福祉音響学: Unit 13

担当: 村上 泰樹

E-mail: murakami@design.kyushu-u.ac.jp

2025 年 5 月 26 日

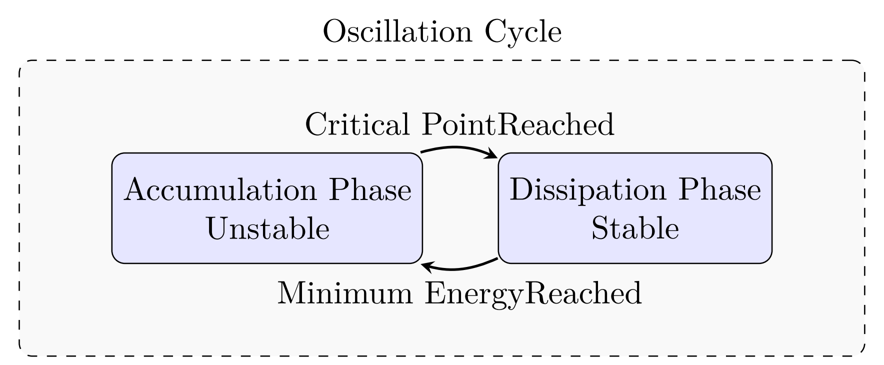
この単元の目的

- 耳鳴りのメカニズムは、音響学的な観点からは、聴覚系のどこかでで自励振動が起こることによって説明される。
- そのため、簡単な微分方程式を用いて、耳鳴りのメカニズムを理解することを目的とする。

目次

自励振動としての耳鳴り

- 耳鳴り（tinnitus）は、外部からの刺激がないにもかかわらず、音を知覚する現象である。音響学的な観点では、これは聴覚系のどこかで発生する「自励振動」によって説明される。



耳鳴りのメカニズム

- 内耳（蝸牛）の有毛細胞における異常な活動
- 聴神経における自発的な電気信号の発生
- 脳の聴覚中枢における神経活動の異常

これらの自励振動は、騒音暴露による聴覚障害、加齢、特定の薬剤、ストレスなど様々な要因によって引き起こされる。
音響学的視点では、この自励振動は実際の音の特性（周波数、音量など）を持つため、患者は実際の音と区別できないほど現実的な音として知覚する。
また、耳鳴りの種類（純音、ノイズ、複合音など）はこの自励振動の特性によって決まる。

目次

耳鳴りの単純なモデル

耳鳴りをモデル化するために、次の微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{1}$$

上式は、振動系を表す微分方程式である。x は振動の状態を表し、a は系の特性を示す定数であり、物理的には抵抗の値である。物理的には、LR 回路やマスダンパー系などの振動系を表現している。変数分離法で用いて得られる解は次の通り。

$$x(t) = Ce^{at} \tag{2}$$

解の形は、指数関数的な成長を示している。C は初期条件であり、系の初期状態を決定する。a が正の場合、系は指数関数的に増加し、負の場合は減少する。a の符号によって系の挙動が決まる。

単純なモデルの課題

単純なモデルは、系の挙動が安定であるか不安定であるかしか説明できない。実際の耳鳴りは、安定した振動と不安定な振動が交互に現れるため、単純なモデルでは耳鳴りのメカニズムを十分に説明できない。
ここで、二つの状態を説明可能なモデルを考える。すなわち、エネルギー供給とエネルギー放出の両方を考慮したモデルである。これを実現するために、次の微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = \left(a - x^2\right) x \tag{3}$$

本方程式の右辺 $(a - x^2)x$ は、通常の線形項 ax に非線形項 $-x^3$ を加えたものと解釈できる。ここで重要なのは抵抗値が一定ではなく、状態変数 x に依存して変化する点である。

抵抗の実効値 $R_{\text{eff}} = (a - x^2)$ は次のような特性を持つ：

- x が小さい場合：$|x| \ll a$ のとき、$R_{\text{eff}} \approx a$ となる
  - $a > 0$ なら系は不安定（エネルギー供給状態）
  - $a < 0$ なら系は安定（エネルギー放出状態）
- x が大きい場合：$|x| \gg a$ のとき、$R_{\text{eff}} < 0$ となる
  - 系は安定に転じる（エネルギー放出状態）

つまり、x の振幅によって系の特性が動的に切り替わるメカニズムが実現されている。

非線形モデルは耳鳴りの重要な特性を捉えている

1. **自発的な振動の発生**：$a > 0$ の場合、わずかな初期摂動から振動が自発的に成長する
2. **振幅の自己制限**：振幅が $\sqrt{a}$ 付近で安定化し、無限に増大せず、一定の大きさの音として知覚される
3. **二状態間の遷移**：系はエネルギー供給状態（$|x| < \sqrt{a}$）とエネルギー放出状態（$|x| > \sqrt{a}$）の間を周期的に行き来し、持続的な振動を生成する
4. **パラメータ a による制御**：a の値が大きいほど、安定振幅 $\sqrt{a}$ も大きくなる。

目次

1. 自励振動としての耳鳴り
2. 耳鳴りの単純なモデル
3. 状態空間解析
    - 一階微分方程式モデルの限界
    - 状態空間解析の導入
    - 状態空間解析の利点
    - 耳鳴りへのに対する状態空間解析
4. 耳鳴りモデルの非線形化
5. クイズ
6. まとめ

一階微分方程式の限界

- 単純なモデルは、一階微分方程式で記述されており、解は振動しない。この式の解は、単調増加（$a > 0$ の場合）あるいは単調減少（$a < 0$ の場合）するのみである。このモデルは、耳鳴りの持続的な自励振動を表現するためには不十分である。
- 一階微分方程式モデルの根本的な限界はとして、周期的変動の欠如が挙げられる。耳鳴りは本質的に周期的な現象であり、特定の周波数を持つ音として知覚される。一階微分方程式では、このような周期解を生成できない。

二階微分方程式モデルの導入

二階微分方程式を用いて、より複雑な振動系を考えることができる。一般的な二階の線形微分方程式は以下の形で表される：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \beta x = 0 \tag{4}$$

1. **慣性項** ($\frac{d^2x}{dt^2}$): 系の質量や慣性に相当し、状態変化に対する抵抗を表す。
2. **減衰項** ($\alpha\frac{dx}{dt}$): エネルギー散逸のメカニズムを表し、$\alpha > 0$ のとき系にはエネルギー損失がある。
3. **復元力項** (βx): 平衡状態からの偏差に比例する力を表し、$\beta > 0$ のとき系は平衡点に引き戻される傾向がある。

状態空間解析の導入

- 二階微分方程式を解けば良いのだが、一階微分方程式のように簡単に解くことができない。そこで、状態空間解析を用いて解析することができる。状態空間解析は、系の状態を時間とともに追跡するための手法である。
- 状態空間解析の基本的なアイデアは、高次の微分方程式を複数の一階微分方程式に変換することである。

1. 状態変数の定義：

$$x_1 = x \text{ (位置または変位)} \tag{5}$$

$$x_2 = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \text{ (速度)} \tag{6}$$

2. 状態方程式への変換：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 \end{cases} \tag{7}$$

3. 行列形式での表現：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

以上をまとめると、二階微分方程式は以下のように表現できる：

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{9}$$

ここで、A はシステム行列と呼ばれる。

状態空間解析の利点

1. **数値解法の適用が容易：**
   - 一階微分方程式系に変換されるため、標準的な数値積分法（ルンゲ・クッタ法など）が適用可能である
   - コンピュータによる解析が容易になる
2. **系の性質の幾何学的解釈：**
   - 系の振る舞いを状態空間（相空間）上の軌跡として視覚化できる
   - この空間では、系の状態は時間とともに「流れる」点として表現される
3. **安定性解析の統一的枠組み：**
   - 系行列 A の固有値を調べることで、系の安定性を判定できる
   - 実部が負の固有値は安定、正の固有値は不安定な振る舞いを示す
4. **制御理論への拡張が自然：**
   - 入力と出力を含む系へと容易に拡張できる
   - 現代制御理論の基礎となっている

耳鳴りに対する状態空間解析

1. **平衡点の特定：**
   - 平衡点は $\dot{\mathbf{x}} = 0$ となる点である
   - この系では原点 $(0, 0)$ が唯一の平衡点である
2. **線形化と局所安定性解析：**
   - 平衡点周りでの系の振る舞いを調べることができる
   - 系行列 A の固有値は $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$ となる
3. **パラメータ空間の分類：**
   - $\alpha^2 < 4\beta$：減衰振動（複素固有値）
   - $\alpha^2 = 4\beta$：臨界減衰（重複固有値）
   - $\alpha^2 > 4\beta$：過減衰（実固有値）
4. **位相平面解析：**
   - x_1-x_2 平面上での軌跡を描くことで、系の振る舞いを視覚的に理解できる
   - 減衰振動の場合は渦巻き状、過減衰の場合は直接的な接近を示す

状態空間解析から分かること

1. **持続的振動条件の特定：**
   - 通常の減衰系では振動は時間とともに減衰する
   - 耳鳴りの持続的な振動を表現するには、$\alpha < 0$（負の減衰）が必要である
   - これは系行列の固有値の実部が正になることを意味し、不安定な系となる
2. **振幅制限のメカニズム：**
   - 線形モデルでは振幅は無限に増大するが、実際の耳鳴りは有限の振幅を持つ
   - これを表現するには、状態依存の減衰項を導入する必要がある
   - 小振幅では $\alpha < 0$（エネルギー注入）、大振幅では $\alpha > 0$（エネルギー散逸）となり、リミットサイクルが形成される
3. **分岐現象の解析：**
   - パラメータ変化による系の質的変化（分岐）を解析できる
   - 例えば、α が負から正に変わる点で Hopf 分岐が発生し、耳鳴りの発生または消滅に対応する可能性がある

目次

耳鳴りモデルの非線形化

持続的な自励振動を表現するためには、例えば、van der Pol 型の方程式を考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(x^2 - \alpha\right)\frac{dx}{dt} + \beta x = 0 \tag{10}$$

この方程式では、減衰係数が状態 x に依存して変化する。$|x|$ が小さいとき、減衰係数が負の値を保つためエネルギーが供給され、$|x|$ が大きいとき、減衰係数が正の値を持つためエネルギーが散逸する。この特性により、系は一定の振幅で持続的に振動するリミットサイクルを形成する。

耳鳴りの特性の再現

1. **自発的な発振**: 外部からの入力がなくても、系が自発的に振動を開始・維持する
2. **一定振幅での持続**: 振動が無制限に増大せず、一定の振幅に収束する
3. **特定周波数での振動**: 固有周波数で振動が持続する

このように、二階微分方程式とその非線形拡張は、耳鳴りの持続的な自励振動という本質的特性を適切に表現するための数学的フレームワークを提供する。これにより、耳鳴りのメカニズムの理解に貢献する。

目次

1. 自励振動としての耳鳴り
2. 耳鳴りの単純なモデル
3. 状態空間解析
   - 一階微分方程式モデルの限界
   - 状態空間解析の導入
   - 状態空間解析の利点
   - 耳鳴りへのに対する状態空間解析
4. 耳鳴りモデルの非線形化
5. クイズ
6. まとめ

クイズ

状態空間解析ではシステム行列 A の固有値を調べることで、系の安定性の判別と共振周波数を求めることができる。どのようにして求めることが説明せよ。

目次

Unit 13のまとめ

耳鳴りは、聴覚系のどこかで発生する自励振動によって説明される。自励振動は、外部からのエネルギー供給によって振動が持続する現象である。
耳鳴りのメカニズムを理解するためには、次の順序で説明を行った。

- 線形一階微分方程式を用いた安定判別
- 状態空間解析を用いた線形二階微分方程式の安定判別
- 非線形微分方程式を持ちた自励振動の説明

耳鳴りは非線形現象である。しかし、状態空間解析を用いて、線形モデルの安定性を調べることで、耳鳴りのメカニズムを理解することができる。