Качественные задачи-оценки по механике

Задачи-оценки – это задачи, в которых все необходимые физические величины студент должен задать сам. Для решения таких задач не требуется высшая математика, но зато необходимы уверенные знания основ механики и физическая интуиция. Решение задач-оценок в определенной степени воспроизводит творческий подход профессионалов-физиков при первичном анализе новых явлений. Поэтому эти задачи можно рассматривать как первую «пробу на зубок» для тех, кто хочет в будущем серьезно заниматься физикой. Ниже предлагается несколько задач-оценок. Три из них сопровождены поясняющими решениями, остальные предназначены для самостоятельной работы.

Задача 1

Оценить силу сопротивления воздуха, которую испытывает автомобиль при движении со скоростью *V*.

Разобьем задачу на ряд шагов.

Шаг первый. Надо дать ответ на вопрос: почему воздух препятствует движению? Ответ на него прямо связан с понятием силы и вторым законом Ньютона. По второму закону Ньютона сила:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

При постоянной скорости автомобиля его импульс не меняется, но сила сопротивления действует. Это означает, что должен меняться импульс набегающего на автомобиль воздуха. Ответим на вопрос: почему он меняется? При обтекании автомобиля воздух меняет свою скорость и направление движения. Это и приводит к изменению импульса. Теперь остается количественно описать это изменение.

Шаг второй. Перейдем к количественным оценкам силы сопротивления. Для этого представим второй закон Ньютона в виде отношения конечных приращений:

$$F_{сопр} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_1 - p_0}{\Delta t},$$

здесь p_1 – импульс воздуха после прохождения автомобиля;

p_O - импульс набегающего воздуха до прохождения; Δt- время обтекания. Предположим для простоты, что после взаимодействия с поверхностью автомобиля воздух остановился. Тогда:

$$F = -\frac{p_0}{\Delta t}.$$

Найдем величину импульса p_o набегающего воздуха, помня о том, что это воздух, который обтекает автомобиль за время. Δt. Очевидно, что это количество воздуха будет по величине близко к массе воздуха, который автомобиль вытеснит на своем пути. За время Δt автомобиль пройдет расстояние $v\Delta t$ и вытеснит воздух, который находится внутри объема ΔV, $\Delta V = vS\Delta t$, где S – поперечное сечение автомобиля. Масса этого набегающего воздуха будет равна:

$$\Delta M = \rho \Delta V = \rho v S \Delta t,$$

где ρ – плотность воздуха, а импульс:

$$\Delta p = \Delta M v = \rho v^2 S \Delta t.$$

Подставим полученное соотношение в выражение для силы и найдем оценочно силу сопротивления $F_{сопр}$:

$$F_{сопр} = -\frac{g v^2 S \Delta t}{\Delta t} = -g v^2 S.$$

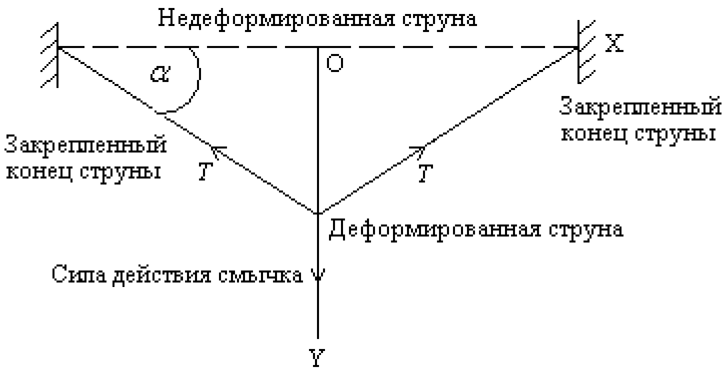
Шаг третий. Проанализируем полученное выражение. Основной вывод, который напрашивается, заключается в том, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Другой вывод связан с зависимостью силы сопротивления от площади поперечного сечения. Эта сила тем меньше, чем меньше поперечные габариты автомобилей. По этой причине спортивные болиды делаются приземистыми и обтекаемыми.

Задача 2

Оценить частоту звучания скрипичной струны и зависимость ее от натяжения и плотности материала.

Шаг первый. Выясним, почему «поет» струна. Ответ прост. Для этого достаточно понаблюдать «пение» струны и придти к заключению, что причиной «пения» является колебание струны: струна «поет», когда есть колебания, и «молчит», когда их нет. Теперь остается сделать следующий шаг – оценить частоту колебаний струны и связать ее с частотой звуковых волн, возбуждаемых этими колебаниями.

Шаг второй. Для приближенного нахождения частоты колебаний закрепленной струны следует построить простейшую модель деформации струны смычком. Предположим, что смычок касается струны в ее середине. При движении смычка за счет сил трения струна будет увлекаться за смычком и деформироваться. В результате деформации струна примет следующую форму:



$\vec{T}$ - сила натяжения струны.

Шаг третий. Поставим вопрос: насколько сильно может деформироваться струна? Ответ на этот вопрос связан с соотношением сил деформации и действия смычка. Последняя, при отсутствии проскальзывания смычка, есть не что иное, как сила трения покоя. Итак, одна сила может нарастать без особых ограничений, а другая имеет предел в виде силы трения скольжения. Что может произойти в этом случае? Конечно же, срыв струны. Причем, срыв произойдет тогда, когда параметр деформации струны y достигнет некоторого максимального значения $y_{\max}$.

Шаг четвертый. Найдем характерное время возвращения струны в равновесное положение, когда после срыва на нее действует только сила деформации. Для простоты оценок будем считать, что вся масса струны собрана в ее центре. Как видно из рисунка, на эту массу в направлении y будет действовать результирующая сила равновесия:

$$F_y = 2F \cdot \sin\alpha ,$$

здесь F – сила натяжения. Сделаем новое предположение относительно силы натяжения. Это предположение основано на реальной практике: струна «поет» тем лучше, чем сильней она натянута изначально. С учетом того, что амплитуда колебаний мала (смещение струны скрипки трудно заметить невооруженным глазом), делаем другое предположение: при деформации струны сила натяжения возрастает, но ее величина остается близкой к величине начальной силы натяжения. Сказанное означает, что при деформации струны силу натяжения можно считать постоянной, а угол α настолько малым, что $tg\alpha \cong \sin\alpha \cong \alpha$.

Теперь мы обладаем необходимой информацией, чтобы рассчитать время возвращения струны в положение равновесия.

$$F_y = 2F\sin\alpha = 2F\,\frac{2y}{l} = 4F\,\frac{y}{l}$$

$$a = \frac{F_y}{m} = \frac{4F_y}{\eta l^2}$$

$$a_{cp} = \frac{2Fy_{\max}}{\eta l^2}$$

$$y_{\max} = \frac{a_{cp}\cdot t^2}{2} = \frac{2Fy_{\max}}{\eta l^2}\cdot\frac{t_o^2}{2}$$

$$t_o = \sqrt{\frac{\eta}{F}}\cdot l,$$

здесь F – сила натяжения; l - длина; $\eta = \dfrac{m}{l}$ – линейная плотность материала струны; Δt – характерное время возвращения струны в равновесное положение.

Шаг пятый. Расчет характерной частоты «пения» струны. Вспомним, что это возмущения давления и плотности воздуха. При движении струны такие возмущения должны повторяться с периодичностью Δt, причем они будут максимальными, когда струна будет проходить положение равновесия, и ее скорость будет максимальной. Остается теперь связать период возмущений давления воздуха с характерной частотой звуковых волн:

$$\nu = \frac{1}{t_o} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{F}{\eta}}\,.$$

Шаг шестой. Анализ полученного результата.

Формула для характерной частоты звучания струны указывает на три принципиальные зависимости:

-частота зависит от силы натяжения как $F^{1/2}$,

- частота зависит от линейной плотности как $\eta^{1/2}$;

- частота обратно пропорциональна длине струны.

Все эти зависимости используются в струнных инструментах для того, чтобы их игра была богаче и выразительнее.

Задача 3

Оценить температуру, до которой может, разогреется протозвезда при сжатии. Начальный радиус протозвезды R_1 , конечный-R_2 . Масса звезды M однородно распределена по шаровому объему. Полученный результат применить для оценки температуры внутри Солнца.

Первый шаг. Выясним, почему при сжатии протозвезд (больших по размерам и массе образованиям космической пыли) происходит разогрев вещества. Для этого вспомним, что температура – это мера теплового или хаотического движения атомов в газообразной среде. В частности, тепловая кинетическая энергия частиц идеального газа равна:

$$E_{кин} = \frac{mV^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

здесь m и V-масса и средняя тепловая скорость движения частиц, k- постоянная Больцмана, T-температура в градусах Кельвина. Из приведенной формулы следует, что температура идеального газа тем выше, чем больше по величине скорость теплового движения частиц. Так как при сжатии протозвезды температура вещества повышается, существует механизм увеличения кинетической энергии теплового движения частиц. Этот механизм должен быть связан с действием сил гравитации, работа которых может изменить кинетическую энергию частиц. Эта сила стремится стянуть вещество протозвезды к некому центру, который можно условно назвать ядром будущей звезды. При сжатии вещества протозвезды гравитационные силы совершают положительную работу, которая и переходит в конечном итоге в кинетическую энергию теплового движения частиц. В чем-то процесс увеличения кинетической энергии теплового движения частиц протозвезды похож на возрастание энергии свободно падающего на землю тела, хотя сам процесс перехода гравитационной энергии частиц в их кинетическую энергию значительно сложнее. Также значительно сложнее сама физика сжимающихся протозвезд, в которых процесс сжатия развивается при конкуренции сил гравитации и теплового давления, порождаемого все тем же тепловым движением частиц.

Шаг второй. Оценим работу, которую совершают силы гравитации сжатии протозвезды. Для этого представим шарообразную звезду как объект состоящий из двух половин –полушаров равной массы *M/2,* которые находятся на расстоянии *R/2* друг от друга. Выбор расстояния в половину радиуса протозвезды обусловлен тем, что основная масса полушаров находится поближе к большому диаметру полушаров, нежели к их периферии. Для оценки потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух полусфер воспользуемся известной формулой для потенциальной энергии притяжения двух точечных масс, находящихся на расстоянии друг от друга. В результате получим приближенное соотношение:

$$\Pi \cong -\frac{2G}{R}\cdot\frac{M}{2}\cdot\frac{M}{2} = -G\frac{M^2}{2R}.$$

Отметим, что полученное нами выражение очень близко по величине к точному выражению собственной потенциальной гравитационной энергии однородного шара, равной:

$$\Pi = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}.$$

Найдем работу, которую совершает гравитация при сжатии протозвезды. Для этого воспользуемся связью между работой и потенциальной энергией:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2,$$

здесь Π_1 и Π_2 –потенциальная энергия в начальном и конечном состоянии системы. Применительно к сжатию протозвезды:

$$A = -G\frac{M^2}{2R_1} + G\frac{M^2}{2R_2} = G\frac{M^2}{2R_1R_2}\,(R_2 - R_1).$$

Шаг третий. Свяжем теперь работу сил гравитации с применением кинетической энергии вещества протозвезды. Как известно, приращение кинетической энергии равно работе $\Delta T = A$, отсюда следует, что:

$$\Delta T \cong G\frac{M^2}{2R_1R_2}\,(R_2 - R_1).$$

Насколько это выражение верно - предлагаем разобраться самостоятельно, подсказкой будет теорема о вириале, о которой можно прочесть в книге Ч. Кителя, У. Найта и М. Рудермана «Берклиевский курс физики. Механика».

Предположим далее, что все изменения кинетической энергии вещества протозвезды перешло в энергию теплового движения частиц.

Полная тепловая энергия вещества протозвезды равна:

$$E_{теп} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}RT,$$

здесь N - полное число частиц, μ - молярная масса вещества протозвезды, R-универсальная газовая постоянная, T-температура.

Изменение тепловой энергии в свою очередь равно изменению кинетической энергии вещества протозвезды:

$$\Delta E_{тепл} = \Delta T \text{ или } \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}R\Delta T \cong \frac{GM^2}{2R_1R_2}(R_2 - R_1).$$

В итоге:

$$\Delta T \cong \frac{GM(R_2 - R_1)\mu}{3R_1R_2R}.$$

Шаг четвертый. Оценим температуру внутри ближайшей звезды – Солнца, считая, что начальный радиус протоСолнца была много больше настоящего значения, а масса Солнца не изменилась сильно за время своего существования.

Так как $R_2 >> R_1$, то

$$\Delta T \cong \frac{6M\mu}{3RR_o},$$

здесь R_o – радиус Солнца. Молярная масса $\mu = 2$ с учетом того, что Солнце на 60% состоит из водорода и на 40% из гелия. Масса и радиус Солнца равны соответственно:

$$M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \ R_o = 7 \cdot 10^8 \, м..$$

В результате получаем:

$$T = \frac{(7 \cdot 10^{-11}) \cdot (2 \cdot 10^{30}) \cdot 2}{3 \cdot 7 \cdot 10^8 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3} \cong 1{,}6 \cdot 10^7 K^o.$$

Полученное значения температуры Солнца близко к тому, что получается при более точных расчетах и определяется на основе измерения потока нейтрино от Солнца. Это говорит об обоснованности наших упрощенных оценочных расчетов и правильности выбранных модельных представлений.

Задачи-оценки для самостоятельного решения

Задача 1. Оценить силу натяжения тросов парашюта в момент раскрытия и скорость опускания парашютиста после раскрытия.

Задача 2. Оценить глубину ямы на поверхности воды под вертолетом, зависшим над озером на небольшой высоте.

Задача 3. Оценить наименьшую скорость, с которой можно ехать на водных лыжах.

Задача 4. Оценить давление в центре Земли.

Задача 5. Оценить силу натяжения цепи велосипеда при езде в гору.

Задача 6. Оценить различие в расстоянии от уровня мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе, вызванное вращением Земли.

Задача 7. Оценить давление, создаваемое острием швейной иголки, поставленной вертикально на письменный стол, покрытый стеклом, если стукнуть по ней молотком.

Задача 8. Оценить, на какой высоте лопнет воздушный шарик, наполненный гелием.

Задача 9. Оценить время столкновения двух воздушных шаров.

Задача 10. Оценить время колебаний дождевой капли.