タイトル: 「点光源から平面に長方形を投影した像から長方形の縦横比を算出する」

市川雄二

平面Sから光源Cへ延びる垂線ベクトルを $\vec{C}$ とし、以下、 $\vec{C}$ の起点を座標原点とする。
長方形Oの頂点の位置ベクトルを $\vec{O}_i$ とする。 $i=1,2,3,4$
長方形だから、

$$\vec{O}_2-\vec{O}_1=\vec{O}_4-\vec{O}_3\cdots(1)$$
$$(\vec{O}_2-\vec{O}_1)\cdot(\vec{O}_3-\vec{O}_1)=0\cdots(2)$$

が成り立つ。
長方形Oが平面Sに投影された頂点の位置ベクトルを $\vec{P}_i$ とする。
投影された像Pは平面Sに含まれるから

$$\vec{P}_i\cdot\vec{C}=0\cdots(3)$$

光源C、長方形Sの頂点、像Pの頂点はそれぞれ一直線上にあることから

$$\vec{O}_i=t_i\vec{P}_i+(1-t_i)\vec{C}\cdots(4)$$

問題の条件から $0<t_i<1$ だが、 $t_i\neq 0$ ただし t_i 同符号、と一般化しても以下の議論は成り立つ。 t_i が正の時、射影、 t_i が負の時、ピンホールカメラ写像となる。
(1)に(4)を代入すると、

$$t_2\vec{P}_2+(1-t_2)\vec{C}-t_1\vec{P}_1-(1-t_1)\vec{C}=t_4\vec{P}_4+(1-t_4)\vec{C}-t_3\vec{P}_3-(1-t_3)\vec{C}$$

整理すると、

$$t_2\vec{P}_2-t_1\vec{P}_1-t_4\vec{P}_4+t_3\vec{P}_3=(t_3+t_2-t_4-t_1)\vec{C}\cdots(1a)$$

$\vec{P}_i$ と $\vec{C}$ は直交するから、

$$t_3+t_2-t_4-t_1=0\cdots(1b)$$
$$t_2\vec{P}_2-t_1\vec{P}_1-t_4\vec{P}_4+t_3\vec{P}_3=0\cdots(1c)$$

(1b)を(1c)に代入すると、

$$t_2\vec{P}_2-t_1\vec{P}_1-(t_3+t_2-t_1)\vec{P}_4+t_3\vec{P}_3=t_2(\vec{P}_2-\vec{P}_4)-t_1(\vec{P}_1-\vec{P}_4)+t_3(\vec{P}_3-\vec{P}_4)=0\cdots(1d)$$

$t_1=0$ の場合には興味がないので、ここで $t_1\neq 0$ と仮定する。

（重要） $$\vec{P}_1-\vec{P}_4=\frac{t_2}{t_1}(\vec{P}_2-\vec{P}_4)+\frac{t_3}{t_1}(\vec{P}_3-\vec{P}_4)\cdots(1e)$$

像が面積を持てば、 $(\vec{P}_2-\vec{P}_4)\|(\vec{P}_3-\vec{P}_4)$ でないので、 $\frac{t_2}{t_1},\frac{t_3}{t_1}$ は一意に決まる。
これを求めておく。(1e)に、 $(\vec{P}_2-\vec{P}_4)$ を外積すると、

$$(\vec{P}_1-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)=\frac{t_2}{t_1}(\vec{P}_2-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)+\frac{t_3}{t_1}(\vec{P}_3-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)=\frac{t_3}{t_1}(\vec{P}_3-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)$$

t_i が同一符号であることを使って、

$$\frac{t_3}{t_1}=\frac{|(\vec{P}_1-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)|}{|(\vec{P}_3-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)|}\equiv K_3\cdots(1f)$$

同様にして

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{|(\vec{P}_1-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_3-\vec{P}_4)|}{|(\vec{P}_2-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_3-\vec{P}_4)|}\equiv K_2\cdots(1g)$$

次に、(2)に(4)を代入すると、

$$(t_2\vec{P}_2+(1-t_2)\vec{C}-t_1\vec{P}_1-(1-t_1)\vec{C})\cdot(t_3\vec{P}_3+(1-t_3)\vec{C}-t_1\vec{P}_1-(1-t_1)\vec{C})=0$$
$$(t_2\vec{P}_2-t_1\vec{P}_1+(t_1-t_2)\vec{C})\cdot(t_3\vec{P}_3-t_1\vec{P}_1+(t_1-t_3)\vec{C})=0$$
$$(K_2t_1\vec{P}_2-t_1\vec{P}_1+(t_1-K_2t_1)\vec{C})\cdot(K_3t_1\vec{P}_3-t_1\vec{P}_1+(t_1-K_3t_1)\vec{C})=0$$
$$(K_2\vec{P}_2-\vec{P}_1+(1-K_2)\vec{C})\cdot(K_3\vec{P}_3-\vec{P}_1+(1-K_3)\vec{C})=0$$

$\vec{C}$ と $\vec{P}_i$ は直交しているから、

$$(K_2\vec{P}_2-\vec{P}_1)\cdot(K_3\vec{P}_3-\vec{P}_1)+(1-K_2)(1-K_3)|\vec{C}|^2=0$$

従って、 $K_2\neq 1$ かつ $K_3\neq 1$ の時 $|\vec{C}|$ が求められる。

（重要） $$|\vec{C}|^2=\frac{-(K_2\vec{P}_2-\vec{P}_1)\cdot(K_3\vec{P}_3-\vec{P}_1)}{(1-K_2)(1-K_3)}\cdots(2a)$$

平面Sから光源Cまでの距離を知ることができた。
（これが正かぱっと見はっきりしないな。）
先に進む前に、 $K_2\neq 1$ ，$K_3\neq 1$ の条件を理解しておく。
$K_2=1$ の時、 $t_2=t_1$ である。これは、 $(\vec{O}_2-\vec{O}_1)\|(\vec{P}_2-\vec{P}_1)$ を意味する。従って、
$K_2\neq 1$ は、平面Sと辺 O_1O_2 が平行でないという条件に等しい。
さて、長方形の辺の比は、

$$\frac{H}{W}=\frac{|\vec{O}_3-\vec{O}_1|}{|\vec{O}_2-\vec{O}_1|}\cdots(3)$$

(4)を代入。

$$\frac{H}{W}=\frac{|t_3\vec{P}_3+(1-t_3)\vec{C}-t_1\vec{P}_1-(1-t_1)\vec{C}|}{|t_2\vec{P}_2+(1-t_2)\vec{C}-t_1\vec{P}_1-(1-t_1)\vec{C}|}$$
$$\frac{H}{W}=\frac{|t_3\vec{P}_3-t_1\vec{P}_1+(t_1-t_3)\vec{C}|}{|t_2\vec{P}_2-t_1\vec{P}_1+(t_1-t_2)\vec{C}|}$$

(1f),(1g)を使って,

$$\frac{H}{W}=\frac{|K_3\vec{P}_3-\vec{P}_1+(1-K_3)\vec{C}|}{|K_2\vec{P}_2-\vec{P}_1+(1-K_2)\vec{C}|}$$

$\vec{C}$ と $\vec{P}_i$ は直交しているから、

（重要） $$\frac{H}{W}=\sqrt{\frac{|K_3\vec{P}_3-\vec{P}_1|^2+(1-K_3)^2|\vec{C}|^2}{|K_2\vec{P}_2-\vec{P}_1|^2+(1-K_2)^2|\vec{C}|^2}}$$

$K_2, K_3, |\vec{C}|^2$ は既に求めたから、 $\frac{H}{W}$ を算出することができた。
以上から、

$$\frac{H}{W}=\sqrt{\frac{|K_3\vec{P}_3-\vec{P}_1|^2+(1-K_3)^2|\vec{C}|^2}{|K_2\vec{P}_2-\vec{P}_1|^2+(1-K_2)^2|\vec{C}|^2}}$$

ただし、

$$K_2=\frac{(\vec{P}_1-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_3-\vec{P}_4)}{(\vec{P}_2-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_3-\vec{P}_4)}$$
$$K_3=\frac{(\vec{P}_1-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)}{(\vec{P}_3-\vec{P}_4)\times(\vec{P}_2-\vec{P}_4)}$$

$$|\vec{C}|^2=\frac{-(K_2\vec{P}_2-\vec{P}_1)\cdot(K_3\vec{P}_3-\vec{P}_1)}{(1-K_2)(1-K_3)}$$

確認するため成分表示する。

$\vec{C}$ をｚ軸方向に取ると、

$$K_2=\frac{(X_1-X_4)(Y_3-Y_4)-(Y_1-Y_4)(X_3-X_4)}{(X_2-X_4)(Y_3-Y_4)-(Y_2-Y_4)(X_3-X_4)}$$

$$K_3=\frac{(X_1-X_4)(Y_2-Y_4)-(Y_1-Y_4)(X_2-X_4)}{(X_3-X_4)(Y_2-Y_4)-(Y_3-Y_4)(X_2-X_4)}$$

$$|\vec{C}|^2=\frac{-((K_2X_2-X_1)(K_3X_3-X_1)+(K_2Y_2-Y_1)(K_3Y_3-Y_1))}{(1-K_2)(1-K_3)}$$

$$\frac{H}{W}=\sqrt{\frac{(K_3X_3-X_1)^2+(K_3Y_3-Y_1)^2+(1-K_3)^2|\vec{C}|^2}{(K_2X_2-X_1)^2+(K_2X_2-X_1)^2+(1-K_2)^2|\vec{C}|^2}}$$