福祉音響学: Unit 6

担当: 村上 泰樹

E-mail: murakami@design.kyushu-u.ac.jp

2025 年 4 月 28 日

この単元の目的 1/3

本単元の目的は、数値計算の基礎となる「誤差」について学ぶことです。数値シミュレーションは「数値実験」とも呼ばれており、実際の実験と同様の位置づけにあります。科学技術実験を行う際には誤差の扱いが重要ですが、数値計算においても同様に誤差への理解が必要です。数値計算では主に二種類の誤差が発生します。一つは計算機の有限精度による誤差であり、もう一つは計算アルゴリズムに起因する誤差です。

この単元の目的 2/3

この単元では、計算機の有限精度に起因した誤差を適切に理解し、誤差を評価する方法を習得することを目指します。そうすることで数値計算の信頼性を高めることができます。また、数値計算や数値シミュレーションを行う際に避けられない誤差の問題に焦点を当て、それを理解・管理することで計算結果の精度と信頼性を向上させる方法を学ぶことを主眼としています。

この単元の目的 2/3

学習目的

1. 誤差の基本概念
2. 計算機における数値表現
3. 丸め誤差と桁落ち
4. 数値計算における実践的考慮

参考書

- 伊理正夫・藤野知建, 数値計算の基礎, 共立出版株式会社, 1985.

目次

数値計算の特性

- 計算機を用いて数値的な計算を行う手法
- 計算機の有限精度による誤差が発生する

数値シミュレーションの位置づけ

- 「数値実験」と呼ばれることもある
- 実験と同様の位置づけを持つ

誤差の比較

- 実験：測定器の精度や測定誤差が問題
- 数値計算：計算機の有限精度による誤差が問題

誤差の定義

ある量 x の測定値 a に見込まれる誤差を $\Delta a (> 0)$ であるとする。このとき、ix の値は $a \pm \Delta a$ の範囲にあると考える。Δa の値は、x の値がこの範囲にあると考えられる範囲である。

$$x \in (a - \Delta a) \tag{1}$$

もしくは、$x = a \pm \Delta a$ のように略記を用いて記述される。

誤差の定義

ここで、２つの量 x と y を考える。

$$x = a \pm \Delta a,\ y = b \pm \Delta b \tag{2}$$

このとき、x と y の関数として計算される量 z は、量 c と誤差 Δc を持つ。

$$z = c \pm \Delta c \tag{3}$$

誤差の伝播

量 z は、観測された２つの量 x と y の関数 f として計算されるとすると、量 c と誤差 Δc は次のように表される。

$$c = f(a, b),\ \Delta c = |f_x(a, b)|\,\Delta a + |f_y(a, b)|\,\Delta b \tag{4}$$

四則演算における誤差の伝播

数値計算で行う計算は、四則演算がほとんどである。故に、四則演算における誤差の伝播を考えることが重要である。

加減算における誤差の伝播

加減算における誤差の伝播について考える。量 z は、x と y の加減算によって計算されるとする。

$$z = x \pm y \tag{5}$$

このとき、z の誤差 Δc は、x と y の誤差 Δa と Δb によって次のように表される。

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b \; (\text{絶対誤差}) \tag{6}$$

負の符号が消えているが、これは量 Δc は誤差として含まれる量の最大値であるためである。

乗算と除算における誤差の伝播について考える。量 z は、x と y の乗算と除算によって計算されるとする。

$$z = x \cdot y,\ z = x/y \tag{7}$$

このとき、z の誤差 Δc は、真値 a 及び b、c と x と y の誤差 Δa と Δb によって次のように表される。

$$\left|\frac{\Delta c}{c}\right| = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| \text{ (相対誤差)} \tag{8}$$

目次

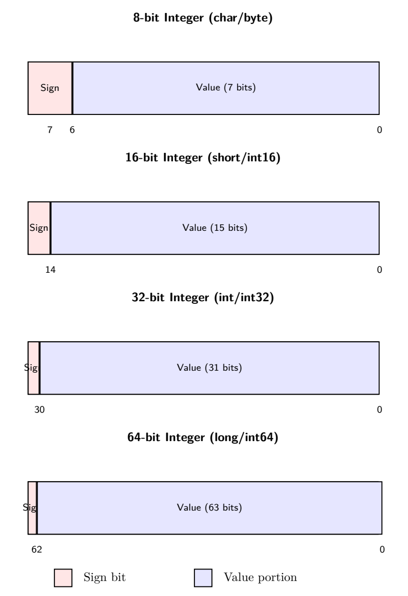
クイズ1

Pythonを用いて、以下の計算を行い、その結果を出力せよ。

1. 1を1000回足し合わせる計算
2. 0.1を1000回足し合わせる計算

目次

整数型



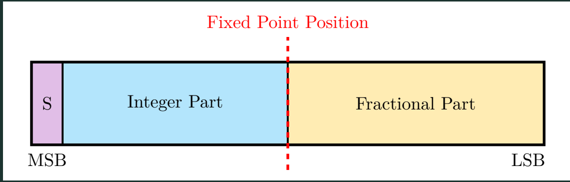
- 整数型の基本表現
  - 計算機のメモリ上で2進数として表現される
  - 符号付きと符号なしの2種類がある
- 現代の整数型表現
  - 64 ビット整数型が一般的
  - 2^{64} 個の整数を表現可能
  - 10 進数でおよそ 19 桁の整数を表現可能

実数型

実数型の表現方式

- 固定少数点数
- 浮動小数点数

実数型: 固定小数点



- 固定小数点数の基本特性
  - 小数点以下の桁数を固定して表現する
- 固定小数点数の制約と用途
  - 小数点以下の桁数を表現するためにビット数を増やす必要がある
  - DSP などの組み込みシステムで使用されることがある
  - 一般的な数値計算で使用する計算機では使用頻度が低い

実数型：浮動小数点

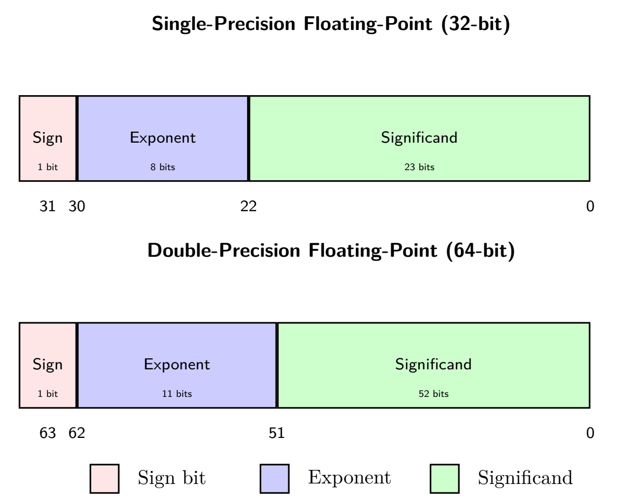


Figure: IEEE754 floating–point structure.

目次

1. 誤差
   数値計算における誤差と実験との類似性
   誤差の伝播
2. クイズ1
3. 数の表現
4. クイズ2
5. 桁落ちに気をつけよう
6. クイズ3
7. Unit 6のまとめ

クイズ2

単精度浮動小数点と倍精度浮動小数点の変数の有効桁数を求めよ。

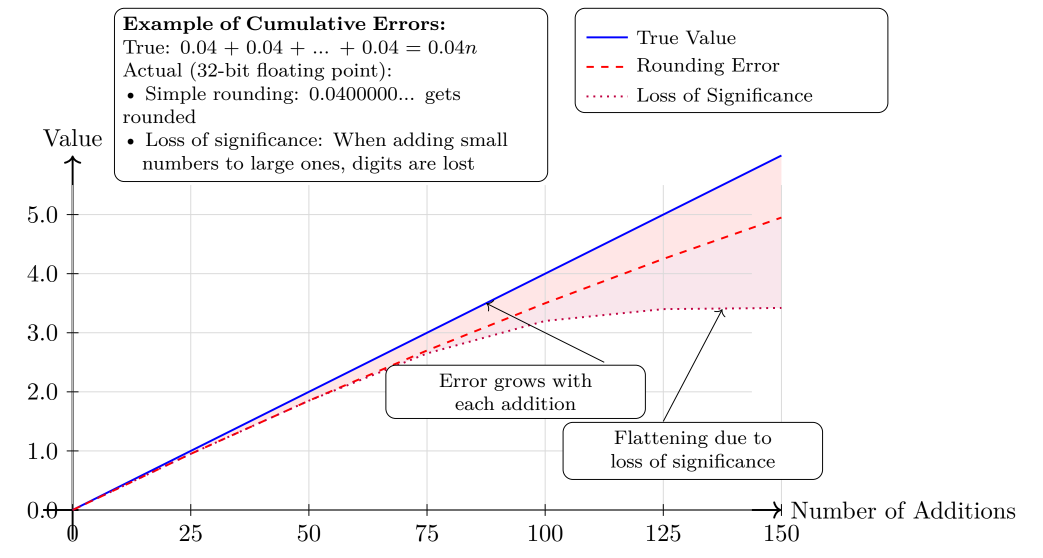
目次

1. 誤差
   - 数値計算における誤差と実験との類似性
   - 誤差の伝播
2. クイズ1
3. 数の表現
4. クイズ2
5. 桁落ちに気をつけよう
6. クイズ3
7. Unit 6のまとめ

丸め誤差

浮動小数点数など有限の桁数で実数を表現する際、表現できない桁は丸められる。
この過程で発生する理論上の値との差を丸め誤差と呼ぶ。
丸め誤差により、数値計算の結果は理論上の厳密解と異なる値になることがある。

誤差の伝播:丸め誤差と桁落ち



数値計算的に方程式の解を求める

方程式 $f(x) =$ を解くことは、数値計算的には「$f(x)$ が十分 0 に近くなるような x を求める」ということである。誤っても、$f(x)$ が 0 になる x を求めることはできない。例えば、

$$f(x) = x^3 - 15.70875x^2 + 61.69729x - 0.04844725 \tag{9}$$

この方程式の零点は以下の付近にある。

$$x \simeq 0.0007853982,\ 7.844763,\ 7.863201 \tag{10}$$

問題は、それぞれの零点の値を求めるとき、$f(x)$ の値をどこまで小さくすることで解くことができたのかということである。

解を求めるポイント

あまり厳しい条件を設定しても、計算中に発生する丸め誤差があるため条件を満足させることはできない。ここでは、丸め誤差の知識を利用して、大まかな見当をつけることが重要である。

丸め誤差の特性を利用した解の求め方

$x \simeq 0.00078$ の付近について検討する。それぞれの項の値を計算すると、次のようになる。

$$x^3 \simeq 4.8\times10^{-10},\ -15.70875\times x^2 \simeq -9.7\times10^{-6},\ 61.69729\times x \simeq 0.048 \tag{11}$$

ここで、計算を単精度浮動小数点数の条件で行うと、10 進 7 桁程度の有効数字で計算（四捨五入）される。このとき、各項で 10^{-16} 及び 10^{-11}、10^{-8} 程度の誤差が生じる。従って、$|f(x)|$ が 10^{-8} のオーダーになったならば、それ以上細かく x の値を調整しても、それに伴う $f(x)$ の値の変化には意味がない。

目次

クイズ3

式9について、$x \simeq 7.8\cdots$ の付近について検討せよ。

目次

Unit 6 のまとめ 1/2

数値計算は実際の実験と同様に「数値実験」と呼ばれており、計算結果の信頼性には誤差の理解が不可欠です。

1. 誤差の基本概念：
   - 絶対誤差と相対誤差の区別
   - 四則演算における誤差の伝播法則（加減算では絶対誤差、乗除算では相対誤差が重要）
2. 計算機における数値表現：
   - 整数型（符号付き・符号なし）と２の補数表現
   - 実数型（固定小数点・浮動小数点）の構造
   - IEEE754 規格による単精度・倍精度浮動小数点数の表現

Unit 6 のまとめ 2/2

3. 丸め誤差と桁落ち：
   - 浮動小数点数の有限桁数による丸め誤差の発生
   - 繰り返し計算による誤差の蓄積現象
   - 単精度と倍精度での有効桁数の違い
4. 数値計算における実践的考慮：
   - 方程式の解法における誤差の影響評価
   - 求める精度に応じた適切な計算方法の選択

実際の数値計算では、理論上の厳密解と計算結果の差を最小限に抑えるため、これらの誤差の性質を理解し、適切に対処することが重要です。このユニットで学んだ知識は、信頼性の高い数値シミュレーションを実施するための基礎となります。