与えられた数より小さな素数の個数について

Bernhard Riemann

平成 22 年 11 月 28 日

アカデミーは通信員という大変な名誉を私に授けてくれました．もしそれによって受けた許可をすぐに利用して素数の数の研究を投稿したら，感謝を最もよく伝えることができると信じます．*Gauss* と *Dirichlet* が長年に渡って興味を示したことを考えれば，素数の数は，おそらくそんな論文によく値するようなテーマです．

この研究では，

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

という Euler(オイラー) の観察が私のスタート地点となってくれます．ここで，p はすべての素数上に渡り，n はすべての数に渡ります．これら二つの式が収束する時，その 2 式が定義する複素変数 s の函数を $\zeta(s)$ で示します．それらは s の実部が 1 よりも大きい時だけ収束します; にもかかわらず，常に成り立つ函数等式を容易に見つけることができます．等式

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

を利用して，まず

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

を見つけます．さて，積分

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

を考えます．ここで，積分区間は，値 0 を含みますが被積分函数の他の不連続点は含まない領域の回りを正の向きに $+\infty$ から $+\infty$ まで取ります．

そうしたら，これは

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

に等しいことが容易にわかります．ここで，多価函数 $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)log(-x)}$ に関して，x が負の時 $-x$ の対数が実数となるように決定されると仮定しました．従って、

$$2\sin\pi s\Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

が成り立ちます．ここで，積分はちょうど説明した意味でなされます．

さて，この等式はすべての複素数 s に対して函数 $\zeta(s)$ の値を与えます．そして，この函数は一価であり，1 以外のすべての有限値 s に対して有限であること，また，s が負の偶数なら 0 であることを示しています．

s の実部が負の時，積分は，指定された領域の境界の回りを正の向きにとる代わりに，この領域の補集合の回りを負の向きに取ることができます．なぜなら，その場合 ($Res < 0$ の時)，無限に大きな絶対値を持つ値上の積分は無限に小さいからです．しかし，この補集合領域の内部では，被積分函数の特異点が $2\pi i$ の整数倍のところにだけあり，それ故に，積分は，これらの特異点の回りを負の向きに取った積分の和に等しいです．値 $n2\pi i$ の回りの積分は $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$ だから，これは

$$2\sin\pi s\Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s\int n^{s-1}[(-i)^{s-1} + i^{s-1}],$$

を与え，それ故に，函数 Π の知られている性質を利用して，

$$\Pi(\frac{s}{2} - 1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

が s を $1-s$ に置き換えた時，不変なままであるという文章として公式化することもできる $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の間の関係を与えます．

函数のこの性質は，$\sum n^{-s}$ の一般項に対して，積分 $\Pi(s-1)$ の代わりに積分 $\Pi((s/2)-1)$ を考える動機付けとなりました．それは函数 $\zeta(s)$ の非常に便利な式に通じます．実際,

$$\frac{1}{n^s}\Pi(\frac{s}{2} - 1)\pi^{-s/2} = \int_0^\infty x^{(s/2)-1}dx;$$

だから,

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x} = \Psi(x),$$

をすると，それは，

$$\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)=\int_0^\infty \Psi(x)x^{(s/2)-1}sx$$

に従い，あるいは，

$$2\Psi(x)+1=x^{-1/2}[2\Psi(\frac{1}{x})+1](Jacobi, Fund., p.184),$$

なので，

$$\begin{aligned}\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)&=\int_1^\infty \Psi(x)x^{(s/2)-1}dx+\int_0^1 \Psi(\frac{1}{x})x^{(s-3)/2}dx\\&\quad+\frac{1}{2}\int_0^1 (x^{(s-3)/2}-x^{(s/2)-1})dx\\&=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \Psi(x)(x^{(s/2)-1}+x^{-(1+s)/2})dx.\end{aligned}$$

に従います．

さて，$s=\frac{1}{2}+ti$，

$$\Pi(\frac{s}{2})(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)=\xi(t)$$

とすると，

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-(tt+\frac{1}{4})\int_1^\infty \Psi(x)x^{-3/4}\cos(\frac{1}{2}t\log x)dx$$

また，

$$\xi(t)=4\int_1^\infty \frac{d[x^{3/2}\Psi'(x)]}{dx}x^{-1/4}\cos(\frac{1}{2}t\log x)dx$$

が成り立ちます．

この函数は t のすべての有限の値で有限であり，非常に速く収束する tt のべき級数として展開することができます．さて，1 よりも大きな実部を持つ s の値に関して，$\zeta(s)=-\sum\log(1-p^{-s})$ は有限であり，$xi(t)$ の他の因子に関して同様なので，函数 $xi(t)$ は t の虚部が $\frac{1}{2}i$ と $-\frac{1}{2}i$ の間にある時だけ，0 になる可能性があります．実部が 0 と T の間にある $\xi(t)=0$ の根の数はおおよそ

$$=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

です．なぜなら，虚部が $\frac{1}{2}i$ と $-\frac{1}{2}i$ の間にあり，実部が 0 と T の間にあるすべての値から成る領域の回りを正の向きに取る積分 $\int d\log\xi(t)$ は $(1/T$

の大きさのオーダーの部分まで)$(T\log\frac{T}{2\pi}-T)i$ に等しく，他方，領域内の $\xi(t)=0$ の根の数に $2\pi i$ を掛けたものに等しいからです．これに関して実際，境界内に多くの実根を見つけ，根のすべてが実数であることが非常に確からしいです．もちろん，これの厳密な証明を知りたいでしょうが，私の研究の当面の目標には必要ないので，私ははかなく無駄な試みの後，そんな証明の探索を脇に置きました。

もし等式 $xi(\alpha)=0$ の根を α で示すなら，$\log\xi(t)$ を

$$\sum\log(1-\frac{tt}{\alpha\alpha})+\log\xi(0);$$

として表すことができます．なぜなら，サイズ t の根の密度は，t が大きくなるにつれ，ただ $\log(t/2\pi)$ のように大きくなるので，この式は収束し，無限大の t に対してはただ $t\log t$ のような無限大だからです; 連続で，有限の t に対して有限であって，tt で割られた時，無限の t に対して無限に小さい tt の函数だけ，この式は $\log\xi(t)$ とは違います．それ故に，この違いは $t=0$ とすることで決定できる値の定数です。

さて，これらの前置きの事実を使って，x より小さな素数の数を決定することができます．

$F(x)$ を，x がちょうど素数でない時この数に等しいとし，$F(x)$ が飛ぶ x に対して，

$$F(x)=\frac{F(x+0)+F(x^0)}{2}.$$

となるように，x が素数の時それは $\frac{1}{2}$ だけ大きいとします．

もし，公式

$$\log\zeta(s)=-\sum\log(1-p^{-s})=\sum p^{-s}+\frac{1}{2}\sum p^{-2s}+\frac{1}{3}\sum p^{-3s}+\cdots,$$

の中で，

$$p^{-s}=s\int_p^\infty x^{-s-1}dx, p^{-2s}=s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}dx,\cdots$$

とするなら，$f(x)$ で

$$F(x)+\frac{1}{2}F(x^{1/2})+\frac{1}{3}F(x^{1/3})+\cdots$$

を示す時，

$$\frac{\log\zeta(s)}{s}=\int_1^\infty f(x)x^{-s-1}dx$$

を見つけます．

この等式は，s の $a>1$ なるすべての複素数値 $a+bi$ で成り立ちます。しかし，そんな条件で

$$g(s)=\int_0^\infty h(x)x^{-s}d\log x$$

が成り立つ時，函数 h は Fourier の定理を使って g の項で表すことができます．等式は、h が実数の時と $g(a+bi)=g_1(b)+ig_2(b)$ の時，2 つの等式

$$g_1(b)=\int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x, ig_2(b)=-i\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x.$$

に分離されます．

両方の等式が $[\cos(b\log y)+i\sin(b\log y)]db$ を掛け算され，$-\infty$ から $+\infty$m あで積分される時，どちらの場合でも，右辺が $\pi h(y)y^{-\alpha}$ なので，それらが加えられ，iy^{α} を掛けられる時，

$$2\pi ih(y)=\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} g(s)y^s ds,$$

であることを知ります．ここで，積分は s の実部が定数のままであるような方法で実行されます．

積分は，$h(y)$ がジャンプする y の値に対して，ジャンプのそれぞれの側の h の 2 つの値の中間値を取ります．函数 f はこの性質も持つような方法で定義されたので，完全な一般性の下，

$$f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{\log\zeta(s)}{s}y^s ds.$$

が成り立ちます．

さて，$\log\zeta$ に対して，上で見つけた式

$$\begin{aligned}\frac{s}{2}\log\pi-\log(s-1)-\log\Pi(\frac{s}{2})\\+\sum_\alpha\log[1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}]+\log\xi(0)\end{aligned}$$

を代入することができます; この式の個々の項の積分は収束しませんが，それらが無限大を取る時，部分積分によって，

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}x^s ds$$

として式を再定式化することは都合がいいです．

$m=\infty$ に対して

$$-\log\Pi(\frac{s}{2})=\lim[\sum_{n=1}^{m}\log(1+\frac{s}{2n})-\frac{s}{2}\log m]$$

であり，それ故に，

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log\Pi(\frac{s}{2})}{ds}=\sum_{1}^{\infty}\frac{d\frac{1}{s}\log(1+\frac{s}{2n})}{ds},$$

なので，

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^s ds=\log\xi(0)$$

を除く $f(x)$ に関する式の項のすべては，形式

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{d[\frac{1}{s}\log(1-\frac{s}{\beta})]}{ds}x^s ds.$$

を取ります．

しかし，

$$\frac{d[\frac{1}{s}\log(1-\frac{s}{\beta})]}{d\beta}=\frac{1}{(\beta-s)\beta}$$

であり，s の実部が β の実部より大きい時，$beta$ の実部が負か正かに依存して，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\int_{\infty}^{x}x^{\beta-1}dx$$

または，

$$=\int_{0}^{x}x^{\beta-1}dx$$

が成り立ちます．従って，一番目の場合，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{d[\frac{1}{s}\log(1-\frac{s}{\beta})]}{ds}x^s ds\\ =&-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{1}{s}\log(1-\frac{s}{\beta})x^s ds\\ &=\int_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\mathrm{const}\end{aligned}$$

二番目の場合，

$$=\int_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\mathrm{const}$$

が成り立ちます．

一番目の場合，積分定数は β を負で無限大に取ることで決めることができます．二番目の場合，0 から x までの積分は，積分経路が上半面か下半面かに依存して，$2\pi i$ だけ違う 2 つの値を取ります; もし積分経路が上半面なら，β の中の i の係数が無限で正の時，積分は無限に小さく，もし積分経路が下半面なら，β の中の i の係数が無限で負の時，積分は無限に小さくなります．これは，積分係数が消えるような方法で左辺の $\log[1-(s/\beta)]$ の値を決める方法を示します．

$f(x)$ に関する式の中でこれらの値を設定することによって，

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\alpha}[\mathrm{Li}(x^{(1/2)+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{(1/2)-\alpha i})] + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0),$$

が成り立つことがわかります．ここで，和 $\sum_{\alpha}$ は等式 $\xi(\alpha)=0$ のすべての正の根上をサイズに従って順に並べられたものです．函数 ξ のもっと正確な議論を用いて，根のこの順序で，級数の和

$$\sum_{\alpha}[\mathrm{Li}(x^{(1/2)+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{(1/2)-\alpha i})]\log x$$

は，b が境界なしに大きくなるにつれての

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\frac{1}{s}\sum\log[1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}]}{ds} x^s ds$$

の極限値と同じであることを容易に示すことが可能です; しかしながら，違った順序では任意の実数値に近づくことができます．

$f(x)$ から

$$f(x) = \sum \frac{1}{n}F(x^{1/n})$$

の逆数を取ることによって，

$$F(x) = \sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f(x^{1/m}),$$

を見つけるために，$F(x)$ を見つけることができます．ここで，m は，1 以外の任意の平方で割り切れないすべての正の整数上を取り，μ は m の素数因子の数を示します．

もし $\sum_\alpha$ が有限の数の項に限定されるなら，$f(x)$ の式の導函数すなわち，x が増えるにつれ非常に急速に減少する部分を除いて，

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum_\alpha \frac{\cos(\alpha \log x)x^{-1/2}}{\log x}$$

は，大きさ x の，素数の密度+素数の平方の密度の半分+素数の立方の $\frac{1}{3}$ など，の近似式を与えます。

従って，既知の近似 $F(x) = \mathrm{Li}(x)$ は $x^{1/2}$ の大きさのオーダーだけ正しく，幾分大きすぎる値を与えます．なぜなら，$F(x)$ の式の中の非周期項が，x が増える時有界に留まる量を除いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{1/5})& \\ +\frac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{1/6}) - \frac{1}{7}\mathrm{Li}(x^{1/7}) + \cdots&.\end{aligned}$$

だからです．

実際，Gauss や Goldschmidt によって始められ，x=300 万まで追求された，x より小さな素数の数と $\mathrm{Li}(x)$ の比較は，素数の数が最初の 10 万で既に $\mathrm{Li}(x)$ より小さく，差は，多少の揺らぎを伴って，x が増える時，徐々に増えることを示しています．公式の中の周期項によって表された素数の濃淡も，しかしながら，既に気づかれているそれに関する法則を確立するいかなる可能性なしに，素数の数え上げの中で観察されています．素数の密度に関する公式の中の個々の周期項の影響を将来の数え上げにおいて検査することは興味あることでしょう。最初の 100 個で平均で既に $\mathrm{Li}(x) + \log\xi(0)$ にほとんど等しい $f(z)$ の振る舞いは $F(x)$ の振る舞いよりももっと規則的です。