2025 年新高考数学 I 卷模拟试题

2025 年 6 月 7 日

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色签字笔填写姓名和准考证号
2. 选择题用 2B 铅笔填涂，非选择题用签字笔作答
3. 考试时间 120 分钟，满分 150 分

一、单选题（共 8 小题，每题 5 分，共 40 分）

1. 已知复数 $z = \dfrac{3-i}{1+2i}$，则 $|z| =$ （　　）

   A. $\sqrt{2}$

   B. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

   C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

   D. $\sqrt{5}$

2. 样本数据 $2, 8, 14, 16, 20$ 的平均数为 （　　）

   A. 8

   B. 9

   C. 12

   D. 15

3. 已知集合 $A = \{x | \ln(x-1) < 0\}$, $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$，则 $A \cap B =$ （　　）

   A. $(1, 2)$

   B. $(1, 3)$

   C. $(0, 3)$

   D. $(2, 3)$

4. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F，点 A 在抛物线上且 $|AF| = 5$，则点 A 到 y 轴距离为(　　)

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

二、多选题（共 3 小题，每题 6 分，共 18 分）

1. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$，则 (　　)

○ $f(x)$ 周期为 π

○ $x = \frac{\pi}{12}$ 是函数对称轴

○ $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ 上单调递增

○ 值域为 $[-1, \sqrt{3}]$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$，$|\overrightarrow{AB}| = 3$，$|\overrightarrow{AC}| = 4$，则 (　　)

○ $\angle BAC = 60^\circ$

○ $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$

○ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$

○ $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 投影为 $-\frac{9}{\sqrt{13}}$

三、填空题（共 3 小题，每题 5 分，共 15 分）

1. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx =$_________

2. 三棱锥 $P - ABC$ 体积为 12，若点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PA}$，则四面体 $Q - ABC$ 体积为_________

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 3}$，则 $a_{2025} =$_________

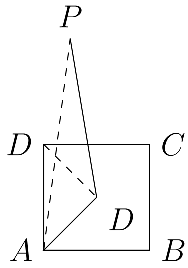
四、解答题（共 5 小题，共 77 分）

1. (13 分) 在 $\triangle ABC$ 中，a, b, c 分别为角 A, B, C 对边，且 $b\cos C + c\cos B = 2a\cos A$

   (a) 证明：$2\cos A = 1$

   (b) 若 $a = 2$，$c - b = 1$，求 $\triangle ABC$ 面积

2. (15 分) 如图，四棱锥 $P - ABCD$ 底面为正方形，$PD \perp$ 底面 $ABCD$，$PD = AD = 2$



(a) 证明：$BD \perp PC$

(b) 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值

(c) 在线段 PB 上是否存在点 M 使 $AM \parallel$ 平面 PCD？说明理由

3. (15 分) 已知函数 $f(x)=e^x-ax-\cos x$。

(a) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极值点个数

(b) 若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求整数 a 的最大值

4. (17 分) 双曲线 $C:\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$，过点 $P(0,3)$ 的直线 l 交 C 于 M,N 两点.

(a) 当 l 斜率不存在时，求 $\triangle OMN$ 面积（O 为原点）

(b) 记 Q 为 MN 中点，证明：$k_{OQ}\cdot k_l=\dfrac{1}{2}$

(c) 是否存在 l 使得 $\angle MON=90^\circ$？若存在求 l 方程，否则说明理由

5. (17 分) 投掷一枚均匀硬币 n 次，X 表示正面向上次数.

(a) 求 $P(X=2k)$ 关于 k 的表达式

(b) 证明：$\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} P(X=2k)=\frac{1}{2}$

(c) 设 $Y=|X-\dfrac{n}{2}|$，求 $E(Y)$ 表达式

（试卷结束）