiedź.

```
void sift_down(double t[], int n, int i)
{
    /*
     * Przesiej element t[i] w dol kopca:
     * t[2*i+1] - lewe dziecko t[i]
     * t[2*i+2] - prawe dziecko t[i]
     * jesli ktoreś z dzieci jest wieksze od t[i]:
     * - zamien t[i] z tym dzieckiem miejscami
     * - sprawdź ponownie t[i] w nowym miejscu
     */

    int k = i;
    double x = t[i];
    // x mniejszy od wiekszego syna
    while ((k += k + 2) < n && t[k - 1] < t[k] || k < n) && x < t[k])
    {
        t[i] = t[k];
        i = k;
    }
    t[i] = x;
}

void build_max_heap(double t[])
{
    for (int i = n / 2; i >= 0; i--)
        sift_down(t, i);
}
```