問題：

無限等比級数　$S=1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots$　と無限等比級数の第何項までの和との差が初めて　$\frac{1}{10000}$　より小さくなるか。

（メールでもらった問題は、　$S=1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots$　でした。1/7 が抜けていると思って追加して考えました。）

解答：

無限等比級数の第 n 項までの和を　Sn　とします。

$$Sn=1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}$$

（最後の項の 7 のべき乗は n-1 になることを確認しましょう。　$S1=1, S2=1+\frac{1}{7,} S3=1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}$　）

S は Sn の後も等比数列の和を続けるから

$$S=Sn+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{7^{n+1}}+\ldots$$

ということは、S と Sn の差は、

$$S-Sn=\frac{1}{7^n}+\frac{1}{7^{(n+1)}}+\ldots$$

左辺は、初項が　$\frac{1}{7^n}$　、公比が　$\frac{1}{7}$　の等比級数だから、等比級数の公式を使って、

$$S-Sn=\frac{\frac{1}{7^n}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{6}\frac{1}{7^n}=\frac{6}{7^{n-1}}$$　（等比級数の公式を自分で導き出せますか？）

左辺が　$\frac{1}{10000}$　より小さくなる最初の n を求めればいいことになります。

$$\frac{6}{7^{n-1}}<\frac{1}{10000}$$

両辺にそれぞれの分母を掛けると、　$60000<7^{n-1}$

後は、　7^{n-1}　を順番に計算してみましょう。

$$7^1=7, 7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401, 7^5=16807, 7^6=117649$$

7^6　で初めて 60000 より大きくなるから、n-1=6。

以上から、S-Sn は n=7 のとき初めて 1/10000 より小さくなります。