

講義名
福祉音響学

担当
村上 泰樹

連絡先
murakami@design.kyushu-u.ac.jp

Unit
9

1 この単元の目的

蝸牛が損傷を受けることで、感音難聴や耳鳴りの原因となります。この単元以降では、聴覚末梢系にある蝸牛の応答特性を数値シミュレーションを通じて理解していきます。

この単元の目的は、蝸牛を受動的かつ線形システムであるという仮定の元に、以下のプロセスを通じて蝸牛の応答特性を理解することです：

- 蝸牛モデルの構築
- モデルの離散化
- 数値計算法の実装
- シミュレーション結果の解析

これにより、聴覚の周波数選択性の基盤となる蝸牛の物理的特性を、工学的観点から理解することが可能となります。

2 蝸牛モデルの導出

2.1 蝸牛の力学の初歩

蝸牛（かぎゅう、cochlea）は内耳に位置する聴覚の末梢器官である。名前の通り、カタツムリの殻のような渦巻き状の構造をしている。聴覚系全体の流れとしては、外耳で集められた音波が、中耳の耳小骨（耳小骨連鎖：ツチ骨、キヌタ骨、アブミ骨）を介して蝸牛へと伝達される。

蝸牛は実質的に一本の管だが、内部は「蝸牛隔壁（Cochlear partition）」によって2つの空間に分けられている（図1）：

1. 前庭階（scala vestibuli）－ 上部の空間
2. 鼓室階（scala tympani）－ 下部の空間

これらの空間はどちらもリンパ液（外リンパ液）で満たされています。蝸牛隔壁の内部には複数の重要な構造がある：

- 基底膜（basilar membrane）－ 蝸牛隔壁の主要な構造要素
- コルチ器（organ of Corti）－ 聴覚受容器を含む感覚上皮
- 血管条（stria vascularis）－ 内リンパ液の生成に関わる
- 蓋膜（tectorial membrane）－ 有毛細胞の感覚毛と接触する膜

音波が蝸牛に入力されると、以下のプロセスが発生する：

1. アブミ骨（中耳の最後の骨）が卵円窓を通じて前庭階を押す
2. この動きにより、前庭階と鼓室階の間に圧力差が生じる
3. 圧力差により蝸牛隔壁（そして基底膜）が上下に振動する

基底膜の物理的特性は蝸牛の長さに沿って変化している (図 2) :

- 蝸牛基部 (入口側) – 基底膜は狭く硬い → 高周波数に共振
- 蝸牛尖部 (先端側) – 基底膜は幅広く柔らかい → 低周波数に共振

このため、入力された音の周波数に応じて基底膜の特定の位置が最大振幅で振動する。この特性により、蝸牛は音の周波数分析器として機能している。

音刺激により基底膜上に発生する振動は、単純な定在波ではなく、蝸牛基部から蝸牛尖部へと伝わる「進行波」になる。この進行波は特定の位置でピークを持ち、その後急速に減衰する (図 2)。

このメカニズムにより、蝸牛は複雑な音響信号を周波数成分ごとに分解し、それぞれの周波数成分に対応する位置の有毛細胞を刺激する。有毛細胞は機械的振動を電気信号に変換し、聴神経を介して脳へと情報を送る。

この周波数の場所的符号化 (tonotopic organization) は聴覚系全体に保持されており、蝸牛から聴覚皮質に至るまで、周波数に応じた空間的配置が維持されている。

蝸牛モデルは、蝸牛の機能をシミュレーションするための理論的フレームワークである。このモデルは主に 3 つの重要な要素から構成されている :

1. 蝸牛管内を流れる流体
 - 蝸牛は液体 (内リンパ液と外リンパ液) で満たされている
 - これらの流体は音波が耳に入ると振動し、波動として蝸牛内を伝播する
 - 流体力学の法則に従って動き、圧力変化を基底膜に伝える
2. 基底膜の振動
 - 基底膜は蝸牛内を縦に走る弾性のある構造物である
 - 周波数に応じて特定の場所が最大振幅で振動する「トノトピー (周波数局在性)」の特性を持つ
 - 基底部 (蝸牛の入口付近) は高周波音に、頂部 (蝸牛の奥) は低周波音に反応する
3. 流体と基底膜の相互作用
 - 流体の動きが基底膜を振動させ、逆に基底膜の振動が流体の動きに影響を与えるという双方向の関係がある
 - この相互作用により、受動的な機械的フィルタリングが行われる

このモデルは聴覚の周波数解析メカニズムを理解するための基礎となり発展してきた。現代の蝸牛モデルでは、能動的な増幅メカニズム (外有毛細胞のモーター機能など) も考慮に入れたより複雑なバージョンも開発されている。

2.2 蝸牛管の流体力学

蝸牛管内の流体挙動を数学的に表現するために、以下の仮定を設ける。

1. **2次元流れの仮定 :**
 - 3次元の複雑な蝸牛管を 2次元平面 (x - y 平面) 上のモデルに単純化する
 - x は蝸牛の長手方向 (入口から先端)、 y は上下方向を表す
2. **理想流体の仮定 :**

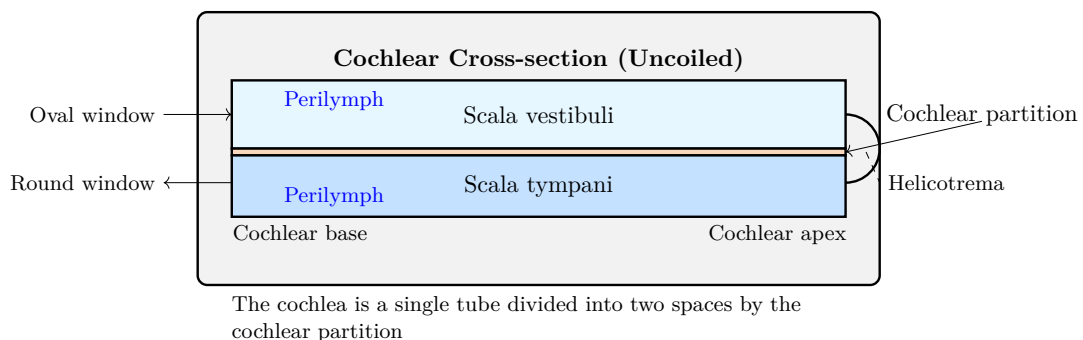
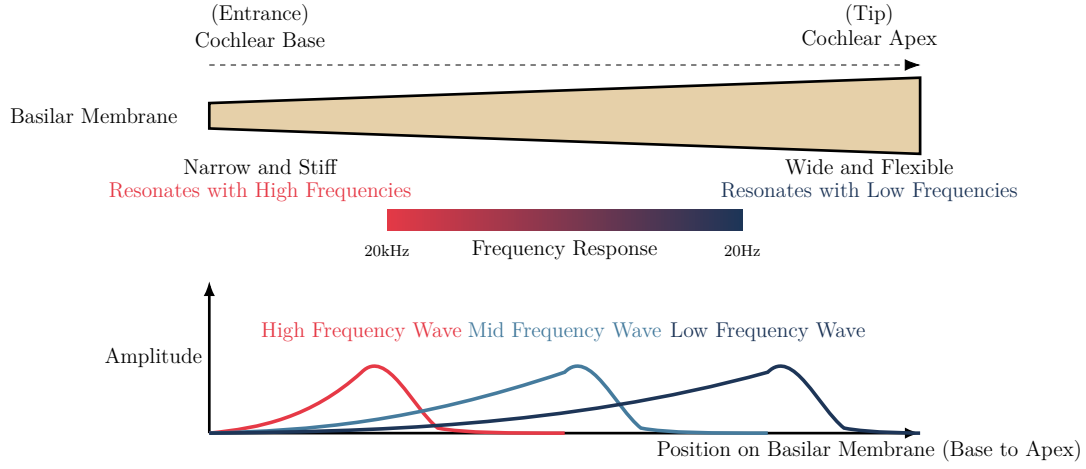


Fig. 1 Cochlear Structure.



* The traveling wave propagates from base to apex, peaks at a specific position corresponding to the frequency, and then rapidly attenuates

Fig. 2 Physical Properties of Basilar Membrane and Traveling Wave.

- 粘性がない（内部摩擦力が存在しない）
- 非圧縮性（密度が一定）
- 渦なし流れ

これらの仮定の下で、連続の式と運動方程式から、蝸牛管内の圧力 p に関する以下のラプラス方程式が導出される。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

この偏微分方程式は、流体の圧力場がどのように分布するかを表している。
この偏微分方程式を解くためには、蝸牛管の各境界における条件が必要である。

1. 蝸牛入口側の境界条件（ $x = 0$ での条件）：

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -2\rho \ddot{u}_s \quad (2)$$

ここで \ddot{u}_s はアブミ骨（中耳にある小さな骨）の加速度、 ρ は流体の密度である。圧力勾配がアブミ骨の加速度に比例する。

2. 蝸牛先端側の境界条件（ $x = L$ での条件）：

$$p|_{x=L} = 0 \quad (3)$$

蝸牛の先端では二つの空間（前庭階と鼓室階）が蝸牛孔を通じて繋がっているため圧力差がない。基準圧力を 0 としている。

3. 基底膜での境界条件（ $y = 0$ での条件）：

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 2\rho \ddot{w} \quad (4)$$

基底膜の位置での圧力勾配は基底膜の加速度 \ddot{w} に関連している。

4. 蝸牛管上壁での境界条件（ $y = H$ での条件）：

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=H} = 0 \quad (5)$$

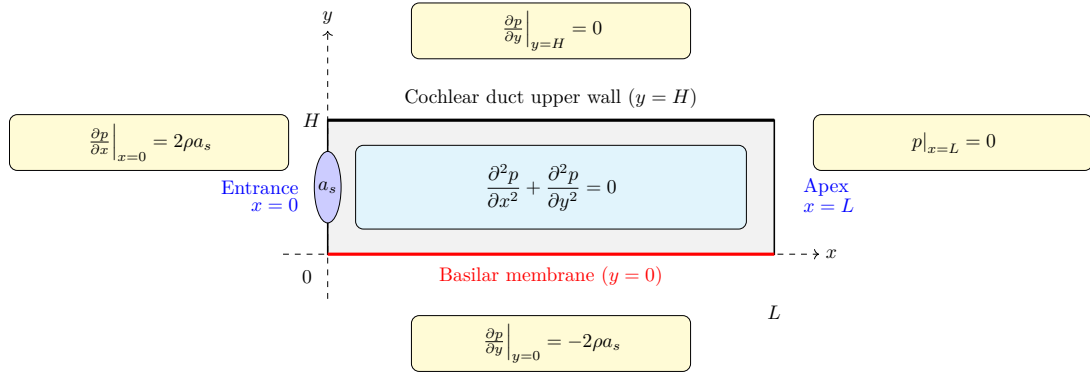


Fig. 3 Schematic diagram of the two-dimensional fluid model in the cochlear duct with boundary conditions.

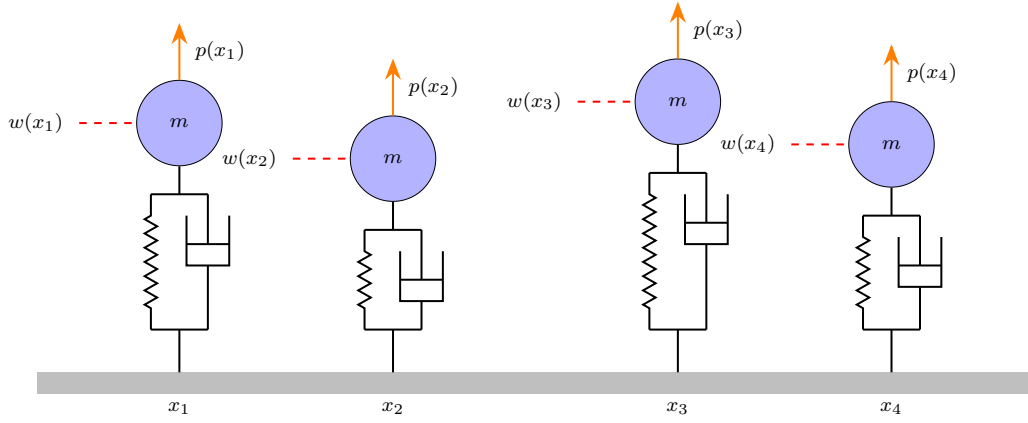


Fig. 4 Simplified model of the basilar membrane

蝸牛管の壁は剛体（変形しない）と仮定する。壁面では垂直方向の流速がゼロになるため、圧力勾配もゼロとなる。

このラプラス方程式と4つの境界条件を組み合わせることで、蝸牛管内の圧力分布を数学的に求めることができる（図3）。

2.3 基底膜モデル

基底膜を数学的に表現する際に簡略化を行う。実際の基底膜は2次元の板構造だが、モデルでは膜の長さ方向（長軸方向）の相互作用を無視し、各点が独立して振動すると仮定する。

基底膜の各位置 x に1自由度（上下方向のみに動く）のバネ-質量-ダンパー系が並んでおり、各位置の振動系は互いに独立している（図4）。

位置 x における基底膜の振動系の運動方程式：

$$m\ddot{w}(x) + c\dot{w}(x) + kw(x) = p(x) \quad (6)$$

- $w(x)$: 位置 x における基底膜の変位（上下方向の動き）
- $\dot{w}(x)$: 変位の時間に関する1階微分（速度）
- $\ddot{w}(x)$: 変位の時間に関する2階微分（加速度）
- m : 質量パラメータ
- c : 減衰係数（ダンパーの強さ）

- k : ばね定数（ばねの硬さ）
- $p(x)$: 位置 x に加わる外力（圧力）

2.4 流体の流れと基底膜の運動の相互作用

蝸牛管内の流れと基底膜の運動の相互作用を考えるために、式 7 の圧力 p に関するラプラス方程式を一部離散化する。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=L} - \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = 0 \quad (7)$$

境界条件を代入することで、蝸牛管と基底膜の運動の相互作用の式が得られる。

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{2\rho\ddot{w}}{H} = 0 \quad (8)$$

この方程式に対して、蝸牛の基部と先端部での式 6 を連立させ、境界条件を設定し、することで問題を解くことができる。これにより、流体（リンパ液）の運動と基底膜の振動が連成した系の挙動を解析することが可能になる。特に注目すべき点は、基底膜の加速度 \ddot{w} が流体の圧力分布に影響を与え、同時に流体の圧力 p が基底膜の運動を駆動するという双方向の相互作用が表現されていることである。

3 周波数領域解法

蝸牛モデルは、基底膜の振動方程式（式 6）と流体-構造連成の相互作用方程式（式 8）を連立させることで、圧力の分布 (p) と基底膜の運動の分布 (\ddot{w} , \dot{w} , w) を決定する。

このモデルにおける重要な問題点は、未知の変数が 4 つ (p , \ddot{w} , \dot{w} , w) 存在するのに対して、方程式は 2 つしか存在しないことである。そのため、一意的な解を得ることができない。

この問題を解決するために、フーリエ変換を導入する。フーリエ変換を適用することで、時間領域の問題を周波数領域に変換し、微分方程式を代数方程式に変換することができる。

この方程式をフーリエ変換するにあたり、 $\dot{w}(t)$ （速度）をフーリエ変換の基本変数として選択し、速度のフーリエ変換を $\dot{W}(\omega)$ とする。そして、以下の関係を用いる：

$$\ddot{w}(t) \leftrightarrow j\omega\dot{W}(\omega) \quad (9)$$

$$w(t) \leftrightarrow \frac{\dot{W}(\omega)}{j\omega} \quad (10)$$

ここでは、変数 j が虚数単位として使用する。これらの関係を式 6 に代入してフーリエ変換すると：

$$j\omega m \dot{W} + c \dot{W} + \frac{k}{j\omega} \dot{W} = P \quad (11)$$

ここで、 $\dot{W}(\omega)$ は速度 $\dot{w}(t)$ のフーリエ変換、 $P(\omega)$ は圧力 $p(t)$ のフーリエ変換である。この式を \dot{W} について解くと：

$$\dot{W} = \frac{P}{j\omega m + c + \frac{k}{j\omega}} \quad (12)$$

機械アドミッタンス $Y(\omega)$ を用いると、式 13 が得られる。

$$\dot{W} = Y \cdot P \quad (13)$$

蝸牛管内の圧力分布を表す方程式を得るために、式 6 を式 8 に代入する。

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \lambda^2 p = 0 \quad (14)$$

ただし、

$$\lambda^2 = \frac{2\rho j\omega Y}{H} \quad (15)$$

である。この関係式により、未知変数の数が実質的に減少し、系を解くことが可能になる。しかし、フーリエ変換を用いて周波数領域で解を求めるため、この方法には制限がある：

- 単一の周波数への応答しか計算することができない。すなわち、正弦波入力に対する応答のみが得られる。
- 非線形性を持つ系への適用が困難である。

しかし、聴覚系の周波数応答特性を調べる目的では、この周波数領域でのアプローチは非常に有効である。特に、特定の周波数の音に対する基底膜の応答パターンを解析する場合に適している。

4 蝸牛モデルの離散化

ここでは、連続的な微分方程式を、計算機で解くことのできる差分方程式に変換する。そのために、差分法を用いて式 14 の微分方程式を離散化する。

空間座標 x を離散化して、 $x_i = i \cdot \Delta x$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) の格子点を考える。ここで Δ は格子点間隔、 N は格子点の総数です。各格子点での圧力を $P_i = P(x_i)$ と表記する。

2 階微分項 $\frac{d^2 P}{dx^2}$ を中心差分法で近似すると：

$$\left. \frac{d^2 P}{dx^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta^2} \quad (16)$$

この近似を式 14 に代入すると、次の差分方程式が得られる。

$$P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1} - \lambda^2 \Delta^2 P_i = 0 \quad (17)$$

また、必要な境界条件は式 2 と 3 であるため、これらを適用する。差分方程式を行列形式でまとめる。

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (18)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 - \lambda^2 \Delta^2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 - \lambda^2 \Delta^2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda^2 \Delta^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 - \lambda^2 \Delta^2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 - \lambda^2 \Delta^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{u} = [P_1 \quad \cdots \quad P_N]^T \quad (20)$$

$$\mathbf{b} = [-4j\omega\rho\dot{U}_s\Delta \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \quad (21)$$

この線形方程式系を解くことで、蝸牛管内の圧力分布 P_1, P_2, \dots, P_N を求めることができる。そして、式 13 で表現される圧力と速度の関係式から基底膜の速度分布 \dot{W} を求める。

離散化を行う際には、以下の点に注意する。

- 数値安定性： Δ の選択によって数値解の安定性が影響を受ける。特に λ が大きい場合（高周波数など）は、より細かい格子が必要になる。
- 精度：中心差分法は $O(\Delta^2)$ の精度を持つ。より高い精度が必要な場合は、高次の差分スキームを使用することもできる。

Table 1 List of parameter values used in numerical simulation

| Symbol | Value | Unit | Description |
|--------|--|---|----------------------------------|
| L | $35 \cdot 10^{-3}$ | m | Duct length |
| H | 10^{-3} | m | Duct height |
| H_b | $7 \cdot 10^{-6}$ | m | Basilar membrane height |
| ρ | 1000 | $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ | Fluid density |
| m | ρH_b | $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$ | Mass per area |
| f_n | $165.4(10^{2.1*((L-x)/0.035)}) - 0.88$ | Hz | Human's frequency – position map |
| k | $m(2\pi f_n)^2$ | $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ | Stiffness per area |
| c | $2\pi f_n m Q_n^{-1}$ | $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ | Resistance per area |
| N | 1000 | – | Number of segments |

5 数値シミュレーションの結果

表 1 に示すパラメータは、内耳の蝸牛管を流体-構造連成系としてモデル化した数値シミュレーションに使用した値である。これらのパラメータはヒトの蝸牛管の物理的特性と基底膜の力学的特性を表現している。

基底膜の位置 x に対する共振周波数 f_n は、ヒトの聴覚特性を反映した Greenwood 関数を用いて設定した。この関数は蝸牛管の基部 ($x = 0$) から頂部 ($x = L$) にかけて、高周波数から低周波数へと指数関数的に変化する特性を持つ。具体的には、基底膜の位置 x における共振周波数 f_n は $165.4(10^{2.1*((L-x)/0.035)}) - 0.88$ Hz として計算される。この式により、蝸牛管の基部では高い周波数（約 20 kHz）に、頂部では低い周波数（約 20 Hz）に共振するという哺乳類の蝸牛に見られる特徴的な周波数配置（tonotopic organization）が再現される。

共振の鋭さは Q 値（Quality factor）によって決定される。Q 値は共振系のエネルギー損失の逆数に比例し、値が大きいほど共振ピークが鋭くなり、減衰が小さくなる。このモデルでは、Q 値を用いて基底膜の減衰特性を制御しており、これにより周波数選択性の精度が決まる。具体的には、Q 値は抵抗係数 c の計算に使用され、 $c = 2\pi f_n m Q_n^{-1}$ の関係式で表される。

蝸牛管の全長 L は 35 mm であり、ヒトの蝸牛の実際の長さに相当する。管の高さ H は 1 mm、基底膜の厚さ H_b は $7 \mu\text{m}$ としている。流体（内リンパ液および外リンパ液）の密度 ρ は水とほぼ同じである。

基底膜の単位面積あたりの質量 m は流体密度と基底膜の厚さの積 (ρH_b) として計算される。また、単位面積あたりの剛性 k は $m(2\pi f_n)^2$ として求められ、これにより各位置での固有振動数が決まる。シミュレーションの空間分解能は、蝸牛管を $N = 1000$ 個のセグメントに分割することで確保している。

表 1 に示したパラメータを用いて、蝸牛モデルを用いた数値シミュレーションを実施した。その結果を図 5 に示す。

このシミュレーションでは、Q 値を 3 に固定した条件下で、3 種類の異なる周波数（250 Hz、1000 Hz、4000 Hz）の正弦波を入力音として与え、それぞれの場合における基底膜の振動速度を計算した。Q 値を 3 に設定することで、生理学的に妥当な減衰特性を持つ基底膜の応答を再現している。

シミュレーション結果の振幅分布から、周波数に依存した特徴的な共振位置が明確に観察された。高周波の音（4000 Hz）に対しては蝸牛基部（基底膜の入口付近）で大きな振幅の共振が生じ、中程度の周波数（1000 Hz）では蝸牛の中間部分で、低周波（250 Hz）では蝸牛先端（頂部）側で最大振幅が現れている。これは各周波数に対応する特定の位置で基底膜が共振するという、蝸牛の周波数-位置対応（tonotopic organization）の原理を正確に再現している結果である。

また、位相の分析結果は基底膜振動の波動的性質を明示している。位相が基部から先端に向かって単調に減少していることから、基底膜上の振動が進行波として伝播していることが確認できる。

図??は、入力周波数を 1000 Hz に固定した状態で、Q 値を 3 から 30 まで変化させた場合の基底膜振動速度を示している。

Q 値を増加させると、基底膜振動の振幅特性に二つの顕著な変化が観察された。まず第一に、振幅のピーク形状が著しく鋭くなることが確認された。Q 値が 3 の場合には比較的なだらかな共振ピークが観察されるのに対し、Q 値が 30 に増加すると、共振ピークは非常に鋭く、周波数選択性が向上している。これは、Q 値の増加によってエネルギー損失が減少し、特定の周波数帯域に対する応答がより特異的になったことを示している。

第二に、Q 値の増加に伴い、振幅のピーク位置が蝸牛基部から先端側へと移動する現象が観察された。この

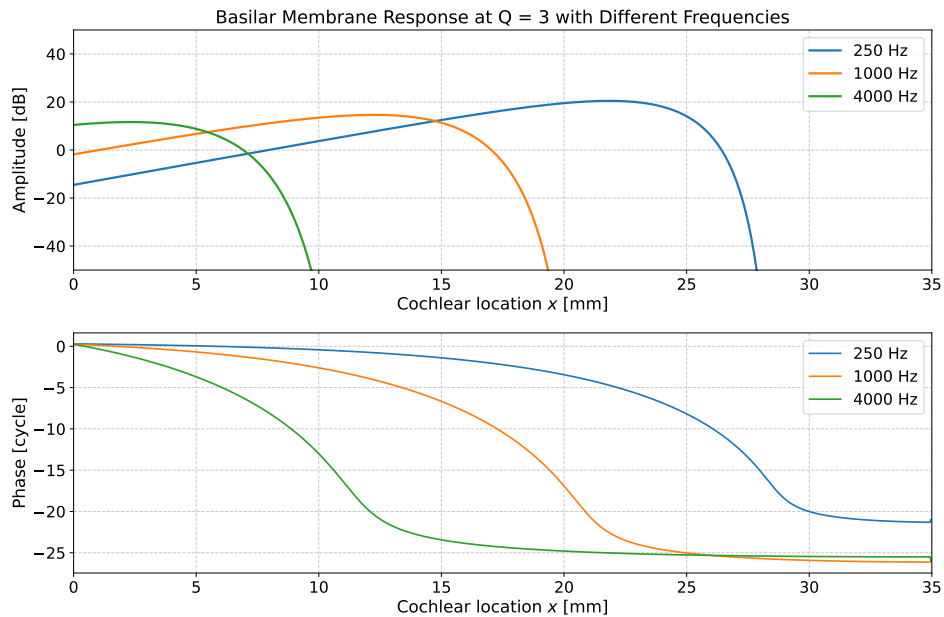


Fig. 5 Basilar membrane responses at $Q_n = 3$ for 250, 1000 and 4000 Hz tones

現象は、減衰係数の変化が基底膜の有効な剛性に影響を与え、結果として共振位置がシフトする。 Q 値が大きくなると振動系のエネルギー散逸が減少し、より低い周波数での共振が可能になるため、同じ入力周波数（1000 Hz）に対しても共振位置が蝸牛先端側（低周波領域）へと移動する。

6 クイズ

流体と基底膜の相互作用の式 8 から、次の問いに答えよ。

1. 差分法を用いて、差分方程式を導出せよ。
2. 境界条件を設定し、差分方程式を行列形式で表現せよ。

7 Unit 9 のまとめ

この単位では、蝸牛の力学を数理モデル化し、周波数分解メカニズムを理解するための理論的フレームワークについて学習した。

7.1 蝸牛の構造と機能

蝸牛は内耳に位置する聴覚の末梢器官で、カタツムリの殻のような渦巻き状の構造をしている。蝸牛隔壁によって前庭階と鼓室階の 2 つの空間に分けられ、両空間は外リンパ液で満たされている。音波が中耳のアブミ骨を通して蝸牛に伝わると、基底膜が振動する。

基底膜の物理的特性は蝸牛の長さに沿って変化しており：

- 蝸牛基部（入口側）：基底膜は狭く硬い → 高周波数に共振
- 蝸牛尖部（先端側）：基底膜は幅広く柔らかい → 低周波数に共振

この特性により、入力された音の周波数に応じて基底膜の特定の位置が最大振幅で振動する「トノトピー（周波数局在性）」が実現され、蝸牛は音の周波数分析器として機能する。

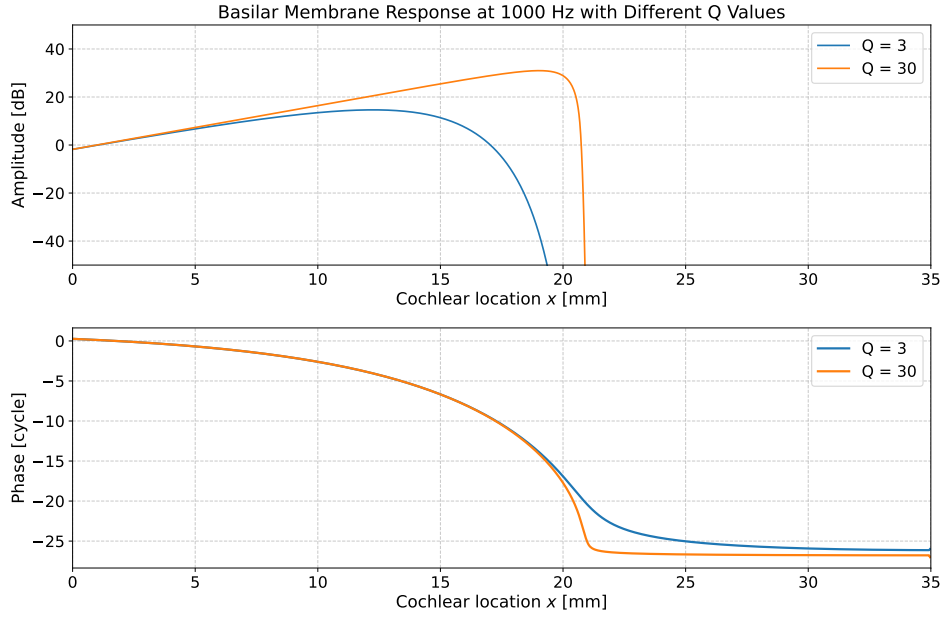


Fig. 6 Basilar membrane responses at $Q_n = 3$ and 30 for 1000 Hz tones

7.2 蝸牛モデルの構成要素

1. 蝸牛管内の流体力学（外リンパ液の運動）
2. 基底膜の振動特性（バネ-質量-ダンパー系としてモデル化）
3. 流体と基底膜の相互作用（流体-構造連成系）

7.3 数理モデル

蝸牛管内の流体の挙動はラプラス方程式で表現され：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

基底膜はバネ-質量-ダンパー系の運動方程式でモデル化される：

$$m\ddot{w}(x) + c\dot{w}(x) + kw(x) = p(x)$$

これらの方程式を連立させて周波数領域で解くことで、基底膜の振動パターンを計算することができる。

7.4 シミュレーション結果

数値シミュレーションでは、以下の重要な結果が得られた：

7.4.1 異なる周波数の音入力に対する基底膜の応答

- 高周波（4000 Hz）は蝸牛基部で最大振幅
- 中周波（1000 Hz）は蝸牛の中間部分で最大振幅
- 低周波（250 Hz）は蝸牛先端で最大振幅

これは蝸牛の周波数-位置対応（tonotopic organization）の原理を正確に再現している。

7.4.2 Q 値（共振の鋭さを表すパラメータ）の影響

- Q 値が大きくなると振幅のピーク形状が鋭くなり、周波数選択性が向上
- Q 値の増加に伴い、振幅のピーク位置が蝸牛基部から先端側へと移動

基底膜の振動は単なる定在波ではなく、蝸牛基部から先端へと伝わる進行波として伝播し、特定の位置でピークを持った後に急速に減衰する。このメカニズムにより、蝸牛は複雑な音響信号を周波数成分ごとに分解し、それぞれの周波数成分に対応する位置の感覚細胞を刺激する。