

散乱・吸収のある半無限一様媒質による反射率の近似

ふじい やすひろ <<http://mimosa-pudica.net>>

かきかけ。

$$k_s [1/\text{m}] \quad : \quad \text{散乱係数} \quad (1)$$

$$k_a [1/\text{m}] \quad : \quad \text{吸収係数} \quad (2)$$

$$I(t, \vec{x}, \vec{\omega}) [\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{sr}] \quad : \quad \text{放射輝度} \quad (3)$$

等方散乱、一様媒質下での放射伝達方程式 (Radiative transfer equation; RTE) は次の通り。

$$\frac{\partial I(t, \vec{x}, \vec{\omega})}{\partial t} + \vec{n}(\vec{\omega}) \cdot \nabla I(t, \vec{x}, \vec{\omega}) = -(k_s + k_a)I(t, \vec{x}, \vec{\omega}) + \frac{k_s}{4\pi} \int d\Omega(\vec{\omega}') I(t, \vec{x}, \vec{\omega}') . \quad (4)$$

ここで $\vec{n}(\vec{\omega})$ は $\vec{\omega}$ 方向の単位ベクトルを表す。

$I(\cdot)$ が t, x, y 方向について一様な場合、 θ を $+z$ とする角度として、

$$\cos \theta \frac{\partial I(z, \theta)}{\partial z} = -(k_s + k_a)I(z, \theta) + \frac{k_s}{2} \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' I(z, \theta') , \quad (5)$$

と簡略化される。

$I(\cdot)$ が立体角について z^-, z^+ 半球上でそれぞれ一様に近いと仮定し、次のように展開する。 $h(\cdot)$ を階段関数として、

$$I(z, \theta) = h\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) I_\uparrow(z) + h\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) I_\downarrow(z) + \epsilon(z, \theta) , \quad |\epsilon|, \left|\frac{\partial \epsilon}{\partial z}\right| \ll |I_\uparrow|, |I_\downarrow| . \quad (6)$$

(5) に (6) を代入し、両辺を z^+ 半球上で一様に立体角積分 ($\int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta$) すると、

$$+ \frac{1}{2} \frac{dI_\uparrow}{dz} = -(k_s + k_a)I_\uparrow + \frac{k_s}{2}(I_\uparrow + I_\downarrow) + O(\epsilon) . \quad (7)$$

同様に z^- 半球で積分 ($\int_{\pi/2}^\pi d\theta \sin \theta$) すると、

$$- \frac{1}{2} \frac{dI_\downarrow}{dz} = -(k_s + k_a)I_\downarrow + \frac{k_s}{2}(I_\uparrow + I_\downarrow) + O(\epsilon) . \quad (8)$$

この計算は次の操作を行ったことに相当している。単位球面上で定義される実関数のなす空間に対し、内積を $\langle f, g \rangle := \int d\Omega(\vec{\omega}) f(\vec{\omega}) g(\vec{\omega})$ で導入し、それぞれ z^+, z^- 半球のみで一様な値を持つ関数 2 つを基底として含む直交関数系を用意する。この直交関数系で $I(\cdot)$ を立体角について展開し、係数について成り立つ方程式が (7), (8) である。

さて、 ϵ を無視して (7), (8) を連立させて解くと、一般解は $k_a \neq 0$ のとき A, B を任意の定数として、

$$I_\uparrow(z) = A(1 + P)e^{-\alpha z} + B(1 - P)e^{+\alpha z} \quad (9)$$

$$I_\downarrow(z) = A(1 - P)e^{-\alpha z} - B(1 + P)e^{+\alpha z} , \quad (10)$$

$$\alpha = 2\sqrt{k_a(k_s + k_a)} \quad (11)$$

$$P = \sqrt{\frac{k_a}{k_s + k_a}}. \quad (12)$$

今、 $z = 0$ を境界として $z < 0$ の空間に一様に屈折率 1 の媒質が存在し、 $z > 0$ の空間は真空である状況を考える。先の近似のもとで、真空部分について $I_\uparrow(z), I_\downarrow(z)$ は一定であり、 I_\downarrow が媒質への入射、 I_\uparrow が出射に対応している。媒質部分については $z = -\infty$ からの入射がないとして、境界条件

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} I_\uparrow(z) = 0, \quad (13)$$

が課される。また、屈折率が変わらないので、 $z = 0$ の境界では単純に $I_\uparrow(z), I_\downarrow(z)$ が連続であることが条件となる。

以上より、 $z = 0$ 平面から媒質へ入射した光の反射率は、

$$R = \frac{I_\uparrow(0)}{I_\downarrow(0)} = \frac{\sqrt{k_s + k_a} - \sqrt{k_a}}{\sqrt{k_s + k_a} + \sqrt{k_a}}. \quad (14)$$

半無限の媒質下で反射率は空間スケールに依存しないため、反射率は k_s と k_a の比のみで決まる。(14) はこの性質を満たし、かつ $k_s \ll k_a \Rightarrow R \rightarrow 0$, $k_s \gg k_a \Rightarrow R \rightarrow 1$ となり、定性的に良い振る舞いをする近似になっている（この性質が成り立つかは、実は基底の取り方に依存している。例えば球面調和関数の低次を用いるとこの性質は成り立たない）。残念ながら $k_s \simeq k_a$ での値は正しい値と 10% ほどずれていて、定量的にはそれほど良い近似ではない。

近似の改善を考える前に、逆変換、つまり反射率から反射・吸収係数を求める式を求めておく。これは CG ソフトウェアなどで、反射色から媒質の散乱・吸収係数を設定する用途を想定している。反射率 R と減衰係数 $k := k_s + k_a$ が与えられたとき、(14) を k_s, k_a について解くと、

$$k_a = k \left(\frac{1 - R}{1 + R} \right)^2 \quad (15)$$

$$k_s = k - k_a. \quad (16)$$

次に、近似精度を改善するため R の二次式を考え、係数をモンテカルロ法による数値計算の結果から決定する。

$$R_{\text{improved}} = (1 - \delta)R + \delta R^2. \quad (17)$$

平均絶対誤差を最小化した場合、 $\delta = 0.170$ で絶対誤差 0.8×10^{-3} 、相対誤差は 0.8%、平均相対誤差を最小化した場合、 $\delta = 0.177$ で絶対誤差 1.3×10^{-3} 、相対誤差は 0.4% である。

