微积分 B（2）练习题

答案与参考解答

一、填空题

1．设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$ ________，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,1)}=$ ________.

答案：1，-1

2．设 $z=\ln(1+\mathrm{e}^{xy})$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=$ ________，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}=$ ________.

答案：0，$\dfrac{1}{2}$.

3．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y-z=\mathrm{e}^z$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________.

答案：$\dfrac{1}{2}$

4．设函数 $z=f(x,y)$ 由 $\sin(xyz)+\ln(x^2+y^2+z)=0$ 确定，则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=$ ________.

答案：$-2\mathrm{d}y$

5．设函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $f(1,1)=1$，$f_u(1,1)=1$，$f_v(1,1)=2$．若 $z=f(x,f(x^2,x^2))$，

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$ ________.

答案：13

6．函数 $f(x,y)=xy$ 在点 $(1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{n}=(\dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5})$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,1)}=$ ________.

答案：$\dfrac{3\sqrt5}{5}$

7．函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的方向导数的最大值为________.

答案：$\sqrt2$

8．函数 $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{n}=(\dfrac{\sqrt2}{2},0,\dfrac{\sqrt2}{2})$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}=$ ________.

答案：$2\sqrt2$

9．设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x^2+y-4)\mathbf{i}+3xy\,\mathbf{j}+(2xz+z^2)\mathbf{k}$，则 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}(1,0,-1)=$_________，

$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}(1,0,-1)=$_________.

答案：5，$2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

10．曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的法线方程为________.

答案：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$

11．曲面 $x^2+y+z-\mathrm{e}^z=0$ 在点 $(1,0,0)$ 处的切平面方程为________.

答案：$2x+y=2$

12．曲线 $L:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应的点处的切线方程为_________.

答案：$\begin{cases}y=1,\\ x+z=1.\end{cases}$

13．若曲面 $z=x^2+2y^2$ 在点 P 处的切平面平行于平面 $2x+4y-z=0$，则点 P 的坐标为

_________.

答案：$(1,1,3)$

14．曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为_________.

答案：$x+2y+3z=6$

15．已知平面有界区域 D 由直线 $x+y=1$，$x=0$ 及 $y=0$ 围成，则

$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

答案：$\dfrac{1}{3}$

16．设函数 $f(x,y)$ 连续，将累次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序

得 $I=$_________.

答案：$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x$

17．设有界闭域 $\varOmega$ 由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 围成，则 $\iiint\limits_{\varOmega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$_________.

答案：$\dfrac{\pi}{3}$

18．设 D 是一个半径为 a 的平面薄圆盘．若 D 上每一点的面密度等于该点到圆心的距离，

则 D 的质量为________.

答案：$\dfrac{2\pi a^3}{3}$

19．设曲线段 L 是曲线 $y=\sqrt{x}$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的部分，则 $\int_L y\mathrm{d}l=$________.

答案：$\dfrac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}}-5^{\frac{3}{2}})$

20．已知曲线 L: $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L (x+2y)^2\mathrm{d}l=$________.

答案：5π

21．设 L 是曲线 $y=x^3$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的部分，则曲线积分 $\int_L y\mathrm{d}l=$________.

答案：$\dfrac{10\sqrt{10}-1}{54}$

22．设 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y+z)\mathrm{d}S=$________.

答案：$\dfrac{4}{3}\pi$

23．已知曲面 Σ: $z=x^2+y^2\ (0\leqslant z\leqslant 6)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{1+4z}\mathrm{d}S=$________.

答案：2π

24．设 Σ 为单位球面 $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=$________.

答案：12π

25．设有向曲线 L: $|x|+|y|=1$ 的正向为逆时针方向，则 $\oint_L (xy+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=$________.

答案：2

26．设有向曲线 L 的方程为 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，起点为 $(0,1)$，终点为 $(1,\mathrm{e})$，则 $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=$________.

答案：$\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$

27．已知有向曲线 L: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，逆时针方向为正，则 $\oint\limits_L y(x-1)\mathrm{d}x+x(y+1)\mathrm{d}y=$________.

答案：4π

28．设曲线 L: $\begin{cases}x+2y+3z=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ 的正方向是从 z 轴的正向往原点看去为逆时针方向，则

$\oint_L (3z+y^2)\mathrm{d}x+(3x+z^2)\mathrm{d}y+(3y+x^2)\mathrm{d}z=$________.

答案：$\dfrac{52}{9}\pi$

29．设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\int_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$_________.

答案：π

30．设 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\int_L (1+y)\mathrm{d}x+(2+z)\mathrm{d}y+(3+x)\mathrm{d}z=$_________.

答案：$-3\sqrt{3}\pi$

31．设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4$ （$z\geqslant 0$）的上侧，则 $\iint_\Sigma \sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$___________.

答案：$\dfrac{32}{3}$

32．微分方程 $x(1+y^2)\mathrm{d}x-y(4+x^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解为_________.

答案：$1+y^2=C(4+x^2)$

33．微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的解为 $y=$_________.

答案：$x\mathrm{e}^{2x+1}$

34．微分方程 $y'-\dfrac{1}{x}y=x\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=$_________.

答案：$x(C+\mathrm{e}^x)$

35．二阶欧拉方程 $x^2y''-2xy'=3$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的通解为 $y=$_________.

答案：$y=C_1+C_2x^3-\ln x$

36．设 $y_1=(1-x)\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=(2-x)\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=(\mathrm{e}^x-x)\mathrm{e}^{2x}$ 是微分方程 $y''+ay'+by=f(x)$ 的三个解，则 $a=$_________，$b=$_________，　$f(x)=$_________.

答案：-5，6，e^{2x}

37．全微分方程 $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x-y)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

答案：$2xy+\dfrac{x^2-y^2}{2}=C$

38．若连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________.

答案：e^x-1

39．微分方程 $y'-\dfrac{3}{x}y+3\ln x=0$ 满足条件 $y(1)=\dfrac{3}{4}$ 的解为 $y=$ ________.

答案：$\frac{3}{2}x\ln x+\frac{3}{4}x$

40．微分方程 $x^2y''+2xy'-2y=0$ 的通解为 $y=$________.

答案：$C_1x+\frac{C_2}{x^2}$

二、解答题

1．求函数 $f(x,y,z)=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

解　设 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$.

令 $$\begin{cases} F_x'=y+2\lambda x=0, \\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0, \\ F_z'=2y+2\lambda z=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0, \end{cases}$$

得可能的最值点

$A(1,\sqrt{5},2),\ B(-1,\sqrt{5},-2)$，$C(1,-\sqrt{5},2),\ D(-1,-\sqrt{5},-2)$，$E(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}),F(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

因为在 A, D 两点处 $f=5\sqrt{5}$；在 B, C 两点处 $f=-5\sqrt{5}$；在 E,F 两点处 $f=0$，所以 $f(x,y,z)=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值分别是 $5\sqrt{5}$ 和 $-5\sqrt{5}$.

2．设 $g(x,y)$ 是函数 $f(x,y)=x+2y+xy$ 在点 (x,y) 处的最大方向导数.

（1）求 $g(x,y)$ 的表达式；

（2）求 $g(x,y)$ 在曲线 C：$x^2+y^2=5$ 上的最大值.

解　（1）因为 $\mathrm{grad}f(x,y)=(1+y,2+x)$，所以

$$g(x,y)=|\mathrm{grad}f(x,y)|=\sqrt{(2+x)^2+(1+y)^2}\ .$$

（2）求 $g(x,y)$ 在曲线 C 上的最大值等价于求 $(2+x)^2+(1+y)^2$ 在条件 $x^2+y^2=5$ 下的最大值.

令 $F(x,y,\lambda)=(2+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2-5)$，由

$$\begin{cases} L_x'=2(2+x)+2\lambda x=0, \\ L_y'=2(1+y)+2\lambda y=0, \\ L_\lambda'=x^2+y^2-5=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases}$

又 $g(2,1)=2\sqrt{5}$，$g(-2,-1)=0$，所以 $g(x,y)$ 在曲线 C 上的最大值为 $2\sqrt{5}$．

或：令 $x=\sqrt{5}\cos t,\ y=\sqrt{5}\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，记 $h(t)=g(\sqrt{5}\cos t,\sqrt{5}\sin t)$，则

$$h(t)=\sqrt{10+4\sqrt{5}\cos t+2\sqrt{5}\sin t}=\sqrt{10+10(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin t)}$$

$$=\sqrt{10+10\sin(t+\varphi_0)}\leqslant\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

3．求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-5xy$ 在条件 $x^2+y^2-xy=3$ 下的最大值和最小值.

解 设 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-5xy+\lambda(x^2+y^2-xy-3)$．

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(2+2\lambda)x=(5+\lambda)y,\\ (2+2\lambda)y=(5+\lambda)x,\\ x^2+y^2-xy=3.\end{cases}$ 由上述方程组中前两个方程可知 $x^2=y^2$．

当 x,y 同号时，由第三个方程得 $x^2=y^2=xy=3$，这时 $f(x,y)=-9$；

当 x,y 异号时，由第三个方程得 $x^2=y^2=-xy=1$，这时 $f(x,y)=7$．

所以，函数 $f(x,y)=x^2+y^2-5xy$ 在条件 $x^2+y^2-xy=3$ 下的最大值为 7，最小值为 -9．

注： 考虑 $L(x,y,\lambda)=3-4xy+\lambda(x^2+y^2-xy-3)$ 方法类似.

4．已知 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2+4z^2\leqslant 100\}$，$f(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2$，求 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=4y$，$\dfrac{\partial f}{\partial z}=8z$．

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $(x,y,z)=(0,0,0)$．

设 $L(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+4z^2+\lambda(x^2+4y^2+4z^2-100)$．

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x+2\lambda x=0,\\ 4y+8\lambda y=0,\\ 8z+8\lambda z=0,\\ x^2+4y^2+4z^2-100=0.\end{cases}$

解得 $P_1=(0,5,0),\ P_2=(0,-5,0)$，或 $L:\begin{cases} y=0, \\ x^2+4z^2=100. \end{cases}$

因为

$$f(0,0,0)=0\text{，}\quad f(0,5,0)=f(0,-5,0)=50\text{，}$$

且 $f(x,y,z)$ 在 L 上的值恒为 100，所以 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的最大值为 100，最小值为 0 .

5．已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D (x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

解　$I=\iint\limits_D (x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(r^2\cos^2\theta-3r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^6\theta-3\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^6\theta-3\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=8(4\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{\pi}{2}\ .$$

6．已知 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \left|x^2+y^2-2y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　记 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4,\ x^2+y^2\geqslant 2y\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2y\}$，则

$$I=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1\cup D_2}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r-2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}(r^2-2r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\ =8\pi+\pi=9\pi\ .$$

7．已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　$\iint\limits_D (x+y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x^2+y^2+2xy+2x+2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

因为 D 关于 y 轴对称，所以 $\iint\limits_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

D 的边界曲线在极坐标系下的方程为 $r=2\sin\theta\ \ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，所以

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^3\mathrm{d}r = 4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2},$$

$$\iint\limits_D 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\mathrm{d}r = \frac{16}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi .$$

又 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$，所以 $\iint\limits_D (x+y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi + \pi = \frac{9\pi}{2}$.

8．已知有界闭域 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成，计算三重积分

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

解　$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

因为 Ω 关于 xOz 和 yOz 坐标面对称，所以

$$\iiint\limits_{\Omega} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} 2xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} 2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 .$$

又因为

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^1 (r^2+z^2)r\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1\left[r^3(1-r)+\frac{1}{3}r(1-r^3)\right]\mathrm{d}r = \frac{3\pi}{10},$$

所以 $I = \frac{3\pi}{10}$.

9．求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

解　对应齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的两个特征根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$，其通解为

$$Y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} .$$

设原方程的特解形式为 $y^* = x(ax+b)\mathrm{e}^x$，则

$y^{*\prime} = [ax^2+(2a+b)x+b]\mathrm{e}^x$，　$y^{*\prime\prime} = [ax^2+(4a+b)x+2a+2b]\mathrm{e}^x$，

代入原方程解得

$$a=-1,\ b=-2,$$

故所求通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} - x(x+2)\mathrm{e}^x$.

10．求微分方程 $y''+2y'+5y=17\sin 2x$ 的通解.

解　齐次方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+5=0,$$

特征根为 $\lambda=-1+2\mathrm{i}$　和　$\lambda=-1-2\mathrm{i}$.

设方程 $y''+2y'+5y=17\sin 2x$ 的特解形式为

$$y^* = a\cos 2x + b\sin 2x .$$

则 $y^{*\prime} = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$， $y^{*\prime\prime} = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$.

将 $y^{*\prime}$， $y^{*\prime\prime}$ 的表达式代入方程 $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$，并整理得

$$(a+4b)\cos 2x + (b-4a)\sin 2x = 17\sin 2x ,$$

所以 $\begin{cases} a+4b=0, \\ b-4a=17. \end{cases}$ 解得 $a=-4,\ b=1$.

故 $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$ 的通解为

$$y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x - 4\cos 2x + \sin 2x .$$

11．求欧拉方程 $x^2y'' + xy' - 4y = x^2\ln x$ 的通解.

解 令 $x = e^t$，记 $y(x) = g(t)$，则原方程化作 $g'' - 4g = te^{2t}$.

齐次方程 $y'' - 4y = 0$ 的两个特征根为 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$，通解为 $g(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$.

设方程 $g'' - 4g = te^{2t}$ 的特解形式为 $g^* = t(at+b)e^{2t}$，

则 $g^{*\prime} = [2at^2 + (2a+2b)t + b]e^{2t}$， $g^{*\prime\prime} = [4at^2 + (8a+4b)t + 2a + 4b]e^{2t}$，

代入方程 $g'' - 4g = te^{2t}$，比较系数得 $\begin{cases} 8a=1, \\ 2a+4b=0. \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{8}, b=-\dfrac{1}{16}$.

故 $g'' - 4g = te^{2t}$ 的通解为 $g(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + \dfrac{t(2t-1)}{16}e^{2t}$.

欧拉方程 $x^2y'' + xy' - 4y = x^2\ln x$ 的通解为

$$y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{x^2}{16}(2\ln x - 1)\ln x .$$

12．求欧拉方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x\ln x$ 满足条件 $y(1) = y'(1) = 0$ 的解.

解 令 $x = e^t$，记 $g(t) = y(e^t)$，则原方程化作 $g'' - 3g' + 2g = 2te^t$.

齐次方程 $g'' - 3g' + 2g = 0$ 的两个特征根为 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 2$，通解为

$$g(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} .$$

设方程 $g'' - 3g' + 2g = 2te^t$ 的特解形式为 $g^* = t(at+b)e^t$，则

$$g^{*\prime} = [at^2 + (2a+b)t + b]e^t ,\quad g^{*\prime\prime} = [at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b]e^t .$$

将 g^*， $g^{*\prime}$ 和 $g^{*\prime\prime}$ 的表达式代入方程 $g'' - 3g' + 2g = 2te^t$，并整理得

$$-2at + 2a - b = 2t ,$$

所以 $\begin{cases} -2a=2, \\ 2a-b=0. \end{cases}$ 解得 $a=-1, b=-2$.

故 $g'' - 3g' + 2g = 2te^t$ 的通解为 $g(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} - (t^2+2t)e^t$.

欧拉方程$x^2y''-2xy'+2y=2x\ln x$的通解为

$$y=C_1x+C_2x^2-x(\ln^2 x+2\ln x).$$

由$y(1)=y'(1)=0$得$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\C_1+2C_2=2,\end{cases}$ 解得$C_1=-2$，$C_2=2$.

所以要求的解为$y=2x(x-1)-x(\ln^2 x+2\ln x)$.

13．已知有向曲线L的方程为$y=\frac{1}{2}x^2$，起点是$(0,0)$、终点是$(2,2)$，计算第二型曲线积分

$$I=\int_L x\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}y.$$

解 记$P(x,y)=x\ln(x^2+y^2+1)$，$Q(x,y)=y\ln(x^2+y^2+1)$，则

$$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(\mathbf{R}^2),$$

且$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{2xy}{x^2+y^2+1}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$，所以曲线积分$I=\int_L x\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}y$与路径无关．所以

$$\begin{aligned}I&=\int_L x\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}y\\&=\int_0^2 x\ln(x^2+0^2+1)\mathrm{d}x+\int_0^2 y\ln(2^2+y^2+1)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(x^2+1)-(x^2+1)]\Big|_0^2+\frac{1}{2}[(y^2+5)\ln(y^2+5)-(y^2+5)]\Big|_0^2\\&=\frac{1}{2}(5\ln 5-4)+\frac{1}{2}(9\ln 9-5\ln 5-4)\\&=9\ln 3-4.\end{aligned}$$

解法2： $$\begin{aligned}I&=\int_L x\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}y\\&=\int_0^2[x\ln(x^2+\frac{x^4}{4}+1)+\frac{x^2\cdot x}{2}\ln(x^2+\frac{x^4}{4}+1)]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^2(x^2+\frac{x^4}{4}+1)'\ln(x^2+\frac{x^4}{4}+1)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}[(x^2+\frac{x^4}{4}+1)\ln(x^2+\frac{x^4}{4}+1)-(x^2+\frac{x^4}{4}+1)]\Big|_0^2\\&=9\ln 3-4.\end{aligned}$$

14．设Σ为曲面$z=x^2+y^2\ (z\leqslant 1)$的下侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

解 设 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1 \end{cases}$ 所围部分的上侧，Σ_1 与 Σ 所围成的空间区域记为 Ω．则

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oiint_{\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &=\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(3r^2+7)r\mathrm{d}z \\ &=2\pi\int_0^1 r(1-r^2)(3r^2+7)\mathrm{d}r \\ &=4\pi,\end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

所以 $I=4\pi$．

解法 2

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &=-\iint_D[(x-1)^3(-2x)+(y-1)^3(-2y)+(x^2+y^2-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &=\iint_D[2x^4-6x^3+5x^2-2x+2y^4-6y^3+5y^2-2y+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &=\iint_D[2x^4+5x^2+2y^4+5y^2+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1[2r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)+5r^2+1]r\mathrm{d}r \\ &=\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)+\frac{7}{4}]\mathrm{d}\theta \\ &=\frac{7\pi}{2}+\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta \\ &=\frac{7\pi}{2}+\frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=4\pi.\end{aligned}$$

15．设有界闭域 Ω 由曲面 $x^2+y^2-3z^2=0$ 与 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界面，外侧为正，计算曲面积分 $I=\iint_{\partial\Omega}x(1+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z(1+x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$．

解 根据 Gauss 公式，得

$$I=\iint\limits_{\partial\Omega}x(1+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z(1+x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3+x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

因为Ω关于坐标面xOz和yOz都对称，所以

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\ ,\quad \iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\ .$$

所以$I=\iiint\limits_{\Omega}(3+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(3+r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(8\sin\varphi+4\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=16\pi(1-\frac{1}{2})+4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=11\pi\ .$$

另解 记$\sum_1:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$，上侧为正；$\sum_2:z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$，$(x,y)\in D$，下侧为正，其中$D=\{(x,y)\big|\,x^2+y^3\leqslant 3\}$.

因为

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}x(1+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z(1+x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_2}x(1+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z(1+x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\ ,$$

且

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x(1+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z(1+x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}[x(1+y)\cdot\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+y(1+\sqrt{4-x^2-y^2})\cdot\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+(1+x)\sqrt{4-x^2-y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}(\frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4r}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=8\pi+\frac{9\pi}{4}\ ,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}x(1+y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z(1+x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D}[x(1+y)\cdot(-\frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}})+y(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2})\cdot(-\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}})+(1+x)\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{1}{3}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{4}\ ,$$

所以$I=8\pi+\frac{9\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=11\pi$.

16．已知函数$f(x)$具有连续导数，且曲线积分$I=\int_L x(y+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+[x\,f(x)+y\,f(y)]\mathrm{d}y$在$\mathbf{R}^2$上

与路径无关.

（1）求 $f(x)$ 的表达式;

（2）计算曲线积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} x(y+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+[xf(x)+yf(y)]\mathrm{d}y$.

解 （1）记 $P(x,y)=x(y+1)\mathrm{e}^x$ ，$Q(x,y)=xf(x)+yf(y)$ ，由题意 $P(x,y),\ Q(x,y)\in C^1(\mathbf{R}^2)$ ，且 $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ ，所以 $[xf(x)]'=x\mathrm{e}^x$.

积分得 $xf(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}^x-C}{x}\right)$ 存在，所以 $C=1$.

故 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

（2）$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} x(y+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+[xf(x)+yf(y)]\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1[f(1)+yf(y)]\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1[f(1)+y\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^y+1]\mathrm{d}y$

$=2(x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\mathrm{e}^y\Big|_0^1+2=5-\mathrm{e}$.

17．已知有向曲面 Σ: $x^2+y^2+z^2=4z\ (z\leqslant2)$ ，下侧为正，计算第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xy^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y .$$

解 取 Σ_1 为平面 $z=2$ 上的闭圆盘 $x^2+y^2\leqslant4$ ，上侧为正．记 Ω 为 Σ 与 Σ_1 围成的半径为 2 的半球体.

根据 Gauss 公式，得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xy^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(2xy-2xy+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=16\pi .$$

又因为

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x^2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xy^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=6\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=24\pi ,$$

所以 $I=16\pi-24\pi=-8\pi$.

18．设曲线 L: $\begin{cases}x+y+z=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ 的正方向是从 z 轴的正向往原点看去为逆时针方向，计算曲线积分 $I=\oint_L(\sin x+y^2\mathrm{z})\mathrm{d}x+(\sin y+xz)\mathrm{d}y+(\sin z+x^2y)\mathrm{d}z$.

解 取Σ是平面$x+y+z=1$上以L为边界的有界区域，上侧为正.

设$D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$.

由 Stokes 公式及曲面积分与二重积分的关系，得

$$I=\oint_L(\sin x+y^2z)\mathrm{d}x+(\sin y+xz)\mathrm{d}y+(\sin z+x^2y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma(x^2-x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2xy)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-2yz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[(x^2-x)+(y^2-2xy)+(1-x-y)(1-2y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(1+x^2+3y^2-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为$\iint_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint_D 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$，且

$$\iint_D(x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\pi,$$

所以 $I=2\pi$.

19．已知有向曲面Σ: $x^2+y^2+z^2=1$，外侧为正，计算第二型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma(x^3+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

解 记$\Omega=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$. 根据高斯公式，得

$$I=\iint_\Sigma(x^3+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_\Omega(3x^2+1+x+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

因为Ω关于yOz坐标面对称，所以$\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

又因为$\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{4\pi}{3}$，

$$\iiint_\Omega 3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{5},$$

所以 $I=\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{32\pi}{15}$.

20．设函数$f(x,y,z)$具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial f}{\partial z}=2z$，$f(0,0,0)=0$. 若向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x^2-2yz,\,y^2-2xz,\,f(x,y,z))$$

是保守场，求$f(x,y,z)$的表达式，并计算$\int_{L_0}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+f(x,y,z)\mathrm{d}z$，其中$L_0$是从点$(0,0,0)$到点$(1,1,1)$的光滑曲线.

解 因为向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x^2-2yz,\,y^2-2xz,\,f(x,y,z))$是保守场，所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(x^2-2yz)}{\partial z}=-2y\text{，}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(y^2-2zx)}{\partial z}=-2x\text{.}$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}=-2y$ 得 $f=-2xy+u(y,z)$，所以 $\frac{\partial f}{\partial y}=-2x+\frac{\partial u}{\partial y}$.

又 $\frac{\partial f}{\partial y}=-2x$，所以 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$，即 $u(y,z)$ 只与 z 有关.

由题设知 $\frac{\partial f}{\partial z}=2z$，所以 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=2z$， $u=z^2+C$.

综上， $f(x,y,z)=z^2-2xy+C$.

由 $f(0,0,0)=0$ 知 $f(x,y,z)=z^2-2xy$.

取 $\varphi(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz$，则

$$\mathrm{d}\varphi(x,y,z)=(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+f(x,y,z)\mathrm{d}z\text{，}$$

所以 $\int_{L_0}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+f(x,y,z)\mathrm{d}z=\varphi(1,1,1)-\varphi(0,0,0)=-1$.

或：

$$\int_{L_0}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 y^2\mathrm{d}y+\int_0^1(z^2-2)\mathrm{d}z=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-2=-1\text{.}$$

21．设函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$.

证明：函数 $g(x,y)=f(\mathrm{e}^{xy},x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值 0 .

解　因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，所以 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

所以 $f(1,0)=0$， $f_x'(1,0)=-1$， $f_y'(1,0)=-1$.

因为

$$g_x'=f_1'(u,v)\cdot\mathrm{e}^{xy}y+f_2'(u,v)\cdot 2x\text{，}\quad g_y'=f_1'(u,v)\cdot\mathrm{e}^{xy}x+f_2'(u,v)\cdot 2y\text{，}$$

所以 $g_x'(0,0)=0$， $g_y'(0,0)=0$.

又

$$A=g_{xx}''(0,0)=2f_2'(1,0)=-2\text{，}\quad B=g_{xy}''(0,0)=f_1'(1,0)=-1\text{，}\quad C=g_{yy}''(0,0)=2f_2'(1,0)=-2\text{，}$$

所以 $AC-B^2>0$，且 $A<0$.

故 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值，极大值为 $g(0,0)=f(1,0)=0$.

*22．已知函数 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0\text{，}\ \forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2 .$$

对任意 $r>0$ ，记 Γ_r 为圆周 $x^2+y^2=r^2$ ，证明：$\oint\limits_{\Gamma_r}u(x,y)\mathrm{d}l=2\pi r\,u(0,0)$.

解 将 Γ_r 的方程写作参数形式，得 $\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=r\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，所以

$$\oint\limits_{\Gamma_r}u(x,y)\mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}u(r\cos t,r\sin t)\cdot r\mathrm{d}t$$

记 $f(r)=\int_0^{2\pi}u(r\cos t,r\sin t)\mathrm{d}t$ ，则 $\oint\limits_{\Gamma_r}u(x,y)\mathrm{d}l=rf(r)$.

因为函数 $u(x,y)$ 具有连续偏导数，所以函数 $f(r)$ 具有连续导数，且

$$f'(r)=\int_0^{2\pi}(\frac{\partial u}{\partial x}\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\sin t)\mathrm{d}t=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\right)r\mathrm{d}t=\frac{1}{r}\oint\limits_{\Gamma_r}\left(\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}l\text{，}$$

这里 $\boldsymbol{n}=(\cos t,\sin t)$ 是圆周 Γ_r 的外向单位法向量.

因为 $u(x,y)\in C^2$ ，根据 Green 公式的散度形式，得

$$\oint\limits_{\Gamma_r}\left(\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}l=\iint\limits_{D_r}\left[u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 .$$

所以 $f'(r)\equiv 0$ ，即 $f(r)$ 为常数函数.

根据 $f(r)$ 的定义及定积分积分中值定理，对任意的 r ，都存在 $\xi_r\in(0,2\pi)$ ，使得

$$f(r)=\int_0^{2\pi}u(r\cos t,r\sin t)\mathrm{d}t=2\pi\,u(r\cos\xi_r,r\sin\xi_r)\ .$$

因为 $f(r)$ 为常数函数，所以

$$f(r)=\lim_{r\to 0^+}f(r)=\lim_{r\to 0^+}2\pi\,u(r\cos\xi_r,r\sin\xi_r)=2\pi\,u(0,0)\ .$$

综上可知，$\oint\limits_{\Gamma_r}u(x,y)\mathrm{d}l=rf(r)=2\pi r\,u(0,0)$.

*23．设 $a>0,\ b>0$ ，平面有界区域 D 由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 与坐标轴围成，计算二重积分

$$\iint\limits_{D}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

解　令$\begin{cases} x = ra\cos^4 t, \\ y = rb\sin^4 t, \end{cases}$ 则 $D = \{(r,t) \mid 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1\}$.

因为$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(r,t)} = \begin{vmatrix} a\cos^4 t & -4ra\cos^3 t\sin t \\ b\sin^4 t & 4rb\sin^3 t\cos t \end{vmatrix} = 4abr\sin^3 t\cos^3 t$，所以

$$\iint_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \int_0^1 r^{\frac{3}{2}} \cdot 4abr\sin^3 t\cos^3 t\mathrm{d}r$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 r^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{8}{7}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{14}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2t\mathrm{d}2t$$

$$= \frac{1}{7}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u\mathrm{d}u = \frac{2}{21}ab.$$