

Mathématiques pour les Géosciences

Yona Lapeyre

September 3, 2025

Contents

1	Analyse	5
1.1	Rappels	5
1.1.1	Définition d'une fonction	5
1.1.2	Sens de variation	5
1.1.3	Composition	6
1.2	Propriétés de fonctions	6
1.3	Régularité	7
1.3.1	Continuité, Dérivabilité	7
1.3.2	Classes de régularité	8
1.3.3	Propriétés et dérivées usuelles	8
1.4	Développements limités	9
1.4.1	Les notations de Landau	9
1.4.2	Définition d'un développement limité	10
1.4.3	DL usuels	11
2	Quelques fonctions importantes	13
2.1	Exponentielle et logarithme	13
2.2	Fonctions puissance	14
2.3	Fonctions trigonométriques	16
2.4	Fonctions hyperboliques	17
2.5	Croissances comparées	18
3	Nombres Complexes	19
3.1	Le plan complexe	19
4	Integration	21
4.1	Définition	21
4.2	Calcul	22
4.2.1	Existence	22
4.2.2	Via une primitive connue	24
4.2.3	Changement de variable	24
4.2.4	Intégration par parties	24
4.3	Fontction de plusieurs variables	25
4.3.1	Intégrale multiple	25
4.3.2	Dérivées partielles	27

5	Équations Différentielles	29
5.1	Premier ordre	29
5.2	Second ordre	29
6	Algèbre Linéaire	31
6.1	C'est quoi ?	31
6.2	Espaces vectoriels	31
6.3	Applications linéaires et matrices	33
6.4	Manipuler des matrices	34
6.4.1	Opérations élémentaires	34
6.4.2	Déterminant et trace	34
6.5	Lien entre matrices et systèmes linéaires	35
6.5.1	Système 2×2	35
6.5.2	Système $n \times n$	35
7	Dénombrement	37
7.1	Définitions	37
7.2	Définitions d'applications	38
7.2.1	Permutations - SANS répétition	38
7.2.2	Permutations - AVEC répétition	38
7.2.3	Arrangements SANS répétitions	38
7.2.4	Arrangements AVEC répétitions	39
7.2.5	Combinaisons SANS répétition	39
7.2.6	Combinaisons AVEC répétition	39
8	Probabilités	41
8.1	Quelques définitions	41
8.2	Propriétés et formules intéressantes	41
8.3	Variables aléatoires (v.a.) discrètes	42
8.4	Lois usuelles	43

Analyse

1.1 Rappels

1.1.1 Définition d'une fonction

Une fonction est par définition une relation entre deux ensembles. La fonction f qui à chaque élément e d'un ensemble E associe au plus un élément $f(e)$ d'un ensemble F est notée :

$$f : E \rightarrow F \tag{1.1}$$

$$e \mapsto f(e) \tag{1.2}$$

- E est l'ensemble de départ de f .
- F est l'ensemble d'arrivée de f .
- $f(e)$ est l'image de e par f .
- e est l'antécédent de $f(e)$ par f .
- l'ensemble de définition D_f de f est l'ensemble des éléments de E ayant au moins une image dans F par f :

$$D_f = \{e \in E \mid \exists a \in F, f(e) = a\} \tag{1.3}$$

- l'ensemble image I_f de f est l'ensemble des éléments de F ayant au moins un antécédent dans E par f :

$$I_f = \{f(e) \mid e \in D_f\}. \tag{1.4}$$

Pour tout le reste du cours, nous ne parlerons que des fonctions réelles d'une variable réelle, c'est-à-dire avec $E \subseteq \mathbb{R}$ et $F \subseteq \mathbb{R}$.

1.1.2 Sens de variation

f est croissante sur un intervalle $I \subseteq D_f$ ssi

$$\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Elle est strictement croissante ssi

$$\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

Idem pour (strictement) décroissante.

1.1.3 Composition

Soient f et g les fonctions :

$$\begin{array}{ll} f : D_f \rightarrow I_f & g : D_g \rightarrow I_g \\ x \mapsto f(x) & x \mapsto g(x) \end{array}$$

On peut définir la fonction composée de f par g :

$$\begin{array}{l} g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow I_{g \circ f} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

de domaine de définition

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

1.2 Propriétés de fonctions

Definition 1.2.1: Injection

f est injective ssi tout élément de F possède au plus un antécédent dans D_f . Autrement dit, deux éléments de D_f distincts ont des images distinctes :

$$\forall (x, y) \in D_f^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Definition 1.2.2: Surjection

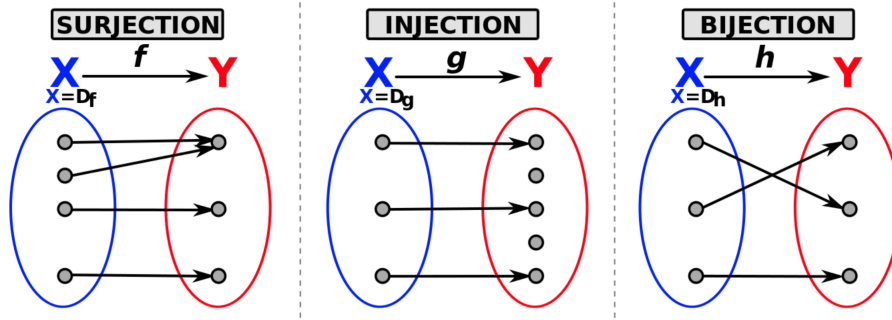
f est surjective ssi tout élément de F possède au moins un antécédent dans D_f :

$$F = I_f.$$

Definition 1.2.3: Bijection

f est bijective ssi elle est injective et surjective. Autrement dit, chaque élément de F possède exactement un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$



Definition 1.2.4: Fonction paire

f est paire ssi

$$\forall x \in D_f, \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Definition 1.2.5: Fonction Impaire

f est impaire ssi

$$\forall x \in D_f, \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Definition 1.2.6: Fonction périodique

f est périodique de période k ssi

$$\forall x \in D_f, \begin{cases} x+k \in D_f \\ f(x+k) = f(x) \end{cases}$$

1.3 Régularité

1.3.1 Continuité, Dérivabilité

Definition 1.3.1: Continuité en un point

f est continue en un point $a \in D_f$ ssi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ou, de manière équivalente,

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \{x \in E \mid f(x) \in V\} \in \mathcal{V}(a)$$

Ici, V désigne un voisinage de $f(a)$, c'est à dire l'ensemble des réels proches de $f(a)$. Plus précisément, $V \subseteq \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi

$$\exists \varepsilon > 0,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V.$$

On note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0 .

Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Definition 1.3.2: Dérivabilité en un point

f est dérivable en $x \in D_f$ ssi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée dérivée de f en x .

Si f est dérivable en tout point d'un ensemble H , on dit que f est dérivable sur cet ensemble H et on peut définir la fonction dérivée de f qui à tout point de H associe la dérivée de f en ce point. La fonction dérivée de f est notée f' ou encore $\frac{df}{dx}$.

ATTENTION: "Continue", "dérivable" sont des adjectifs valables sur un intervalle qu'il FAUT préciser !!

1.3.2 Classes de régularité

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et k un entier > 0 .

- La classe $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I .
- La classe $\mathcal{C}^k(I)$ est l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I et dont la k -ième dérivée est continue.
- La classe $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I . Ces fonctions sont aussi appelées lisses ou régulières.

En géophysique, les fonctions étudiées sont souvent supposées être "suffisamment lisses" pour pouvoir les dériver autant que nécessaire.

1.3.3 Propriétés et dérivées usuelles

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. f est croissante (au sens large) sur I ssi

$$\forall x_0 \in I, \frac{df}{dx}(x_0) \geq 0$$

De plus, f est strictement croissante ssi l'ensemble des points de I pour lesquels sa dérivée est nulle ne contient aucun intervalle non-trivial (un intervalle non-trivial étant un intervalle non vide et non réduit à un point). Formellement, on dit que l'intérieur de cet ensemble est nul :

$$\text{int} \left(\left\{ x_0 \in I \mid \frac{df}{dx}(x_0) = 0 \right\} \right) = \emptyset$$

Soit x_0 un point de I tel que $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$. f admet un minimum local en x_0 ssi:

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V \cap I, \begin{cases} x < x_0 \iff \frac{df}{dx}(x) < 0 \\ x > x_0 \iff \frac{df}{dx}(x) > 0 \end{cases}$$

f admet un maximum local en x_0 ssi :

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V \cap I, \begin{cases} x < x_0 \iff \frac{df}{dx}(x) > 0 \\ x > x_0 \iff \frac{df}{dx}(x) < 0 \end{cases}$$

Soit f et g deux fonctions dérivables, et α un réel. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f+g) &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \\ \frac{d}{dx}(fg) &= f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{1}{g^2} \left(g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx} \right) \quad (g \neq 0) \\ \frac{d}{dx}(g \circ f) &= \frac{d(g \circ f)}{df} \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \circ f \times \frac{df}{dx} \\ \frac{d}{dx}(f^\alpha) &= \alpha \frac{df}{dx} f^{\alpha-1} \end{aligned}$$

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^+$	\mathbb{R}^*	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	\mathbb{R}^*
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$	\mathbb{R}^+	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathbb{R}^{+*}
e^x	\mathbb{R}	e^x	\mathbb{R}
$\ln x $	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*
$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$	\mathbb{R}
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan x$	\mathbb{R}	$1 + x^2$	\mathbb{R}
$\cosh x$	\mathbb{R}	$\sinh x$	\mathbb{R}
$\sinh x$	\mathbb{R}	$\cosh x$	\mathbb{R}
$\tanh x$	\mathbb{R}	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	\mathbb{R}

1.4 Développements limités

1.4.1 Les notations de Landau

Ce sont des notations communément utilisées pour comparer asymptotiquement des expressions. Considérons deux fonctions f et g . Vous devez connaître :

- $f(x) = O(g(x))$: "f est un grand O de g" : il existe un certain rang de x à partir duquel $|f(x)| < |g(x)|$.

$$\exists k > 0, \exists x_0 \forall x > x_0 |f(x)| \leq |g(x)| \cdot k$$

- $f(x) = o(g(x))$: "f est un petit o de g" : f est négligeable devant g

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 |f(x)| \leq |g(x)| \cdot \varepsilon$$

- $f(x) \sim g(x)$: "f est équivalente à g"

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 |f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

1.4.2 Définition d'un développement limité

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n (abrégié DL_n) au voisinage de x_0 ssi :

$$\exists \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Le DL_n d'une fonction est composé d'un polynôme d'ordre n et d'un reste $o((x - x_0)^n)$ tel que (notation "petit o" de Landau) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Definition 1.4.1: Série de Taylor

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ et $x_0 \in D_f$. La série de Taylor de f en x_0 est la série entière

$$T_{x_0}^f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

où $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$ est la n -ième dérivée de f .

f est analytique en x_0 ssi

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V, f(x) = T_{x_0}^f(x)$$

f est entière ssi

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = T_{x_0}^f(x).$$

Soient un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n(I)$.

$$\forall x_0 \in I, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V \cap I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

En géophysique, les fonctions étudiées sont souvent supposées être de classe \mathcal{C}^n . On se sert alors des premiers termes de la série de Taylor pour approximer ces fonctions sous une forme polynômiale. En particulier, l'approximation linéaire utilisant un DL d'ordre 1 peut s'écrire :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0)$$

1.4.3 DL usuels

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (1.5)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (1.6)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (1.7)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8) \quad (1.8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (1.9)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (1.10)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8) \quad (1.11)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad (1.13)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.1.3.5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n) \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n) \quad (1.15)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad (1.16)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad (1.17)$$

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad (1.18)$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad (1.19)$$

$$\operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{2^{2n+1}} + o(x^{2n+2}) \quad (1.20)$$

Chapter 2

Quelques fonctions importantes

2.1 Exponentielle et logarithme

L'exponentielle est la seule fonction égale à sa dérivée. Elle correspond à l'exponentiation de la constante de Néper $e \approx 2.72$:

$$\exp(x) = e^x \quad (2.1)$$

La fonction exponentielle est une application continue et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qui s'annule en 1. Autrement dit,

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (2.3)$$

La fonction \ln est une application continue, strictement croissante et indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$

Theorem 2.1.1: Propriétés de l'exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \quad (2.4)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y \quad (2.5)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (2.6)$$

$$\forall (x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, e^{ax} = (e^x)^a \quad (2.7)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exp(\ln(x)) = x \quad (2.8)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x \quad (2.9)$$

Theorem 2.1.2: Propriétés du logarithme

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (2.10)$$

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \ln(xy) = \ln(\mathbf{x}) + \ln(\mathbf{y}) \quad (2.11)$$

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = \mathbf{n} \ln(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$\forall x > 0, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(\mathbf{x}) - \ln(\mathbf{y}) \quad (2.14)$$

En base quelconque

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto a^x = \exp(x \ln(a)) \end{aligned}$$

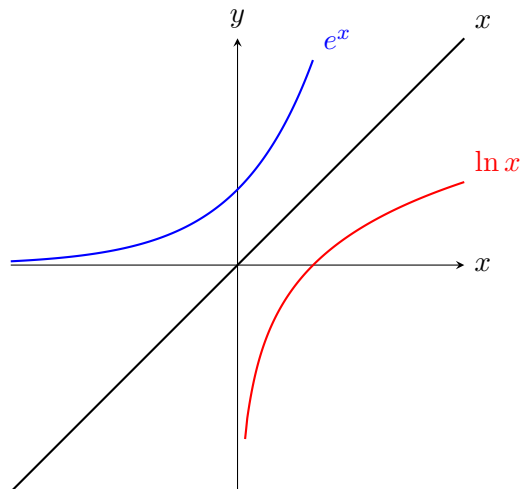
elle est définie comme la bijection réciproque du logarithme de base a.

Logarithme de base \mathbf{n} , défini $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\forall x > 0, \log_n(x) = \frac{\ln(\mathbf{x})}{\ln(\mathbf{n})}$$

En particulier, le logarithme de base 10, $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, est fréquemment utilisé (surtout pour les représentations graphiques).

ATTENTION: les notations courantes du logarithme de base 10 sont \log_{10} , \log , Log ou lg et celles du logarithme népérien, aussi appelé logarithme naturel sont \ln , ou \log . Il y a donc ambiguïté dans certaines situations. En programmation, généralement, la fonction \log fait référence au logarithme népérien.

**2.2 Fonctions puissance**

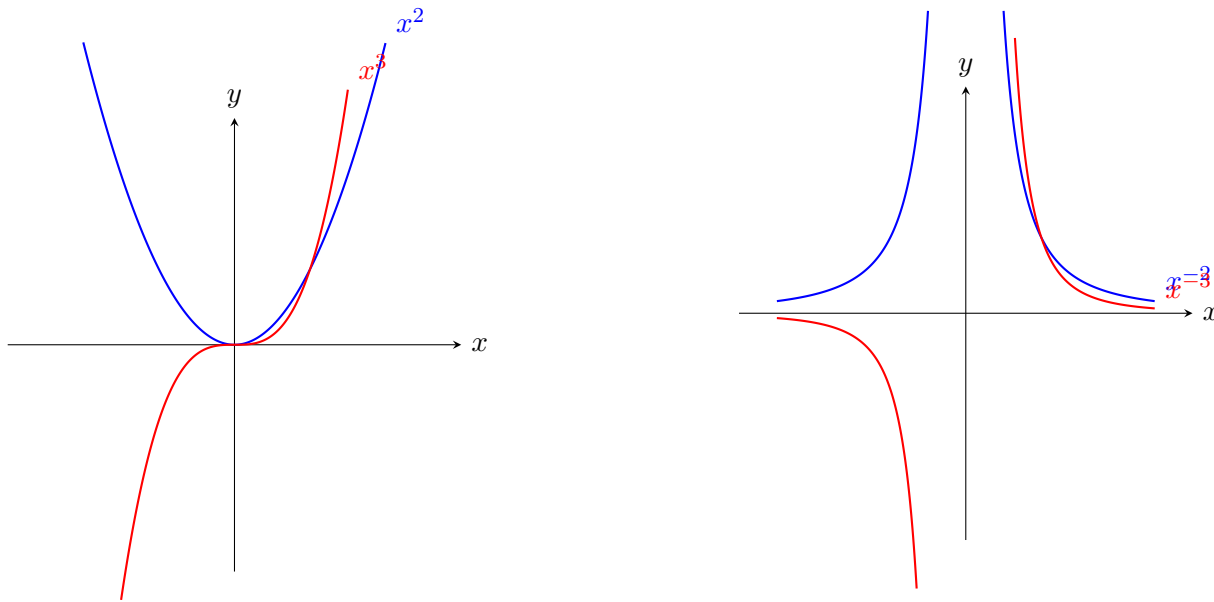
Ce sont les fonctions de la forme

$$f_a : x \mapsto x^a$$

avec a un nombre différent de 0.

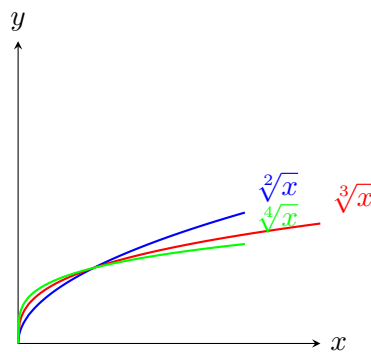
Si a est un entier

Si a est pair, f_a est paire. Si a est impair, f_a est impaire. L'allure générale de f_a dépend de la parité de a et de son signe.



Si a est rationnel

En particulier, si $a = \frac{1}{n}$ avec n un entier naturel, alors f_a est une fonction racine.



Si a est réel

Toute fonction puissance peut être mise sous la forme

$$f_a : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*} \quad (2.15)$$

$$x \mapsto x^a = e^{a \ln(x)} \quad (2.16)$$

2.3 Fonctions trigonométriques

Theorem 2.3.1: Identités trigonométriques

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (2.17)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.18)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.19)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.20)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.21)$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad (2.22)$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad (2.23)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (2.24)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \quad (2.25)$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (2.26)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \cos(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \quad (2.27)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b})) \quad (2.28)$$

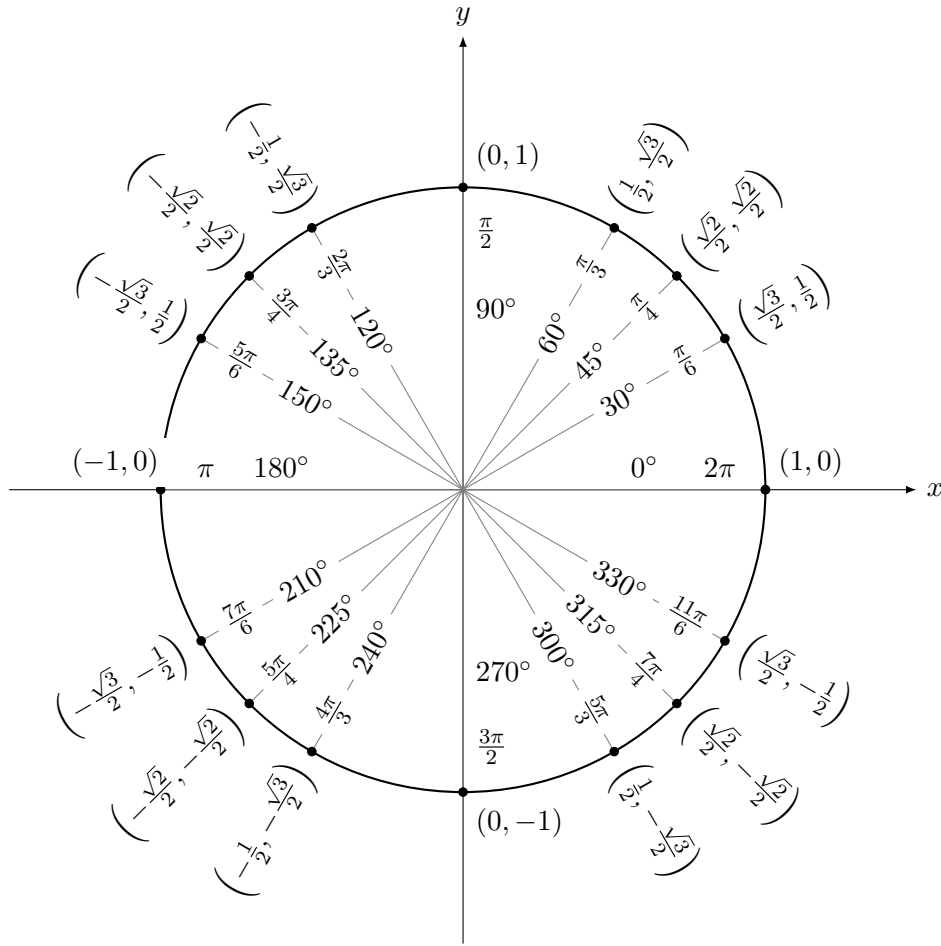
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sin(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \quad (2.29)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (2.30)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (2.31)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (2.32)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (2.33)$$



2.4 Fonctions hyperboliques

Sinus hyperbolique

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.34)$$

$$x \mapsto \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad (2.35)$$

Cosinus hyperbolique

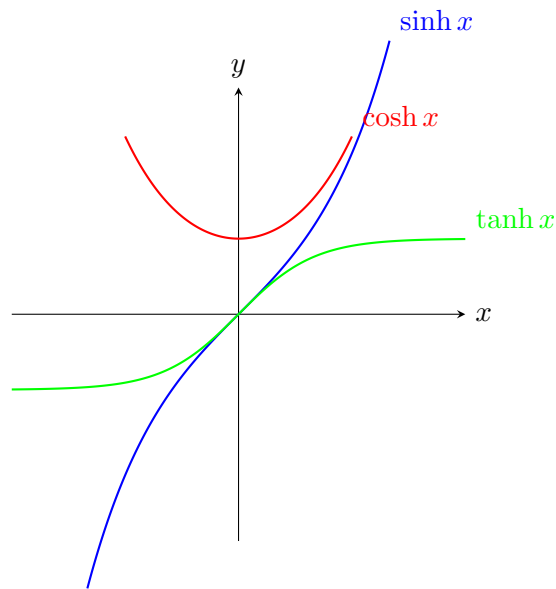
$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[\quad (2.36)$$

$$x \mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad (2.37)$$

Tangente hyperbolique

$$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\quad (2.38)$$

$$x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \quad (2.39)$$



Theorem 2.4.1: Identité hyperbolique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad (2.40)$$

2.5 Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (2.41)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad (2.42)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (2.43)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad (2.44)$$

Pour tous réels $a, b > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0 \quad (2.45)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0 \quad (2.46)$$

Chapter 3

Nombres Complexes

3.1 Le plan complexe

L'ensemble des nombres complexes, noté \mathbb{C} est l'ensemble des couples de points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ suivant les lois:

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (3.2)$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (3.3)$$

Définissonsle nombre i (parfois noté j en physique) comme le nombre tel que $i^2 = -1$. Ainsi, le nombre complexe $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire $z = x + iy$. x est appelé partie réelle de z , notée $\mathcal{R}(z)$ et y est la partie imaginaire de z , notée $\mathcal{I}(z)$. C'est la notation cartésienne. Il peut aussi se noter $z = r \exp(i\theta)$, avec r un nombre réel > 0 appelé module de z et noté $|z|$ et θ un angle défini à 2π près, appelé argument de z . C'est la notation polaire. Sans rentrer dans les détails, on définira ici l'exponentielle complexe par $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. $\exp(i\theta)$ conserve les même propriétés que l'exponentielle réelle. Elle n'a simplement pas la même allure.

On passe facilement d'une notation à l'autre via:

$$x = r \cos \theta \quad (3.4)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.6)$$

$$\theta = \arctan 2 \left(\frac{y}{x} \right) \quad (3.7)$$

avec $\arctan 2$ une "version premium" de l'arctangente qui permet de conserver des valeurs entre $-\pi$ et π . Pour un complexe $z = x + iy$, on défini le complexe conjugué de z , noté \bar{z} comme $\bar{z} = x - iy$. On a les propriétés suivantes:

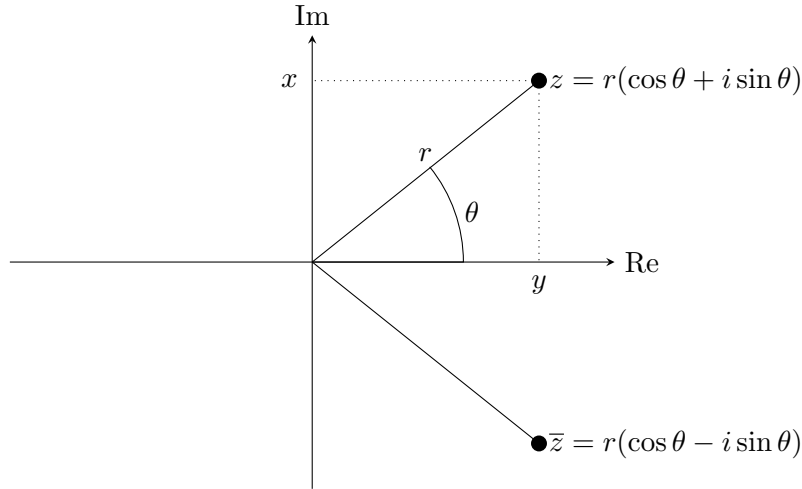
$$\overline{(\overline{z_1})} = z_1 \quad (3.8)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad (3.9)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad (3.10)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (3.11)$$

$$\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n \quad (3.12)$$



L'ensemble des complexes \mathbb{C} est un corps, c'est à dire un type d'ensemble fort sympathique qui admet toutes les opérations qu'on a naturellement envie d'écrire. Soient deux nombres complexes $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, avec $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\text{Si } z_1 = z_2, \text{ alors } x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2 \quad (3.13)$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad (3.14)$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (3.15)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (3.16)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda z_1 = \lambda x_1 + i\lambda y_1 \quad (3.17)$$

on a de plus:

$$\bar{z} + z = 2\mathcal{R}(z) \quad (3.18)$$

$$z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}(z) \quad (3.19)$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad (3.20)$$

Chapter 4

Integration

4.1 Définition

Definition 4.1.1: Primitive

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si on a :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Toutes les primitives de f sont définies à une constante près, c'est-à-dire que si F est une primitive de f , alors, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est également une primitive de f .

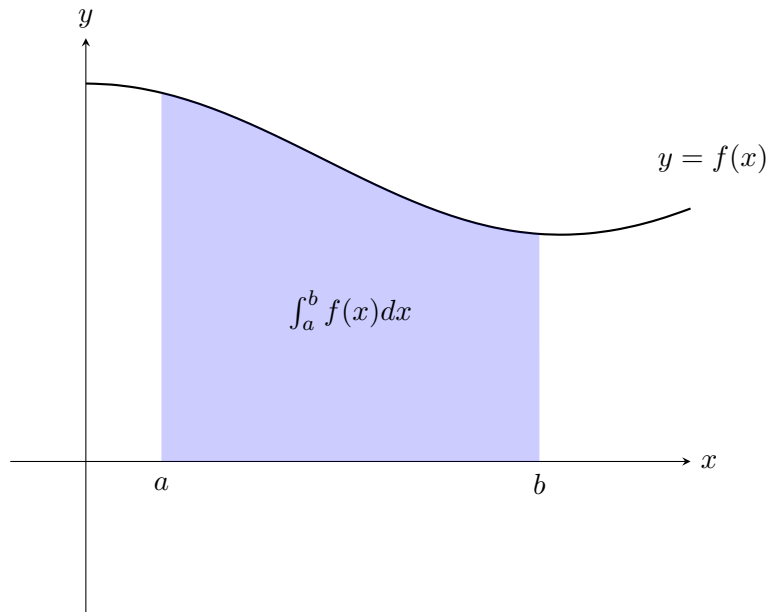
Definition 4.1.2: Intégrale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et admettant des primitives sur I . Soient $(a, b) \in I^2$ et F une primitive de f sur I . On appelle intégrale de a à b de f , le nombre :

$$F(b) - F(a)$$

que l'on notera:

$$\int_a^b f(x)dx$$



L'intégrale de f entre a et b correspond en fait à l'aire algébrique sous la courbe de f .

Theorem 4.1.3: Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a, b, c appartenant à I . On a :

- Linéarité :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

- Relation de Chasles:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

- Monotonie : si

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$$

alors :

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

- Inégalité triangulaire:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx$$

4.2 Calcul

4.2.1 Existence

On ne discutera pas ici tous les critères et théorèmes relatifs à l'existence de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné, et on s'en tiendra simplement aux points suivants :

- Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, on peut calculer sans risque l'intégrale de f sur $[a, b]$. Idem lorsque la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$.
- Il faut vérifier l'existence de l'intégrale lorsque f est définie sur un intervalle ouvert par exemple $]a, b]$. Tous les cas peuvent se produire ! Exemples :

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

diverge, car une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(x)$ et : $\forall a > 0, \ln(1) - \ln(a) = -\ln(a)$, qui tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0 . L'intégrale diverge... mais :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

converge, car une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$ et : $\forall a > 0, 2(\sqrt{1} - \sqrt{a}) = 2 - 2\sqrt{a}$, qui tend vers 2 lorsque a tend vers 0 .

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

converge. En effet, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Or : $\forall a > 0, -\frac{1}{a} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{a}$ qui tend vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$.

Pour montrer l'existence dans le cas d'un intervalle ouvert, on peut comme précédemment calculer une primitive de f sur un intervalle fermé puis regarder la limite sur les extrémités ouvertes de l'intervalle. On peut aussi essayer de majorer $|f|$ par une fonction g dont on sait que l'intégrale converge. Par exemple :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

On a : $\forall x > 1, \left| \frac{1}{1+x^2} \right| < \frac{1}{x^2}$. Or l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ converge sur $]1, +\infty[$ donc l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ converge également sur $[1, +\infty[$. Et comme l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ converge aussi sur $[0, 1]$, elle converge bien sur $[0, +\infty[$.

Theorem 4.2.1: Convergence d'intégrales de puissances

L'intégrale :

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge si et seulement si $0 < \alpha < 1$. De même, l'intégrale :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

fonction f	primitive F	Intervalle
k (réel)	k x	
x	$\frac{x^2}{2}$	
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	
$e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x \cdot \cos^n x$	$-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$	
$\cos x \cdot \sin^n x$	$\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$	
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}^{*+}
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi[$

4.2.2 Via une primitive connue

Theorem 4.2.2: Intégrale et Primitive

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} , $f \in C_m^0(I, \mathbb{R})$, et F une primitive de f sur I . On a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

4.2.3 Changement de variable

Theorem 4.2.3: Changement de variable

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, J un intervalle de \mathbb{R} , $(\alpha, \beta) \in J^2$ et ϕ une fonction continue et dérivable de J dans \mathbb{R} telle que $\phi(J) = I$. On a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du$$

c'est-à-dire qu'on a fait le changement de variable $u = \phi(t)$.

En pratique on fait un changement de variable dans $\int_a^b f(u)du$: il s'agit de trouver $J, \phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in J^2$ tels que $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$ et $\phi(J) \subset I$.

4.2.4 Intégration par parties

Theorem 4.2.4: Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions deux fois dérivables sur intervalle I de \mathbb{R} . On a :

$$\forall (a, b) \in I, \quad \int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Cette méthode permet de déplacer le calcul de l'intégrale sur celui de l'intégrale d'une autre fonction dont la primitive est connue.

4.3 Fonction de plusieurs variables

4.3.1 Intégrale multiple

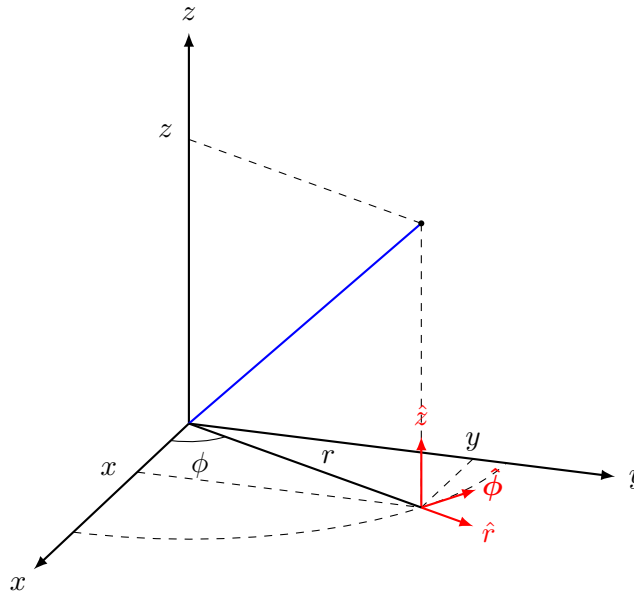
Theorem 4.3.1: Fubini

Si f est continue de $[a, b] \times [c, d]$ dans \mathbb{R} alors :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(u, v) dv \right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, v) du \right) dv$$

En pratique, vous aurez souvent à intégrer des fonctions sur des domaines définis en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées d'un point \mathcal{M} dans un repère cartésien.

coordonnées cylindriques



Les coordonnées cylindriques de ce point sont définies par le triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+,]-\pi, \pi[, \mathbb{R}$:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\phi = \text{atan2}(y, x)$
- $z = z$

et donc

- $x = r \cos \phi$
- $y = r \sin \phi$

- $z = z$

Le gradient d'une fonction f de trois variables s'écrit:

$$\vec{\nabla} f(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \partial_r f(r, \phi, z) \\ \frac{1}{r} \partial_\phi f(r, \phi, z) \\ \partial_z f(r, \phi, z) \end{pmatrix}$$

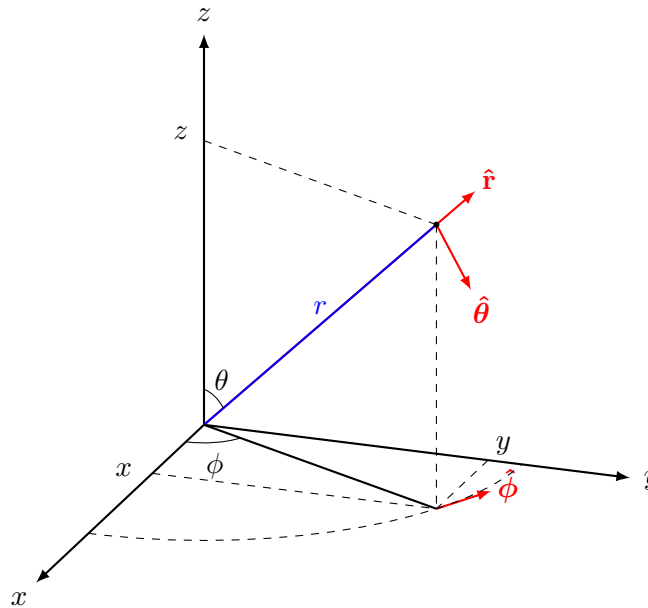
Le volume dV contenu entre r et $r + dr$, ϕ et $\phi + d\phi$, et z et $z + dz$ est:

$$dV = r dr d\phi dz$$

Donc si l'on veut intégrer la fonction $f(r, \phi, z)$ dans le domaine $[r_1, r_2] \times [\phi_1, \phi_2] \times [z_1, z_2]$, on a:

$$\int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \int_{r=r_1}^{r_2} f(r, \phi, z) r dr d\phi dz$$

coordonnées sphériques



Les coordonnées sphériques de ce point sont définies par le triplet $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^+,]0, \pi[[-, \pi, \pi[$:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$
- $\phi = \text{atan2}(y, x)$

et donc

- $x = r \sin \theta \cos \phi$
- $y = r \sin \theta \sin \phi$
- $z = r \cos \theta$

Le gradient d'une fonction f de trois variables s'écrit:

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \partial_r f(r, \theta, \phi) \\ \frac{1}{r} \partial_\theta f(r, \theta, \phi) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi f(r, \theta, \phi) \end{pmatrix}$$

Le volume dV contenu entre r et $r + dr$, θ et $\theta + d\theta$ et ϕ et $\phi + d\phi$ est:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Donc si l'on veut intégrer la fonction $f(r, \theta, \phi)$ dans le domaine $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\phi_1, \phi_2]$, on a:

$$\int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=r_1}^{r_2} f(r, \theta, \phi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

4.3.2 Dérivées partielles

Definition 4.3.2: Dérivée partielle d'ordre 1

Soit f une fonction de n variables, définie et dérivable sur $E \subset \mathbb{R}^n$. La dérivée partielle de f par rapport à x_i avec $i \in \{1, \dots, n\}$ est la fonction définie par: $\forall (a_1, \dots, a_n) \in E$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

En pratique: elle se calcule en considérant toutes les autres variables comme des constantes. On peut également la noter $\partial_{x_i} f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$

De la même façon que l'on définit les dérivées premières f' , seconde f'' , troisième f''' d'une fonction f d'une seule variable, on peut définir les dérivées premières, secondes, n-ièmes d'une fonction de plusieurs variables. Par exemple, pour une fonction $f : x \mapsto f(x, y)$ de deux variables, ses dérivées premières sont:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \partial_x f(x, y)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \partial_y f(x, y)$
- ses dérivées secondes sont:
 - $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \partial_{x^2} f(x, y)$
 - $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \partial_{y^2} f(x, y)$
 - $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \partial_{xy} f(x, y)$
 - $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \partial_{yx} f(x, y)$

Theorem 4.3.3: Théorème de Schwartz

Si f est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U , alors, en tout point de U , on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Definition 4.3.4: formes différentielles

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1(U)$ (définie, continue, dérivable et de dérivée continue sur l'ensemble U), alors, $\forall a \in U$, f est différentiable en a . Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables. Si f est différentiable en $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ alors sa forme différentielle en a est elle-même une fonction de plusieurs variables définie par:

$$\begin{aligned} df_a : \quad U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (dx_1, \dots, dx_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) dx_i \end{aligned}$$

Exemple: Si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xy^2$, alors:

$$df_{x,y}(dx, dy) = y^2 dx + 2xy dy$$

Équations Différentielles

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction, et qui met en jeu une ou plusieurs dérivées de cette fonction. L'ordre de l'équation différentielle correspond à l'ordre de sa plus haute dérivée. La résolution d'une équation différentielle se fait toujours en 2 étapes:

1. trouver les solutions homogènes (SH). Elles sont obtenues en appliquant les formules ci-dessous sur l'équation sans second membre.
2. trouver la solution particulière (SP). Elle s'obtient soit trivialement, soit par la méthode de la variation de la constante.

La solution générale est la somme de SH et de SP.

5.1 Premier ordre

Ce sont les équations de la forme

$$y' - a(x)y = b(x)$$

avec a et b deux fonctions continues sur un même intervalle I . L'équation homogène associée s'écrit

$$y' - a(x)y = 0$$

Theorem 5.1.1: Solutions homogènes de l'équation du premier ordre

a est une constante: $S = \{x \mapsto Ce^{ax} \mid C \in \mathbb{K}\}$;

a est une fonction de x : $S = \{x \mapsto Ce^{\int a(x)dx} \mid C \in \mathbb{K}\}$.

On utilise ensuite la méthode de la variation de la constante. En appelant $y_{SH} = Cf(x)$ la solution de l'équation homogène, on pose une nouvelle fonction $g(x) = C(x)f(x)$ que l'on injecte dans l'équation complète. On obtient alors une relation pour la dérivée de la fonction C .

5.2 Second ordre

On considère uniquement les équations à coefficients constants (= équations différentielles linéaires). De manière générale, les équations différentielles linéaires du second ordre ont la forme

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

L'équation homogène associée est donc

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Theorem 5.2.1: Solutions homogènes de l'équation du second ordre

L'équation caractéristique est définie comme $k^2 + ak + b = 0$. · cas sont possibles:

- Deux racines réelles distinctes k_1 et k_2 , alors

$$S = \left\{ x \mapsto C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Une racine double réelle k , alors

$$S = \left\{ x \mapsto C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Deux racines imaginaires conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors

$$S = \left\{ x \mapsto e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Pour trouver la solution particulière, on essaie différentes choses selon la forme du second membre:

- Si le second membre est un polynôme, on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré.
- Si le second membre est de la forme $Ae^{\lambda x}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, alors la discussion se porte sur λ . Est-ce une racine de l'équation caractéristique ? racine simple ou double ? On cherchera alors des solutions sous la forme

- $x \mapsto K e^{\lambda x}$ (λ n'est pas racine)
- $x \mapsto K x e^{\lambda x}$ (λ est racine simple)
- $x \mapsto K x^2 e^{\lambda x}$ (λ est racine double)

Chapter 6

Algèbre Linéaire

6.1 C'est quoi ?

L'algèbre générale est la branche des mathématiques qui s'intéresse aux ensembles d'objets et aux relations entre ces objets, et entre ces ensembles. Vous avez peut-être entendu parler de la théorie des ensembles, une théorie fondamentale des mathématiques qui construit tous les objets mathématiques que vous connaissez à partir de la notion d'ensemble: magma, monoïde, groupe, corps, algèbres, ...

Ici, nous ne plongerons pas dans le monde merveilleux de l'algèbre générale. Nous nous concentrerons sur le petit paradis de l'algèbre linéaire, branche de l'algèbre qui décrit les espaces vectoriels et les transformations qui y ont cours.

6.2 Espaces vectoriels

Definition 6.2.1: Groupe

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, c'est-à-dire une application $E \times E \rightarrow E$. On dit que $(E, *)$ est un groupe si:

- La loi $*$ est associative i.e. : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (y * z)$
- E possède un élément neutre pour $*$ i.e. : $\exists e \in E, \forall x \in E, x * e = e * x = x$
- Chaque élément de E possède un symétrique dans E pour $*$: $\forall x \in E, \exists y \in E, x * y = y * x = e$

Si de plus la loi $*$ est commutative, c'est-à-dire si : $\forall (x, y) \in E^2, x * y = y * x$, alors on dit que $(E, *)$ est un groupe abélien.

Definition 6.2.2: Espace vectoriel sur un corps commutatif \mathbb{K}

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi externe notée \cdot (i.e. une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E qui à (α, x) associe $\alpha \cdot x$). On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel si :

- $(E, +)$ est un groupe abélien

- $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 :$

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$$

$$1 \cdot x = x.$$

Un élément d'un espace vectoriel s'appelle un vecteur. Lorsqu'un espace vectoriel est de dimension finie, il admet des bases.

Definition 6.2.3: Base d'un espace vectoriel

Une base d'un espace vectoriel est une famille de vecteurs (v_1, v_2, \dots, v_n) telle que :

- libre, i.e. tous les vecteurs sont linéairement indépendants:

$$\forall (\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

- génératrice, i.e. tout élément de E est combinaison linéaire des x_i , c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

Maintenant quelques définitions concernant les fonctions (on préférera ici le terme **application**) qui opèrent entre espaces vectoriels. Ces définitions ne sont pas à connaître par coeur, bien qu'elles aident à y voir plus clair:

- une **application linéaire** est une application entre deux espaces vectoriels qui préserve l'addition de vecteurs (additivité) et la multiplication par un scalaire (homogénéité): additivité

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

homogénéité

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $L_k(E, F)$

- un **isomorphisme** est une application linéaire bijective
- un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans E
- un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif. On note l'ensemble des automorphismes de E par $Aut(E)$ ou encore $GL_K(E)$

6.3 Applications linéaires et matrices

Les applications linéaires sont tout simplement les fonctions allant d'un espace vectoriel à un autre. Les matrices sont tout naturellement des représentations d'applications linéaires dans des bases spécifiques.

Definition 6.3.1: Matrice

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et les ensembles $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et $J = \{1, 2, \dots, p\}$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à éléments dans un corps commutatif \mathbb{K} ou matrice (n, p) une application M de $I \times J$ dans \mathbb{K} . L'image du couple (i, j) se note α_{ij} et s'appelle un élément de la matrice M . Il est d'usage de définir une matrice par la liste de ses éléments disposés sous la forme de tableau:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$$

On note $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de rangs (n, p) à valeurs dans \mathbb{K} . Le **vecteur-colonne** d'une matrice est synonyme de colonne de la matrice. De même, le **vecteur-ligne** d'une matrice est synonyme de ligne de la matrice.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives $p \geq 1$ et $n \geq 1$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ des bases de E et F et soit f une application linéaire de E vers F .

Comme \mathcal{B}' est une base de F , pour tout élément $j \in \{1, \dots, p\}$, on dispose de $\{\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj}\} \in \mathbb{K}^n$ tels que:

$$f(e_j) = \alpha_{1j}e'_1 + \alpha_{2j}e'_2 + \dots + \alpha_{nj}e'_n = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}e'_i$$

La matrice (n, p) définie par $M = (\alpha_{ij})$ contient donc les coordonnées des images $\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}$ dans la base \mathcal{B}' de F . On dit que c'est la matrice associée à f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . On la note $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$:

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} \leftarrow e'_i$$

Si on se donne deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E et F , une application linéaire est donc entièrement déterminée par sa matrice associée dans ces bases. Inversement, on peut toujours voir une matrice comme la matrice d'une certaine application linéaire dans une certaine base de E et de F .

Remarques importantes:

- si E, F et G sont trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, k et de bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ et si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications linéaires alors les matrices A et B de f et g sont de dimensions $n \times p$ et $k \times n$ respectivement. De plus, l'application linéaire $h = g \circ f$ a pour matrice $B \times A$ qui est de dimension $k \times p$. Multiplier deux matrices revient donc à composer les deux endomorphismes associés.
- Lorsque f est un endomorphisme de $E (f : E \rightarrow E)$ alors les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont confondues, et si E est de dimension $n \in E$ alors la matrice de f dans la base \mathcal{B} est de taille $n \times n$. Si f et g sont deux endomorphismes de E de matrices A et B , alors l'endomorphisme $f + g$ a pour matrice $A + B$.

Grâce à la représentation matricielle, on peut facilement représenter l'action des application linéaires sur les vecteurs:

$$f(x) = y \iff M_{B,B'}(f)X = Y$$

6.4 Manipuler des matrices

6.4.1 Opérations élémentaires

Addition

La somme de deux matrices est la somme de leurs coefficients.

Produit

Pour $A \in M_{mn}, B \in M_{np}$, on définit le produit des deux matrices A et B comme la matrice $C \in M_{mp}$ où les coefficients $(c_{ij})_{i,j}$ sont calculés comme :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

On notera dans ce cas $AB = C$. Le produit de deux matrices est non commutatif : on ne peut pas calculer BA de façon triviale à partir de AB (il est d'ailleurs probable que BA n'existe pas)

Transposition

la transposée d'une matrice de rang (n, p) est une matrice de rang (p, n) qui a comme lignes les colonnes de la matrice initiale, et comme colonnes les lignes de la matrice initiale.

Inverse

Si $A \in M_{nn}$ est inversible, on note A^{-1} "l'inverse de A ", la matrice telle que $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$.

6.4.2 Déterminant et trace

La **trace** d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux. Le déterminant d'une matrice est une quantité qui informe sur la nature de la matrice. Par exemple, une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Nous verrons ensemble comment le calculer dans le cas d'une matrice de taille quelconque. Vous devez cependant connaître la formule pour le cas des matrices 2x2:

Theorem 6.4.1: Déterminant d'une matrice 2x2

$$\det A = ad - bc \quad (6.1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

6.5 Lien entre matrices et systèmes linéaires**6.5.1 Système 2×2**

Considérons un système linéaire de deux équations à deux inconnues. On note a_{ij} et b_i les coefficients (réels ou complexes) et (x, y) les inconnues. On écrit alors le système comme :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Si $(a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$ et $(a_{21}, a_{22}) \neq (0, 0)$, alors les solutions sont les coordonnées de l'intersection des deux droites de vecteur directeur $\vec{u}(a_{12}, -a_{11})$ et $\vec{v}(a_{22}, -a_{21})$. Si les deux droites sont colinéaires, alors $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, c'est à dire le déterminant du système est nul, et les solutions sont donc soit l'ensemble nul, soit une infinité de points. On en déduit que le système admet une solution unique si et seulement si son déterminant est non nul. Résoudre un tel système revient en fait à résoudre le problème matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

qui peut s'écrire, en identifiant $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$:

$$AX = B$$

Cela revient à chercher le vecteur X de \mathbb{R}^2 qui a pour image B par l'endomorphisme de matrice associée A dans la base canonique. Pour trouver la solution du problème, c'est-à-dire le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on multiplie chaque membre par l'inverse de A , A^{-1} , si elle existe, ce qui donne : $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$. On remarquera que A^{-1} n'existe que si son déterminant (c'est-à-dire le déterminant du système) est différent de 0.

6.5.2 Système $n \times n$

Considérons maintenant un système linéaire de n équations à n inconnues. on le notera sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On parle de système homogène pour $(b_1, b_2, \dots, b_p) = (0, \dots, 0)$. Un système homogène admet toujours au moins la solution triviale le n-uplet nul.

Pour résoudre le système, on utilisera la méthode du pivot de Gauss, en cherchant à obtenir un système triangulaire (supérieur ou inférieur) en faisant des opérations élémentaires sur les lignes. Les opérations élémentaires possibles sont :

- l'échange de deux lignes. qui se note : $L_1 \Leftrightarrow L_2$;
- le remplacement d'une ligne par une combinaison linéaire de l'ensemble des lignes, qui se note : $L_i \Leftarrow \sum_k L_k \lambda_k$. Le coefficient λ_i (de la ligne en cours) ne peut pas être nul.
- Mise sous forme matricielle d'un système linéaire: On peut écrire le système linéaire sous la forme d'un produit d'une matrice des coefficients $(a_{ij})_{i,j}$ avec le vecteur colonne des inconnues (x_i) égal au second

membre sous la forme d'un vecteur colonne : $AX = B$, avec : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & + \cdots + & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & + \cdots + & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. On peut ensuite calculer l'inverse de la matrice carrée A , si elle existe. Le calcul de

cette matrice inverse fait intervenir le calcul du déterminant de A , ce qui se fait par transformation sur les lignes de A , un peu comme la résolution "à la main" du système. La solution est ensuite donnée par : $X = A^{-1}B$, si A est inversible. Si A n'est pas inversible, la solution est soit l'ensemble vide, soit une infinité de points.

Dénombrement

Le dénombrement est la science de la détermination du nombre d'objets dans un ensemble. Une science voisine est celle de la combinatoire, qui étudie toutes les configurations possibles d'objets dans un ensemble. Les exemples classiques de la combinatoire et du dénombrement sont les dés (somme de 3 dés), les cartes à jouer (obtenir 5 cartes rouges, 3 cartes qui se suivent), et les boules blanches et noires (tirer 4 boules noires à la suite dans un panel de 5 boules blanches et 5 boules noires, avec ou sans remise). Ces 2 disciplines sont utiles en géosciences pour notamment:

- le calculs de probabilités, traitement de données
- la paléontologie et évolution : construction d'arbres phylogénétiques
- la minéralogie : dénombrement du nombre de sites cristallins possibles, dénombrement des modes de vibration
- la thermodynamique : Calculs d'entropie configurationnelle

7.1 Définitions

Un ensemble est, assez simplement, un objet mathématique qui regroupe soit des éléments ayant une caractéristique commune : l'ensemble des fonctions, l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des étudiants d'une même classe ; soit des éléments qu'on regroupe arbitrairement : $\{1, 2, 3\}$ ou $\{A, B, C, D\}$. On peut ensuite définir des relations entre les ensembles, entre les éléments des ensembles, etc.

Quelques définitions utiles:

- Ensemble fini : un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est défini. En particulier, $[1, 2]$ ou \mathbb{R} ne sont PAS des ensembles finis, et $\{1, 2, 3\}$ est un ensemble fini (il ne contient que 1, 2 et 3 comme éléments).
- Cardinal d'un ensemble A : c'est le nombre d'éléments contenus dans l'ensemble A . Il n'est défini que pour un ensemble fini et se note $(\text{C a r d } (A))$.
- $x \in A$: x appartient à A .
- $A \subset B$: A est contenu dans B .
- $B \setminus A$: B excluant A .
- $A \cup B$: A union B (A et B)

- $A \cup B$: A ou B (ou inclusif)
- non A : tous les éléments sauf ceux appartenant à A .
- \emptyset : ensemble vide.
- $P(E)$: ensemble des parties de E . Ce sont tous les sous-ensembles que l'on peut former en prenant des éléments de E , ainsi que l'ensemble vide. Par exemple, $E = \{0, 1\}$, $P(E) = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}, \{0\}\}$.
- Cardinal de deux ensembles finis :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

- Cardinal de n ensembles finis : Principe d'inclusion-exclusion (ou formule du crible de Poincaré)
Soient A_1, \dots, A_n n ensembles finis. Le cardinal de l'union des n ensembles s'écrit :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

7.2 Définitions d'applications

7.2.1 Permutations - SANS répétition

Une permutation sans répétition est simplement la disposition de n objets discernables dans n cases (ordonnées) avec un objet, et un seul, par case. Le nombre de permutations sans répétition de n objets est égal à $n!$. On comptera le nombre de permutations sans répétition si le problème se résume à la question suivante: "De combien de façons peut-on disposer n objets discernables si on a n places pour les caser ?"

Exemple : Pour la permutation de 4 objets dans 4 cases, on a : 4 possibilités pour la première case, 3 pour la deuxième, 2 pour la troisième, et une seule pour la dernière. On aura donc $4!$ possibilités. C'est utile pour regarder le nombre de mots que l'on peut écrire avec des lettres données.

7.2.2 Permutations - AVEC répétition

On peut avoir des répétitions (certains objets sont indiscernables), dans ce cas on considère les objets tous discernables, puis on divise par le nombre de permutations identiques car non-discernables. Le nombre de permutations de n éléments pris dans k classes différentes (k est le nombre d'éléments discernables) avec n_1 répétitions de la classe 1, n_2 de la classe 2, ... et n_k répétitions de la classe k est : $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$. À utiliser si le problème se résume à : "De combien de façon peut-on disposer n objets dans n cases si parmi les objets certains sont indiscernables ?"

Exemple : Considérons l'ensemble $\{A, A, B, B, B\}$. Si on le considère avec des objets tous discernables, il devient : $\{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3\}$. Il y a $5!$ façons de permuer ce deuxième ensemble. Comme on a 2 répétitions de A , et 3 répétitions de B , on aura compté $2! \times 3!$ fois trop de possibilités. On doit donc avoir pour l'ensemble de départ $5!/(2!3!) = 10$ permutations possibles (vous pouvez vérifier en les écrivant toutes).

7.2.3 Arrangements SANS répétitions

Un arrangement est un ordonnancement d'éléments sans forcément que le nombre d'éléments colle avec la taille de l'ensemble de départ. Par exemple, un mot MOT est un arrangement (ici sans répétition) des lettres de l'alphabet. MOT est aussi une permutation de l'ensemble $\{T, O, M\}$, au même titre que TOM

et OMT. Pour un arrangement, on s'intéressera donc au nombre d'éléments de l'espace de départ (n) mais aussi à la taille de l'arrangement (k).

Un arrangement sans répétition est très semblable à une permutation dont on tronquerait les éléments au-dessus de l'élément k . Le nombre d'arrangements sans répétition de k éléments pris dans n éléments est donc $\frac{n!}{(n-k)!}$. À utiliser si le problème se résume à : "De combien de façons peut-on disposer k objets discernables si on a $k \leq n$ places pour les caser ?"

Exemple : Pour considérer le nombre de mots de 3 lettres (sans répétition) dans un alphabet de 5 lettres, on peut construire toutes les permutations de l'alphabet de 5 lettres, et regarder combien ont les mêmes 3 premières lettres. Si on prend $\{A, B, C, D, E\}$ comme alphabet, le mot $\{A, B, C\}$ apparaîtra deux fois dans les permutations car on peut permuter $\{D, E\}$ de 2! façons. Donc on a $5!/2!$ mots de 3 lettres sans répétitions.

7.2.4 Arrangements AVEC répétitions

Pour un arrangement avec répétitions de k éléments parmi n , la seule chose importante est l'ordonnement. Pour chaque case, on peut choisir parmi les n objets de l'ensemble de départ. Le nombre d'arrangements avec répétition de k éléments pris dans n éléments est donc n^k . À utiliser si le problème se résume à : "De combien de façons peut-on disposer k objets choisis parmi n objets lors d'un tirage avec remise ?"

Exemple : Le nombre de mots (sans question d'orthographe ou de prononciation, évidemment) que l'on peut créer avec 3 lettres différentes est simplement $3 \times 3 \times 3 = 27$.

7.2.5 Combinaisons SANS répétition

Contrairement aux arrangements (et aux permutations, qui sont des cas particuliers des arrangements), les combinaisons sont des dispositions d'objets qui ne tiennent pas compte de l'ordre de placement de ces objets. C'est le cas par exemple quand on tire de façon simultanée des objets (des cartes, des boules de couleur, des dés) et que donc on ne peut décider lequel a été fait en premier. Une combinaison sans répétition est en fait une partie de l'ensemble de départ. Pour calculer le nombre de parties de k éléments, on peut calculer le nombre d'arrangements à k éléments ($n!/(n-k)!$), puis diviser par le nombre d'ordonnement possibles ($k!$).

On notera le nombre de parties à k éléments dans un ensemble de n élément comme " k parmi n ", le coefficient binomial, qui est noté :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

La question relative à ce cas est la suivante : "Combien de tirages sans remise de k objets parmi n peut-on faire si on oublie l'ordre des tirages ?"

7.2.6 Combinaisons AVEC répétition

La question relative à ce cas est la suivante : "Combien de tirages avec remise de k objets parmi n peut-on faire si on oublie l'ordre des tirages ?" :

$$\Gamma_n^k = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1}^k$$

Nous ne nous attarderons pas plus sur ce cas.

Probabilités

8.1 Quelques définitions

Soit (Ω, Σ) un espace dit probabilisable. Ω représente l'univers des possibles ou autrement dit l'univers de l'ensemble de tous les événements qu'on peut obtenir avec une épreuve aléatoire. Σ est appelé une tribu de parties de Ω . Les éléments de Σ sont appelés événements et sont ceux auxquels on peut attribuer une probabilité.

Soit (Ω, Σ) un espace probabilisable. Une probabilité sur cet espace est une fonction P de Σ dans $[0, 1]$, appelée loi de probabilité et qui vérifie les propriétés suivantes :

$$P(\Omega) = 1,$$

Soit (A_n) une famille d'événements deux à deux disjoints alors,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

Le triplet (Ω, Σ, P) est appelé un espace probabilisé. Une probabilité est définie dans $[0, 1]$.

Le calcul de probabilités est très lié au dénombrement. Supposons que l'univers Ω est associé à une épreuve finie dont on veut déterminer la probabilité de réalisation d'un événement A . Si tous les événements de cette épreuve sont équiprobables on peut écrire :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

8.2 Propriétés et formules intéressantes

Soient A et B deux événements :

- $A \subset B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Un événement peut être négligeable, c'est-à-dire de probabilité nulle, dans ce cas on dit que l'événement contraire est presque sûr.

- Formule de Poincaré : probabilité de l'union d'événements dans le cas général

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

- Probabilités conditionnelles : Une probabilité conditionnelle est la probabilité d'un événement sachant qu'un autre a eu/aura lieu.

Exemple : Vous prenez un avion et un collègue vous dit : "quand on prend l'avion on a 1 chance sur 10000 qu'il y ait une bombe à l'intérieur. Mais on a seulement 1 chance sur 100000000 qu'il y en ait 2. Alors, pour plus de sécurité quand vous prenez l'avion, emportez votre bombe...". Que pensez-vous de ce raisonnement?

On note la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B s'est réalisé / se réalisera $P_B(A)$ ou $P(A | B)$. Et,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Très utilisée, la formule de Bayes donne (en considérant que $P(B) > 0$) :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

- événements indépendants : Soient A et B deux événements.

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

8.3 Variables aléatoires (v.a.) discrètes

Une variable aléatoire est une fonction qui associe une certaine valeur au résultat d'une expérience. Par exemple, c'est le gain à un jeu de hasard après un lancer ou après plusieurs lancers successifs. C'est une valeur mesurable associée à chaque éléments de l'ensemble des événements.

Exemple : On prend Ω l'ensemble des élèves de la classe, Σ l'ensemble des parties (tribu) de Ω . On peut définir plusieurs variables aléatoires, qui associent chacune une mesure à un élément de l'ensemble des "événements" (ici le choix d'un ou plusieurs élèves) : l'âge, la taille, la capacité en maths, etc.

Pour une variable aléatoire établie pour un ensemble probabilisé, on peut alors définir la probabilité que cette variable prenne une certaine valeur ou une certaine gamme de valeurs. Dans notre cas, on se restreindra aux variables discrètes, c'est-à-dire que la variable aléatoire ne prend que des valeurs discrètes. On notera alors $P(X = B)$ la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur B . Quelques définitions:

- Espérance d'une v.a. : Soit X une variable aléatoire. On définit son espérance comme suit,

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k)$$

Elle correspond à la moyenne espérée par l'observateur. On verra après qu'elle ne peut pas caractériser à elle seule la loi d'une variable aléatoire. Linéarité de l'espérance : Soient X et Y deux v.a. définies sur le même univers et a et b deux réels

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

- Variance d'une v.a. : On définit la variance V d'une v.a. comme l'espérance de l'écart à l'espérance (on veut regarder l'écart à la moyenne espérée). σ est l'écart type de la v.a., son carré est égal à la variance. On écrit donc :

$$V(X) = \sigma^2 = E((X - E(X))^2) = \sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) = E(X^2) - (E(X))^2$$

On remarquera que la variance est toujours positive (espérance d'une valeur au carré). Non-linéarité de la variance : Soit X un v.a. et a et b deux réels

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

- Moment d'une v.a. : On définit le moment d'ordre m d'une variable aléatoire comme :

$$M_m(X) = \sum_k k x_k^m P(X = x_k)$$

- Covariance d'une v.a. :

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

8.4 Lois usuelles

Soit X une variable aléatoire.

- Loi uniforme : X suit une loi uniforme si elle prend ses valeurs dans $\Omega = \{1, \dots, n\}$ avec des probabilités élémentaires identiques. Étant donné que la somme des probabilités de l'univers considéré doit être égale à 1, on en déduit :

$$\forall k = 1, \dots, n, P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Espérance :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Variance :

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Exemple : On lance un dé à 6 faces non-pipé. X est le résultat de ce lancer. Les résultats possibles sont $x_k = k$ avec $k = 1, \dots, 6$, et ont tous pour probabilité élémentaire $\frac{1}{6}$. On peut calculer que $E(X) = \frac{7}{2}$ et $V(X) = \frac{35}{12}$.

- Loi de Bernoulli : X suit une loi de Bernoulli si elle prend comme valeurs 0 ou 1 (par exemple : vrai ou faux, succès ou échec, ...). Un succès correspond à $\{X = 1\}$, un échec correspond à $\{X = 0\}$. Donc, si on appelle p la probabilité de succès :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{0, 1\} \\ P(X = 1) &= p \\ P(X = 0) &= q = 1 - p \end{aligned}$$

Espérance :

$$E(X) = p$$

Variance :

$$V(X) = pq = p(1 - p)$$

Remarque : on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

- Loi binomiale : X suit une loi binomiale lorsqu'on répète plusieurs fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli. X prend pour valeur le nombre de succès dans une succession de n épreuves. Pour déterminer la probabilité des événements suivant une loi binomiale il faut donc connaître le nombre de combinaisons de k succès parmi n épreuves... Puis de le multiplier par les probabilités de succès et d'échec. Remarque : on dit que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, n, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Ce qui normalement vous rappelle quelque chose... Espérance :

$$E(X) = np$$

Variance :

$$V(X) = npq = np(1 - p)$$

- Loi hypergéométrique : Cette loi décrit un type de situation proche de la loi binomiale à la différence que le tirage se fait sans remise. X prend toujours pour valeur le nombre de succès (ayant chacun une probabilité p de se réaliser) dans une succession de n épreuves. Par contre, la loi hypergéométrique nécessite de connaître le nombre total d'échantillons N ce qui vient du fait qu'on tire sans remise. La probabilité que k succès se réalisent dans ses conditions est :

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Remarque : on dit que X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

Espérance : la même que la loi binomiale

$$E(X) = np$$

Variance : elle forcément plus petite parce qu'on enlève un élément à chaque tirage

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

- Loi géométrique : Elle prend pour valeur le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes (càd avec remise) qu'il est nécessaire d'effectuer avant d'obtenir un succès (qui a toujours une probabilité p de se réaliser).

Exemple : On tire à pile ou face successivement jusqu'à obtenir "pile". Le nombre d'essai nécessaires est décrit par une loi géométrique.

La probabilité d'obtenir un succès à la k -ème épreuve est :

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

On peut s'en convaincre avec un arbre de probabilités.

Espérance :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Variance :

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

- Loi de Poisson : C'est une loi permettant de modéliser des événements rares (contrôles qualité, accidents, ...). Elle s'apparente à une loi binomiale pour laquelle le nombre d'épreuves (ou effectif) n est très grand et la probabilité de succès de chaque épreuve (ou d'occurrence) p est très petite ($p < 0,1$). Il en résulte que le produit np tend vers une valeur qu'on notera λ . λ est le seul paramètre de la loi de Poisson, ainsi que son espérance et sa variance. La probabilité d'avoir k succès dans ces conditions est :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Remarque : la somme de v.a. de Poisson indépendantes et une v.a. de Poisson (et réciproquement).