Last modified: March 28, 2025

講義名
福祉音響学

担当
村上 泰樹

連絡先
murakami@design.kyushu-u.ac.jp

Unit
8

1　この単元の目的

計算機で蝸牛モデルを解く際には、境界値問題を解くことが必要である。そのため、この単元では、境界値問題の解法を学ぶ。

境界値問題とは、微分方程式の解を求める際に、境界条件が与えられている問題である。

この単元では、以下の内容を学ぶ。

- 数値微分
- 有限差分法

これらの内容とこれまでにこれまでに学修したことを活用することで、蝸牛モデルの境界値問題を解くことができるようになる。

2　境界値問題

2.1　境界値問題とは

境界値問題とは、微分方程式の解を求める際に、境界条件が与えられている問題である。例えば、ある 1 次元空間を考える。この空間において、距離 x における関数 $f(x)$ が次の微分方程式を満たすとする（図 1)。

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x) = f(x) \tag{1}$$

ここで、変数 u の値を知りたい点 x_0 が区間 $[a, b]$ に含まれている。このとき、$u(x_0)$ を求める問題を境界値問題と呼ぶ。

2.2　境界条件

境界値問題では、境界条件が与えられている。境界条件とは、図 1 において、$x = a$ および $x = b$ において、u の値が与えられていることである。境界条件には、次の 3 つがある。Dirichlet 境界条件、Neumann 境界条件、および Robin 境界条件である。多くの場合は、Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件が用いられる。しかし、練成問題においては、Robin 境界条件が用いられることもある。

2.2.1　Dirichlet 境界条件（第 1 種境界条件）

関数値自体が境界上で指定される条件である。

$$u(a) = \alpha \tag{2}$$
$$u(b) = \beta \tag{3}$$

ここで α と β は与えられた定数である。

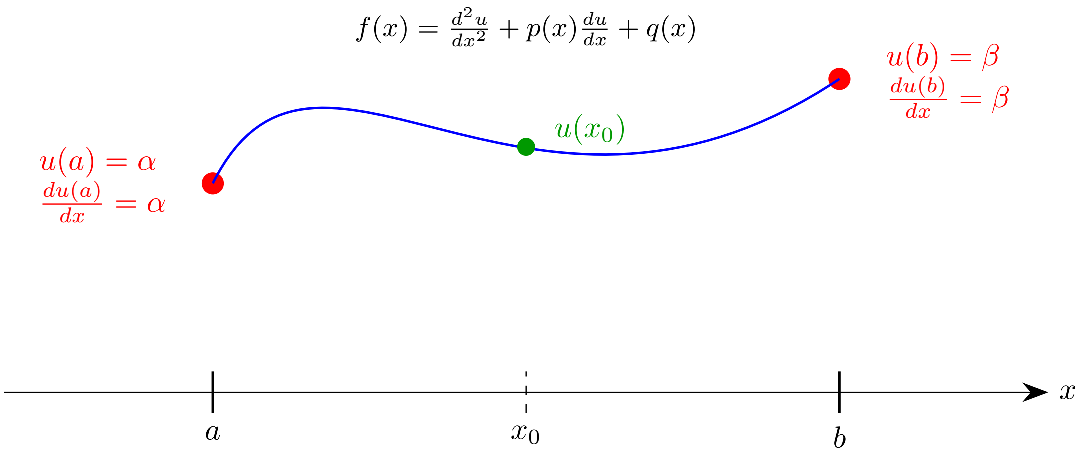

Fig. 1　Boundary value problem.

2.2.2　Neumann 境界条件（第 2 種境界条件）

関数の導関数（勾配）が境界上で指定される条件である。

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=a} = \gamma \tag{4}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=b} = \delta \tag{5}$$

ここで γ と δ は与えられた定数である。

2.2.3　Robin 境界条件（第 3 種境界条件または混合境界条件）

関数値とその導関数の線形結合が境界上で指定される条件である。

$$a_1 u(a) + b_1 \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=a} = c_1 \tag{6}$$

$$a_2 u(b) + b_2 \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=b} = c_2 \tag{7}$$

ここで $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ は与えられた定数である。

3　数値微分

Neumann 境界条件（第 2 種境界条件）と Robin 境界条件（第 3 種境界条件を数値的に求めるためには、数値微分を用いる。数値微分は、関数の導関数を数値的に求める手法である。ここでは、中心差分法を用いて数値微分を行う方法について説明する。

3.1　中心差分法

中心差分法とは、関数の導関数を数値的に求める手法である。関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めるためには、次の式を用いる。

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{8}$$

ここで、h は微小な値である。この式は、関数 $f(x)$ の x における導関数 $f'(x)$ を、x の前後の値を用いて求めるものである。この式を用いることで、関数の導関数を数値的に求めることができる。

注目すべきは、中心差分法では、分母に $2h$ が現れることである。導関数の定義は以下の通りである。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9}$$

計算機では、h を限りなく小さくすることはできないため、h を有限の値として計算する必要がある。この考えに従うと、数値微分として適切なのは

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{10}$$

であると言える。

3.2 クイズ 1

中心差分法は、$f(x)$ の前後の値を用いるため、$2h$ で除算を行なっている。なぜ、わざわざ大きな値で除算を行なっているのだろうか？

3.3 誤差解析

3.4 誤差の可視化

前方差分法（Forward Difference Method）と中心差分法（Central Difference Method）の誤差解析を行う。図**??**に、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めるために、前方差分法と中心差分法を用いたときの誤差を示す。刻み h が小さくなるほど誤差が小さくなるが、前方差分法は中心差分法よりも誤差が大きいことがわかる。また、刻みが小さくなりすぎると、丸め誤差が支配的になる。この影響で、刻みが小さすぎると誤差が大きくなる。このように、数値微分においては、刻みの選択が重要である。

4 数値微分における前方差分法と中心差分法の誤差解析

前方差分法（Forward Difference Method）と中心差分法（Central Difference Method）の誤差解析について詳細に説明する。

4.1 基本的な誤差特性

図 2 は、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めるために、前方差分法と中心差分法を用いたときの誤差を刻み幅 h の関数として示している。図から明らかなように、刻み幅 h が小さくなるほど両手法の誤差は減少するが、同じ刻み幅 h に対して前方差分法の誤差は中心差分法よりも大きい。これは理論的な誤差のオーダーの違いによるものである。

しかし、図 2 は両手法において、刻み幅 h が一定の閾値より小さくなると、誤差が再び増加する現象も示している。この現象は、コンピュータの浮動小数点演算における丸め誤差に起因する。数値微分における総誤差は、大きく分けて以下の二つの要素から構成される：

$$\text{Total Error} \approx \text{Truncation Error} + \text{Rounding Error} \approx C_1 h^p + \frac{C_2 \varepsilon}{h} \tag{11}$$

ここで、p は差分法の次数（前方差分法では $p=1$、中心差分法では $p=2$）、ε はマシンイプシロン（計算機の浮動小数点精度の限界）、C_1 と C_2 は定数である。刻み幅 h が小さい領域では、丸め誤差項 $\frac{C_2\varepsilon}{h}$ が支配的になる。丸め誤差は h に反比例するため、h が極端に小さくなると総誤差は増大する。

数値微分において、刻み幅 h の選択は結果の精度に直接影響する重要な要素である。刻み幅が大きすぎれば切断誤差が大きくなり、小さすぎれば丸め誤差が支配的になる。最適な刻み幅の選択により、最小の総誤差を達成することが可能である。

この分析は、数値計算において理論的な精度と計算機の制約のバランスを取ることの重要性を示している。実際の応用では、問題の性質や要求される精度に応じて、適切な差分法と刻み幅を選択することが肝要である。

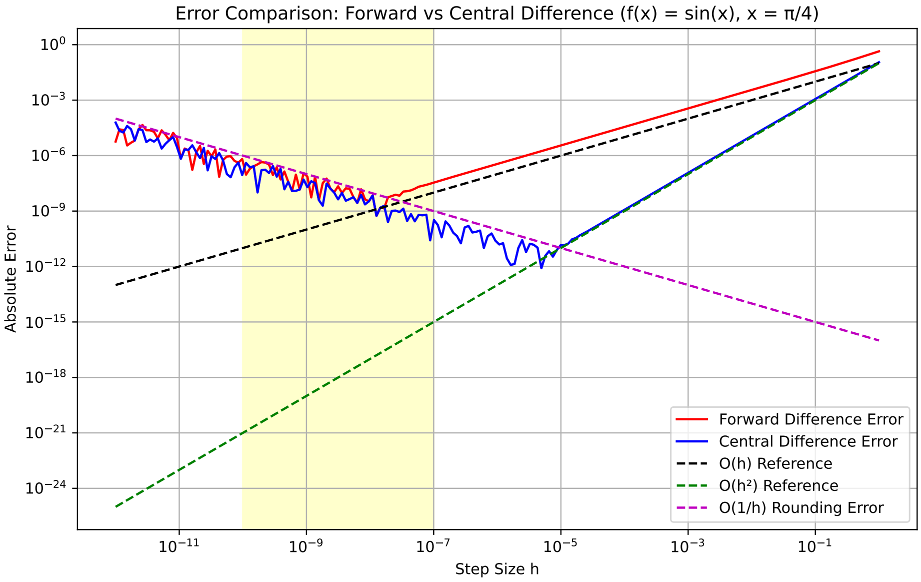

Fig. 2　Boundary value problem.

4.1.1　前方差分法（Forward Difference Method）

点 x における関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の前方差分近似は次式で与えられる：

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ここで $h > 0$ は差分のステップサイズである。
テイラー展開を用いると、$f(x+h)$ は次のように展開できる：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

これを前方差分の式に代入すると：

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + O(h^3)$$

したがって、前方差分の誤差項は $\frac{h}{2}f''(x) + O(h^2)$ であり、前方差分は $O(h)$ の精度（一次精度）を持つことがわかる。

4.2　中心差分法（Central Difference Method）

4.2.1　定式化

点 x における関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の中心差分近似は次式で与えられる：

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

4.2.2　誤差解析

同様にテイラー展開を用いると：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

これらの差を取ると：

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{6}f'''(x) + O(h^5)$$

したがって：

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

中心差分の誤差項は $\frac{h^2}{6}f'''(x)+O(h^4)$ であり、中心差分は $O(h^2)$ の精度（二次精度）を持つことがわかる。

4.3　ステップサイズ h の選択

数値微分における重要な考慮点は、ステップサイズ h の選択である。

- h が大きすぎると、近似誤差（切断誤差）が大きくなる。
- h が小さすぎると、浮動小数点演算における丸め誤差が支配的になる。

理論的には、ステップサイズ h と総誤差 E の関係は次のように表される：

$$E \approx C_1 h^p + \frac{C_2}{\epsilon} h^{-1}$$

ここで、p は差分法の次数、C_1 と C_2 は定数、ϵ は計算機のマシンイプシロンである。最適なステップサイズは、この総誤差を最小化する値となる。

4.4　比較

中心差分は前方差分と比較して、同じステップサイズでより高い精度が得られるため、効率的である。

微分方程式を数値的に解く際、差分法の安定性が重要な考慮点となる。中心差分は、ある種の問題（例えば放物型偏微分方程式）において不安定になる可能性がある。

前方差分は $O(h)$ の精度を持ち、中心差分は $O(h^2)$ の精度を持つ。誤差の観点からは、中心差分が前方差分よりも優れているが、境界条件や問題の性質によっては前方差分または他の差分スキームが適している場合もある。数値微分の選択は、精度要件、計算効率、および問題の特性を考慮して行うべきである。

5　有限差分法

5.1　有限差分法の基本原理

有限差分法（Finite Difference Method）は、微分方程式を差分方程式に変換し、数値的に解く手法である。有限差分法は、微分方程式の境界値問題を数値的に解くために広く用いられている。

1 次元蝸牛モデルでは、1 次元 Poisson 方程式に対して有限差分法を用いて解く。ここでは、Poisson 方程式が次の形式で与えられるとする。

$$\frac{d^2u}{dx} = -f(x) \tag{12}$$

二階微分の中心差分近似は次のように表される：

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{u(x+h) - u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{13}$$

1 次元ポアソン方程式 $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -f(x)$ を離散化すると、計算領域を等間隔 h の格子点に分割に分割する:

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \ (x_i = x_0 + i \cdot h) \tag{14}$$

各格子点での u の値を $u_0, u_1, \ldots, u_n$ と表す。
二階微分の差分近似を適用すると：

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -f(x_i) \tag{15}$$

これは次の線形方程式系に変形できる：

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -h^2 \cdot f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{16}$$

この方程式系は、未知数 u_i を求めるための連立方程式系であり、次の行列形式で表すことができる。

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b} \tag{17}$$

ここで、ベクトル $\mathbf{u}$ は未知数 u_i の値を格納するベクトルであり、ベクトル $\mathbf{b}$ は右辺項 $f(x_i)$ の値を格納するベクトルである。行列 $\mathbf{A}$ は境界条件によって異なる。
Dirichlet 境界条件の場合、u_0 と u_n が与えられている。そのため、u_0 と u_n を用いて、u_1 から u_{n-1} までの未知数を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) + u_0 \\ h^2 f(x_2) \\ h^2 f(x_3) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) + u_n \end{bmatrix} \tag{18}$$

Neumann 境界条件では、u_{-1} もしくは u_{n+1} の値が必要となる。しかし、これらの値は未知である。そのため、Neumann 境界条件を用いる場合は、境界条件を数値微分を用いて求める必要がある。

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=a} = \gamma \simeq \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} \tag{19}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=b} = \delta \simeq \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \tag{20}$$

これより、Neumann 境界条件を用いた場合の行列形式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2 f(x_0)}{2} + h\gamma \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \\ \frac{h^2 f(x_n)}{2} - h\delta \end{bmatrix} \tag{21}$$

6 クイズ 2

Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件によって式 18 と式 21 が与えられることを確認せよ。

7 Unit 8 のまとめ

この単元では、境界値問題の解法として、数値微分と有限差分法について学習した。これらの技術を用いることで、蝸牛モデルの境界値問題を次の流れで数値的に解くことができるようになる。

1. 与えられた方程式を、差分法を用いて離散化する。
2. 離散化した式を行列表現 $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ にする。
3. $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ を解いて、$\mathbf{u}$ を求める。