

講義名
福祉音響学

担当
村上 泰樹

連絡先
murakami@design.kyushu-u.ac.jp

Unit
11

1 この単元の目的

これまでの単元では蝸牛モデルを周波数領域で解いてきた。しかし、周波数領域で解くことのできる問題は限られている。

周波数領域解法の課題：

- 入力は正弦波である必要がある。
- 非線形な系は扱えない。蝸牛は本来非線形な系である。

本単元では、時間領域で直接蝸牛モデルを解くために必要な解法を学ぶ。

2 微分方程式の初期値問題

2.1 初期値問題と境界値問題

蝸牛モデルは偏微分方程式で表される。

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{2\rho\ddot{v}}{H} = 0 \quad (1)$$

この方程式では、蝸牛管内の圧力が2つの変数（時間 t と空間 x ）によって変化することを記述している。ここで、空間座標 x は蝸牛管の長さに沿った位置を表している。

境界値問題とは、定義された境界条件のもとで偏微分方程式を解く問題である（図 1）。蝸牛モデルの場合：

- 境界 1：蝸牛管の入り口（ $x = 0$ ）
- 境界 2：蝸牛管の先端（ $x = L$ ）

これらの境界で成り立つべき条件（例えば、圧力の値や勾配など）が与えられ、その条件を満たす解を求める。境界値問題では、空間的な領域全体での解の振る舞いに焦点を当てる。

初期値問題は、ある時刻 t_0 における状態（初期条件）が与えられたときに、その後の時間発展を求める問題である（図 1）。蝸牛モデルの場合：

- 初期条件：時刻 $t = t_0$ における蝸牛管全体の圧力分布 $p(x, t_0)$

この初期条件から出発して、時間の経過とともに圧力がどのように変化するかを求める。初期値問題は時間的な発展に焦点を当てている。

これまでの単元では、初期値問題を解く代わりに、フーリエ変換を用いて時間領域から周波数領域へと方程式を変換する手法を学んだ。

フーリエ変換の利点：

1. 時間依存の偏微分方程式が、周波数依存の微分方程式に変換される
2. 各周波数成分ごとに独立に解くことができる
3. 初期値問題を解く複雑さを回避できる

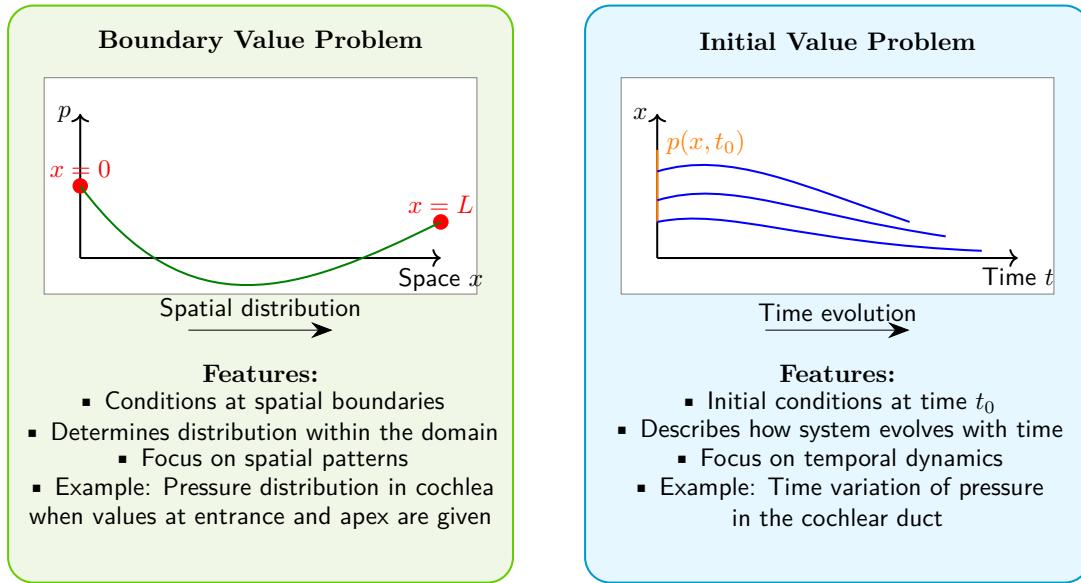


Fig. 1 Comparison of Boundary Value Problems and Initial Value Problems

2.2 初期値問題の例

ここでは、初期値問題の具体例として、次の 1 自由度の振動系を考える。1 自由度の振動系の運動方程式は次のとおり与えられる：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (2)$$

但し、

- m ：質量
- x ：変位
- t ：時間
- c ：減衰係数（粘性抵抗）
- k ：ばね定数
- $F(t)$ ：外力

である。

3 オイラー法

3.1 オイラー法の基本原理

オイラー法は微分方程式を離散化し、小さな時間ステップで解を前進させる手法である。その単純さから教育的価値が高く、より高度な数値解法の基礎となる。

微分方程式 $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ に対するオイラー法は以下のように表される：

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t), t) \Delta t \quad (3)$$

この式は、現在の状態 $x(t)$ から傾き $f(x(t), t)$ に基づいて次の状態 $x(t + \Delta t)$ を推定する。時間ステップ Δt が十分に小さいほど、近似精度は向上する。

3.2 オイラー法の精度と特性

オイラー法は前方差分に基づいており、1 次の精度を持つ。これは局所打ち切り誤差が $O(\Delta t^2)$ であることを意味し、全体の誤差は $O(\Delta t)$ になる。

理論的には、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、オイラー法の解は真の解に収束する。しかし実際には、計算コストとのバランスを考慮して適切なステップ幅を選ぶ必要がある。

オイラー法は時間が進むにつれて誤差が蓄積する傾向がある。ただし、安定な系（特に強い減衰がある場合）では、数値解が真の解に漸近する。

3.3 2 階微分方程式への適用

1 自由度振動系の運動方程式は一般的に 2 階微分方程式である。オイラー法は 1 階微分方程式に対する手法なので、この方程式を 1 階の連立微分方程式に変換する必要がある。これは状態ベクトル \mathbf{x} を導入することで実現できる：

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (4)$$

これにより、元の方程式は次の 1 階連立微分方程式に変換されます：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{1}{m}(F(t) - c\dot{x} - kx) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (5)$$

オイラー法を適用すると：

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)\Delta t \quad (6)$$

具体的には：

$$\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ \dot{x}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \frac{1}{m}(F(t) - c\dot{x}(t) - kx(t)) \end{pmatrix} \Delta t \quad (7)$$

3.4 計算上の考慮事項

オイラー法を実装する際には、以下の点に注意する必要があります：

1. **安定性:** 時間ステップ Δt が大きすぎると、解が不安定になり発散する。
2. **ステップ幅の選択:** 精度と計算効率のバランスを考慮して適切な Δt を選ぶ必要がある。

3.5 オイラー法の実装

実際にオイラー法を用いて、1 自由度の振動系の初期値問題を解いてみる。オイラー法から得られた数値解と解析解を図 2 に示す。それぞれの解法から得られた変位の波形を比較すると、どちらの解法も同様な波形を示していることがわかる。誤差を計算すると、オイラー法から得られた数値解は初期条件近傍では、誤差の値が大きくなるが、次第に誤差の値は収束している。

誤差評価をした結果を図 3 に示す。時間刻み Δt に依存している。刻みが大きいほど、誤差が大きくなることがわかる。オイラー法は 1 次精度を持つため、時間刻み Δt を半分にすると、誤差は 2 倍小さくなることが分かる。

4 修正オイラー法

4.1 修正オイラー法の基本原理

修正オイラー法は、標準的なオイラー法の精度を向上させた数値解法である。

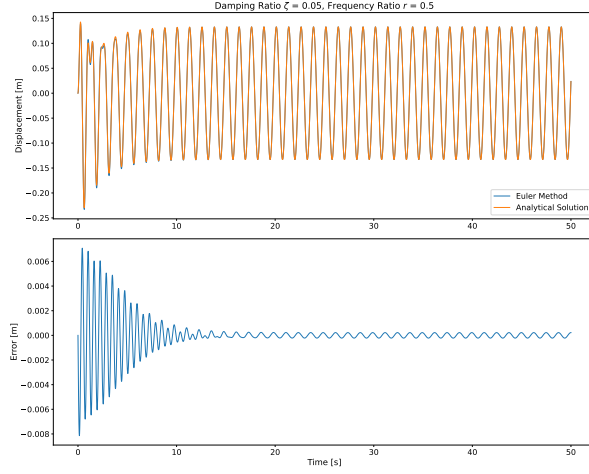


Fig. 2 Comparison of Euler method and analytical solution. Top panel shows the waveform of the displacement, while the bottom panel shows the numerical error. The Euler method is shown in blue, and the analytical solution is shown in orange.

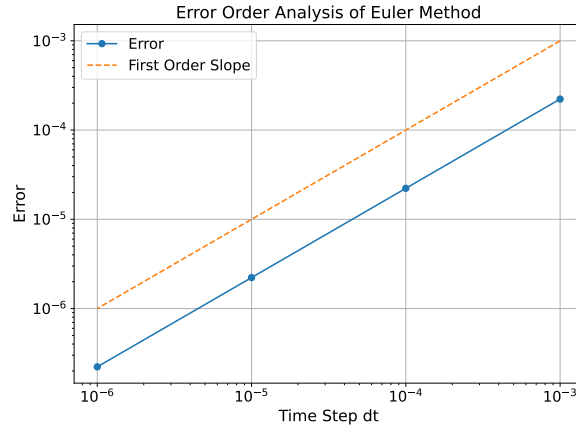


Fig. 3 Errors varying with time increments

修正オイラー法の基本的なアイデアは、次の 2 つのステップを組み合わせることである。

1. 予測ステップ (Predictor Step) : 標準的なオイラー法を使って、次の時点での値を予測する。

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t), t)\Delta t \quad (8)$$

2. 修正ステップ (Corrector Step) : 予測値を使って次の時点での傾きを評価し、初期の傾きと予測された傾きの平均を用いて値を修正する。

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{f(x(t), t) + f(\tilde{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{2} \Delta t \quad (9)$$

修正オイラー法は以下のように表される。

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t), t)\Delta t \quad (10)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{f(x(t), t) + f(\tilde{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{2} \Delta t \quad (11)$$

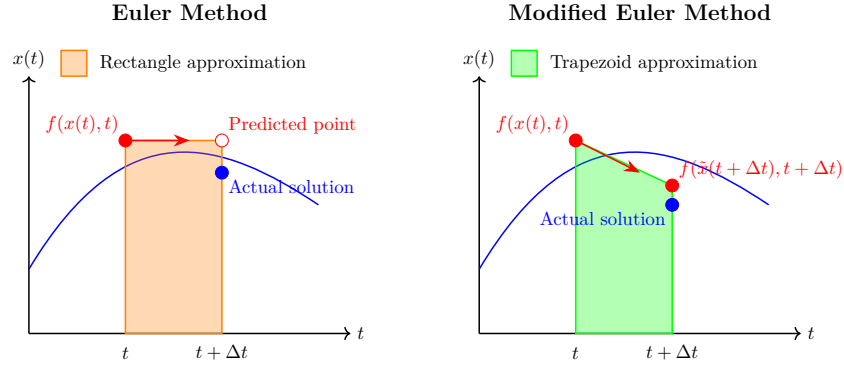


Fig. 4 Comparison of numerical integration methods over time step Δt . The left panel shows the Euler method using rectangle approximation, while the right panel shows the Modified Euler method using trapezoid approximation.

4.2 修正オイラー法の精度と特性

オイラー法と修正オイラー法は、数値積分の違いに基づいていると理解しやすい。図4は、オイラー法は矩形近似を使用し、修正オイラー法は台形近似を使用する様子を図示している。オイラー法は、数値積分の矩形近似を使用している ($f(x)\Delta$)。一方、修正オイラー法は、台形近似 ($\frac{f(x(t),t) + f(\tilde{x}(t+\Delta t),t+\Delta t)}{2} \Delta t$) を利用している。この違いが精度に影響する。

数学的に説明すると、微分方程式 $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ の真の解 $x(t)$ を考えると、テイラー展開により：

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} (\Delta t)^2 + O(\Delta t^3) \quad (12)$$

ここで $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ なので：

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t), t) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} (\Delta t)^2 + O(\Delta t^3) \quad (13)$$

次に、修正オイラー法の式を見てみる：

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t), t) \Delta t \quad (\text{予測ステップ}) \quad (14)$$

$$x_{ME}(t + \Delta t) = x(t) + \frac{f(x(t), t) + f(\tilde{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{2} \Delta t \quad (\text{修正ステップ}) \quad (15)$$

ここで、 $f(\tilde{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ を展開する必要がある。 $\tilde{x}(t + \Delta t)$ は予測値なので：

$$f(\tilde{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) = f(x(t) + f(x(t), t) \Delta t, t + \Delta t) \quad (16)$$

これを $f(x, t)$ のテイラー展開で近似すると：

$$f(\tilde{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \approx f(x(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x} f(x(t), t) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (17)$$

この式を修正オイラー法の式に代入する：

$$x_{ME}(t + \Delta t) = x(t) + \frac{f(x(t), t) + f(x(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x} f(x(t), t) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2)}{2} \Delta t \quad (18)$$

$$= x(t) + f(x(t), t) \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} f(x(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (\Delta t)^2 + O(\Delta t^3) \quad (19)$$

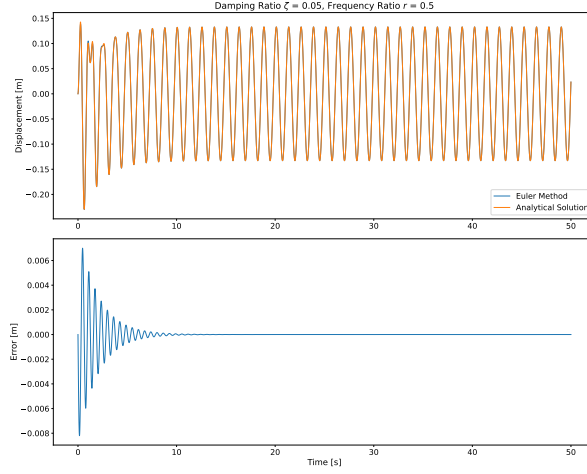


Fig. 5 Comparison of modified Euler method and analytical solution. Top panel shows the wave-form of the displacement, while the bottom panel shows the numerical error. The modified Euler method is shown in blue, and the analytical solution is shown in orange.

ここで、連鎖律により

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (20)$$

であることを考慮すると：

$$x_{ME}(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t), t)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2 + O(\Delta t^3) \quad (21)$$

これは真の解のテイラー展開と同じ形である。つまり、修正オイラー法は $O(\Delta t^3)$ の誤差項まで真の解と一致しており、局所的な誤差は $O(\Delta t^3)$ である。

積分のステップごとの誤差（局所誤差）が $O(\Delta t^3)$ であることから、全体の積分区間 $[t_0, T]$ での累積誤差（大域誤差）は $O(\Delta t^2)$ となる（ステップ数が $1/\Delta t$ に比例するため）。

従って、修正オイラー法は2次精度（ $O(\Delta t^2)$ ）であると言える。

この高い精度は、修正オイラー法が台形則を使用して積分を近似していることに起因している。台形則は線形関数に対して厳密な結果を与え、滑らかな関数に対しては $O(\Delta t^3)$ の局所誤差を持つ。

4.3 修正オイラー法の実装

修正オイラー法を用いて、1自由度の振動系の初期値問題を解いてみる。修正オイラー法から得られた数値解と解析解を図5に示す。それぞれの解法から得られた変位の波形を比較すると、どちらの解法も同様な波形を示していることがわかる。誤差を計算すると、修正オイラー法から得られた数値解は初期条件近傍では、誤差の値が大きくなるが、次第に誤差の値は収束している。この収束の様子をオイラー法と比較すると、修正オイラー法の方が収束が早いことがわかる。

誤差評価をした結果を図6に示す。時間刻み Δt に依存している。刻みが大きいほど、誤差が大きくなることがわかる。修正オイラー法は2次精度を持つため、時間刻み Δt を半分にすると、誤差は4倍小さくなることが分かる。

5 クイズ

実際の数値計算では、初期値問題を解くためには、Runge-Kutta法を用いることが多い。これは、オイラー法よりも高精度であり、計算コストも比較的低いからである。Runge-Kutta法について説明せよ。

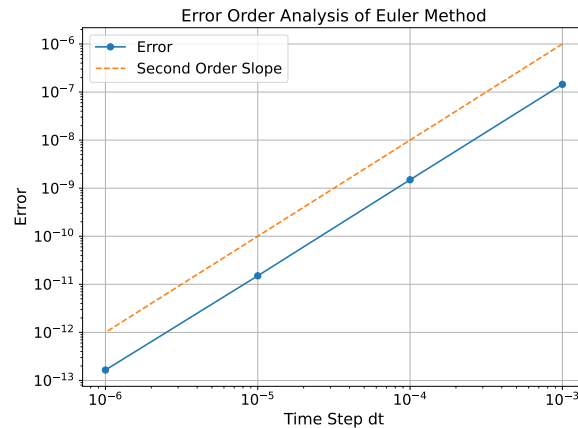


Fig. 6 Errors varying with time increments

6 Unit11 のまとめ

1. 導入：周波数領域での解法の限界（入力が正弦波のみ、非線形系を扱えない）と時間領域での解法の必要性
2. 微分方程式の初期値問題：
 - 境界値問題と初期値問題の概念比較
 - 蝸牛モデルを表す偏微分方程式： $\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{2\rho\ddot{w}}{H} = 0$
 - 一自由度振動系（ $m\frac{d^2 x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$ ）の例
3. オイラー法：
 - 基本原理： $x(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t), t)\Delta t$
 - 精度と特性：1次精度、局所誤差 $O(\Delta t^2)$ 、全体誤差 $O(\Delta t)$
 - 2階微分方程式への適用方法（状態ベクトル導入）
4. 修正オイラー法：
 - 予測ステップと修正ステップの2段階法
 - 精度と特性：2次精度、局所誤差 $O(\Delta t^3)$ 、全体誤差 $O(\Delta t^2)$
 - 矩形近似（オイラー法）と台形近似（修正オイラー法）の違い
 - テイラー展開による精度の理論的説明
5. 実装と誤差評価：
 - 両手法の誤差分析と時間ステップサイズによる影響
 - 時間ステップを半分にしたときの誤差の減少率（オイラー法：2倍、修正オイラー法：4倍）