随机化算法

by 202208040412 邹林壮

- 四种随机化算法
  - 数值随机化算法
  - 舍伍德算法
  - 拉斯维加斯算法
  - 蒙特卡罗算法

随机算法四大类：

数值随机化算法求近似解、

Monte Carlo算法高概率求正确解

（无法判断正确）、

Las Vegas算法改进算法性能

（可能找不到解）

Sherwood算法消除最坏与平均之差异

随机算法的随机性（基本特征）

- 对于同一实例的多次执行, 效果可能完全不同

- 时间复杂性的一个随机变量

- 解的正确性和准确性也是随机的

数值随机化算法

随机数值算法

- 主要用于**数值问题**求解

- 算法的输出往往是**近似解**

- 近似解的**精确度**与**算法执行时间**成正比

案例一 近似计算圆周率

用随机投点法近似计算圆周率

- 向方框内随机掷点$x = r(0,1), y = r(0,1)$

- 落在圆内概率$\pi/4$

- 近似值 ≈ 圆内点数c/ 总点数n,**n越大，近似度越高**

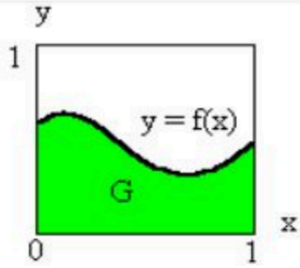
```
#include<iostream>
#include<random>
using namespace std;

double moni(int n){
    random_device rd;
    mt19937 gen(rd());
    int k=0;
    for(int i=1;i<=n;i++){
    uniform_real_distribution<> dis(-1.0, 1.0);
    double x=dis(gen);
    double y=dis(gen);
    if(x*x+y*y<=1)k++;
    }
    return 4*k/double(n);
}
int n;
int main(){
    cin>>n;
    cout<<moni(n)<<endl;
}
```

经过对n的不同测试，得到的结果越来越精确，但是随着n数据规模的增大，算法执行时间增大，解的精确度也增大。

案例二计算定积分

案例分析2

–计算定积分



设f(x)是[0，1]上的连续函数，且0≤f(x)≤1。

需要计算的积分为 $I=\int_0^1 f(x)dx$ ，积分I等于图中的面积G。

在图所示单位正方形内均匀地作投点试验，则随机点落在曲线下面的概率为

$$P_r\{y\le f(x)\}=\int_0^1\int_0^{f(x)}dydx=\int_0^1 f(x)dx$$

假设向单位正方形内随机地投入n个点(xi，yi)。如果有m个点落入G内，则随机点落入G内的概率

$$\mathrm{I}\approx\frac{m}{n}$$

同样是算法运行时间越长，得到的近似解越精确。

蒙特卡洛算法

Monte Carlo算法

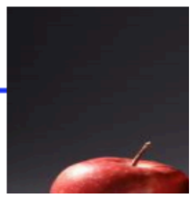
– 主要用于求解**需要准确解**的问题

– 算法**可能给出错误解**

– 获得精确解**概率**与**算法执行时间**成正比

例子：筐里有100个苹果，让我每次闭眼拿1个，挑出最大的。于是我随机拿1个，再随机拿1个跟它比，留下大的，再随机拿1个……我每拿一次，留下的苹果都至少不比上次的小。拿的次数越多，挑出的苹果就越大，但除非拿100次，否则无法肯定挑出了最大的。

这个挑苹果的算法，就属于蒙特卡罗算法—找好的，但不保证是最好的。



在实际应用中常会遇到一些问题，不论**采用确定性算法或随机化算法**都无法保证每次都能得到正确的解答。蒙特卡罗算法则在一般情况下可以**保证对问题的所有实例都以高概率给出正确解**，但是**通常无法判定一个具体解是否正确。**

设p是一个实数，且$1/2<p<1$。如果一个蒙特卡罗算法**对于问题的任一实例得到正确解**的概率不小于p，则称该蒙特卡罗算法是p正确的，且称$p-1/2$是该算法的优势。

如果对于同一实例，蒙特卡罗算法**不会给出2个不同的正确解答**，则称该蒙特卡罗算法是**一致的。**

对于一个**一致的p正确**蒙特卡罗算法，要提高获得正确解的概率，只要执行该算法若干次，并选择出现频次最高的解即可

- 如果重复调用一个一致的 $(1/2+\varepsilon)$ 正确的蒙特卡罗算法 $2m-1$ 次，得到正确解的概率至少为 $\boxed{1-\delta}$，其中，
- ε 为MC算法优势，δ 为失败概率，$\varepsilon+\delta<1/2$

$$\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\binom{2i}{i}\left(\frac{1}{4}-\varepsilon^2\right)^i\le\frac{(1-4\varepsilon^2)^m}{4\varepsilon\sqrt{\pi m}}$$

有些蒙特卡罗算法除了具有**描述问题实例的输入参数**外，还具有**描述错误解可接受概率的参数**。这类算法的计算**时间复杂性**通常**由问题的实例规模以及错误解可接受概率**的函数来描述。

对于一个解所给问题的蒙特卡罗算法MC(x)，如果存在问题实例的子集X使得：
(1) 当x属于X时，MC(x)返回的解是正确的；
(2) 当x属于X时，正确解是 y_0，但MC(x)返回的解未必是 y_0。
称上述算法 $\boxed{\text{MC(x)是偏}y_0\text{的算法}}$。

重复调用一个一致的、p正确、偏 y_0 的蒙特卡罗算法k次，可得到一个 $\boxed{(1-(1-p)^k)}$ 正确的蒙特卡罗算法，且所得算法仍是一个一致的偏 y_0 蒙特卡罗算法。

案例一主元素问题

设 $T[1:n]$ 是一个含有n个元素的数组。当{i|T[i]=x}|>n/2时，称元素x是数组T的主元素

```
#include <iostream>
#include <random>
#include <cmath>
using namespace std;

const int N = 1e6 + 1;
int n;
int a[N];

bool majority(int n, int &num) {
    random_device rd;
    mt19937 gen(rd());
    uniform_int_distribution<> dis(0, n - 1);
    int id = dis(gen);
    num = a[id];
    int k = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (a[i] == num) k++;
    }
```

```
    return k > n / 2;
}

bool majorityMC(int n, double e, int &num) {
    int k = ceil(log(1 / e) / log(2.0));
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        if (majority(n, num)) {
            num = a[i]; // 这里需要更新num的值
            return true;
        }
    }
    return false;
}

int main() {
    cin >> n;
    for (int i = 0; i < n; i++) cin >> a[i];
    double e = 0.001;
    int num;
    if (majorityMC(n, e, num))
        cout << "该数组的主元素为: " << num << endl;
    else
        cout << "该数组没有主元素" << endl;
}
```

对于任何给定的ε>0，算法majorityMC重复调用log(1/ε) 次算法majority。它是一个偏真蒙特卡罗算法，且其错误概率小于ε。算法majorityMC所需的计算时间是O(nlog(1/ ε))。

拉斯维加斯算法

一旦找到一个解, 该解一定是正确的

-**找到解的概率与算法执行时间**成正比

-增加对问题反复求解次数, **可使求解无效的概率任意小**

例子：有一把锁，给我100把钥匙，只有1把是对的。于是我每次随机拿1把钥匙去试，打不开就再换1把。我试的次数越多，打开（最优解）的机会就越大，但在打开之前，那些错的钥匙都是没有用的。

这个试钥匙的算法，就是拉斯维加斯的——尽量找最好的，但不保证能找到。

它所作的随机性决策有可能**导致算法找不到所需的解**,但是找到一个解，这个解一定是正确的

```
void obstinate(Object x, Object y)
 {// 反复调用拉斯维加斯算法LV(x,y)，直到找到问题的一个解y
  bool success= false;
  while (!success) success=lv(x,y);
 }
```

设$p(x)$是对输入x调用拉斯维加斯算法获得问题的一个解的概率，一个正确的拉斯维加斯算法应该对所有输入x均有$p(x) > 0$。

设t(x)是算法obstinate找到具体实例x的一个解所需的平均时间，s(x)和e(x)分别是算法对于具体实例x求解成功或求解失败所需的平均时间，则有：

$$t(x) = \boxed{p(x)s(x)} + \boxed{(1 - p(x))}(e(x) + t(x))$$

解此方程可得：

$$t(x) = s(x) + \frac{1 - p(x)}{p(x)} e(x)$$

针对该方程的解释，特别是$(e(x) + t(x))$部分

- 算法可能需要多次尝试才能成功，每次尝试都有一定的失败概率。
- **每次失败后，算法需要重新开始，这增加了额外的时间开销。**
- 算法的平均运行时间取决于**成功的概率** $p(x)$和**失败后需要重新开始的次数。**

案例一n后问题

-n后问题

- 改进：将上述随机放置策略与回溯法相结合。
- 可先在棋盘的若干行中随机地放置皇后，然后在后继行中用回溯法继续放置，直至找到一个解或宣告失败。
- 随机放置的皇后越多，后继回溯搜索所需的时间就越少，但失败的概率也就越大。

stopVegas	p	s	e	t
0	1.0000	262.00	--	262.00
5	0.5039	33.88	47.23	80.39
12	0.0465	13.00	10.20	222.11

舍伍德算法

–一定能够**求得一个正确解**

–确定**算法的最坏与平均复杂性差别大**时, 加入随机性, 即得到Sherwood算法

–**消除最坏行为与特定实例**的联系，**消除最差情况和平均情况下的差异**

舍伍德(Sherwood)算法

设A是一个确定性算法，当它的输入实例为x时所需的计算时间记为$t_A(x)$。设X_n是算法A的输入规模为n的实例的全体，则当问题的输入规模为n时，算法A所需的平均时间为

$$\bar{t}_A(n) = \sum_{x \in X_n} t_A(x) / |X_n|$$

有些x∈Xn $t_A(x) >> \bar{t}_A(n)$

希望获得一个随机化算法B，使得对问题的输入规模为n的每一个实例均有

$$t_B(x) = \bar{t}_A(n) + s(n)$$

这就是舍伍德算法设计的基本思想。当s(n)与$t_{A(n)}$相比可忽略时，舍伍德算法可获得很好的平均性能。

一输入预处理

- 有时，所给的确定性算法无法直接改造成舍伍德型算法。
- 可借助于随机预处理技术，不改变原有的确定性算法，仅对其输入进行随机洗牌，同样可收到舍伍德算法的效果。

```
template<class Type>
void Shuffle(Type a[], int n)
{// 随机洗牌算法
  static RandomNumber rnd;
  for (int i=0;i<n;i++) {
    int j=rnd.Random(n-i)+i;
    Swap(a[i], a[j]);
    }
}
```

```
#include <iostream>
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#include<algorithm>
using namespace std;


template<class Type>
Type select(Type a[], int n,int l, int r, int k){//左边界，右边界，第k位元素
    if(k<1||k>n){
        printf("Index out of bounds\n");
        exit(0);
    }
    n=n-1;
    while (true){
        if (l >= r)return a[l];
        //随机选择划分基准
        int i = l, j = l + rand() % (r - l + 1);//j选择为l到r的任意值[l,r]
        swap(a[i], a[j]);//与首元素交换位置
        j = r + 1;
        Type pivot = a[l];
        //以划分基准为轴做元素交换
        while (true){
            while (i<r&&a[++i] < pivot);
            while (j>l&&a[--j] > pivot);
            if (i >= j){
                break;
            }
            swap(a[i], a[j]);
        }
        //如果最后基准元素在第k个元素的位置，则找到了第k小的元素
        if (j - l + 1 == k){
            return pivot;
```

```
        }
        //a[j]必然小于pivot,做最后一次交换，满足左侧比pivot小，右侧比pivot大
        a[l] = a[j];
        a[j] = pivot;
        //对子数组重复划分过程
        if (j - l + 1 < k){
            k = k - (j - l + 1);//基准元素右侧,求出相对位置
            l = j + 1;
        }else{//基准元素左侧
            r = j - 1;
        }
    }
}


int main(){
    int n,k,r;
    while(cin>>n){
        cin>>k;
        int a[n];
        for(int i=0;i<n;i++)
            cin>>a[i];
        r=select<int> (a,n,0,n-1,k);
        cout<<r<<endl;
    }
    return 0;
}
```