散乱・吸収のある半無限一様媒質による反射率の近似

ふじい やすひろ <http://mimosa-pudica.net>

かきかけ。

$$k_\mathrm{s}\,[1/\mathrm{m}] \quad : 散乱係数 \tag{1}$$
$$k_\mathrm{a}\,[1/\mathrm{m}] \quad : 吸収係数 \tag{2}$$
$$I(t,\vec{x},\vec{\omega})\,[\mathrm{W}/\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{sr}] \quad : 放射輝度 \tag{3}$$

等方散乱、一様媒質下での放射伝達方程式 (Radiative transfer equation; RTE) は次の通り。

$$\frac{\partial I(t,\vec{x},\vec{\omega})}{\partial t} + \vec{n}(\vec{\omega})\cdot\nabla I(t,\vec{x},\vec{\omega}) = -(k_\mathrm{s}+k_\mathrm{a})I(t,\vec{x},\vec{\omega}) + \frac{k_\mathrm{s}}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega(\vec{\omega}')\,I(t,\vec{x},\vec{\omega}')\,. \tag{4}$$

ここで $\vec{n}(\vec{\omega})$ は $\vec{\omega}$ 方向の単位ベクトルを表す。

$I(\cdot)$ が t,x,y 方向について一様な場合、θ を $+z$ となす角度として、

$$\cos\theta\frac{\partial I(z,\theta)}{\partial z} = -(k_\mathrm{s}+k_\mathrm{a})I(z,\theta) + \frac{k_\mathrm{s}}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta'\sin\theta'\,I(z,\theta')\,, \tag{5}$$

と簡略化される。

$I(\cdot)$ が立体角について z^-, z^+ 半球上でそれぞれ一様に近いと仮定し、次のように展開する。$h(\cdot)$ を階段関数として、

$$I(z,\theta) = h\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)I_\uparrow(z) + h\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)I_\downarrow(z) + \epsilon(z,\theta)\,,\ |\epsilon|, \left|\frac{\partial\epsilon}{\partial z}\right| \ll |I_\uparrow|, |I_\downarrow|\,. \tag{6}$$

(5) に (6) を代入し、両辺を z^+ 半球上で一様に立体角積分 ($\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\sin\theta$) すると、

$$+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I_\uparrow}{\mathrm{d}z} = -(k_\mathrm{s}+k_\mathrm{a})I_\uparrow + \frac{k_\mathrm{s}}{2}(I_\uparrow+I_\downarrow) + O(\epsilon)\,. \tag{7}$$

同様に z^- 半球で積分 ($\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta$) すると、

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I_\downarrow}{\mathrm{d}z} = -(k_\mathrm{s}+k_\mathrm{a})I_\downarrow + \frac{k_\mathrm{s}}{2}(I_\uparrow+I_\downarrow) + O(\epsilon)\,. \tag{8}$$

この計算は次の操作を行ったことに相当している。単位球面上で定義される実関数のなす空間に対し、内積を $\langle f,g\rangle := \int \mathrm{d}\Omega(\vec{\omega})\,f(\vec{\omega})g(\vec{\omega})$ で導入し、それぞれ z^+, z^- 半球のみで一様な値を持つ関数 2 つを基底として含む直交関数系を用意する。この直交関数系で $I(\cdot)$ を立体角について展開し、係数について成り立つ方程式が (7), (8) である。

さて、ϵ を無視して (7), (8) を連立させて解くと、一般解は $k_\mathrm{a}\neq 0$ のとき A, B を任意の定数として、

$$I_\uparrow(z) = A(1+P)e^{-\alpha z} + B(1-P)e^{+\alpha z} \tag{9}$$
$$I_\downarrow(z) = A(1-P)e^{-\alpha z} - B(1+P)e^{+\alpha z}\,, \tag{10}$$

$$\alpha = 2\sqrt{k_{\mathrm{a}}(k_{\mathrm{s}} + k_{\mathrm{a}})} \tag{11}$$

$$P = \sqrt{\frac{k_{\mathrm{a}}}{k_{\mathrm{s}} + k_{\mathrm{a}}}}\,. \tag{12}$$

今、$z = 0$ を境界として $z < 0$ の空間に一様に屈折率 1 の媒質が存在し、$z > 0$ の空間は真空である状況を考える。先の近似のもとで、真空部分について $I_{\uparrow}(z), I_{\downarrow}(z)$ は一定であり、$I_{\downarrow}$ が媒質への入射、$I_{\uparrow}$ が出射に対応している。媒質部分については $z = -\infty$ からの入射がないとして、境界条件

$$\lim_{z \to -\infty} I_{\uparrow}(z) = 0\,, \tag{13}$$

が課される。また、屈折率が変わらないので、$z = 0$ の境界では単純に $I_{\uparrow}(z), I_{\downarrow}(z)$ が連続であることが条件となる。

以上より、$z = 0$ 平面から媒質へ入射した光の反射率は、

$$R = \frac{I_{\uparrow}(0)}{I_{\downarrow}(0)} = \frac{1 - P}{1 + P}\,. \tag{14}$$

半無限の媒質下で反射率は空間スケールに依存しないため、反射率は k_{s} と k_{a} の比のみで決まる。上式ははこの性質を満たし、かつ $k_{\mathrm{s}} \ll k_{\mathrm{a}} \Rightarrow R \to 0,\ k_{\mathrm{s}} \gg k_{\mathrm{a}} \Rightarrow R \to 1$ となり、定性的に良い振る舞いをする近似になっている (この性質が成り立つかは、実は基底の取り方に依存している。例えば球面調和関数の低次を用いるとこの性質は成り立たない) 。残念ながら $k_{\mathrm{s}} \simeq k_{\mathrm{a}}$ での値は正しい値と 10% ほどずれていて、定量的にはそれほど良い近似ではない。

精度を改善するためこの式に少し修正を加え、係数をモンテカルロ法による数値計算の結果から決定する。

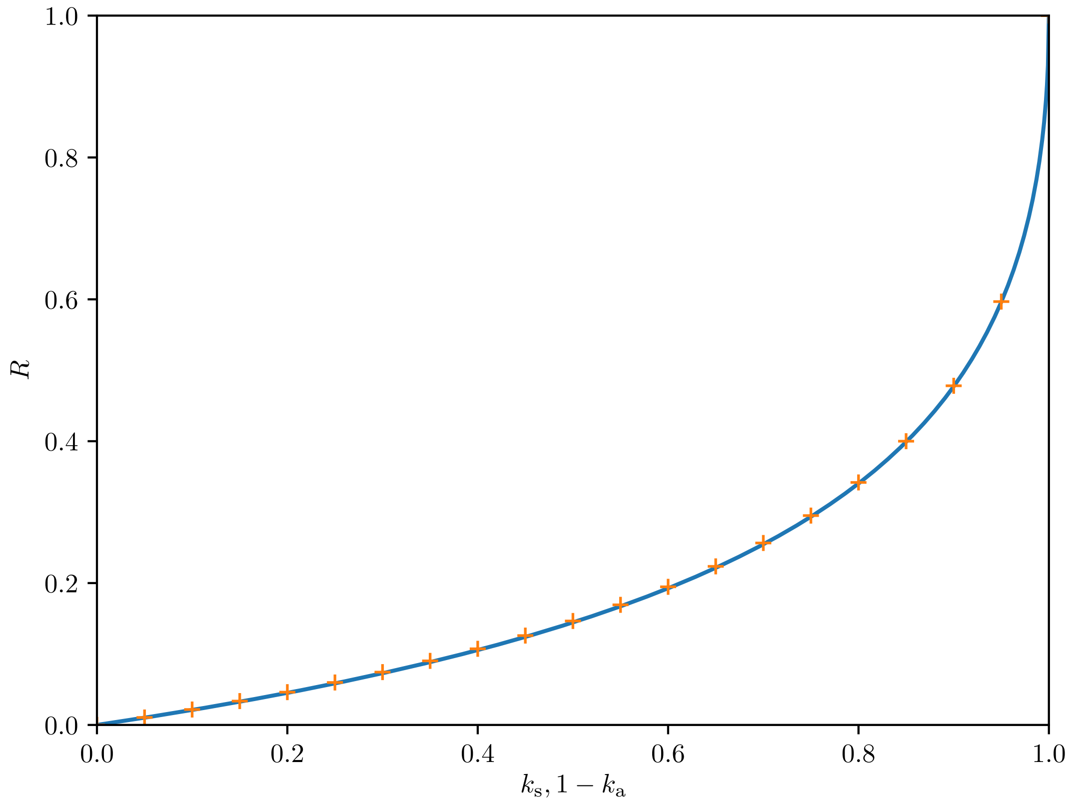
$$\tilde{R} = \frac{1 - P}{1 + \gamma P}\,. \tag{15}$$

何を最小化するかに依って多少変わってくるが、$\gamma = 1.4$ で平均絶対誤差 2×10^{-3}, 平均相対誤差 1% 未満である。ちなみに分母を $1 + \gamma P + \delta P^2$ の形にすることで、もう一桁ほど良い近似式を作ることも可能である。

この式は逆変換、つまり反射率から散乱・吸収係数を求める式もシンプルな形をしている。これは CG ソフトウェアなどで、反射色から媒質の散乱・吸収係数を設定する場合などに有用である。反射率 R と減衰係数 $k := k_{\mathrm{s}} + k_{\mathrm{a}}$ が与えられたとき、上式を $k_{\mathrm{s}}, k_{\mathrm{a}}$ について解くと、

$$k_{\mathrm{a}} = k\left(\frac{1 - \tilde{R}}{1 + \gamma\tilde{R}}\right)^2 \tag{16}$$

$$k_{\mathrm{s}} = k - k_{\mathrm{a}}\,. \tag{17}$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
R
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$k_\mathrm{s}, 1 - k_\mathrm{a}$