1変数の確率密度の変換に関する問題である。

標準正規分布に従う確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

変換後のχ^2 分布に従う確率密度関数を、$f_Y(y)$ とする。

自由度1のカイ二乗分布は、標準正規分布に従う X に対する X^2 の分布であるので
$Y = X^2$ と置く。X について解くと

$$y = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

今回は $X > 0$ の場合のみを考えるので

$$x : 0 \to \infty$$

$$y : 0 \to \infty$$

よって

$$g^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

これを y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

ここで、確率密度の変換の公式を導出する。
全確率は1となるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$$

右辺を変形すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dx}{dy}dy$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dx}{dy}dy$$

この公式に$f_X(x)$ と $g^{-1}(y)$ 、x と y の範囲を代入し
$X > 0$ の場合のみを考えるため、確率密度を2倍にすると

$$\int_{0}^{\infty} f_Y(y)dy = 2\int_{0}^{\infty} f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

計算すると

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= 2 \cdot f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \\
&= f_X(\sqrt{y}) \cdot y^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}
\end{aligned}
$$

よって、χ^2 分布に従う確率密度関数は

$$
f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}
$$

と求まる。