# 微积分 B（2）练习题

## 题目

## 一、填空题

1．设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$__________，　$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,1)}=$__________.

2．设 $z=\ln(1+\mathrm{e}^{xy})$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=$__________，　$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}=$__________.

3．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y-z=\mathrm{e}^z$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$_________.

4．设函数 $z=f(x,y)$ 由 $\sin(xyz)+\ln(x^2+y^2+z)=0$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$__________.

5. 设函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $f(1,1)=1$，$f_u(1,1)=1$，$f_v(1,1)=2$ . 若 $z=f(x,f(x^2,x^2))$，

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$_________.

6．函数 $f(x,y)=xy$ 在点 $(1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{n}=(\dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5})$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,1)}=$_________.

7．函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的方向导数的最大值为__________.

8．函数 $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{n}=(\dfrac{\sqrt2}{2},0,\dfrac{\sqrt2}{2})$ 的方向导数

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}=$_________.

9．设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x^2+y-4)\mathbf{i}+3xy\,\mathbf{j}+(2xz+z^2)\mathbf{k}$，则 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}(1,0,-1)=$__________，

$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}(1,0,-1)=$__________.

10．曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的法线方程为_________.

11．曲面 $x^2+y+z-\mathrm{e}^z=0$ 在点 $(1,0,0)$ 处的切平面方程为_________.

12．曲线 $L:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应的点处的切线方程为__________.

13．若曲面 $z=x^2+2y^2$ 在点 $P$ 处的切平面平行于平面 $2x+4y-z=0$，则点 $P$ 的坐标为

__________.

14．曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为_________.

15．已知平面有界区域 $D$ 由直线 $x+y=1$， $x=0$ 及 $y=0$ 围成，则

$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

16．设函数 $f(x,y)$ 连续，将累次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序

得 $I=$_________.

17．设有界闭域 $\Omega$ 由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 围成，则 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$_________.

18．设 $D$ 是一个半径为 $a$ 的平面薄圆盘．若 $D$ 上每一点的面密度等于该点到圆心的距离，则 $D$ 的质量为________.

19．设曲线段 $L$ 是曲线 $y=\sqrt{x}$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的部分，则 $\int_L y\mathrm{d}l=$_________.

20．已知曲线 $L$: $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L (x+2y)^2\mathrm{d}l=$________.

21．设 $L$ 是曲线 $y=x^3$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的部分，则曲线积分 $\int_L y\mathrm{d}l=$________.

22．设 $\Sigma$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y+z)\mathrm{d}S=$_________.

23．已知曲面 $\Sigma$: $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 6)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{1+4z}\mathrm{d}S=$________.

24．设 $\Sigma$ 为单位球面 $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=$________.

25．设有向曲线 $L$: $|x|+|y|=1$ 的正向为逆时针方向，则 $\oint_L (xy+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=$________.

答案：2

26．设有向曲线 $L$ 的方程为 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，起点为 $(0,1)$，终点为 $(1,\mathrm{e})$，则 $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=$________.

27．已知有向曲线 $L$: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，逆时针方向为正，则 $\oint\limits_L y(x-1)\mathrm{d}x+x(y+1)\mathrm{d}y=$________.

28．设曲线 $L$: $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 的正方向是从 $z$ 轴的正向往原点看去为逆时针方向，则

$\oint_L (3z+y^2)\mathrm{d}x+(3x+z^2)\mathrm{d}y+(3y+x^2)\mathrm{d}z=$________.

29．设 $L$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\int\limits_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$_________.

30．设 $L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆

时针方向，则曲线积分$\int_L (1+y)\mathrm{d}x+(2+z)\mathrm{d}y+(3+x)\mathrm{d}z=$_________.

31．设$\Sigma$为曲面$x^2+y^2+4z^2=4$（$z \geqslant 0$）的上侧，则$\iint_{\Sigma} \sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$___________.

32．微分方程$x(1+y^2)\mathrm{d}x-y(4+x^2)\mathrm{d}y=0$的通解为_________.

33．微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=\mathrm{e}^3$的解为$y=$_________.

34．微分方程$y'-\dfrac{1}{x}y=x\mathrm{e}^x$的通解为$y=$_________.

35．二阶欧拉方程$x^2y''-2xy'=3$在区间$(0,+\infty)$上的通解为$y=$_________.

36．设$y_1=(1-x)\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=(2-x)\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=(\mathrm{e}^x-x)\mathrm{e}^{2x}$是微分方程$y''+ay'+by=f(x)$的三个解，则$a=$_________，$b=$_________，$f(x)=$_________.

37．全微分方程$(x+2y)\mathrm{d}x+(2x-y)\mathrm{d}y=0$的通解为________.

38．若连续函数$f(x)$满足方程$f(x)=x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$f(x)=$________.

39．微分方程$y'-\dfrac{3}{x}y+3\ln x=0$满足条件$y(1)=\dfrac{3}{4}$的解为$y=$ ________.

40．微分方程$x^2y''+2xy'-2y=0$的通解为$y=$________.

## 二、解答题

1．求函数$f(x,y,z)=xy+2yz$在约束条件$x^2+y^2+z^2=10$下的最大值和最小值.

2．设$g(x,y)$是函数$f(x,y)=x+2y+xy$在点$(x,y)$处的最大方向导数.

（1）求$g(x,y)$的表达式;

（2）求$g(x,y)$在曲线$C$：$x^2+y^2=5$上的最大值.

3．求函数$f(x,y)=x^2+y^2-5xy$在条件$x^2+y^2-xy=3$下的最大值和最小值.

4．已知$\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+4y^2+4z^2 \leqslant 100\}$，$f(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2$，求$f(x,y,z)$在$\Omega$上的最大值和最小值.

5．已知平面区域$D=\{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2 \leqslant 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint_D (x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6．已知$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}$，计算二重积分$I=\iint_D \left|x^2+y^2-2y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7．已知平面区域$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2y\}$，计算二重积分$\iint_D (x+y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8．已知有界闭域$\Omega$由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$围成，计算三重积分

9．求微分方程$y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$的通解.

10．求微分方程$y''+2y'+5y=17\sin 2x$的通解.

11．求欧拉方程$x^2y''+xy'-4y=x^2\ln x$的通解.

12．求欧拉方程$x^2y''-2xy'+2y=2x\ln x$满足条件$y(1)=y'(1)=0$的解.

13．已知有向曲线$L$的方程为$y=\dfrac{1}{2}x^2$，起点是$(0,0)$、终点是$(2,2)$，计算第二型曲线积分

$$I=\int_L x\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}y\ .$$

14．设$\varSigma$为曲面$z=x^2+y^2\ (z\leqslant 1)$的下侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\varSigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\ .$$

15．设有界闭域$\varOmega$由曲面$x^2+y^2-3z^2=0$与$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$围成，$\partial\varOmega$为$\varOmega$的边界面，外侧为正，计算曲面积分$I=\iint\limits_{\partial\varOmega}x(1+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z(1+x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

16．已知函数$f(x)$具有连续导数，且曲线积分$I=\int_L x(y+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+[xf(x)+yf(y)]\mathrm{d}y$在$\mathbf{R}^2$上与路径无关.

（1）求$f(x)$的表达式;

（2）计算曲线积分$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}x(y+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+[xf(x)+yf(y)]\mathrm{d}y$.

17．已知有向曲面$\Sigma$: $x^2+y^2+z^2=4z\ \ (z\leqslant 2)$，下侧为正，计算第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xy^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\ .$$

18．设曲线$L$: $\begin{cases}x+y+z=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$的正方向是从$z$轴的正向往原点看去为逆时针方向，计算曲线积分$I=\oint_L(\sin x+y^2\mathrm{z})\mathrm{d}x+(\sin y+xz)\mathrm{d}y+(\sin z+x^2y)\mathrm{d}z$.

19．已知有向曲面$\Sigma$: $x^2+y^2+z^2=1$，外侧为正，计算第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\ .$$

20．设函数$f(x,y,z)$具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial f}{\partial z}=2z$，$f(0,0,0)=0$．若向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x^2-2yz,\,y^2-2xz,\,f(x,y,z))$$

是保守场，求 $f(x,y,z)$ 的表达式，并计算 $\int_{L_0}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+f(x,y,z)\mathrm{d}z$，其中 $L_0$ 是从点 $(0,0,0)$ 到点 $(1,1,1)$ 的光滑曲线.

21．设函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$.

证明：函数 $g(x,y)=f(\mathrm{e}^{xy},x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值 $0$.

*22．已知函数 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\quad \forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

对任意 $r>0$，记 $\Gamma_r$ 为圆周 $x^2+y^2=r^2$，证明：$\oint_{\Gamma_r}u(x,y)\mathrm{d}l=2\pi r\,u(0,0)$.

*23．设 $a>0,\ b>0$，平面有界区域 $D$ 由曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ 与坐标轴围成，计算二重积分

$$\iint_D\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$