微积分（2）

一． **填空题**（每个空 3 分，共 9 题 10 空）**（请将答案直接填写在横线上！）**

1. 函数 $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}$ 沿任意射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha(0\le t<+\infty)$ 的极限

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=$____________；

当 $x\to\infty, y\to\infty$ 时，$f(x,y)$ 是否为无穷小？____________（填"是"或"否"）。

答案：0，不是（$f(n,n^2)=n^2\mathrm{e}^{-(n^2-n^2)}\to+\infty, n\to+\infty$）

2. 设函数 $f(u,v)$ 连续可微，$z=f(xy,x-y)$，则 $\mathrm{d}z=$______________________。

答案：$\mathrm{d}z=(y\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v})\mathrm{d}x+(x\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})\mathrm{d}y$

3. 设 $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$v=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 Jacobi 矩阵的行列式 $\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}=$____________。

答案：$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{y^2}{r^3} & \frac{-xy}{r^3}\\ \frac{-xy}{r^3} & \frac{x^2}{r^3}\end{vmatrix}=0$。

4. 已知映射 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^v+u^3,\\ y=\mathrm{e}^u-v^3\end{cases}$ 有逆映射 $\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{cases}$，当 $(u,v)=(0,1)$ 时，$(x,y)=(\mathrm{e},0)$，

则偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{e},0)=$__________。

答案：$\frac{3}{\mathrm{e}}$。

5. 记函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在 $(1,0,1)$ 处的梯度方向为 $\mathbf{v}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}\right|_{(1,0,1)}=$____________。

答案：$\sqrt{5}$。

6. 设可微函数$u(x,y)$满足$u(x,x^2)=1$且$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)=x$，则$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)=$__________。

答案：$-\dfrac{1}{2}$。

7. 曲线$x=t,\ y=2\cos t,\ z=3\sin t$ 在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的切线方程为________________。

答案：$\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{0}$。

8. 曲面$z+\ln z=y+\ln x$在$(1,1,1)$点的切平面方程为____________________。

答案：$x+y-2z=0$。

9. 设$F(x,y)=\int_0^1\sin(xt)\mathrm{e}^{-4yt^2}\mathrm{d}t$，则$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0)=$ __________________。

答案： -1。

二. 解答题（共 8 题）**（请写出详细的计算过程和必要的根据！）**

10.（8 分）设$z=f(x,\dfrac{x}{y})$，其中$f\in\mathrm{C}^{(2)}(\mathbf{R}^2)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)$。

解：
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'(x,\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),\qquad\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[f_{12}''(x,\frac{x}{y})+f_{22}''(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}\right]\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_2'(x,\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right),\qquad\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

所以$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)=-\dfrac{f_2'(0,0)}{4}$。 ……2 分

11.（10 分） 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 回答以下问题，并说明理由。

（Ⅰ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

（Ⅱ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否存在偏导数？若存在，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$；

（Ⅲ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求在点 $(0,0)$ 处的全微分；

（Ⅳ）函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

解：（Ⅰ）因为 $|f(x,y)|\leq|xy|$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，因此 f 在点 $(0,0)$ 处连续。 ……2 分

（Ⅱ） $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点存在偏导数。 ……2 分

（Ⅲ） $$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

而 $\left|\dfrac{xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。 ……3 分

（Ⅳ） $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

沿 $y=x$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$不存在，所以函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；同理函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。 ……3 分

12.（13 分）求 $f(x,y)=xy^3-x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

解：连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭集 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上存在最大值和最小值。

……2 分

（1）在 $\mathring{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^3-1=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3xy^2=0,\end{cases}$$

解得驻点 $P_1(0,1)$。 ……2 分

但它不在 $\mathring{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内。 ……1 分

（2）在边界上，构造 $L=xy^3-x+\lambda(x^2+y^2-1)$， ……2 分

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y^3-1+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=3xy^2+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

解得条件极值的驻点 $P_2(1,0),P_3(-1,0),P_4(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}),P_5(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2})$， ……4 分

f 相应的值为 $-1,1,-\frac{9\sqrt{3}}{16},\frac{9\sqrt{3}}{16}$。

所以求 $f(x,y)=xy^3-x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值分别为

$f(-1,0)=1,f(1,0)=-1$。 ……2 分

13. （20 分）设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{3x}+y^3-3y\mathrm{e}^x$。

（Ⅰ）求 $f(x,y)$ 的所有驻点，并找出其中所有的极值点，并说明极值点的类型；

（Ⅱ）求 $f(x,y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式；

（Ⅲ）求隐函数形式曲线 $f(x,y)=3$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线和法线方程；

（Ⅳ）证明方程 $f(x,y)=3$ 在 $(0,-1)$ 点附近确定了一个隐函数 $x=x(y)$，并求 $x=x(y)$ 在 $y=-1$ 处的二阶 Taylor 多项式。

解：（I）由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\mathrm{e}^{3x}-3y\mathrm{e}^x=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3\mathrm{e}^x=0,\end{cases}$ 得到 $x=0$，$y=1$,， 这是 $f(x,y)$ 的唯一驻点。

……2 分

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=9\mathrm{e}^{3x}-3y\mathrm{e}^x\Big|_{(0,1)}=6,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1)=-3\mathrm{e}^x\Big|_{(0,1)}=-3,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)=6y\Big|_{(0,1)}=6,\end{cases}$$ ……3 分

而 $\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ 是正定矩阵， ……2 分

所以 $(0,1)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点。 ……2 分

（II） $f(x,y)=f(0,1)+\dfrac{1}{2}(x,y-1)H(0,1)\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix}+o(x^2+(y-1)^2),\quad (x,y)\to(0,1)$

$$=-1+3x^2-3x(y-1)+3(y-1)^2+o(x^2+(y-1)^2),\quad (x,y)\to(0,1)$$

所以 $f(x,y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式为 $-1+3x^2-3x(y-1)+3(y-1)^2$。

……2 分

(III) 因为$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1)=6,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)=0,\end{cases}$，所以切线方程为$6(x-0)+0(y-2)=0$，即 $x=0$。

法线方程为$y=-1$。 ……4 分

(IV) 记$F(x,y)=f(x,y)-3$，则$\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,-1)=6\neq 0$，所以$F(x,y)=0$在$(0,-1)$点附近

确定了一个隐函数$x=x(y)$。

$$\mathrm{e}^{3x(y)}+y^3-3y\mathrm{e}^{x(y)}-3\equiv 0,\forall y,$$

所以$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(-1)=0$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(-1)=1$， ……4 分

$x=x(y)$在$y=-1$处的二阶 Taylor 多项式为$\dfrac{1}{2}(y+1)^2$。 ……1 分

14.（8 分）设$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}x$，证明：$I(y)=\mathrm{e}^{-y^2}\int_0^y\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$。

解：因为

$$\int_0^{+\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\right]\right\}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\mathrm{d}x$$

关于y一致收敛， ……2 分

所以

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\mathrm{d}x$$ ……2 分

$$=-\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}x=1-2yI(y)$$ ……2 分

所以$I(y)=\left(C+\int_0^y\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-y^2}$。而$I(0)=0$，故$I(y)=\int_0^y\mathrm{e}^{t^2-y^2}\mathrm{d}t$。 ……2 分

15. (6 分) 设$D\subset\mathbf{R}^2$是非空有界闭区域，f是D上的连续函数。证明：至多只有

一个函数$u(x,y)$在D上连续，在D的内部$\overset{\circ}{D}$为$\mathrm{C}^{(2)}$类，且满足

$$\begin{cases} u''_{xx}+u''_{yy}=\mathrm{e}^u, & (x,y)\in \overset{\circ}{D} \\ u=f, & (x,y)\in \partial D \end{cases}$$

证明：假设上述边值问题存在两个不同的 $C^{(2)}$ 解 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$。则在 ∂D 上 $u(x,y)=v(x,y)$，并且函数 $u(x,y)-v(x,y)$ 在有界闭集 D 上有不为零的最值。不妨假设该最值为正，则该最值为最大值，且最大值点 $(x_0,y_0)\in \overset{\circ}{D}$，于是它是 $u(x,y)-v(x,y)$ 的极大值点。 ……3 分

在 (x_0,y_0) 处 $u(x,y)-v(x,y)$ 的 Hesse 矩阵半负定，而其对角线上元素的和为 $u''_{xx}-v''_{xx}+u''_{yy}-v''_{yy}=e^u-e^v>0$，但这与 Hesse 矩阵半负定矛盾。

所以上述边值问题至多只有一个 $C^{(2)}$ 解。 ……3 分

16. （5 分）设 K 是 $\mathbf{R}^k$ 的有界闭子集，函数 $f:\mathbf{R}^m\times K\to\mathbf{R}$ 连续，记 $g(\mathbf{x})=\min\limits_{\mathbf{y}\in K} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$。证明 $g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 连续。

证明： 证法一：

假设 g 在 x_0 处不连续，则存在 $x_n\in\mathbf{R}^m$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=g(x_0)$ 不成立。

存在 $y_n\in K$ 使得 $g(x_n)=f(x_n,y_n)$。通过取子列，不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=y_0$。

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)=f(x_0,y_0)$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=f(x_0,y_0)\ge g(x_0)$。

设 $g(x_0)=f(x_0,y^*)$。则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $|y-y^*|<\delta$ 时，$f(x,y)<f(x_0,y^*)+\varepsilon=g(x_0)+\varepsilon$，从而当 n 足够大时，$|x_n-x_0|<\delta$，

于是 $g(x_n)\le f(x_n,y^*)<g(x_0)+\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)\le g(x_0)+\varepsilon$。从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=g(x_0)$。

这与假设矛盾。所以 g 是连续函数。 ……5 分

证法二：固定 $x_0\in R^m$，令 $E=\overline{B(x_0,1)}\times K$，则 E 为有界闭集。

由于 f 连续，因此 f 在 E 上一致连续。从而 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,1)$ 使得

$\forall(x_1y_1),(x_2,y_2)\in E$，当 $\|(x_1y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta$ 时，均有 $|f(x_1y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$。特别地，

$\forall x\in B(x_0,\delta),\forall y\in R$，均有 $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$，即

$$f(x_0, y)-\varepsilon < f(x, y) < f(x_0, y)+\varepsilon$$。

对 y 取下确界，可得 $g(x_0)-\varepsilon \le g(x) \le g(x_0)+\varepsilon$，即 g 在 x_0 点连续。所以 $g:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ 连续。

注：本题做的学生不会多，请各位老师酌情给小分。