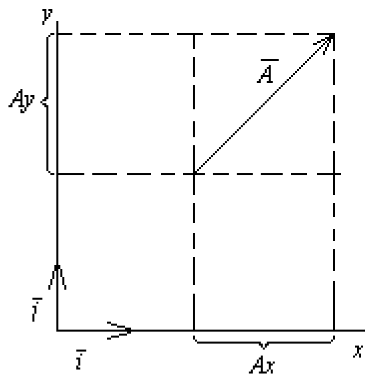
Общие определения и свойства векторов

Вектор- это геометрический объект, характеризуемый длиной и направлением. Визуально вектор можно представить как направленный отрезок.

Для задания произвольного вектора $\vec{A}$ нужно задать три числа, которые называются его проекциями или компонентами. В декартовой системе координат вектор $\vec{A}$ выражается через свои проекции $\{A_X, A_Y, A_Z\}$ следующим образом:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}.$$

Геометрический смысл проекции на рисунке:



Длина вектора $\vec{A}$ в декартовой системе координат равна:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

При переходе от одной декартовой системы координат (x,y,z) к другой (x`,y`,z`) вектор преобразуется: тройка чисел ($A_x$,$A_y$,$A_z$) переходит в новую тройку ($A`_x$,$A`_y$,$A`_z$). При этом преобразовании модуль или длина вектора $\vec{A}$ сохраняется:

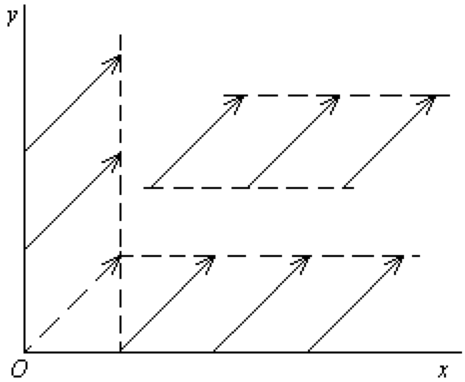
$$\left|\vec{A}\right| = \left|A`\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A_x^{`2} + A_y^{`2} + A_z^{`2}}.$$

<u>Равенство векторов</u>

Два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равны друг другу, если:

$$A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z.$$

С геометрической точки зрения два вектора равны друг другу, если они имеют одну и ту же длину и направлены в одну и ту же сторону. Данное определение означает, что существует бесконечное большое число векторов равных некоторому вектору $\vec{A}$. Рисунок, представленный ниже, отражает это свойство векторов.



Все вектора на этом рисунке равны друг другу.

Параллельный перенос векторов

Как показывает рисунок, при параллельном переносе величина вектора $\vec{A}$ не изменяется.

Векторные операции

Умножение вектора на скаляр

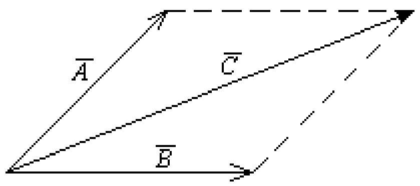
Операция $\vec{C} = \alpha\vec{A}$ называется умножением вектора на скаляр. При такой операции длина вектора увеличивается в α раз, а направление вектора сохраняется. В декартовой системе координат: $C_x = \alpha A_x, C_y = \alpha A_y, C = \alpha A_z$.

Сложение векторов

Суммой двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ является новый вектор $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B},$ у которого проекции равны суммам соответствующих проекций векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

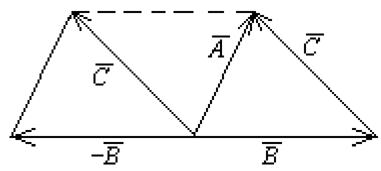
$$C_x = A_x + B_x,$$
$$C_y = A_y + B_y,$$
$$C_z = A_z + B_z.$$

Геометрическим представлением сложения векторов является правило параллелограмма.



Вычитание векторов

Вычитание двух векторов является операция обратная сложению: $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}, \vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B}) \Rightarrow \vec{C} + \vec{B} = \vec{A}.$



Геометрическим представлением вектора $\vec{C}$ является вектор, соединяющий конец вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$.

Скалярное произведение

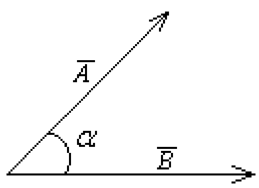
Из двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ можно образовать скалярное произведение:

$$C = \vec{A} \bullet \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Величина скалярного произведения равна:

$$C = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

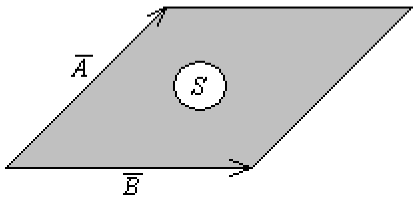
или $C = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\alpha,$ здесь α - угол между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$.



Векторное произведение

Операция векторного произведения из двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ образует новый вектор: $\vec{C} = \overline{A} \times \vec{B} = \left[\vec{A} \times \vec{B}\right]$.Модуль векторного произведения равен $|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin\alpha,$ здесь α -угол между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Геометрически модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$.



Направление векторного произведения определяется правилом правого винта: если головку винта вращать в плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ по кратчайшему направлению от вектора $\vec{A}$ к вектору $\vec{B}$, то направление хода винта укажет направление вектора $\vec{C}$. Из этого определения следует, что вектор $\vec{C}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Проекции вектора $\vec{C}$ определяются с помощью определителя:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Откуда следует, что:

$$\begin{cases} C_x = A_y B_z - A_z B_y, \\ C_y = A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z = A_x B_y - A_y B_z. \end{cases}$$

<u>Основные векторные тождества:</u>

$$[\vec{A} \times \vec{B}] = -[\vec{B} \times \vec{A}];$$

$$\left[\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]\right] = (\vec{A}\vec{C})B - (A\vec{B})\vec{C};$$

$$[\vec{A} \times \vec{B}] \circ [\vec{C} \times \vec{D}] = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}).$$