Mathématiques pour les géosciences: Exercices

Yona Lapeyre

September 2, 2025

Contents

1

Analyse

Exercice 1

Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée première et seconde des fonctions suivantes.

Tracer l'allure de leurs courbes représentatives fonctions en recherchant les limites intéressantes, le signe de la dérivée première et seconde, les points de discontinuité de la fonction ou de ses dérivées, etc.

$$f_1 \colon x \mapsto \frac{3x^2+5x+2}{3x+2} \qquad f_2 \colon x \mapsto \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \qquad f_3 \colon x \mapsto 3x^4-2x^3+5x-6$$

$$f_4 \colon x \mapsto |x^2-x-1| \qquad f_5 \colon x \mapsto (3-2x)^2(3+2x^3) \qquad f_6 \colon x \mapsto \frac{3-2x}{3+2x}$$

$$f_7 \colon x \mapsto \sqrt{4-2x^2} \qquad f_8 \colon x \mapsto \cos(2x^2+3) \qquad f_9 \colon x \mapsto x^2 e^{2x+1}$$

$$f_{10} \colon x \mapsto (3x-1)^4 \qquad f_{11} \colon x \mapsto \ln\left(1+e^{-x}\right) \qquad f_{12} \colon x \mapsto x - \ln x - \frac{1}{x}$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}$ la parabole étant la courbe représentative de $f \colon x \mapsto x^2-3x+1$. Calculer les coordonnées de son sommet S.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2}. \tag{1.1}$$

Etudier cette fonction (domaine de définition, limites, tableau de variation).

Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}. \tag{1.2}$$

En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Exercice 4

Le profil gravimétrique d'une anomalie sphérique de rayon r, de densité $\Delta\rho$ et située à la profondeur h est donné par la fonction Δg suivante :

$$\Delta g(x) = G\frac{4}{3}\pi\Delta\rho\frac{r^3 h}{(h^2 + (x-3)^2)^{3/2}}. \tag{1.3}$$

Etudier la fonction et dessiner sa courbe représentative. Donner le maximum Δg_0 de la fonction, et réécrivez la sous la forme $\Delta g/\Delta g_0$.

Exercice 5

1. Calculer la série de Taylor en 0 de la fonction exponentielle. Sachant que la fonction exponentielle est entière, en déduire une expression de e.

2. Calculer la série de Taylor en 0 de $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.

3. Calculer le DL_n en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

4. Calculer le DL_3 en 0 de $x \mapsto e^{\sin x}$.

5. Calculer le DL_3 en 2 de $x \mapsto \ln(2 - \sqrt{x-1})$.

6. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

7. Donner le signe de $\dfrac{x+2}{2x}\ln(1+x) - 1$ au voisinage de 0.

Exercice 6: Développements limités

Faciles

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0

2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0

4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $\left(x^3+1\right)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0

6. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0

Un peu plus dur (mais pas trop)

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0

2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0

3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
4. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0 .
5. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
6. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
7. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
8. $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0 .

Pour plus d'exos corrigés sur les DL: https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/unevariable/dl&type=fexo

Corrigé exo 5

1)

La fonction exponentielle est entière (développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec un rayon de convergence infini). Sa série de Taylor en 0 est donnée par :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$, donc $f^{(n)}(0) = 1$. Ainsi :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Donc

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

2)
La fonction est un polynôme de degré 3.
On a :

$$\begin{aligned}
P(0) &= d \\
P'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad P'(0) = c \\
P''(x) &= 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad P''(0) = 2b \\
P'''(x) &= 6a \quad \Rightarrow \quad P'''(0) = 6a \\
P^{(k)}(x) &= 0 \quad \text{pour } k \geq 4
\end{aligned}$$

Ainsi, la série de Taylor est :

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 = d + cx + \frac{2b}{2}x^2 + \frac{6a}{6}x^3 = d + cx + bx^2 + ax^3$$

3) On utilise le développement limité de $(1+u)^\alpha$ avec $u = -x$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n)$$

Ici :

$$\sqrt{1-x} = (1+(-x))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x)^n + o(x^n)$$

Simplifions les termes :

$$T_0 = 1$$
$$T_1 = \frac{1}{2}(-x) = -\frac{1}{2}x$$
$$T_2 = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 = \frac{-1/4}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$$
$$T_3 = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}(-x)^3 = \frac{(-1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}(-x^3) = \frac{(-3/8)}{6}(-x^3) = \frac{-3/8\cdot(-1)}{6}x^3 = \frac{3/8}{6}x^3 = \frac{1}{16}x^3$$

Attention : le signe alterne. On peut écrire le terme général :

$$T_k = \binom{1/2}{k}(-x)^k = \binom{1/2}{k}(-1)^k x^k$$

où on a noté le coefficient binomial "k parmi n": $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Ainsi :

$$\sqrt{1-x} = \sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}(-1)^k x^k + o(x^n)$$

4) On compose les développements limités.
D'abord, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Ensuite, $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$.
On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Alors :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^3}{6}\right)^2\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + 3\cdot x^2\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right) + \cdots\right) + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \cdots\right) + o(x^3) \end{aligned}$$

On ne garde que les termes de degré ≤ 3 :

$$\begin{aligned} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

5)
On pose $x = 2 + h$, avec $h \to 0$. On cherche un DL_3 en h.

Soit $f(x) = \ln(2 - \sqrt{x-1})$.
Avec $x = 2 + h$, alors $x - 1 = 1 + h$, donc $\sqrt{x-1} = \sqrt{1+h}$.
On a donc :

$$f(2+h) = \ln(2 - \sqrt{1+h})$$

Développons $\sqrt{1+h}$ à l'ordre 3 en 0 :

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)$$

Alors :

$$2 - \sqrt{1+h} = 2 - \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3\right) + o(h^3) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)$$

On écrit :

$$2 - \sqrt{1+h} = 1 + u \quad \text{avec} \quad u = -\frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)$$

On a alors :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

Calculons u et ses puissances :

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)\\
u^2 &= \left(-\frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2\right)^2 + o(h^3) = \frac{1}{4}h^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}h^3 + o(h^3) = \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{8}h^3 + o(h^3)\\
u^3 &= \left(-\frac{1}{2}h\right)^3 + o(h^3) = -\frac{1}{8}h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln(1+u) &= \left(-\frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{8}h^3\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}h^3\right) + o(h^3)\\
&= -\frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3 - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 - \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)\\
&= -\frac{1}{2}h + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)h^2 + \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{24}\right)h^3 + o(h^3)\\
&= -\frac{1}{2}h - \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

Donc :

$$f(2+h) = -\frac{1}{2}h - \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)$$

Et en revenant à x : $h = x - 2$, donc :

$$\ln(2 - \sqrt{x-1}) = -\frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{24}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

6)
On utilise les développements limités à l'ordre 4.
D'abord :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Ensuite, pour $e^{-x^2/2}$: on pose $u = -x^2/2$, alors $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Comme $u = O(x^2)$, il faut aller à l'ordre 4 en x : donc e^u jusqu'à l'ordre u^2 suffit car u^2 est d'ordre x^4.

Ainsi :

$$e^{-x^2/2} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Alors :

$$\cos x - e^{-x^2/2} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \left(\frac{1}{24} - \frac{3}{24}\right) x^4 + o(x^4) = -\frac{2}{24}x^4 + o(x^4) =$$

Donc :

$$\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = -\frac{1}{12} + o(1) \to -\frac{1}{12} \quad \text{quand } x \to 0$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

7)

On étudie la fonction :

$$f(x) = \frac{x+2}{2x} \ln(1+x) - 1$$

pour x au voisinage de 0 (avec $x \neq 0$).

Simplifions :

$$f(x) = \frac{(x+2)\ln(1+x) - 2x}{2x}$$

On étudie le numérateur : $N(x) = (x+2)\ln(1+x) - 2x$.

Développons $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Alors :

$$\begin{aligned}
N(x) &= (x+2)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - 2x + o(x^3) \\
&= (x+2)x - (x+2)\frac{x^2}{2} + (x+2)\frac{x^3}{3} - 2x + o(x^3) \\
&= x^2 + 2x - \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2x^3}{3} - 2x + o(x^3) \\
&= (2x - 2x) + (x^2 - x^2) + \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^3\right) + o(x^3) \\
&= \left(-\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) x^3 + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$N(x) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Et le dénominateur est $D(x) = 2x$.

Donc :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{2x} = \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi, au voisinage de 0, $f(x) \sim \frac{1}{12}x^2$, qui est positif pour $x \neq 0$.

Donc, au voisinage de 0 (pour x proche de 0 mais non nul), $f(x) > 0$.

2

Quelques fonctions importantes

Exercice 1

Simplifiez:

a) $\ln(5) + \ln(12) - \ln(4)$

b) $\frac{\log(10)+\log(3)}{\log(60)-\log(2)}$

Exercice 2

Résoudre:

a) $\ln(4x + 5) = \ln\left(x^2\right)$

b) $\ln(x + 1) - \ln(6) = \ln(3x - 2) + \ln(7)$

c) $\log_{10}(4x + 2) + \log_2(3) = 0$

d) $2\ln(x + 5) + \frac{\ln(9)}{2} = 0$

e) $e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

f) $-\frac{1}{9} + 3^{x-2} = 0$

g) $16 - e^{-2x} = 0$

h) $5^x < \frac{1}{2}$

i) $-\frac{1}{e} + e^x \geq 0$

j) $\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)} \geq 1$

Exercice 3

Calculez les limites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x)$ selon la valeur de a

b) $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x)$ selon la valeur de a

c) $\lim_{x\to +\infty} a^x$ selon la valeur de a

d) $\lim_{x\to -\infty} a^x$ selon la valeur de a

e) $\lim_{x\to +\infty} x^a$ selon la valeur de a

f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+e^x}{\ln(x)+x^3}$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln(x)}$

h) $\lim_{x\to 0^+} x - \ln(x)$

Corrigé exo 3

1. $\lim_{x\to +\infty} \log_a(x)$ selon la valeur de a

   Réponse :

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ \mathrm{a} > 1 \\ -\infty & \text{si } \ 0 < \mathrm{a} < 1 \end{cases}$$

2. $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x)$ selon la valeur de a

   Réponse :

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \ \mathrm{a} > 1 \\ +\infty & \text{si } \ 0 < \mathrm{a} < 1 \end{cases}$$

3. $\lim_{x\to +\infty} a^x$ selon la valeur de a

   Réponse :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ \mathrm{a} > 1 \\ 1 & \text{si } \ \mathrm{a} = 1 \\ 0 & \text{si } \ 0 < \mathrm{a} < 1 \end{cases}$$

4. $\lim_{x\to -\infty} a^x$ selon la valeur de a

   Réponse :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } \ \mathrm{a} > 1 \\ 1 & \text{si } \ \mathrm{a} = 1 \\ +\infty & \text{si } \ 0 < \mathrm{a} < 1 \end{cases}$$

5. $\lim_{x\to +\infty} x^a$ selon la valeur de a

   Réponse :

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ \mathrm{a} > 0 \\ 1 & \text{si } \ \mathrm{a} = 0 \\ 0 & \text{si } \ \mathrm{a} < 0 \end{cases}$$

6. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+e^x}{\ln(x)+x^3}$

   Réponse :
   On a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
   Au numérateur : e^x domine x^2 (car e^x croît plus vite que toute puissance de x).

Au dénominateur : x^3 domine $\ln(x)$ (car toute puissance positive de x croît plus vite que $\ln(x)$).
Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \mathrm{e}^x}{\ln(x) + x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

car l'exponentielle croît plus vite que toute puissance de x.

7. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln(x)}$

   Réponse :
   Quand $x \to 0^+$:

   - Numérateur : $x + 2 \to 2$
   - Dénominateur : $x^2 \ln(x) \to 0 \times (-\infty)$ forme indéterminée.

   On réécrit :

   $$\frac{x+2}{x^2 \ln(x)} = \frac{x}{x^2 \ln(x)} + \frac{2}{x^2 \ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)} + \frac{2}{x^2 \ln(x)}$$

   Quand $x \to 0^+$, $x \ln(x) \to 0$ (par croissance comparée) et $x^2 \ln(x) \to 0$ (idem).
   Mais ici, les termes sont au dénominateur, donc :

   $$\frac{1}{x \ln(x)} \to -\infty \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2 \ln(x)} \to -\infty$$

   (car $\ln(x) < 0$ pour $x \in (0, 1)$).
   Ainsi :

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln(x)} = -\infty$$

8. $\lim_{x\to 0^+} x - \ln(x)$

   Réponse :
   Quand $x \to 0^+$:

   - $x \to 0$
   - $\ln(x) \to -\infty$

   Donc :

   $$\lim_{x\to 0^+} (x - \ln(x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

3

Nombres Complexes

Exercice 1

a) Mettre sous la forme $a + ib(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

b) Mettez les nombres complexes suivants sous formes trigonometrique.

$$1+i \quad ; \quad -1-i \quad ; \quad 1+\sqrt{3}i \quad ; \quad -1+\sqrt{3}i \quad ; \quad -6+0i \quad ; \quad -i$$

c) Soit $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ et $z' = \sqrt{3} + i$. Utilisez la forme polaire pour calculer

$$zz' \quad , \quad z/z' \quad \left(z'\right)^5$$

d) Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

e) Déterminer le module et l'argument d'un nombre complex :

$$e^{e^{i\alpha}}$$

f) Calculer

$$(1+i)^{2012}$$

4

Intégration

Exercice 1 Intégrales simples

Calculer les intégrales suivantes après en avoir vérifié l'existence :

$$\int_0^1 2dx \tag{4.1}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \tag{4.2}$$

$$\int_0^1 (2x+1)^2 dx \tag{4.3}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6(u)\cos(u) du \tag{4.4}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{(x^2+2x-3)} dx \tag{4.5}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{4.6}$$

$$\int_0^1 \cosh(2x) dx \tag{4.7}$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x) dx \tag{4.8}$$

$$\int_{-1}^1 |4x-2| dx \tag{4.9}$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx \tag{4.10}$$

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx \tag{4.11}$$

$$\int_0^{\pi/3} \cos^7(t) dt \tag{4.12}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx \tag{4.13}$$

Solution exercice 1

1. $f : x \longmapsto 2$ est $\mathcal{C}^0[0;1]$ et I $= 2$

2. $f : x \longmapsto x^2 e^{-x}$ est $\mathcal{C}^0[0;+\infty[$. Soit a > 0, par IPP:

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 e^{-x} dx &= \Big[-x^2 e^{-x}\Big]_0^a + \int_0^a 2x e^{-x} dx \\ &= \Big[-x^2 e^{-x}\Big]_0^a + 2\Big[-x e^{-x}\Big]_0^a + 2\int_0^a e^{-x} dx \\ &= -a^2 e^{-a} - 2a e^{-a} - 2e^{-a} + 2 \\ &\underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ car } \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \end{aligned}$$

3. $f : x \longmapsto (2x+1)^2$ est $\mathcal{C}^0[0;1]$ et I $= \frac{13}{3}$

4. $f : u \longmapsto \sin^6(u)\cos(u)$ est $\mathcal{C}^0[0;\frac{\pi}{2}]$. Par IPP on redémontre la formule du cours en intégrant cos et dérivant $\sin^6$. I $= \frac{1}{7}$

5. $f : x \longmapsto \frac{2}{x^2+2x-3}$ est $\mathcal{C}^0[-1;0]$. Méthode de calcul d'intégrale de quotient de polynômes :
   1. factorisation du dénominateur $\implies x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$
   2. décomposition en éléments simples $\implies f(x) = \frac{2}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{-1/2}{(x+3)} + \frac{1/2}{(x-1)}$
   3. calcul de chaque intégrale avec la primitive de ln : I $= -\frac{1}{2}\ln(3)$

   Attention ! $\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$ donc pour intégrer deux solutions:
   1. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_{-1}^0$
   2. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx = -\int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx = -\Big[-\ln(1-x)\Big]_{-1}^0$

6. $f : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\mathcal{C}^0[0;1[$. Soit $a \in]0;1[$ et soit le changement de variable $X = 1 - x^2$ alors $dX = -2xdx$ et l'intégrale s'écrit :

$$\int_1^0 -\frac{dX}{2\sqrt{X}} = \int_0^1 \frac{dX}{2\sqrt{X}} \text{ qui est une intégrale de Riemann convergente, on a donc } I = 1$$

7. $f : x \longmapsto \cosh(2x)$ est $\mathcal{C}^0[0;1]$. Par changement de variable $X = 2x$ on a $dX = 2dx$ et I $= \frac{1}{2}\sinh(2)$

8. $f : x \longmapsto \tan(x)$ est $\mathcal{C}^0[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$. tan est impaire et centrée en zéro sur cet intervalle considéré, alors I $= 0$

9. $f : x \longmapsto |4x-2|$ est $\mathcal{C}^0[-1;1]$. Lorsqu'on a une valeur absolue on doit découper l'intégrale selon que la fonction à l'intérieur est positive ou négative. Ici $4x - 2 > 0$ pour $x > \frac{1}{2}$ donc :

$$I = \int_{-1}^1 |4x-2| dx = -\int_{-1}^{1/2} 4x - 2 dx + \int_{1/2}^1 4x - 2 dx = 5$$

10. $f : x \longmapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ est $\mathcal{C}^0[0;1]$.

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 -\frac{x^2+1-2}{1+x^2} dx = ... = -1 + 2\arctan(1)$$

11. $f : x \longmapsto \ln(1+x^2)$ est $\mathcal{C}^0[0;1]$. Par IPP en dérivant $\ln(1+x^2)$ et intégrant 1 on a $\mathrm{I} = \ln(2) - 2 + 2\arctan(1)$

12. $f : x \longmapsto \cos^7(t)$ est $\mathcal{C}^0[0; \frac{\pi}{3}]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} \cos^7(t)dt &= \int_0^{\pi/3} \cos^6(t)\cos(t)dt = \int_0^{\pi/3} (1-\sin^2(t))^3\cos(t)dt \\
\text{Par changement de variable} \quad & \sin(t) = x \implies dt\cos(t) = dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} (1-x^2)^3 dx = \int_0^{\sqrt{3}/2} 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 dx \\
&= \left[x - x^3 + 3\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{8} + 27\frac{\sqrt{3}}{5*2^5} - 27*3\frac{\sqrt{3}}{7*2^7} \\
&= \frac{1341\sqrt{3}}{4480}(????)
\end{aligned}$$

13. $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ est $\mathcal{C}^0[0;1]$. But : faire une factorisation forcée pour se ramener à une forme $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$: $1+x+x^2 = (x = \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\Big((\frac{16}{9}x + \frac{8}{9})^2 + 1\Big)$ et ensuite par changement de variable $\frac{16}{9}x + \frac{8}{9} = t$ on a $\frac{16}{9}dx = dt$ et

$$I = \int_{8/9}^{24/9} \frac{\frac{9}{16}dt}{\sqrt{\frac{3}{4}(t^2+1)}} = ... = \frac{3\sqrt{3}}{8}\Big[\texttt{argsh}(t)\Big]_{8/9}^{24/9}$$

5

Intégration 2: les champs

Exercice 1: Définition et dérivées partielles

1. déterminer le domaine de définition des fonctions:

   a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y+x^2}}{\sqrt{y}}$

   b) $f(x, y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$

   c) $f(x, y) = \ln(x + y)$

2. La loi de Boyle Mariotte, pour une mole de gaz parfait, donne:

$$PV = RT$$

   avec P la pression du gaz, V son volume, R la constante des gaz parfaits et T la température.

   a) Calculer $\frac{\partial P}{\partial T}$ et $\frac{\partial P}{\partial V}$

   b) Calculer ces deux dérivées partielles si l'on considère la relation de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

   avec a et b deux réels.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions:

   a) $f(x, y) = y^5 - 3xy$

   b) $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$

   c) $f(x, y) = x\cos(e^{xy})$

   d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

Exercice 2: Differentielles

1. Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que: $f(2, 5) = 6$, $\partial_x f(2, 5) = 1, \partial_y f(2, 5) = -1$, donner la valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$.

2. Calculer les différentielles des fonctions suivantes:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$
b) $R = \alpha\beta^2 \cos(\gamma)$
c) $T = \frac{v}{1+uvw}$

3. on mesure un rectangle et on obtient une largeur de 30 cm et une longueur de 24 cm , avec une erreur d'au plus 0.1 cm pour chaque mesure. Estimer l'aire du rectangle.

Exercice 3: Courbes de niveau et gradient

1. Déterminer les courbes de niveau de la fonction $f(x,y) = x + y - 1$ et les représenter sur un graphe.

2. Calculer le gradient de: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \ln(xyz)$

Exercice 4: Calculs d'extrema

déterminer les extrema locaux des applications suivantes et donner le maximum de précisions possibles sur ces extrêma:

1. $f : (x,y) \mapsto x^4 + x^2 + y^2 + y^4$

2. $f : (x,y) \mapsto x^3 + 2xy - 5x + 5y$

3. $h : (x,y) \mapsto (3x+7)e^{-\left((x+1)^2+y^2\right)}$

Exercice 5: Intégrales de fonctions de plusieurs variables

1. Soit D le domaine:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$$

Calculer $\iint_D f(x,y)dxdy$ pour

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = xy(x+y)$

2. Calculer l'intégrale double $\iint_D f(x,y)dxdy$ pour:
(a) $f(x,y) = x$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\right\}$
(b) $f(x,y) = x + y$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\right\}$
3. soit D le domaine: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\right\}$. Calculer l'aire de D
4. soit D le domaine: $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\right\}$. Calculer $\iiint_D (x+y+z)^2 dxdydz$
5. calculer le volume d'une partie de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon R, comprise entre les plans d'équation $z = h_1$ et $z = h_2$ (sachant que R vérifie $R \geq h_1 > h_2 \geq -R$).

Exercice 6: coordonnées cylindriques et sphériques

Soit D le domaine: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}$.
(a) Exprimer D en coordonnées polaires
(b) Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

Correction 1: Définition et dérivées partielles

1. Domaines de définition:

   a) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } y + x^2 \geq 0\}$
   b) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } x - y > 0\}$
   c) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$

2. Loi des gaz parfaits:

   a) $P = \frac{RT}{V}$ donc: $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$
   b) Van der Waals: $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ donc: $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V-b}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$

3. Dérivées partielles:

   a) $\frac{\partial f}{\partial x} = -3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 3x$
   b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 30y^4$
   c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(e^{xy}) - xye^{xy}\sin(e^{xy})$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{xy}\sin(e^{xy})$
   d) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$

Correction 2: Différentielles

1. $f(2.2, 4.9) \approx f(2,5) + \partial_x f(2,5) \cdot 0.2 + \partial_y f(2,5) \cdot (-0.1) = 6 + 0.2 - (-0.1) = 6.3$

2. Différentielles:

   a) $df = \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}dx + \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}dy$
   b) $dR = \beta^2\cos(\gamma)d\alpha + 2\alpha\beta\cos(\gamma)d\beta - \alpha\beta^2\sin(\gamma)d\gamma$
   c) $dT = \frac{vw}{(1+uvw)^2}du + \frac{1}{(1+uvw)^2}dv - \frac{uv^2}{(1+uvw)^2}dw$

3. $A = L \times l = 30 \times 24 = 720$ cm²
   $dA = \frac{\partial A}{\partial L}dL + \frac{\partial A}{\partial l}dl = ldL + Ldl$
   Erreur maximale: $\Delta A \approx |24 \times 0.1| + |30 \times 0.1| = 5.4$ cm²
   Aire: 720 ± 5.4 cm²

Correction 3: Courbes de niveau et gradient

1. Courbes de niveau: $x + y - 1 = k$ soit $y = 1 - x + k$
   Famille de droites parallèles de pente -1

2. $\nabla f(x,y,z) = \left(2x - \frac{1}{x}, 2y - \frac{1}{y}, -\frac{1}{z}\right)$

Correction 4: Calculs d'extrema

1. Point critique: $(0,0)$
   Hessienne: $H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ définie positive
   Minimum global en $(0,0)$ avec $f(0,0) = 0$

2. Points critiques: $(1,-1)$ et $(-5/3, 25/9)$
   Hessienne: $H = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
   En $(1,-1)$: $H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (indéfinie) $\to$ point selle
   En $(-5/3, 25/9)$: $H = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (indéfinie) $\to$ point selle

3. Point critique: $(-1,0)$
   Maximum local en $(-1,0)$ avec $h(-1,0) = (3 \times (-1) + 7)e^{-0} = 4$

Correction 5: Intégrales multiples

1. a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2) dydx = \frac{1}{6}$
   b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} xy(x+y) dydx = \frac{1}{120}$

2. a) $\int_0^2 \int_{\frac{x+1}{2}}^{4-x} x dydx = \frac{7}{3}$
   b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y) dydx = \frac{3}{20}$

3. Aire $= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{4-x^3} dydx = \frac{52}{5}$

4. $\iiint_D (x+y+z)^2 dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2 dzdydx = \frac{1}{60}$

5. Volume $= \pi \int_{h_2}^{h_1} (R^2 - z^2) dz = \pi \left[R^2(h_1 - h_2) - \frac{h_1^3 - h_2^3}{3} \right]$

Correction 6: Coordonnées cylindriques et sphériques

(a) $x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$
   En polaires: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
   $(r\cos\theta - 1)^2 + r^2\sin^2\theta \leq 1 \Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta \leq 0 \Rightarrow r \leq 2\cos\theta$
   Avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(b) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r drd\theta = \frac{32}{9}$

6

Equations différentielles

1. Résoudre $y' + y = e^{-x}$.
2. Résoudre $3xy' - 4y = x$.
3. Résoudre $y' - y^2 = 0$.
4. $x\left(x^2-1\right)y' + 2y = x^2$: montrer que cette équation admet une seule solution sur $\mathbb{R}$. Indication : on pourra chercher des réels a, b, c tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.
5. $xy' + 2y = \cos x$: existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?
6. Résoudre $y' \cos(x) + y \sin(x) + y^3 = 0$ avec le changement de variable $u = 1/y^2$.
7. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$: Déterminez l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation. Déterminez la ou les solutions passant par le point $(0,0)$ et celle(s) passant les points $(0,0)$ et $(-2,1)$.
8. Résoudre $y'' + 5y' + 4y = \left(x^2+2x\right)e^{-x} + 3e^{2x} - 4$.
9. Résoudre $4y'' - 2y' = x - 1$.
10. Résoudre $y'' + 2y' + y = \sin^2 x$.
11. Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$.
12. Résoudre $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\cos^2 x}$.
13. Résoudre $y'' - 4y' + 4 = \left(x^2+1\right)e^{2x}$.
14. $x^2y'' - 2xy' + \left(2-x^2\right)y = 0$. En faisant le changement de fonction $y = zx$ (z devient la nouvelle fonction inconnue), déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?
15. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' - y' + y = 0$$
On veut ensuite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivables telles qu'elles vérifient l'équation
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$
On pose $g(t) = f\left(e^t\right)$, montrer que g est solution de la première équation. Trouver ensuite toutes les fonctions f vérifiant la seconde.

7

Algèbre linéaire

Exercice 1: Produit matriciel

Calculer le produit AB :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

Calculer A^0, A^1, A^2, A^3 avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2: Matrices d'endomorphismes particuliers

Donner les matrices associées aux endomorphismes réalisant : - Dans le plan $\mathbb{R}^2$, une rotation d'angle $\pi/4$. - Dans le plan $\mathbb{R}^2$, une symétrie par rapport à la droite dirigée par le vecteurs de coordonnées $(1,1)$. - Dans $\mathbb{R}^3$, la projection sur la droite dirigée par le vecteur $e_1 = (1,0,0)$.

On se placera chaque fois dans les bases canoniques des espaces mentionnés.

Exercice 3: Inverse de matrices

Vérifier que B est l'inverse de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & -8 \\ 7 & -1 & 5 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse, s'ils existent, de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4: Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes suivants (que l'on pourra ou non écrire sous forme matricielle) :

$$\left\{ \begin{array}{cc} x \quad -2z = & -2 \\ 2x+4y+z = & 3 \\ -x+y+3z = & 1 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{cc} 2x-y+3z+2t & =-2 \\ -3x+y-5z+t & =-1 \\ 5x-5y+10z+4t & =-1 \\ -4x+2y-7z-3t = & 0 \end{array} \right.$$

Résoudre les systèmes $AX = B$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solutions

Produit matriciel

$$AB = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ 2 & -8 \\ 6 & -20 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 \\ 13 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -26 \\ 2 & -4 & -16 \\ 8 & 3 & 23 \end{pmatrix}$$

Inverse de matrices

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

B n'est pas inversible !

$$C^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 5 & -10 & 0 \\ -8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

D n'est pas inversible !

Matrices d'endomorphismes particuliers

- Rotation de $\pi/4$: $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - Symétrie par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(1,1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - Projection sur la droite dirigée par $(1,0,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Systèmes linéaires

- Solution premier système : $\begin{pmatrix} 20 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix}$. - Deuxième système (faire $L_4 \leftarrow$ L$_4 + 2L_1$) puis continuer... On trouve : A FINIR - Troisième système : la matrice n'est pas inversible. Les solutions sont les vecteurs : $(x, 0, -x), x \in \mathbb{R}$. - Quatrième système : la matrice est inversible et a pour déterminant -1 . On calcule son inverse et on trouve : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. La solution est donc : $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8

Probabilités: dénombrement

Exercice 1 : Pour récapituler

Soit $\mathbb{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ 1. Donner le cardinal de $\mathbb{E}$. 2. Donner le nombre de 2 -arrangements avec répétitions possibles avec les éléments de $\mathbb{E}$. 3. Donner le nombre de 2 -arrangements sans répétitions possibles avec les éléments de $\mathbb{E}$. 4. Donner le nombre de permutations sans répétitions possibles avec les éléments de $\mathbb{E}$. 5. Donner le nombre de combinaisons sans répétitions possibles contenant 2 éléments de $\mathbb{E}$.

Exercice 2 : Cardinal d'un ensemble

1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ? 2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l'anglais et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?

Exercice 3 : Tirages de boules

1. On dispose de 8 boules numérotées et de 4 sacs numérotés. On répartit les 8 boules dans les sacs. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Combien y a-t-il de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide? 2. Dans une urne on place n boules blanches et une seule noire. On tire simultanément k boules Déterminer d'abord le nombre de tirages sans boules noires, ensuite le nombre de tirages avec au moins une boule noire, et pour finir le nombre de tirages possibles en tout. Qu'en déduisez-vous ? 3. Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées elles aussi. On tire simultanément 4 boules dans l'urne. - Quel est le nombre de tirages possibles ? - Combien de tirages contiennent au moins une boule noire ? - Combien de tirages contiennent autant de boules blanches que de boules rouges ? - Combien de tirages contiennent les 3 couleurs ? - Combien de tirages contiennent exactement 2 couleurs ?

Exercice 4 : Jouons avec les mots

1. On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J. - Combien de mots de 10 lettres peut-on écrire avec ces 10 jetons ? - Combien de mots de 10 lettres peut-on écrire avec ces 10 jetons où B, A et C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ? - Même question mais B, A et C ne sont pas forcément côte à côte. 2. Combien de mots peut-on former avec les lettres $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$ en utilisant

une seule fois chaque lettre ? Combien de mots de 5 lettres commencent par A ? Combien de mots de 5 lettres commencent par A et finissent par B ? Combien de mots de 5 lettres où le A apparaît devant le B ?

Exercice 5 : Jeux de cartes

Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard. Ces 5 cartes s'appellent une "main". 1. Quel est le nombre total de mains qu'on peut choisir ? 2. Combien de mains contiennent exactement 4 as ? 3. Combien de mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ? 4. Combien de mains contiennent au moins 3 rois ? 5. Combien de mains contiennent au moins un as ?

Exercice 6 : Et les gens dans tout ça ?

Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes. 1. Combien de jurys différents peut-on former? 2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former? 3. Monsieur X refuse de sièger avec Madame Y . Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ? 4. Lors d'un dîner, 4 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau?

9

Probabilités

Exercice 1:

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois événements. Exprimer en fonction de A, B et C et des opérations ensemblistes les événements suivants : - A seul se produit - A et C se produisent mais pas B - les trois événements se produisent - deux événements au moins se produisent - un événement au plus se produit - aucun des trois événements ne se produit - deux événements exactement se produisent

Exercice 2:

On dispose d'un dé truqué sur lequel chaque face a une probabilité d'apparition proportionnelle au numéro qu'elle porte. - Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face de ce dé. - On lance deux fois ce dé. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit égale à 4 ?

Exercice 3 :

On jette deux dés non truqués deux fois de suite. - Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 ? - Quelle est la probabilité que la somme des 4 faces obtenues soit 6 ?

Exercice 4 : Pièce de monnaie

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3 . - On lance 10 fois la pièce, qu'elle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ? - On lance la pièce jusqu'à ce qu'on obtenienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on de lancers en moyenne ?

Exercice 5 : Service de dépannage

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour diverses causes, les interventions ont parfois eu lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25 . 1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la v.a. prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard. - Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance. - Calculer la probabilité de l'événement : "le client a au moins subi un retard". 2. Le nombre d'appels reçus par jour est une v.a. Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard. - Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$. - En déduire la probabilité de " $Z = k$ et $Y = n$ " - Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$. 3. En 2015, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?