

福祉音響学: Unit 9

担当: 村上 泰樹

E-mail: murakami@design.kyushu-u.ac.jp

2025 年 5 月 12 日

この単元の目的

蝸牛が損傷を受けることで、感音難聴や耳鳴りの原因となります。この単元以降では、聴覚末梢系にある蝸牛の応答特性を数値シミュレーションを通じて理解していきます。

この単元の目的は、蝸牛を受動的かつ線形システムであるという仮定の元に、以下のプロセスを通じて蝸牛の応答特性を理解することです：

- ▶ 蝸牛モデルの構築
- ▶ モデルの離散化
- ▶ 数値計算法の実装
- ▶ シミュレーション結果の解析

これにより、聴覚の周波数選択性の基盤となる蝸牛の物理的特性を、工学的観点から理解することが可能となります。

目次

1. 蝸牛モデルの導出

蝸牛の力学の初歩

蝸牛管の流体力学

基底膜モデル

流体の流れと基底膜の運動の相互作用

2. 周波数領域解法

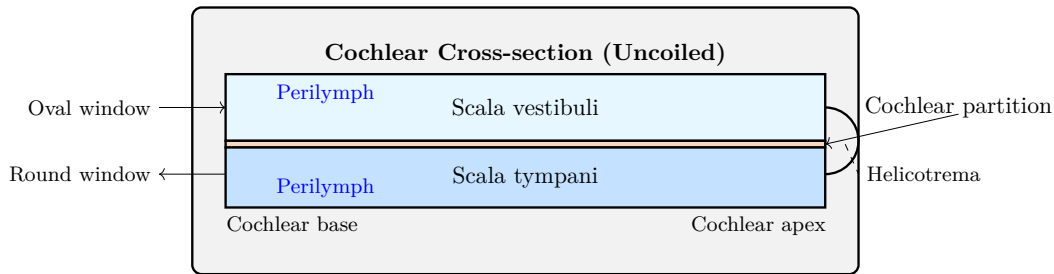
3. 蝸牛モデルの離散化

4. 数値シミュレーションの結果

5. クイズ

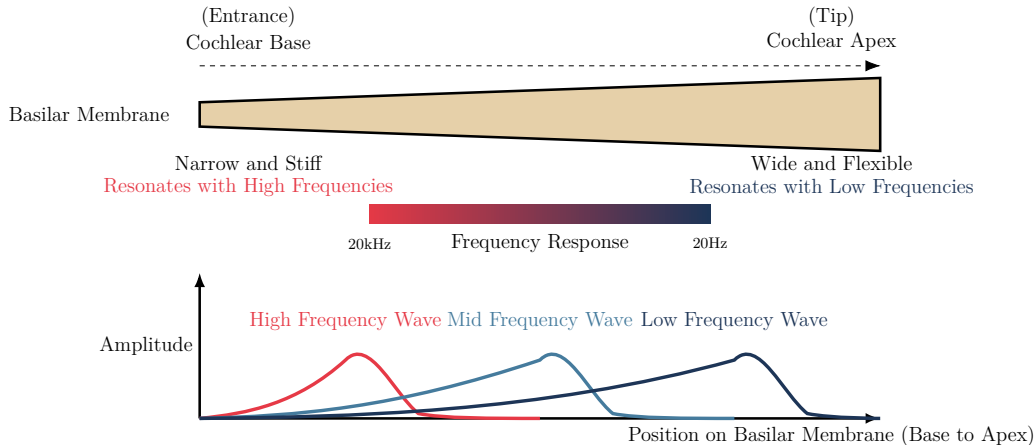
6. Unit 9 のまとめ

蝸牛の構造



The cochlea is a single tube divided into two spaces by the cochlear partition

蝸牛の力学的特性



* The traveling wave propagates from base to apex, peaks at a specific position corresponding to the frequency, and then rapidly attenuates

蝸牛モデルの構成

1. 蝸牛管内を流れる流体

- ▶ 蝸牛は液体（内リンパ液と外リンパ液）で満たされている
- ▶ これらの流体は音波が耳に入ると振動し、波動として蝸牛内を伝播する
- ▶ 流体力学の法則に従って動き、圧力変化を基底膜に伝える

2. 基底膜の振動

- ▶ 基底膜は蝸牛内を縦に走る弾性のある構造物である
- ▶ 周波数に応じて特定の場所が最大振幅で振動する「トノトピー（周波数局在性）」の特性を持つ
- ▶ 基底部（蝸牛の入口付近）は高周波音に、頂部（蝸牛の奥）は低周波音に反応する

3. 流体と基底膜の相互作用

- ▶ 流体の動きが基底膜を振動させ、逆に基底膜の振動が流体の動きに影響を与えるという双方向の関係がある
- ▶ この相互作用により、受動的な機械的フィルタリングが行われる

リンパ液の仮定

1. 2次元流れの仮定：

- ▶ 3次元の複雑な蝸牛管を2次元平面 (x - y 平面) 上のモデルに単純化する
- ▶ x は蝸牛の長手方向 (入口から先端)、 y は上下方向を表す

2. 理想流体の仮定：

- ▶ 粘性がない (内部摩擦力が存在しない)
- ▶ 非圧縮性 (密度が一定)
- ▶ 渦なし流れ

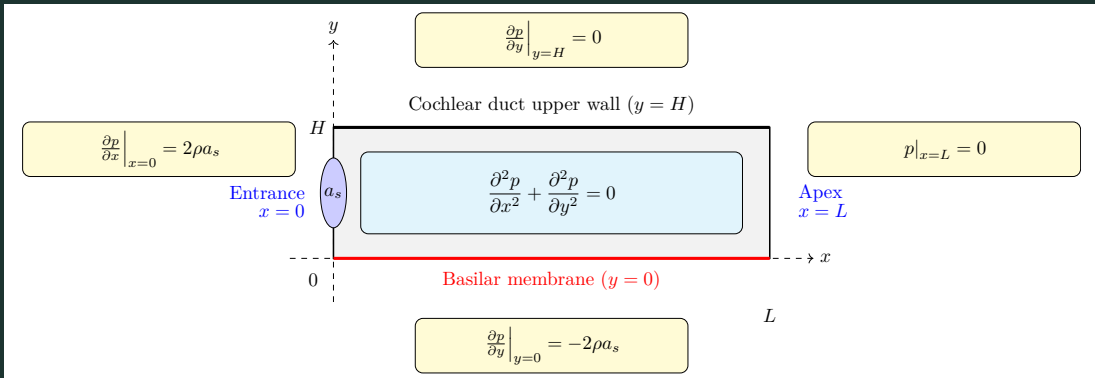
支配方程式

連続の式と運動方程式から、蝸牛管内の圧力 p に関する以下のラプラス方程式が導出される。

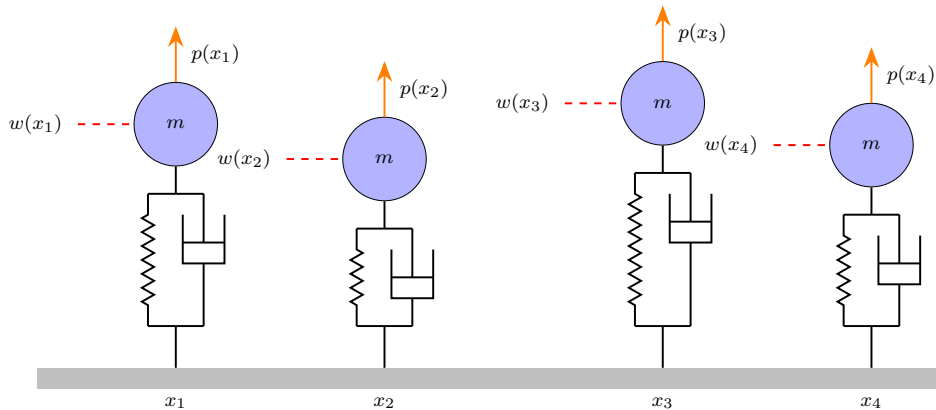
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

この偏微分方程式は、流体の圧力場がどのように分布するかを表している。

支配方程式と境界条件



基底膜モデルの模式図



位置 x における基底膜の振動系の運動方程式：

$$m\ddot{w}(x) + c\dot{w}(x) + kw(x) = p(x) \quad (2)$$

- ▶ $w(x)$: 位置 x における基底膜の変位（上下方向の動き）
- ▶ $\dot{w}(x)$: 変位の時間に関する1階微分（速度）
- ▶ $\ddot{w}(x)$: 変位の時間に関する2階微分（加速度）
- ▶ m : 質量パラメータ
- ▶ c : 減衰係数（ダンパーの強さ）
- ▶ k : ばね定数（ばねの硬さ）
- ▶ $p(x)$: 位置 x に加わる外力（圧力）

蝸牛管内の流れと基底膜の運動の相互作用

蝸牛管内の流れと基底膜の運動の相互作用を考えるために、式3の圧力 p に関するラプラス方程式を一部離散化する。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=L} - \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = 0 \quad (3)$$

境界条件を代入することで、蝸牛管と基底膜の運動の相互作用の式が得られる。

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{2\rho \ddot{w}}{H} = 0 \quad (4)$$

この方程式に対して、蝸牛の基部と先端部での式2を連立させ、境界条件を設定し、することで問題を解くことができる。

目次

1. 蝸牛モデルの導出

蝸牛の力学の初歩

蝸牛管の流体力学

基底膜モデル

流体の流れと基底膜の運動の相互作用

2. 周波数領域解法

3. 蝸牛モデルの離散化

4. 数値シミュレーションの結果

5. クイズ

6. Unit 9 のまとめ

周波数領域解法の導入

蝸牛モデルは、基底膜の振動方程式（式2）と流体-構造連成の相互作用方程式（式4）を連立させることで、圧力の分布 (p) と基底膜の運動の分布 (\ddot{w} , \dot{w} , w) を決定する。

このモデルにおける重要な問題点は、未知の変数が4つ (p , \ddot{w} , \dot{w} , w) 存在するのに対して、方程式は2つしか存在しないことである。そのため、一意的な解を得ることができない。この問題を解決するために、フーリエ変換を導入する。フーリエ変換を適用することで、時間領域の問題を周波数領域に変換し、微分方程式を代数方程式に変換することができる。

$\dot{w}(t)$ (速度) をフーリエ変換の基本変数として選択し、速度のフーリエ変換を $\dot{W}(\omega)$ とする。そして、以下の関係を用いる：

$$\ddot{w}(t) \leftrightarrow j\omega \dot{W}(\omega) \quad (5)$$

$$w(t) \leftrightarrow \frac{\dot{W}(\omega)}{j\omega} \quad (6)$$

ここでは、変数 j が虚数単位として使用する。これらの関係を式2に代入してフーリエ変換すると：

$$j\omega m \dot{W} + c \dot{W} + \frac{k}{j\omega} \dot{W} = P \quad (7)$$

ここで、 $\dot{W}(\omega)$ は速度 $\dot{w}(t)$ のフーリエ変換、 $P(\omega)$ は圧力 $p(t)$ のフーリエ変換である。

\dot{W} について解くと：

$$\dot{W} = \frac{P}{j\omega m + c + \frac{k}{j\omega}} \quad (8)$$

機械アドミッタンス $Y(\omega)$ を用いると、式9が得られる。

$$\dot{W} = Y \cdot P \quad (9)$$

蝸牛管内の圧力分布を表す方程式を得るために、式2を式4に代入する。

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \lambda^2 p = 0 \quad (10)$$

ただし、

$$\lambda^2 = \frac{2\rho j\omega Y}{H} \quad (11)$$

である。の関係式により、未知変数の数が実質的に減少し、系を解くことが可能になる。

周波数領域解法の制約

- ▶ 単一の周波数への応答しか計算することができない。すなわち、正弦波入力に対する応答のみが得られる。
- ▶ 非線形性を持つ系への適用が困難である。

しかし、聴覚系の周波数応答特性を調べる目的では、この周波数領域でのアプローチは非常に有効である。特に、特定の周波数の音に対する基底膜の応答パターンを解析する場合に適している。

目次

1. 蝸牛モデルの導出

蝸牛の力学の初歩

蝸牛管の流体力学

基底膜モデル

流体の流れと基底膜の運動の相互作用

2. 周波数領域解法

3. 蝸牛モデルの離散化

4. 数値シミュレーションの結果

5. クイズ

6. Unit 9 のまとめ

差分法を用いた差分方程式の導出

空間座標 x を離散化して、 $x_i = i \cdot \Delta x$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) の格子点を考える。ここで Δ は格子点間隔、 N は格子点の総数です。各格子点での圧力を $P_i = P(x_i)$ と表記する。

2階微分項 $\frac{d^2 P}{dx^2}$ を中心差分法で近似すると：

$$\left. \frac{d^2 P}{dx^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta^2} \quad (12)$$

この近似を式 10 に代入すると、次の差分方程式が得られる。

$$P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1} - \lambda^2 \Delta^2 P_i = 0 \quad (13)$$

行列形式

境界条件を適用し、差分方程式を行列形式でまとめる：

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (14)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 - \lambda^2 \Delta^2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 - \lambda^2 \Delta^2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 - \lambda^2 \Delta^2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 - \lambda^2 \Delta^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{u} = [P_1 \ \cdots \ P_N]^T \quad (16)$$

$$\mathbf{b} = [-4j\omega\rho\dot{U}_s\Delta \ 0 \ \cdots \ 0]^T \quad (17)$$

線形方程式系 $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ を解くことで、蝸牛管内の圧力分布 P_1, P_2, \dots, P_N を求めることができる。そして、式9で表現される圧力と速度の関係式から基底膜の速度分布 \dot{W} を求める。離散化を行う際には、以下の点に注意する。

- ▶ 数値安定性： Δ の選択によって数値解の安定性が影響を受ける。特に λ が大きい場合（高周波数など）は、より細かい格子が必要になる。
- ▶ 精度：中心差分法は $O(\Delta^2)$ の精度を持つ。より高い精度が必要な場合は、高次の差分スキームを使用することもできる。

パラメータの値

パラメータの値はヒトの特性を模擬した値を設定した。
ばね定数 (基底膜の硬さ) :

$$k = m(2\pi f_n)^2 \quad (18)$$

共振周波数-場所関数 (Greenwood 関数):

$$f_n = 165.4(10^{2.1*((L-x)/0.035)}) - 0.88) \text{ Hz} \quad (19)$$

抵抗:

$$c = 2\pi f_n m Q_n^{-1} \quad (20)$$

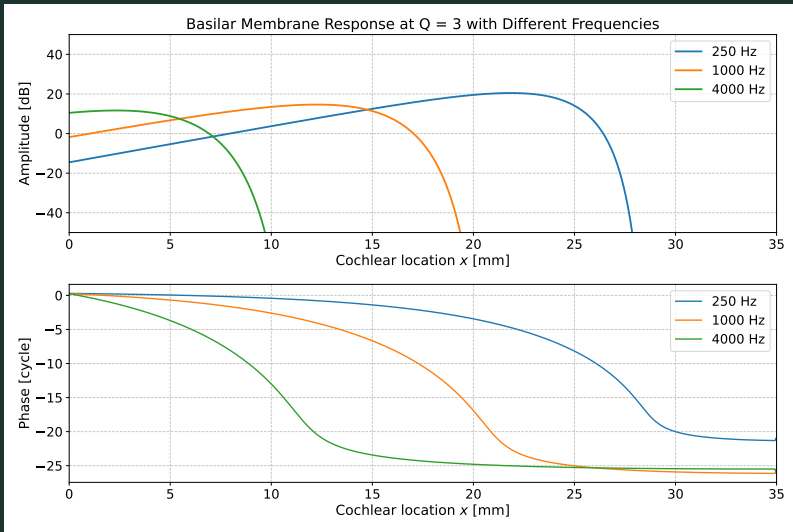
共振の鋭さ (Q 値):

$$Q_n = 3 \text{ or } 30 \quad (21)$$

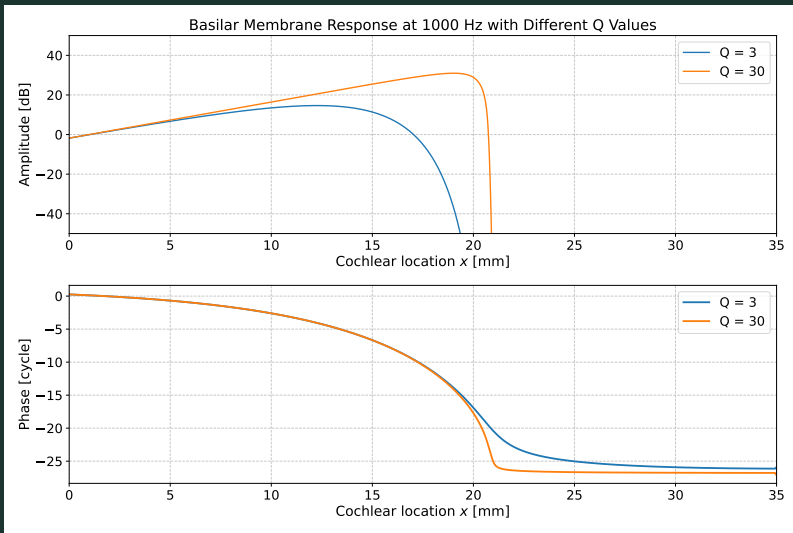
目次

1. 蝸牛モデルの導出
 - 蝸牛の力学の初歩
 - 蝸牛管の流体力学
 - 基底膜モデル
 - 流体の流れと基底膜の運動の相互作用
2. 周波数領域解法
3. 蝸牛モデルの離散化
4. 数値シミュレーションの結果
5. クイズ
6. Unit 9 のまとめ

Basilar membrane responses at $Q_n = 3$ for 250, 1000 and 4000 Hz tones



Basilar membrane responses at $Q_n = 3$ and 30 for 1000 Hz tones



目次

1. 蝸牛モデルの導出

蝸牛の力学の初歩

蝸牛管の流体力学

基底膜モデル

流体の流れと基底膜の運動の相互作用

2. 周波数領域解法

3. 蝸牛モデルの離散化

4. 数値シミュレーションの結果

5. クイズ

6. Unit 9 のまとめ

クイズ

流体と基底膜の相互作用の式4から、次の問いに答えよ。

1. 差分法を用いて、差分方程式を導出せよ。
2. 境界条件を設定し、差分方程式を行列形式で表現せよ。

目次

1. 蝸牛モデルの導出
 - 蝸牛の力学の初歩
 - 蝸牛管の流体力学
 - 基底膜モデル
 - 流体の流れと基底膜の運動の相互作用
2. 周波数領域解法
3. 蝸牛モデルの離散化
4. 数値シミュレーションの結果
5. クイズ
6. Unit 9 のまとめ

Unit 9 のまとめ

この単元では、蝸牛の力学を数理モデル化し、周波数分解メカニズムを理解するための理論的フレームワークについて学習した。