I-2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти длины проекций этих векторов друг на друга.

I-3. Дан вектор $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – взаимно перпендикулярные векторы, причем $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 3$. Найти углы между вектором $\vec{p}$ и

а). векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; б). векторами $\vec{a} + \vec{b}$, $-(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

I-4. При каком значении *t* данные векторы компланарны?

а). $\vec{a} = \{3, 6, 9\}$, $\vec{b} = \{2, 5, 8\}$, $\vec{c} = \{4, 7, t\}$;

б). $\vec{a} = \{5, 8, 11\}$, $\vec{b} = \{3, 5, 7\}$, $\vec{c} = \{1, t, 3\}$;

I-5. Даны три вектора: $\vec{a} = \{1,1,1\}$, $\vec{b} = \{5, -3, -3\}$, $\vec{c} = \{3, -1, 1\}$. Найти координаты векторов, коллинеарных вектору $\vec{c}$, длины которых равны длине вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

I-6. При каких значениях *a* вектор $\vec{m} = \{-11, 6, -5\}$ можно разложить по векторам $\vec{p} = \{a, 2, -1\}$ и $\vec{q} = \{8, 9, -4\}$?

I-7. При каком значении *a* вектор $\vec{m} = \{9, 1\}$ нельзя разложить по векторам $\vec{u} = \{2, 1\}$ и $\vec{v} = \{1, a\}$? Выполнить разложение при $a = 1$.

I-8. Параллелепипед построен на трёх некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найти площади его диагональных сечений и объем.

I-9. В кубической элементарной ячейке за базисные вектора выбираются $\vec{a}_x = \{1, 0, 0\}$, $\vec{a}_y = \{0, 1, 0\}$, $\vec{a}_z = \{0, 0, 1\}$. Найти:

а). площади диагональных сечений куба;

б). углы между базисными векторами и нормалями к диагональным поверхностям.

I-10. Показать, что $((\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} + \vec{a})) = 0$ – уравнение сферы. Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор, а $\vec{a}$ – постоянный вектор.

I-11. Доказать тождество Лагранжа:

$$([\vec{a}\times\vec{n}]\cdot[\vec{c}\times\vec{m}])=\begin{vmatrix}(\vec{a}\cdot\vec{c}) & (\vec{a}\cdot\vec{m})\\ (\vec{n}\cdot\vec{c}) & (\vec{n}\cdot\vec{m})\end{vmatrix}.$$

I-12. Доказать, что из равенства $[\vec{a}\times[\vec{p}\times\vec{r}]]=[[\vec{a}\times\vec{p}]\times\vec{r}]$ при $(\vec{a}\cdot\vec{p})\neq 0$ и $(\vec{p}\cdot\vec{r})\neq 0$ следует коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{r}$.

I-13. Доказать тождество Якоби:

$$[\vec{a}\times[\vec{b}\times\vec{c}]]+[\vec{c}\times[\vec{a}\times\vec{b}]]+[\vec{b}\times[\vec{c}\times\vec{a}]]=\vec{0}.$$

I-14. Найти компоненты матриц поворота системы координат на угол φ вокруг оси x и вокруг оси y. Записать матрицу обратного преобразования.

I-15. Доказать, что определитель матрицы поворота равен единице.

I-16. Показать, что единственным «изотропным» вектором (компоненты которого одинаковы во всех системах координат) является нулевой вектор.

I-17. В исходной декартовой системе координат известны компоненты вектора $\vec{a}$. Найти его компоненты в системе координат, повёрнутой относительно исходной на некоторый угол вокруг одной из осей:

а). $\vec{a}=\{1,\ 1,\sqrt{3}\}$, вокруг оси Ox на 30°;

б). $\vec{a}=\{0,\ 3,\sqrt{3}\}$, вокруг оси Ox на 120°;

в). $\vec{a}=\{2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$, вокруг оси Oy на 15°;

г). $\vec{a}=\{0,\ 4,-4\sqrt{2}\}$, вокруг оси Oy на 135°;

д). $\vec{a}=\{0,\ 1,\ 4\}$, вокруг оси Oz на 45°;

е). $\vec{a}=\{1,-\sqrt{3}, 0\}$, вокруг оси Oz на 120°.

I-18. В системе координат, полученной из исходной декартовой системы путем её поворота на некоторый угол вокруг одной из осей, известны компоненты вектора $\vec{a}'$. Найти его компоненты в исходной системе координат (до поворота):

а). $\vec{a}'=\{2, 0,-2\}$, вокруг оси Ox на 45°;

б). $\vec{a}' = \{\sqrt{2}, -1, 0\}$, вокруг оси Ox на 150°;

в). $\vec{a}' = \{0,\ 1,\ 2\}$, вокруг оси Oy на 60°;

г). $\vec{a}' = \{6, -\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$, вокруг оси Oy на 150°;

д). $\vec{a}' = \{\sqrt{3}/2, -1/2,\ 1\}$, вокруг оси Oz на 75°;

е). $\vec{a}' = \{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 3\}$, вокруг оси Oz на 135°.

I-19. В некоторой системе координат K известны компоненты вектора $\vec{a} = \{1, -1, 1\}$. В системе K', получающейся из K поворотом на угол 30° вокруг оси x, известны компоненты вектора $\vec{c}' = \{-1, 2, 2\}$. Найти скалярное произведение этих векторов.

I-20. Компоненты двух векторов заданы в различных системах координат следующим образом: при повороте системы координат K вокруг оси y на 30° $\vec{a}' = \left\{1, 1, \sqrt{3}\right\}$, а при повороте K вокруг оси z на 45° $\vec{b}'' = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\right\}$. Найти скалярное произведение этих векторов.

I-21. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если в системе K вектор $\vec{m} = \{2, 0, 2\}$, а второй вектор задан своими компонентами в системе координат, повернутой относительно K на 60° вокруг оси x: $\vec{n}' = \left\{1, -1, \sqrt{3}\right\}$.

I-22. Компоненты двух векторов заданы в различных системах координат следующим образом: при повороте системы координат K вокруг оси y на 60° (система K') $\vec{a}' = \left\{1, 0, \sqrt{3}\right\}$, а при повороте K вокруг оси z на 45° (система K'') $\vec{b}'' = \left\{0, -\sqrt{2}, 1\right\}$. Найти векторное произведение этих векторов. Будет ли его величина и направление зависеть от выбранной системы отсчета?